SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Međimurec

SLIČNOST MATRICA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Dijana Ilišević

Zagreb, studeni 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala mojoj mentorici, prof. dr. sc. Dijani Ilišević, na pomoći i ukazanom povjerenju tijekom pisanja ovog diplomskog rada.
Hvala mojoj obitelji što je bila uz mene sve godine mog obrazovanja.
I na kraju, hvala mojim roditeljima što su mi omogućili studiranje na ovom fakultetu, najviše mojoj majci na bezuvjetnoj podršci i ljubavi koju mi je pružila tijekom mog visokoškolskog obrazovanja.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Linearni operatori i matrice **2**
1.1 Definicija i primjeri linearnih operatora 2
1.2 Osnovna svojstva 3
1.3 Matrični prikaz 4
1.4 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori 8

2 Sličnost matrica **10**
2.1 Definicija i osnovna svojstva 10
2.2 Svojstvena vrijednost, svojstveni vektor i svojstveni polinom 15
2.3 Invarijantni faktori. Fundamentalni teorem sličnosti 20
2.4 Pridružena matrica. Racionalna kanonska forma 33
2.5 Minimalni polinom. Hamilton-Cayleyev teorem 37
2.6 Elementarni djelitelji. Jordanova kanonska forma 41

Bibliografija **46**

Uvod

Cilj ovog diplomskog rada je definirati sličnost matrica, navesti nužne i dovoljne uvjete za njihovu sličnost te promatrati sličnost kao transformaciju matrice u što jednostavniji oblik misleći pritom na dijagonalnu matricu, a kad to nije moguće, i na trokutastu matricu.

Budući da u ovom radu promatramo matrice, prvo poglavlje posvećeno je linearnim operatorima i njihovim matričnim prikazima. Nakon definicije navode se primjeri linearnih operatora, definira matrični prikaz linearnog operatora te se dokazuju neki rezultati važni za razumijevanje drugog poglavlja ovog rada.

U drugom poglavlju bavit ćemo se sličnim matricama. Za početak ćemo definirati slične matrice, uvesti novu terminologiju, dokazati osnovna svojstva sličnih matrica i na temelju tih svojstava dati odgovarajuće primjere, odnosno kontraprimjere. Zatim ćemo navesti i dokazati mnoge rezultate o sličnim matricama, od kojih su najzanimljiviji: matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ je slična dijagonalnoj matrici ako svojstveni polinom matrice A ima n različitih nultočaka u polju $\mathbb{F}$, fundamentalni teorem sličnosti, teorem o racionalnoj kanonskoj formi i teorem o Jordanovoj kanonskoj formi.

Poglavlje 1

Linearni operatori i matrice

1.1 Definicija i primjeri linearnih operatora

Definicija 1.1.1. *Preslikavanje $T\colon V \to W$, gdje su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$, nazivamo linearnim operatorom ako vrijede svojstva:*

(1) $T(x+y) = Tx + Ty$ *(aditivnost),*

(2) $T(\alpha x) = \alpha Tx$ *(homogenost),*

za sve $x, y \in V$ i $\alpha \in \mathbb{F}$.

Definicija 1.1.2. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Skup svih linearnih operatora s prostora V u prostor W označavamo sa $\mathcal{L}(V, W)$. U slučaju kada je $W = V$, skup svih linearnih operatora s prostora V u prostor V označavamo sa $\mathcal{L}(V)$.*

Definicija 1.1.3. *Neka je $T\colon V \to W$ linearan operator. Potprostori*

$$\operatorname{Ker} T = T^{-1}(\{\theta_W\}) = \{x \in V : Tx = \theta_W\} \leq V \quad i \quad \operatorname{Im} T = T(V) = \{Tv : v \in V\} \leq W$$

zovu se, redom, jezgra i slika operatora T. Kad su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori, brojevi koje definiramo kao

$$\mathrm{d}\,(T) = \dim(\operatorname{Ker} T) \quad i \quad \mathrm{r}\,(T) = \dim(\operatorname{Im} T)$$

zovu se, redom, defekt i rang operatora T.

Definicija 1.1.4. *Linearan operator $T\colon V \to W$ naziva se:*

(a) monomorfizam ako je T injekcija;

(b) *epimorfizam ako je T surjekcija;*

(c) *izomorfizam ako je T bijekcija.*

Primjer 1.1.5. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $\lambda \in \mathbb{F}$. Neka je $A\colon V \to V$ preslikavanje definirano sa*

$$A(x) = \lambda x.$$

S obzirom da vrijede svojstva množenja skalarom u vektorskom prostoru V i komutativnost množenja u polju F, za sve $x, y \in V$ i $\alpha \in \mathbb{F}$ imamo da vrijedi

$$A(x + y) = \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y = A(x) + A(y),$$
$$A(\alpha x) = \lambda(\alpha x) = (\lambda\alpha)x = (\alpha\lambda)x = \alpha(\lambda x) = \alpha A(x).$$

Dakle, A je linearni operator i nazivamo ga homotetijom s koeficijentom λ. Za $\lambda = 1$, pripadni linearni operator nazivamo jediničnim linearnim operatorom.

Primjer 1.1.6. *Preslikavanje* $\mathrm{tr}\colon M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ *definirano sa*

$$\mathrm{tr}\,(X) = \sum_{i=1}^{n} x_{ii}, \quad \textit{gdje je} \;\; X = \left(x_{ij}\right) \in M_n(\mathbb{F}),$$

je linearni operator, zovemo ga trag kvadratne matrice. Zaista, za sve $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ i $\alpha \in \mathbb{F}$, gdje su $A = \left(a_{ij}\right)$ i $B = \left(b_{ij}\right)$ dobivamo da vrijede svojstva aditivnosti i homogenosti:

$$\mathrm{tr}\,(A + B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{tr}\,(A) + \mathrm{tr}\,(B),$$
$$\mathrm{tr}\,(\alpha A) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda\,\mathrm{tr}\,(A).$$

1.2 Osnovna svojstva

Propozicija 1.2.1. *Linearan operator $T\colon V \to W$ je injekcija ako i samo ako je* $\mathrm{Ker}\, T = \{\theta_V\}$, *odnosno ako i samo ako je* $\mathrm{d}\,(T) = 0$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Kako je $T(\theta_V + \theta_V) = T(\theta_V) + T(\theta_V)$, to je $T(\theta_V) = \theta_W$, iz čega slijedi da je $\theta_V \in \mathrm{Ker}\, T$. Ako je T injekcija i $x \neq \theta_V$, onda je $Tx \neq \theta_W$. Dakle, svaki nenul vektor iz V se preslikava u neki nenul vektor iz W pa je $\mathrm{Ker}\, T = \{\theta_V\}$, odnosno $\mathrm{d}\,(T) = 0$.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je $\mathrm{Ker}\, T = \{\theta_V\}$ i neka je $Tx = Ty$. Tada je $Tx - Ty = \theta_W$, iz čega zbog linearnosti slijedi da je $T(x - y) = \theta_W$. Po definiciji jezgre, sada je $x - y \in \mathrm{Ker}\, T$. S obzirom da je po pretpostavci $\mathrm{Ker}\, T = \{\theta_V\}$, slijedi da je $x - y = \theta_V$, tj. da je $x = y$. $\square$

Teorem 1.2.2. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori istih dimenzija i neka je $T\colon V \to W$ linearan operator. Sljedeći uvjeti su međusobno ekvivalentni:*

(a) T je monomorfizam;

(b) T je epimorfizam;

(c) T je izomorfizam.

Dokaz. S obzirom da je (c) $\Leftrightarrow$ (a) i (b), trebamo dokazati samo da su tvrdnje (a) i (b) ekvivalentne.
(a) $\Rightarrow$ (b): $\mathrm{d}(T) = 0$ i $\mathrm{r}(T) + \mathrm{d}(T) = \dim V = \dim W$ povlači $\mathrm{r}(T) = \dim W$; dakle, $\operatorname{Im} T = W$ pa je T surjekcija.
(b) $\Rightarrow$ (c): $\operatorname{Im} T = W$, tj. $\mathrm{r}(T) = \dim W = \dim V$ povlači $\mathrm{d}(T) = \dim V - \mathrm{r}(T) = 0$ pa je, prema propoziciji 1.2.1, T i injekcija. □

1.3 Matrični prikaz

Propozicija 1.3.1. *Neka je $(e) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza vektorskog prostora V i neka je $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ bilo koji skup vektora iz vektorskog prostora W. Tada postoji jedinstveni linearni operator $T\colon V \to W$ koji zadovoljava svojstvo $T(e_i) = b_i$, za $1 = 1, 2, \ldots, n$.*

Dokaz. Želimo li da je traženo preslikavanje $T\colon V \to W$ linearni operator koji vektore baze (e) vektorskog prostora V preslikava redom u zadane vektore vektorskog prostora W, lako zaključujemo kako bi linearni operator T trebao djelovati na svaki vektor iz V.

Neka je x bilo koji vektor iz V. Njegov prikaz u bazi (e) je jedinstven i glasi $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$. Tada za linearni operator T vrijedi

$$T(x) = T(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 T(e_1) + \cdots + \alpha_n T(e_n) = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n.$$

Ovom je jednakošću na jedinstveni način zadano jedno preslikavanje između vektorskih prostora V i W. Preostaje nam provjeriti je li ono linearni operator.

Neka su $x, y \in V$ i neka su njihovi prikazi u bazi (e) upravo

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \quad \text{i} \quad y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i.$$

Sada prema definiciji preslikavanja T imamo da je

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \quad \text{i} \quad T(y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i.$$

Provjerimo vrijede li svojstva aditivnosti i homogenosti kod preslikavanja T. Imamo sljedeće:

$$T(x+y) = T\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)b_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i b_i = T(x)+T(y),$$

$$T(\lambda x) = T\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda\alpha_i)e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda\alpha_i)b_i = \lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i = \lambda T(x) \quad (\text{za } \lambda\in\mathbb{F}),$$

odnosno dobivamo da vrijede navedena svojstva. Dakle, T je linearni operator. □

Prethodna propozicija pokazuje nam da je linearni operator sa V u W jednoznačno zadan svojim djelovanjem na bilo kojoj bazi vektorskog prostora V. Stoga, uvedimo matrični prikaz linearnog operatora koji će nam biti potreban za račune koji obuhvaćaju djelovanje linearnog operatora, povezujući pritom linearne operatore, matrice i sustave linearnih jednadžbi.

Definicija 1.3.2. *Neka je $T\colon V\to W$ linearni operator, $(e)=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ baza vektorskog prostora V (štoviše, i uređeni skup u kojem je poredak bitan) i $(f)=\{f_1,f_2,\dots,f_m\}$ baza vektorskog prostora W. Linearan operator T je jedinstveno određen svojim djelovanjem na bazi (e), tj. određen je vektorima $T(e_1),\dots,T(e_n)$ iz W. Prikažimo svaki od tih vektora u bazi (f). Ti prikazi su jedinstveni i glase:*

$$\begin{aligned} T(e_1) &= \alpha_{11}f_1+\alpha_{21}f_2+\cdots+\alpha_{m1}f_m,\\ T(e_2) &= \alpha_{12}f_1+\alpha_{22}f_2+\cdots+\alpha_{m2}f_m,\\ &\vdots\\ T(e_n) &= \alpha_{1n}f_1+\alpha_{2n}f_2+\cdots+\alpha_{mn}f_m. \end{aligned}$$

Primijetimo, oznake koeficijenata su u prethodnim prikazima prilagođene zapisu matrice tipa $m\times n$ te linearnom operatoru T možemo jednoznačno pridružiti matricu

$$[T]_{(f,e)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matricu $[T]_{(f,e)}$ nazivamo matričnim prikazom operatora T u paru baza (e) i (f). Ona bitno ovisi o izboru navedenih baza. Stoga, njihove nazive navodimo u oznaci matričnog zapisa linearnog operatora T upravo u navedenom redoslijedu.

Uočimo, preslikavanje koje linearnom operatoru T pridružuje njegov matrični prikaz A je bijekcija sa $\mathcal{L}(V,W)$ u $M_{m,n}(\mathbb{F})$.

Definicija 1.3.3. *Svaki vektor $x \in V$ možemo na jedinstven način prikazati pomoću vektora baze (e) vektorskog prostora V. Taj prikaz glasi $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, gdje su $x_1, \dots, x_n$ jedinstveni skalari. Stoga, vektoru x možemo pridružiti stupčanu matricu*

$$[x]_{(e)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{F}).$$

Matricu $[x]_{(e)}$ zovemo matričnim zapisom vektora x u bazi (e).

Uočimo da je preslikavanje koje vektoru x pridružuje njegov matrični zapis u bazi (e) bijekcija sa V u $M_{n,1}(\mathbb{F})$. Ovo preslikavanje nazivamo još i koordinatizacijom prostora V.

Sljedećom propozicijom ćemo pokazati da se djelovanje linearnog operatora na vektor može realizirati množenjem njihovih odgovarajućih matričnih zapisa.

Propozicija 1.3.4. *Neka je $T : V \to W$ linearni operator, $(e) = \{e_1, \dots, e_n\}$ baza vektorskog prostora V i $(f) = \{f_1, \dots, f_m\}$ baza vektorskog prostora W. Tada vrijedi*

$$[T(x)]_{(f)} = [T]_{(f,e)} \cdot [x]_{(e)}.$$

Dokaz. Neka je $[T]_{(f,e)} = \left(\alpha_{ij}\right) \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ matrični zapis linearnog operatora T u paru baza (e) i (f) i $[x]_{(e)} = \left(x_i\right) \in M_{n,1}(\mathbb{F})$ matrični zapis vektora x u bazi (e). Vrijedi da je

$$T(x) = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j\right) f_i.$$

Iz toga slijedi da je matrični zapis vektora $T(x)$ u bazi (f) jednak

$$[T(x)]_{(f)} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [T]_{(f,e)} \cdot [x]_{(e)},$$

što je i trebalo dokazati. □

Teorem 1.3.5. *Neka je $T \in \mathcal{L}(V)$. Operator T je izomorfizam ako i samo ako je* $\det T \neq 0$.

Dokaz. Prema teoremu 1.2.2 operator T je izomorfizam ako i samo ako je epimorfizam, odnosno ako i samo ako je $\mathrm{r}(T) = n$. Iz toga slijedi da je $\det T \neq 0$, odnosno da je matrični zapis operatora T regularna matrica. □

Teorem 1.3.6. *Neka su $\{x_1, \ldots, x_n\}$ i $\{y_1, \ldots, y_n\}$ dvije baze n-dimenzionalnog vektorskog prostora. Izrazimo vektore obje baze pomoću vektora druge baze, tj.*

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i, \qquad x_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} y_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Neka su $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ matrice pripadnih koeficijenata. Tada je $AB = BA = I$ (jedinična kvadratna matrica reda n).

Dokaz. Ako je V spomenuti vektorski prostor, neka je $J = I_V$ jedinični operator na V (kako bismo ga razlikovali od jedinične matrice I). Jednadžba

$$Jy_j = y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

pokazuje da je A matrični prikaz operatora J u paru baza $\{y_1, \ldots, y_n\}$ i $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Slično, B je matrični prikaz operatora J u paru baza $\{x_1, \ldots, x_n\}$ i $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Situaciju nam detaljnije prikazuje sljedeći dijagram:

$$\underset{(x_i)}{V} \overset{\mathrm{J}}{\underset{\mathrm{B}}{\longrightarrow}} \underset{(y_i)}{V} \overset{\mathrm{J}}{\underset{\mathrm{A}}{\longrightarrow}} \underset{(x_i)}{V}.$$

Sada je AB matrični prikaz operatora $JJ = J$ u bazi $\{x_1, \ldots, x_n\}$ i vrijedi $AB = I$. Slično se dokaže da vrijedi $BA = I$. □

Definicija 1.3.7. *Za kvadratnu matricu A reda n nad poljem $\mathbb{F}$ kažemo da je invertibilna ako postoji kvadratna matrica B reda n nad poljem $\mathbb{F}$ takva da je $AB = BA = I$. Matricu B nazivamo inverznom matricom matrice A, pišemo $B = A^{-1}$ te vrijedi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.*

Napomena 1.3.8. *Ako takva matrica postoji, ona je jedinstvena: ako je C matrica za koju je $AC = I$ tada je $C = IC = (BA)C = B(AC) = BI = B$.*

Teorem 1.3.9. *Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor i $T : V \to V$ linearan operator. Neka su $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ i $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ dvije baze vektorskog prostora V, neka je A matrični prikaz operatora T u bazi x, B matrični prikaz operatora T u bazi y i neka je C matrica prijelaza iz baze y u bazu x. Tada je $B = C^{-1}AC$.*

Dokaz. Neka je $C = (c_{ij})$ matrični zapis jediničnog operatora $J = I_V$ u paru baza y i x. Pretpostavimo da je

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i\,, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Uzmimo u obzir dijagram

$$\underset{(y_i)}{V} \xrightarrow[\text{C}]{\text{J}} \underset{(x_i)}{V} \xrightarrow[\text{A}]{\text{T}} \underset{(x_i)}{V},$$

gdje su C i A matrični prikazi operatora J i T u naznačenim bazama. Sada je AC matrični prikaz operatora $TJ = T$ u paru baza y i x. S druge strane, dijagram

$$\underset{(y_i)}{V} \xrightarrow[\text{B}]{\text{T}} \underset{(y_i)}{V} \xrightarrow[\text{C}]{\text{J}} \underset{(x_i)}{V}$$

nam pokazuje da je CB matrični prikaz operatora $JT = T$ u paru baza y i x. Zaključujemo, $CB = AC$. Kako je prema teoremu 1.3.6 i definiciji 1.3.7 matrica C invertibilna, dobivamo da je $B = C^{-1}AC$. □

1.4 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Definicija 1.4.1. *Neka je $T \in \mathcal{L}(V)$. Ako je $Tx = cx$ za $x \neq \theta$ i $c \in \mathbb{F}$, tada c zovemo svojstvenom vrijednošću operatora T i x svojstvenim vektorom operatora T.*

Napomena 1.4.2. *Svojstveni vektor operatora T je nenul vektor x takav da je Tx upravo skalar pomnožen sa x i svojstvena vrijednost operatora T je skalar c takav da je $Tx = cx$ za neki nenul vektor x, tj.* $\operatorname{Ker}(T - cI) \neq \{\theta\}$.

S obzirom da je V konačnodimenzionalni prostor, možemo izreći sljedeće korisne karakterizacije karakterističnih vrijednosti.

Teorem 1.4.3. *Ako su $T \in \mathcal{L}(V)$ i $c \in \mathbb{F}$, tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(a) c je svojstvena vrijednost operatora T;

(b) $T - cI$ nije bijektivan;

(c) $\det(T - cI) = 0$.

Dokaz. Skalar c je svojstvena vrijednost operatora T ako i samo ako je $\operatorname{Ker}(T - cI) \neq \{\theta\}$. Sada, prema propoziciji 1.2.1, $T - cI$ nije injekcija. Uz konačnodimenzionalnost prostora V, za $S \in \mathcal{L}(V)$ su injektivnost, surjektivnost i bijektivnost ekvivalentni uvjeti prema teoremu 1.2.2. Primijenimo li navedeno na $T - cI$, dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(T - cI) \neq \{\theta\} &\overset{\text{prop 1.2.1}}{\Longleftrightarrow} T - cI \text{ nije injekcija;}\\ &\overset{\text{tm 1.2.2}}{\Longleftrightarrow} T - cI \text{ nije bijekcija;}\\ &\overset{\text{tm 1.3.5}}{\Longleftrightarrow} \det(T - cI) = 0,\end{aligned}$$

čime smo dokazali tvrdnju. □

Teorem 1.4.4. *Neka je $T \in \mathcal{L}(V)$ i neka su $x_1, x_2, \ldots, x_r$ svojstveni vektori operatora T, tj. $Tx_i = c_i x_i$ za $i = 1, 2, \ldots, r$. Ako su svojstvene vrijednosti $c_1, c_2, \ldots, c_r$ različite, tada su $x_1, x_2, \ldots, x_r$ linearno neovisni.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $m \leq r$ takav da je

$$a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m = \theta$$

s koeficijentima $a_1, \ldots, a_m$ koji nisu svi jednaki nuli. Uzmimo najmanji mogući indeks m s tim svojstvom. Primijetimo da je $m \geq 2$ (za $a_1 x_1 = \theta$, $a_1 \neq 0$, dobivamo $x_1 = \theta$, što je u kontradikciji s pretpostavkom) i $a_m \neq 0$ (u suprotnom, jednakost $a_1 x_1 + \ldots, a_{m-1} x_{m-1} = \theta$ bi bila u suprotnosti s minimalnošću indeksa m). Sada je:

$$x_m = b_1 x_1 + \cdots + b_{m-1} x_{m-1}, \tag{1.1}$$

gdje je $b_i = -a_i / a_m$. Odatle je

$$Tx_m = b_1 Tx_1 + \cdots + b_{m-1} Tx_{m-1},$$

tj.

$$c_m x_m = b_1 c_1 x_1 + \cdots + b_{m-1} c_{m-1} x_{m-1}.$$

Supstituiramo li (1.1) umjesto x_m u prethodnoj jednakosti, dobivamo:

$$c_m(b_1 x_1 + \cdots + b_{m-1} x_{m-1}) = b_1 c_1 x_1 + \cdots + b_{m-1} c_{m-1} x_{m-1},$$

tj.

$$b_1(c_m - c_1) x_1 + \cdots + b_{m-1}(c_m - c_{m-1}) x_{m-1} = \theta.$$

Zbog minimalnosti indeksa m, svi koeficijenti u prethodnoj jednakosti su jednaki nuli, tj.

$$b_i(c_m - c_i) = 0 \text{ za } i = 1, \ldots, m-1.$$

Kako su svi $c_1, c_2, \ldots, c_r$ međusobno različiti, odatle slijedi da je $b_i = 0$ za $i = 1, \ldots, m-1$ i tada iz jednakosti (1.1) dobivamo kontradikciju $x_m = \theta$. □

Poglavlje 2

Sličnost matrica

U ovom poglavlju promatrat ćemo sličnost kao sredstvo za transformaciju matrica u što jednostavniji oblik.

2.1 Definicija i osnovna svojstva

Definicija 2.1.1. *Za matrice $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ kažemo da su slične (nad poljem $\mathbb{F}$) ako postoji invertibilna matrica $P \in M_n(\mathbb{F})$ takva da vrijedi $B = P^{-1}AP$. Pišemo $A \sim B$.*

Napomena 2.1.2. *Za invertibilnu matricu P iz definicije 2.1.1 kažemo da obavlja sprezanje (ili konjugiranje) matrica A i B. Uočimo, matrica B nastaje iz matrice A tako da se A množi s desne strane matricom P, a s lijeve strane njenim inverzom. Tu transformaciju simbolično nazivamo „transformacijom sličnosti".*

Primjer 2.1.3. *Neka su*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \quad i \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kako je $\det P \neq 0$, *to je matrica P invertibilna i njezin je inverz*

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sada je matrica

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -31 \\ 7 & 19 \end{pmatrix}$$

slična matrici A. Na ovaj način, različitim izborom invertibilne matrice P, možemo naći i druge matrice koje su slične matrici A.

Primjer 2.1.4. *Provjerimo jesu li matrice*

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -14 & -3 \end{pmatrix}$$

slične nad $\mathbb{Q}$*. Pretpostavimo da je*

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{Q}).$$

Jednakost $D = P^{-1}CP$ *ekvivalentna je jednakosti* $PD = CP$ *iz čega dobivamo da je*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -14 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

odnosno da je

$$\begin{pmatrix} 5a - 14b & a - 3b \\ 5c - 14d & c - 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ a & b \end{pmatrix},$$

što je ekvivalentno sljedećem sustavu jednadžbi:

$$\begin{aligned} 5a - 14b &= 2a + c, \\ a - 3b &= 2b + d, \\ 5c - 14d &= a, \\ c - 3d &= b. \end{aligned}$$

Nakon sređivanja dobivamo sljedeći sustav:

$$\begin{aligned} 3a - 14b - c &= 0, \\ a - 5b - d &= 0, \\ a - 5c + 14d &= 0, \\ b - c + 3d &= 0. \end{aligned}$$

Odredimo nepoznanice a, b, c *i* d*. Iz posljednjih dviju jednadžbi dobivamo da su* $a = 5c - 14d$ *i* $b = c - 3d$*. Supstituiramo li* c *i* d *u prve dvije jednadžbe dobivamo istinite jednakosti* $0 = 0$*, iz čega zaključujemo da su nepoznanice* c *i* d *proizvoljni elementi iz* $\mathbb{Q}$*. Na primjer, uzmimo je* $c = \frac{3}{2}$ *i* $d = \frac{1}{3}$*. Tada su* $a = \frac{1}{2}$ *i* $b = 0$*. Zaista, imamo da vrijedi*

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -14 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dakle, matrice C *i* D *su slične nad* $\mathbb{Q}$*.*

Teorem 2.1.5. *Sličnost je relacija ekvivalencije na skupu $M_n(\mathbb{F})$ svih kvadratnih matrica n-tog reda.*

Dokaz. Kako je $A = I^{-1}AI$, to je $A \sim A$. Ako je $P^{-1}AP = B$, onda je $(P^{-1})^{-1}BP^{-1} = A$, pa $A \sim B$ povlači $B \sim A$. Ako je $P^{-1}AP = B$ i $Q^{-1}BQ = C$, onda je $(PQ)^{-1}A(PQ) = C$, što znači da $A \sim B$ i $B \sim C$ povlače $A \sim C$. □

Teorem 2.1.6. *Matrice A i B iz $M_n(\mathbb{F})$ su slične ako i samo ako postoji linearan operator $T\colon V \to V$, gdje je V n-dimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, takav da su matrice A i B njegovi matrični prikazi u dvjema različitim bazama vektorskog prostora V.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da su A i B slične matrice reda n nad poljem $\mathbb{F}$, tj. pretpostavimo da postoji invertibilna matrica $C = (c_{ij})$ reda n takva da je $C^{-1}AC = B$. Neka je $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ baza prostora V te neka je T linearni operator s matričnim prikazom A u bazi x i S bijektivni linearni operator s matričnim prikazom C u istoj bazi. Neka je $y_j = Sx_j$ za svaki j, tj.

$$y_j = Sx_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

S obzirom da je S invertibilan, tada je $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ baza prostora V. Prema teoremu 1.3.9 matrični prikaz operatora T u bazi y je upravo $C^{-1}AC$, tj. matrica B.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je $T\colon V \to V$ linearan operator takav da je A njegov matrični prikaz u bazi x i B njegov matrični prikaz u bazi y, te neka je C matrica prijelaza iz baze y u bazu x. Prema teoremu 1.3.9, vrijedi da je $B = C^{-1}AC$, tj. matrice A i B su slične. □

Propozicija 2.1.7. *Za sve $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi* $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Dokaz. Neka je $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ i $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$. Sada je $AB = (c_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ za $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$ i $\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$. S druge strane, $BA = (d_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$ za $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$ i $\operatorname{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{ik}$. Kod posljednje dvostruke sume možemo promijeniti indekse po kojima sumiramo (i i k), te je rezultat neovisan o poretku sumiranja elemenata. Sada je $\operatorname{tr}(BA) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \operatorname{tr}(AB)$. □

Teorem 2.1.8. *Ako su A i B slične matrice, tada one imaju jednaku determinantu i jednaki trag.*

Dokaz. Neka su A i B slične matrice te C invertibilna matrica za koju vrijedi $B = C^{-1}AC$. Koristeći Binet-Cauchyjev teorem imamo:

$$\begin{aligned}\det B &= \det(C^{-1}AC) = \det C^{-1} \cdot \det A \cdot \det C = \det C^{-1} \cdot \det C \cdot \det A \\ &= \det(C^{-1}C)\det A = \det I \cdot \det A = \det(IA) = \det A.\end{aligned}$$

Time smo dokazali da slične matrice imaju jednake determinante. Prema propoziciji 2.1.7,

$$\operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(C^{-1}AC) = \operatorname{tr}(ACC^{-1}) = \operatorname{tr}(AI) = \operatorname{tr} A.$$

Dakle, slične matrice A i B imaju jednaki trag. □

Napomena 2.1.9. *Obrat teorema 2.1.8 ne vrijedi, što možemo potvrditi sljedećim primjerom. Neka su A i B kvadratne matrice drugog reda:*

$$A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sada je $\det A = \det B = 1$ *i* $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 2$*, no za svaku invertibilnu matricu C reda* 2 *dobivamo:* $C^{-1}AC = C^{-1}IC = C^{-1}C = I \neq B$.

Primjer 2.1.10. *Pitamo se jesu li matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

slične. Uočimo da je $\det A = \det B = -2$*, no* $\operatorname{tr} A = 1 \neq 4 = \operatorname{tr} B$*. Iz toga zaključujemo da matrice A i B ne mogu biti slične.*

Uočimo kako je sličnost matrica posebna vrsta ekvivalentnosti matrica, stoga navodimo i sljedeći rezultat o rangovima sličnih matrica.

Teorem 2.1.11. *Ako su A i B slične matrice, tada one imaju jednake rangove.*

Dokaz. Dokažimo najprije da za invertibilnu matricu A vrijedi da je $\operatorname{r}(AB) = \operatorname{r}(B)$. Neka je $x \in \operatorname{Ker} B$, tada je $Bx = \theta$. Nadalje, $(AB)x = A(Bx) = A\theta = \theta$. Stoga je $x \in \operatorname{Ker}(AB)$, iz čega slijedi da je $\operatorname{Ker} B \subseteq \operatorname{Ker}(AB)$. Obrnuto, za neki $x \in \operatorname{Ker}(AB)$, imamo da je $(AB)x = \theta$, odnosno $A(Bx) = \theta$. Stoga je $Bx = A^{-1}\theta = \theta$, odnosno $x \in \operatorname{Ker} B$. Iz svega navedenog dobivamo da je $\operatorname{Ker}(AB) = \operatorname{Ker} B$, odnosno da je $\operatorname{d}(AB) = \operatorname{d}(B)$. Prema teoremu o rangu i defektu sada dobivamo da je $\operatorname{r}(AB) = \operatorname{r}(B)$, ako je A invertibilna matrica.

Dokažimo još da je $\operatorname{r}(AB) = \operatorname{r}(B)$ ako je matrica B invertibilna. Dobivamo da je $\operatorname{r}(AB) = \operatorname{r}((AB)^\tau) = \operatorname{r}(B^\tau A^\tau) = \operatorname{r}(A^\tau) = \operatorname{r}(A)$, jer je B^τ invertibilna matrica.

Prema pretpostavci teorema imamo da su matrice A i B slične, što znači da postoji invertibilna matrica P takva da je $P^{-1}AP = B$, odnosno da je $AP = PB$. Primjenom prethodnih tvrdnji na posljednju jednakost dobivamo da je $\operatorname{r}(A) = \operatorname{r}(B)$. □

Napomena 2.1.12. *Obrat teorema 2.1.11 ne vrijedi. Uzmimo za primjer matrice*

$$A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Za navedene matrice dobivamo da je $\operatorname{r}(A) = \operatorname{r}(B) = 2$*, no za svaku invertibilnu matricu C dobivamo* $C^{-1}AC = C^{-1}IC = C^{-1}C = I$*. Zaključujemo, matrice A i B nisu slične.*

Teorem 2.1.13. *Ako vrijedi $C^{-1}AC = A$ za sve invertibilne matrice C, tada je matrica A oblika $A = aI$ za pogodni skalar a.*

Dokaz. Teorem je trivijalan za $n = 1$; pretpostavimo da je $n \geq 2$. Pretpostavimo da je A matrica reda n, V n-dimenzionalan vektorski prostor, $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ baza vektorskog prostora V i $T \in \mathcal{L}(V)$ linearan operator s matričnim prikazom A u bazi x. Trebamo dokazati da je T umnožak skalara i jedinične matrice. Prvi korak je dokazati, ako je $x \neq \theta$, da je Tx umnožak skalara i vektora x. Pretpostavimo suprotno, tj. da su x i Tx linearno neovisni. Tada ih možemo proširiti do baze $\{x, Tx, y_3, \ldots, y_n\}$. Kako bismo prilagodili oznake, možemo pisati da je $y_1 = x$, $y_2 = Tx$. S obzirom da je $Ty_1 = y_2$, tada je prvi stupac matričnog prikaza operatora T u bazi $\{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\}$ jednak

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

što je po našoj pretpostavci prvi stupac matrice A. Dakle, ako je $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ neka baza vektorskog prostora V, tada je $Tz_1 = z_2$. Bilo koja dva neovisna vektora y i z mogu se proširiti do baze, tako da je $Ty = z$ prema prethodnom argumentu; primjenjujući to na neovisne vektore x i $x + Tx$, zaključujemo $Tx = x + Tx$, za $x \neq \theta$. Prema tome, za svaki vektor $x \neq \theta$, postoji jedinstven skalar $c(x)$ takav da $Tx = c(x)x$; što je dovoljno za dokazati $c(x) = c(y)$ za sve nenul vektore x i y. Ako je y proporcionalan sa x, recimo $y = ax$ ($a \neq 0$), tada je $a(Tx) = Ty$, zbog čega je $a \cdot c(x)x = c(y)y = c(y) \cdot ax$, pa je $c(x) = c(y)$. Ako y nije proporcionalan sa x, tada su x i y neovisni i vrijedi $x + y \neq \theta$. Prema tome, $c(x + y) \cdot (x + y) = T(x + y) = Tx + Ty = c(x)x + c(y)y$, odakle je $c(x) = c(x + y) = c(y)$ nakon uspoređivanja koeficijenata uz x i y. □

Dakle, klasa ekvivalencije od A s obzirom na relaciju $\sim$ sadrži samo A ako i samo ako je A skalarna matrica. Posebice, A komutira sa svim ostalim kvadratnim marticama reda n ako i samo ako je ona jednaka umnošku skalara i jedinične matrice.

Teorem 2.1.14. *Ako je n parni broj i $A \in M_n(\mathbb{R})$ takva da vrijedi $AB = BA$ za sve invertibilne $B \in M_n(\mathbb{R})$, tada je* $\det A \geq 0$.

Dokaz. Jednakost $AB = BA$ ekvivalentna je jednakosti $B^{-1}AB = A$ za sve invertibilne $B \in M_n(\mathbb{R})$. Odatle, prema teoremu 2.1.13, matrica A je oblika $A = aI$, tj. A je dijagonalna matrica. Sada je $\det A = \det(aI) = a \cdot \cdots \cdot a = a^n \geq 0$ jer je n paran broj. □

Teorem 2.1.15. *Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Ako je jedna od matrica A ili B invertibilna, tada su matrice AB i BA slične.*

Dokaz. Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Za invertibilnu matricu A vrijedi: $A^{-1}(AB)A = (A^{-1}A)BA = I \cdot BA = BA$, tj. matrice AB i BA su slične. S druge strane, za invertibilnu matricu B vrijedi: $B^{-1}(BA)B = (B^{-1}B)AB = I \cdot AB = AB$, tj. matrice AB i BA su slične. □

Teorem 2.1.16. *Ako su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ slične matrice, tada su slične i matrice $p(A)$ i $p(B)$ za svaki polinom $p \in \mathbb{F}[t]$.*

Dokaz. Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ slične matrice i neka je $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t^1 + a_0 t^0 \in \mathbb{F}[t]$. Kako su A i B slične matrice, postoji matrica $P \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $A = P^{-1}BP$. Sada je $p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$. Odredimo čemu je jednaka n-ta potencija matrice A: $A^n = (P^{-1}BP)(P^{-1}BP)\ldots(P^{-1}BP)(P^{-1}BP) = P^{-1}B(PP^{-1})B(PP^{-1})B\ldots(PP^{-1})B(PP^{-1})BP = P^{-1}BB\ldots BP = P^{-1}B^nP$. Konačno, $p(A) = a_n(P^{-1}B^nP) + a_{n-1}(P^{-1}B^{n-1}P) + \cdots + a_1(P^{-1}BP) + a_0(P^{-1}P) = P^{-1}(a_nB^n + a_{n-1}B^{n-1} + \cdots + a_1B + a_0I)P = P^{-1}p(B)P$, tj. matrice $p(A)$ i $p(B)$ su slične. □

2.2 Svojstvena vrijednost, svojstveni vektor i svojstveni polinom

Definicija 2.2.1. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Ako $t \in \mathbb{R}$ i $x \in M_{n,1}(\mathbb{F}), x \neq \theta$ zadovoljavaju jednakost $Ax = tx$ tada t nazivamo svojstvenom vrijednošću matrice A i x svojstvenim vektorom matrice A pridruženim svojstvenoj vrijednosti t.*

Definicija 2.2.2. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Polinom $p_A(t) = \det(tI - A)$ naziva se svojstveni (karakteristični) polinom matrice A.*

Teorem 2.2.3. *Ako je $A \in M_n(\mathbb{F})$ tada je $\deg p_A = n$ i $p_A(t) = t^n - (\operatorname{tr} A)t^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$.*

Dokaz. Do slobodnog člana u polinomu $p(t)$ dolazimo uvrštavanjem $t = 0$ čime dobivamo $p_A(0) = \det(0 \cdot I - A) = \det(-A) = \det(-1 \cdot A) = (-1)^n \det A$. Primijetimo da je slobodni član svojstvenog polinoma jednak 0 ako i samo ako je pridružena matrica singularna. Nadalje, član determinante $p_A(t) = \det(tI - A)$ sadrži t^n i t^{n-1} ako i samo ako se oni nalaze u umnošku $(t - a_{11}) \cdots (t - a_{nn})$, štoviše t^{n-1} dobivamo na način da iz bilo kojih $n-1$ faktora $(t - a_{jj})$ izaberemo t te iz preostalog faktora potrebni $-a_{jj}$. Imamo da je $(t-a_{11}) \cdots (t-a_{nn}) = t^n - a_{11}t^{n-1} - a_{22}t^{n-1} - \cdots - a_{nn}t^{n-1} + \cdots = t^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})t^{n-1} + \cdots = t^n - (\operatorname{tr} A)t^{n-1} + \cdots$. Iskoristimo li prethodno dobiveni slobodni član, konačno imamo da je $p_A(t) = t^n - (\operatorname{tr} A)t^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$. □

Teorem 2.2.4. *Slične matrice imaju isti svojstveni polinom.*

Dokaz. Neka su A i B slične matrice i C regularna matrica takva da je $B = C^{-1}AC$. Iskoristimo li Binet-Cauchyjev teorem, imamo sljedeće:

$$\begin{aligned} p_B(c) &= \det(cI - B) = \det[c(C^{-1}C) - C^{-1}AC] \\ &= \det[C^{-1}(cI)C - C^{-1}AC] = \det[C^{-1}(cI - A)C] \\ &= \det(C^{-1}) \cdot \det(cI - A) \cdot \det C = \det(C^{-1}) \cdot \det C \det(cI - A) \\ &= \det(C^{-1}C) \cdot \det(cI - A) = \det I \cdot \det(cI - A) = \det(cI - A) = p_A(c), \end{aligned}$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Napomena 2.2.5. *Obrat teorema 2.2.4 ne vrijedi, što možemo potvrditi sljedećim primjerom. Neka su A i B kvadratne matrice drugog reda:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sada je $p_A(c) = p_B(c) = c^2 - 2c + 1$, *no za svaku invertibilnu matricu* C *reda* 2 *dobivamo:* $C^{-1}BC = C^{-1}IC = C^{-1}C = I \neq A$.

Teorem 2.2.6. *Ako je* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *i* $c \in \mathbb{F}$, *tada je* $p_A(c) = 0$ *ako i samo ako matrica* $cI - A$ *nije invertibilna.*

Dokaz. ($\Leftarrow$) Neka su $A \in M_n(\mathbb{F})$, $c \in \mathbb{F}$ i neka matrica $cI - A$ nije invertibilna. Prema teoremu 1.4.3, za matricu $cI - A$ vrijedi da je $\det(cI - A) = 0$, odnosno $p_A(c) = 0$.

($\Rightarrow$) S druge strane, neka su $A \in M_n(\mathbb{F})$, $c \in \mathbb{F}$ i neka je $p_A(c) = 0$, odnosno $\det(cI - A) = 0$. Prema teoremu 1.4.3, matrica $cI - A$ nije invertibilna. □

Teorem 2.2.7. *Ako je* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *i* $t \in \mathbb{F}$, *tada je* t *svojstvena vrijednost matrice* A *ako i samo ako je* $p_A(t) = 0$.

Dokaz. Ako je t svojstvena vrijednost matrice A, prema definiciji 2.2.1 imamo da je $Ax = tx$, odnosno $(tI - A)x = \theta$. Kako je $x \neq \theta$, $tI - A$ ne može biti regularna matrica. Znači da je $\det(tI - A) = 0$, odnosno $p_A(t) = 0$. □

Želimo li za dani linearni operator $T \in \mathcal{L}(V)$ pronaći bazu prostora V u kojoj je matrični prikaz operatora T „najjednostavniji mogući” (misleći pritom na dijagonalnu matricu), to bi značilo naći bazu $\{x_1, \ldots, x_n\}$ prostora V takvu da je $Tx_j = c_j x_j$ za sve $j = 1, \ldots, n$. Ekvivalentan problem među matricama bi bio za kvadratnu matricu A reda n naći invertibilnu matricu C takvu da je matrica $C^{-1}AC$ dijagonalna. To nije uvijek moguće, pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 2.2.8. *Uzmimo za primjer matricu*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Potražimo invertibilnu matricu $C = \begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ *takvu da je* $C^{-1}AC = D$*, gdje je* $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2)$ *dijagonalna matrica. Jednakost* $C^{-1}AC = D$ *možemo radi lakšeg računa zapisati u obliku* $AC = CD$*, odnosno imamo da je*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2c_{11} + c_{21} & 2c_{12} + c_{22} \\ 2c_{21} & 2c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}d_1 & c_{12}d_2 \\ c_{21}d_1 & c_{22}d_2 \end{pmatrix}.$$

Iz jednakosti prethodnih matrica dobivamo sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2c_{11}+c_{21} &= c_{11}d_1, \\ 2c_{12}+c_{22} &= c_{12}d_2, \\ 2c_{21} &= c_{21}d_1, \\ 2c_{22} &= c_{22}d_2. \end{aligned}$$

Iz posljednjih dviju jednakosti dobivamo da su $d_1 = d_2 = 2$*, nakon čega iz prvih dviju jednakosti slijedi da su* $c_{21} = c_{22} = 0$*. Sada je iz sustava jednadžbi vidljivo da su* c_{11} *i* c_{12} *proizvoljni elementi skupa* $\mathbb{R}$*. Dakle, matrica* C *je oblika*

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{za} \quad c_{11}, c_{12} \in \mathbb{R}.$$

No, kako je $\det C = 0$*, matrica* C *nije invertibilna, te zaključujemo kako matrica* A *nije slična dijagonalnoj matrici.*

Sljedeće „najbolje rješenje" bilo bi naći trokutastu matricu, no sljedeći primjer nam pokazuje da ni to nije uvijek moguće.

Primjer 2.2.9. *Neka je* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ *i*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pretpostavimo da je $C = \begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ *invertibilna matrica i nađimo gornjetrokutastu matricu* D *oblika*

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

koja je slična matrici B, odnosno takvu da je $C^{-1}BC = D$. Sada iz jednakosti $BC = CD$ dobivamo sljedeće:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3c_{21} & 3c_{22} \\ -2c_{11} & -2c_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}d_{11} & c_{11}d_{12} + c_{12}d_{22} \\ c_{21}d_{11} & c_{21}d_{12} + c_{22}d_{22} \end{pmatrix}.$$

Prethodna jednakost ekvivalentna je sljedećem sustavu jednadžbi:

$$\begin{aligned} 3c_{21} &= c_{11}d_{11}, \\ 3c_{22} &= c_{11}d_{12} + c_{12}d_{22}, \\ -2c_{11} &= c_{21}d_{11}, \\ -2c_{12} &= c_{21}d_{12} + c_{22}d_{22}. \end{aligned}$$

Množenjem prve i treće jednadžbe dobivamo $-6c_{11}c_{21} = c_{11}c_{21}d_{11}^2$, tj. $c_{11}c_{21}(d_{11}^2 + 6) = 0$. Kako je $d_{11} \in \mathbb{R}$, to je $d_{11}^2 + 6 \neq 0$, pa je $c_{11} = 0$ ili $c_{21} = 0$. No prva jednadžba sustava povlači $c_{11} = c_{21} = 0$, pa je $\det C = 0$ i zato C nije invertibilna. Dakle, ne postoji gornjetrokutasta matrica $D \in M_2(\mathbb{R})$ takva da su matrice B i D slične nad $\mathbb{R}$. Analogno se pokaže i za donjetrokutastu matricu $D \in M_2(\mathbb{R})$.

Zbog svega navedenog, za linearni operator T nije uvijek moguće naći nenul vektor x takav da je $Tx = cx$ za neki skalar c.

Teorem 2.2.10. *Ako je $A \in M_n(\mathbb{F})$ i p_A ima n različitih nultočaka iz polja $\mathbb{F}$, tada je matrica A slična (nad poljem $\mathbb{F}$) dijagonalnoj matrici.*

Dokaz. Neka je A matrični prikaz operatora $T \in \mathcal{L}(V)$ u nekoj bazi vektorskog prostora V. Neka su $c_1, c_2, \ldots, c_n$ različite nultočke polinoma p_T iz polja $\mathbb{F}$. Prema teoremu 2.2.7, svaki c_i je svojstvena vrijednost operatora T. Prema tome, možemo naći nenulvektore x_i takve da je $Tx_i = c_i x_i$ za $i = 1, \ldots, n$. Iz teorema 1.4.4 slijedi da su vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ linearno neovisni, stoga čine bazu vektorskog prostora V. Matrični prikaz operatora T u bazi $\{x_1, \ldots, x_n\}$ je dijagonalna matrica B kojoj je matrica A slična, što slijedi iz teorema 2.1.6. □

Primjer 2.2.11. *Neka je*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Prema teoremu 2.2.3 imamo da je svojstveni polinom matrice A jednak $p_A(t) = t^2 - (\operatorname{tr} A)t + \det A = t^2 - 7t - 8$ i svojstvene vrijednosti matrice A su $t_1 = -1$ i $t_2 = 8$. Prema teoremu

2.2.10 imamo da je matrica A slična nekoj dijagonalnoj matrici D. Odredimo još svojstvene vektore matrice A pridružene svojstvenim vrijednostima t_1 i t_2. Tražimo vektore x_1 i x_2 različite od nulvektora za koje je $Ax_1 = t_1x_1 = -x_1$ i $Ax_2 = t_2x_2 = 8x_2$, odnosno $(A+I)x_1 = \theta$ i $(A-8I)x_2 = \theta$. Iz toga dobivamo jednadžbe

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad i \quad \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

odnosno sustave jednadžbi

$$\begin{aligned} 6x_{11} - 3x_{12} &= 0 & \qquad -3x_{21} - 3x_{22} &= 0 \\ -6x_{11} + 3x_{12} &= 0, & \qquad -6x_{21} - 6x_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Iz njih slijedi da su $x_{12} = 2x_{11}$ i $x_{22} = -x_{21}$. Konačno, dobivamo da su

$$x_1 = x_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad i \quad x_2 = x_{21}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Za $x_{11} = x_{21} = 1$ dobivamo da su

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad i \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Neka je P matrica složena od svojstvenih vektora x_1 i x_2, odnosno neka je

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Kako je $\det P \neq 0$, to je matrica P invertibilna i njezin je inverz

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sada je

$$D = P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 16 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Uočimo, matrica A je slična dijagonalnoj matrici D kojoj su elementi na dijagonali upravo svojstvene vrijednosti matrice A, dok se matrica koja obavlja sprezanje matrica A i D sastoji od svojstvenih vektora matrice A.

2.3 Invarijantni faktori. Fundamentalni teorem sličnosti

Definicija 2.3.1. *Elementarne transformacije matrice $A \in M_{mn}$ su:*

(I) međusobna zamjena dvaju redaka (odnosno stupaca);

(II) množenje nekog retka (odnosno stupca) skalarom $\lambda \neq 0$;

(III) pribrajanje nekom retku (odnosno stupcu) drugog retka (odnosno stupca) prethodno pomnoženog skalarom $\lambda \neq 0$.

Definicija 2.3.2. *Elementarna matrica tipa I, tipa II, ili tipa III je kvadratna matrica koja nastaje iz jedinične matrice $I_n \in M_n$ primjenom jedne elementarne transformacije tipa I, tipa II, ili tipa III nad njenim retkom (odnosno stupcem).*

Definicija 2.3.3. *Neka je R prsten. Element $0 \neq \lambda \in R$ (odnosno $0 \neq \mu \in R$) takav da je $\lambda x = 0$ (odnosno $x\mu = 0$), za neki $0 \neq x \in R$ zove se desni (odnosno lijevi) djelitelj nule. Prsten R je integralna domena ako nema ni lijevih ni desnih djelitelja nule. Prsten R je Euklidova integralna domena ako je integralna domena i ako postoji neka funkcija $f\colon R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0$ za koju vrijedi sljedeće: Ako su elementi $A, B \in R$, gdje je $B \neq 0$, onda postoje elementi $C, D \in R$ takvi da je $A = BC + D$, gdje je $D = 0$ ili $f(D) < f(B)$.*

Definicija 2.3.4. *Neka je R integralna domena i $A \in M_n(R)$. Invertibilnu matricu A čija je determinanta invertibilna u R nazivamo unimodularnom matricom.*

Napomena 2.3.5. *U slučaju kada je $R = \mathbb{Z}$, unimodularna matrica je matrica $A \in M_n(\mathbb{Z})$ za koju je $\det A = \pm 1$. U slučaju kada je $R = \mathbb{F}[t]$, gdje je $\mathbb{F}$ polje, unimodularna matrica je matrica $A \in M_n(\mathbb{F}[t])$ za koju je $\det A \neq 0 \in \mathbb{F}$.*

Teorem 2.3.6. *Neka je R Euklidova integralna domena i $A \in M_n(R)$. Tada postoje unimodularne matrice $P, Q \in M_n(R)$ takve da je*

$$PAQ = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \quad i \quad a_i \mid a_{i+1} \quad za \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Štoviše, matrice P i Q mogu biti i konačan produkt elementarnih matrica tipa I i tipa III.

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po n. Za $n = 1$ tvrdnja trivijalno vrijedi. Pretpostavimo da je $n \geq 2$ i da tvrdnja teorema vrijedi za $n - 1$. Neka je Ω skup svih matrica koje je moguće dobiti primjenom konačnog broja elementarnih transformacija tipa I i tipa III na matricu A, odnosno neka je

$$\Omega = \{PAQ : P, Q \text{ konačni produkti elementarnih matrica tipa I i tipa III}\}.$$

Jasno je da je skup Ω zatvoren s obzirom na navedene elementarne transformacije. Potrebno je dokazati da skup Ω sadrži dijagonalnu matricu takvu da za njezine elemente a_i na dijagonali vrijedi $a_i \mid a_{i+1}$ za $i = 1, \ldots, n-1$. Za $A = 0$ je tvrdnja trivijalna. Pretpostavimo da je $A \neq 0$. Neka je S skup svih nenul elemenata iz R koji se pojavljuju kao elementi matrica iz skupa Ω, odnosno neka je

$$S = \{c \in R \setminus \{0\} : c \text{ je element neke matrice } B \in \Omega\}.$$

Prema pretpostavci, imamo da je $S \neq \emptyset$. Neka je $f : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ funkcija za koju vrijedi sljedeće: Ako su elementi $a, b \in R$, gdje je $b \neq 0$, onda postoje elementi $q, r \in R$ takvi da je $a = bq + r$, gdje je $r = 0$ ili $f(r) < f(b)$. Tada je

$$\emptyset \neq \{f(c) : c \in S\} \subset \mathbb{N}.$$

Izaberimo $a \in S$ takav da je $f(a)$ minimalan. Kako je a element matrice $B \in \Omega$, možemo pretpostaviti da imamo sljedeću situaciju:

$$B = \begin{pmatrix} a \cdots\cdots\cdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Ako i nemamo ovakvu situaciju, element a možemo postaviti na naznačeno mjesto (u gornji lijevi kut matrice) primjenom konačnog broja elementarnih transformacija tipa I.

Tvrdimo da element a matrice B dijeli svaki element u prvom retku i svaki element u prvom stupcu matrice B. Pretpostavimo da imamo

$$B = \begin{pmatrix} a & b \cdots\cdots \\ \vdots & \\ \vdots & \\ \vdots & \end{pmatrix}.$$

Dokažimo da $a \mid b$. Neka je $b = qa + r$, gdje je $r = 0$ ili $f(r) < f(a)$. Pomnožimo li prvi stupac matrice B sa $-q$ i dodamo ga drugom stupcu matrice B (odnosno primijenimo li elementarnu transformaciju tipa III na maticu B), dobivamo matricu

$$\begin{pmatrix} a & r \cdots\cdots \\ \vdots & \\ \vdots & \\ \vdots & \end{pmatrix}$$

koja također pripada skupu Ω. Budući da minimalnost od $f(a)$ isključuje mogućnost da je $f(r) < f(a)$, preostaje nam da je $r = 0$.

Na opisani način, odnosno primjenom konačnog broja elementarnih transformacije tipa III, matricu B možemo transformirati do oblika

$$\left(\begin{array}{c|c} a & 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & B_1 \\ 0 & \end{array}\right).$$

Primijenimo li pretpostavku indukcije na B_1, imamo da postoje matrice $P_1, Q_1 \in M_{n-1}(R)$ takve da je

$$P_1 B_1 Q_1 = \begin{pmatrix} a_2 & & & \\ & a_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix},$$

gdje $a_i \mid a_{i+1}$ za $i = 2, \ldots, n-1$ i da su matrice P_1, Q_1 konačan produkt elementarnih matrica tipa I i tipa III. Tada su i matrice

$$P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P_1 \end{array}\right), \quad Q = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q_1 \end{array}\right)$$

konačni produkti istog tipa. Stoga, skup Ω sadrži dijagonalnu matricu

$$PCQ = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}.$$

Preostaje nam dokazati da $a \mid a_2$. Dodamo li drugi redak prethodne matrice njezinom prvom retku, uočavamo da skup Ω sadrži i matricu

$$\begin{pmatrix} a & a_2 & & \\ 0 & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}.$$

Ponovimo li ranije opisani postupak, dobivamo da $a \mid a_2$. □

Napomena 2.3.7. *Ako je $A \in M_n(\mathbb{F})$ tada je $tI - A \in M_n(\mathbb{F}[t])$. Prema teoremu 2.3.6, postoje unimodularne matrice $P, Q \in M_n(\mathbb{F}[t])$ takve da*

$$P(tI - A)Q = \operatorname{diag}(p_1, \ldots, p_n) \quad i \quad p_i \mid p_{i+1}.$$

Kako je $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = \det(P(tI - A)Q) \sim \det(tI - A) = p_A \neq 0$, polinomi p_i su različiti od nulpolinoma i možemo reći da su normirani.

Definicija 2.3.8. *Uz prethodne oznake, normirane polinome $p_1, \dots, p_n$ nazivamo invarijantnim faktorima matrice A. Kako su polinomi* $\det(tI - A) = p_A$ *i $p_1 \cdots p_n$ oba normirani, slijedi da je $p_A = p_1 \cdots p_n$. Štoviše,*

$$n = \deg p_A = \sum_{i=1}^{n} \deg p_i.$$

S obzirom da je $\deg p_i \geq 0$*, moguće je da je nekoliko prvih invarijantnih faktora upravo* 1*. Preciznije u sljedećoj propoziciji.*

Propozicija 2.3.9. *Polinom* 1 *nije invarijantni faktor matrice A ako i samo ako je $A = cI$ za neki $c \in \mathbb{F}$.*

Dokaz. Neka su $p_1, \dots, p_n$ invarijantni faktori matrice A, $p_i \mid p_{i+1}$.

($\Leftarrow$) Ako je $A = cI = \operatorname{diag}(c, \dots, c)$, tada je $tI - A = \operatorname{diag}(t - c, \dots, t - c)$. Iz toga je jasno da su invarijantni faktori jednaki $p_i = t - c$ za $i = 1, \dots, n$.

($\Rightarrow$) Prema pretpostavci imamo da je $\deg p_i \geq 1$ za sve i. Uz činjenicu da je $n = \sum_{i=1}^{n} \deg p_i$, nužno je da su svi polinomi p_i linearni, odnosno da je $\deg p_i = 1$ za sve i. Uzmimo da je $p_1(t) = t - c$. Sada, kako su svi p_i linearni i vrijedi $p_1 \mid p_i$ za sve i, slijedi da je $p_i(t) = t - c$ za svaki i. Prema teoremu 2.3.6 postoje unimodularne matrice $P, Q \in M_n(\mathbb{F}[t])$ takve da je

$$P(tI - A)Q = \operatorname{diag}(t - c, \dots, t - c) = (t - c)I,$$

odakle je $tI - A = P^{-1}((t - c)I)Q^{-1} = (t - c)I \cdot P^{-1}Q^{-1}$. Uvedemo li oznaku $P^{-1}Q^{-1} = (r_{ij}), r_{ij} \in \mathbb{F}[t]$, tada je

$$(t\delta_{ij} - a_{ij}) = tI - A = ((t - c)r_{ij}). \tag{2.1}$$

Elementi ove matrice koji se ne nalaze na njenoj dijagonali su upravo skalari, stoga je $r_{ij} = 0$ za $i \neq j$ (promotrimo desni član), zbog čega je $a_{ij} = 0$ za $i \neq j$ (promotrimo lijevi član). Dakle, A je dijagonalna matrica i vrijedi

$$tI - A = \operatorname{diag}(t - a_{11}, \dots, t - a_{nn}).$$

Pogledamo li opet jednadžbu (2.1), možemo vidjeti da je $t - a_{ii} = (t - c)r_{ii}$, odakle je $r_{ii} = 1$ i $a_{ii} = c$ za sve i, odnosno $A = cI$. □

Definicija 2.3.10. *Neka su R i S prsteni. Preslikavanje $f\colon R \to S$ koje zadovoljava svojstva*

(a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$,

(b) $f(xy) = f(x)f(y)$,

za sve $x, y \in R$, naziva se homomorfizam prstena. Ako je f bijekcija, onda kažemo da je f izomorfizam prstena, odnosno da su prsteni R i S izomorfni. U tom slučaju je inverzno preslikavanje $f^{-1}\colon S \to R$ također izomorfizam prstena.

Lema 2.3.11. *$M_n(\mathbb{F}[t]) = M_n(\mathbb{F})[t]$, odnosno matrice s elementima iz prstena polinoma mogu se zapisati kao polinomi s koeficijentima iz prstena $M_n(\mathbb{F})$ i obratno.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da su prsteni $M_n(\mathbb{F}[t])$ i $M_n(\mathbb{F})[t]$ izomorfni, odnosno da postoji bijektivno preslikavanje $f\colon M_n(\mathbb{F})[t] \to M_n(\mathbb{F}[t])$ koje zadovoljava oba svojstva navedena u prethodnoj definiciji.

Pogledajmo sljedeći primjer:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}t^2 + \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 0\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 5\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}(tI)^2 + \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 0\end{pmatrix}(tI) + \begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 5\end{pmatrix}I\\ &= \begin{pmatrix}t-3 & t^2-2\\ t^2-2t+1 & 5\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

S lijeve strane prethodne jednakosti imamo polinom iz $M_n(\mathbb{F})[t]$, dok je s desne strane matrica iz $M_n(\mathbb{F}[t])$. Matrica $tI \in M_n(\mathbb{F}[t])$ komutira sa svakom matricom iz $M_n(\mathbb{F}[t])$. S druge strane, polinom $t \in M_n(\mathbb{F})[t]$ komutira sa svakim polinomom iz $M_n(\mathbb{F})[t]$. Stoga, neka je f preslikavanje takvo da je $f(1) = I$ i $f(t) = tI$, preciznije neka je

$$\begin{aligned}f(A_0 1 + A_1 t + \cdots + A_m t^m) &= A_0 I + A_1(tI) + \cdots + A_m(tI)^m\\ &= A_0 + (tI)A_1 + \cdots + (tI)^m A_m\\ &= A_0 + tA_1 + \cdots + t^m A_m.\end{aligned}$$

Uočimo kako su argumenti funkcije f polinomi s jedinstvenim koeficijentima iz $M_n(\mathbb{F})$, dok su vrijednosti upravo matrice kojima su elementi polinomi $\mathbb{F}[t]$ s odgovarajućim koeficijentima. Pokažimo da je funkcija $f\colon M_n(\mathbb{F})[t] \to M_n(\mathbb{F}[t])$ zadana sa $f(A_0 1 + A_1 t + \cdots + A_m t^m) = A_0 + tA_1 + \cdots + t^m A_m$ bijekcija. Očito, iz uvjeta $f(A) = f(B)$ za svaki $A, B \in M_n(\mathbb{F}[t])$ slijedi da je $A = B$, pa je f injekcija. Za svaki $C \in M_n(\mathbb{F}[t])$ postoji jedinstven $D \in M_n(\mathbb{F})[t]$ takav da je $f(D) = C$, pa je f i surjekcija. Iz toga slijedi da je f bijekcija.

Preostaje dokazati da preslikavanje f zadovoljava svojstva navedena u prethodnoj definiciji. Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F}[t])$, gdje su $A = A_0 1 + A_1 t + \cdots + A_m t^m, A_m \neq 0$ i $B = B_0 1 + B_1 t + \cdots + B_k t^k, B_k \neq 0$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $k < m$. Tada imamo da je

$$\begin{aligned}f(A + B) &= f((A_0 1 + A_1 t + \cdots + A_m t^m) + (B_0 1 + B_1 t + \cdots + B_k t^k))\\ &= f((A_0 + B_0)1 + (A_1 + B_1)t + \cdots + (A_k + B_k)t^k + A_{k+1}t^{k+1} + \cdots + A_m t^m)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= A_0 + B_0 + t(A_1 + B_1) + \cdots + t^k(A_k + B_k) + t^{k+1}A_{k+1} + \cdots + t^m A_m \\
&= A_0 + tA_1 + \cdots + t^k A_k + t^{k+1}A_{k+1} + \cdots + t^m A_m + B_0 + tB_1 + \cdots + t^k B_k \\
&= f(A) + f(B),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(AB) &= f((A_0 1 + A_1 t + \cdots + A_m t^m)(B_0 1 + B_1 t + \cdots + B_k t^k)) \\
&= f((A_0B_0)1 + (A_0B_1 + A_1B_0)t + \cdots + (A_0B_k + A_1B_{k-1} + \cdots + A_kB_0)t^k + \cdots \\
&\quad + A_mB_0t^m + A_mB_1t^{m+1} + \cdots + (A_mB_k)t^{m+k}) \\
&= A_0B_0 + t(A_0B_1 + A_1B_0) + \cdots + t^k(A_0B_k + A_1B_{k-1} + \cdots + A_kB_0) + \cdots \\
&\quad + t^mA_mB_0 + t^{m+1}A_mB_1 + \cdots + t^{m+k}(A_mB_k) \\
&= (A_0 + tA_1 + \cdots + t^mA_m)(B_0 + tB_1 + \cdots + t^kB_k) \\
&= f(A)f(B),
\end{aligned}
$$

odnosno da vrijede navedena svojstva. Dakle, prsteni $M_n(\mathbb{F}[t])$ i $M_n(\mathbb{F})[t]$ su izomorfni. □

Lema 2.3.12. *Neka je $P \in M_n(\mathbb{F}[t])$ i $A \in M_n(\mathbb{F})$. Tada je $P = (tI - A)Q + B$ za odgovarajuće $Q \in M_n(\mathbb{F}[t])$ i $B \in M_n(\mathbb{F})$.*

Dokaz. Ako je $P = 0$ tada je $Q = B = 0$. Pretpostavimo sada da je $P \neq 0$. Prema lemi 2.3.11, imamo da je

$$P = t^m A_m + \cdots + tA_1 + A_0$$

gdje su $A_m, \ldots, A_0$ i $A_m \neq 0$. Za nastavak dokaza koristimo matematičku indukciju po m, gdje je m stupanj od P.

U slučaju da je $m = 0$ uzimamo da je

$$P = A_0 \in M_n(\mathbb{F}), \quad Q = 0 \quad \text{i} \quad B = P.$$

Ako je $m = 1$ tada je

$$P = tA_1 + A_0 = (tI)A_1 + A_0 = (tI - A)A_1 + (AA_1 + A_0),$$

te uzimamo da su $Q = A_1$ i $B = AA_1 + A_0$.

U koraku matematičke indukcije pretpostavimo da je $m \geq 2$. Za početak reducirajmo polinom do stupnja $m - 1$ tako da definiramo:

$$
\begin{aligned}
R &= P - (tI - A)(t^{m-1}A_m) \\
&= (P - t^m A_m) + t^{m-1}AA_m \\
&= (t^{m-1}A_{m-1} + \cdots + tA_1 + A_0) + t^{m-1}AA_m \\
&= t^{m-1}(A_{m-1} + AA_m) + t^{m-2}A_{m-2} + \cdots + tA_1 + A_0.
\end{aligned}
$$

Iskoristimo li pretpostavku indukcije, dobivamo $R = (tI - A)S + B$ gdje su $S \in M_n(\mathbb{F}[t])$ i $B \in M_n(\mathbb{F})$. Sada je

$$\begin{aligned} P &= (tI - A)(t^{m-1}A_m) + R \\ &= (tI - A)(t^{m-1}A_m) + (tI - A)S + B \\ &= (tI - A)(t^{m-1}A_m + S) + B, \end{aligned}$$

te smo uz izbor $Q = t^{m-1}A_m + S$ dokazali traženo. □

Uz oznake kao u lemi 2.3.12, P možemo smatrati djeljenikom, $tI - A$ „lijevim djeliteljem", Q kvocijentom i B ostatkom pri dijeljenju. Primijenimo li ovu lemu na P^τ i A^τ, dobivamo drugu verziju leme:

Lema 2.3.13. *Ako je $P \in M_n(\mathbb{F}[t])$ i $A \in M_n(\mathbb{F})$, tada je $P = R(tI - A) + C$ za odgovarajuće $R \in M_n(\mathbb{F}[t])$ i $C \in M_n(\mathbb{F})$.*

Lema 2.3.14. *Ako je $(tI - A)P(tI - B) = tC + D$ za $P \in M_n(\mathbb{F}[t])$ i $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{F})$, onda je $P = 0$. Štoviše, $C = D = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno neka je $P \neq 0$. Prema lemi 2.3.11 možemo pisati $p = t^m A_m + \cdots + tA_1 + A_0$ za $m \geq 0$ i $A_m \neq 0$. Zatim imamo:

$$\begin{aligned} tC + D &= (tI - A)(t^m A_m + \cdots + tA_1 + A_0)(tI - B) \\ &= (t^{m+1}A_m + \cdots - AA_0)(tI - B) \\ &= t^{m+2}A_m + \cdots - AA_0B, \end{aligned}$$

čime dolazimo do kontradikcije s obzirom da je najveća potencija od t s lijeve strane jednakosti jednaka 1. □

Teorem 2.3.15 (Fundamentalni teorem sličnosti)**.** *Neka su A i B matrice s elementima iz polja $\mathbb{F}$. Matrice A i B su slične nad poljem $\mathbb{F}$ ako i samo ako su matrice $tI - A$ i $tI - B$ ekvivalentne nad $\mathbb{F}[t]$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ako je $B = CAC^{-1}, C \in M_n(\mathbb{F})$, tada su $\det C, \det(C^{-1}) \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ elementi od $\mathbb{F}[t]$. Stoga su C, C^{-1} unimodularne matrice nad $\mathbb{F}[t]$ i vrijedi:

$$C(tI - A)C^{-1} = tCC^{-1} - CAC^{-1} = tI - B.$$

($\Leftarrow$) Neka su $P, Q \in M_n(\mathbb{F}[t])$ unimodularne matrice takve da je

$$tI - B = P(tI - A)Q. \tag{2.2}$$

Primijenimo li lemu 2.3.12 na P i lemu 2.3.13 na Q, imamo:

$$P = (tI - B)R + C \tag{2.3}$$

i

$$Q = S(tI - B) + D, \tag{2.4}$$

gdje su $R, S \in M_n(\mathbb{F}[t])$ i $C, D \in M_n(\mathbb{F})$. Dokažimo da je $CD = I$ i $B = CAC^{-1}$.

Pretpostavimo da postoji matrica $T \in M_n(\mathbb{F}[t])$ takva da je

$$(tI - A)D = T(tI - B). \tag{2.5}$$

Prema jednadžbi (2.2) imamo da je $(tI-A)Q = P^{-1}(tI-B)$. Supstituiramo li Q iz jednadžbe (2.4), dobivamo

$$(tI - A)[S(tI - B) + D] = P^{-1}(tI - B).$$

Prema tome je

$$\begin{aligned}(tI - A)D &= P^{-1}(tI - B) - (tI - A)S(tI - B)\\ &= [P^{-1} - (tI - A)S](tI - B),\end{aligned}$$

čime smo s izborom $T = P^{-1} - (tI - A)S$ dokazali egzistenciju matrice koja zadovoljava jednakost (2.5).

Slično, pretpostavimo da postoji matrica $U \in M_n(\mathbb{F}[t])$ takva da je

$$C(tI - A) = (tI - B)U. \tag{2.6}$$

Prema jednadžbi (2.2) imamo da je $P(tI-A) = (tI-B)Q^{-1}$. Supstituiramo li P iz jednadžbe (2.3), dobivamo

$$[(tI - B)R + C](tI - A) = (tI - B)Q^{-1}.$$

Prema tome je

$$\begin{aligned}C(tI - A) &= (tI - B)Q^{-1} - (tI - B)R(tI - A)\\ &= (tI - B)[Q^{-1} - R(tI - A)]\end{aligned}$$

čime smo s izborom $U = Q^{-1} - R(tI - A)$ dokazali egzistenciju matrice koja zadovoljava jednakost (2.6).

Supstituiramo li (2.3) i (2.4) u jednadžbu (2.2), imamo

$$\begin{aligned}tI - B &= [(tI - B)R + C](tI - A)[S(tI - B) + D]\\ &= (tI - B) \cdot R(tI - A)S \cdot (tI - B) && \text{(a)}\\ &\quad + (tI - B)R \cdot (tI - A)D && \text{(b)}\\ &\quad + C(tI - A) \cdot S(tI - B) && \text{(c)}\\ &\quad + C(tI - A)D. && \text{(d)}\end{aligned}$$

Uz oznaku $V = R(tI - A)S$ i supstitucijom (2.5) i (2.6) u članove označene sa (b) i (c), dobivamo

$$\begin{aligned} tI - B &= (tI - B)V(tI - B) \\ &\quad + (tI - B)R \cdot T(tI - B) \\ &\quad + (tI - B)U \cdot S(tI - B) \\ &\quad + C(tI - A)D \\ &= (tI - B)[V + RT + US](tI - B) + C(tI - A)D \\ &= (tI - B)W(tI - B) + C(tI - A)D, \end{aligned}$$

gdje je $W = V + RT + US$. Stoga je

$$\begin{aligned} (tI - B)W(tI - B) &= (tI - B) - C(tI - A)D \\ &= t(I - CD) + (CAD - B). \end{aligned}$$

Prema lemi 2.3.14 dobivamo da je $W = 0$, $I - CD = 0$ i $CAD - B = 0$, te je zbog toga matrica C invertibilna i vrijedi $B = CAC^{-1}$. □

Definicija 2.3.16. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$. Determinanta $r \times r$ matrice, gdje je $1 \leq r \leq n$, koja nastaje uklanjanjem $n - r$ redaka i $n - r$ stupaca matrice A naziva se $r \times r$ subdeterminanta matrice A. Najveći zajednički djelitelj svih $r \times r$ subdeterminanti matrice A označavamo sa $D_r(A)$, te $D_i(A) \in \mathbb{F}$ za $i = 1, \ldots, n$ zovemo i-tim djeliteljem determinante matrice A.*

S obzirom da je najveći zajednički djelitelj jedinstven, isto vrijedi i za i-tog djelitelja determinante matrice A. Ako je $A = \left(a_{ij}\right)$, tada je $D_1(A)$ najveći zajednički djelitelj svih a_{ij}. Za $r = 1, \ldots, n - 1$, svaka $(r + 1) \times (r + 1)$ subdeterminanta matrice A je linearna kombinacija $r \times r$ subdeterminanti matrice A, odnosno vrijedi da $D_r(A) \mid D_{r+1}(A)$.

Lema 2.3.17. *Neka je $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ gdje $a_i \mid a_{i+1}$ za $i = 1, \ldots, n - 1$. Tada $D_r(A) \sim a_1 \cdots a_r$ za $r = 1, \ldots, n$.*

Dokaz. Ideju dokaza lako vidimo pomoću primjera. Neka je $n = 5$ i

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{pmatrix}.$$

Želimo li izračunati $D_3(A)$, potrebno je odrediti sve 3×3 subdeterminante matrice A. Svaka 3×3 subdeterminanta nastaje tako da iz matrice A uklonimo njezina dva retka i njezina dva stupca te odredimo determinantu dobivene submatrice. Na primjer, pretpostavimo da smo uklonili četvrti i peti stupac matrice A, odnosno da imamo sljedeću situaciju:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{pmatrix}.$$

Ukoliko nismo uklonili četvrti stupac, uklanjamo stupac koji se sastoji samo od nula jer će tada determinanta sigurno biti jednaka nuli. Isto napravimo i s izborom petog stupca. Uočimo, uklonimo li pojedini stupac, tada trebamo ukloniti i redak s istim rednim brojem. U suprotnom, pojedina determinanta će biti jednaka nuli i ona neće imati nikakvog utjecaja kod računanja $D_3(A)$. Dakle, potrebno je odrediti determinante submatrica koje nastaju kada iz matrice A uklonimo retke i stupce s istim rednim brojem, točnije determinante dijagonalnih matrica čiji su elementi na dijagonali neki od a_j. Pretpostavimo da smo iz matrice A uklonili posljednja dva retka i posljednja dva stupca:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{pmatrix}.$$

Determinanta preostale matrice reda 3 jednaka je $a_1a_2a_3$ i jasno je da ona dijeli sve preostale mogućnosti jer $a_i \mid a_{i+1}$ za $i = 1, \ldots, n-1$. Iz toga slijedi da je $D_3(A) = a_1a_2a_3$. □

Lema 2.3.18. *Ako su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ i $1 \leq r \leq n$, tada je svaka $r \times r$ subdeterminanta matrice AB linearna kombinacija $r \times r$ subdeterminanti matrice A (s koeficijentima u $\mathbb{F}$), odnosno $D_r(A) \mid D_r(AB)$.*

Dokaz. Neka su $A = \left(a_{ij}\right)$, $B = \left(b_{ij}\right)$ i $C = AB = \left(c_{ij}\right)$. Promatramo li $r \times r$ subdeterminantu matrice C, možemo naći permutacijske matrice P i Q takve da se u matrici PCQ navedena subdeterminanta nalazi u gornjem lijevom kutu. Štoviše, vrijedi $PCQ = (PA)(BQ)$ gdje su $r \times r$ subdeterminante matrice PA do na predznak jednake $r \times r$ subdeterminantama matrice A. Dovoljno je dokazati da $r \times r$ subdeterminante iz gornjeg lijevog kuta matrice C imaju svojstvo navedeno u tvrdnji leme.

Označimo sa α_j j-ti stupac matrice A i sa α_j^* stupčanu matricu duljine r koja je nastala uklanjanjem posljednjih $n - r$ elemenata matrice α_j, odnosno

$$\alpha_j^* = \begin{pmatrix} a_{ij} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{pmatrix}.$$

Analogno, neka je

$$\gamma_j^* = \begin{pmatrix} c_{ij} \\ \vdots \\ c_{rj} \end{pmatrix}.$$

S obzirom da za sve i (posebice za $i = 1, \ldots, r$) vrijedi

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} a_{ik},$$

jasno je da je

$$\gamma_j^* = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \alpha_k^*.$$

Ovdje je prikladno prikazati $r \times r$ matricu iz gornjeg lijevog kuta matrice C kao matricu $\left(\gamma_1^*, \ldots, \gamma_r^*\right)$. Njezina determinanta je

$$\begin{aligned} \det(\gamma_1^*, \ldots, \gamma_r^*) &= \det\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k1}\alpha_k^*, \ldots, \sum_{k=1}^{n} b_{kr}\alpha_k^*\right) \\ &= \sum b_{k_1 1} b_{k_2 2} \ldots b_{k_r r} \det(\alpha_{k_1}^*, \alpha_{k_2}^*, \ldots, \alpha_{k_r}^*), \end{aligned}$$

gdje sumiramo po svim mogućim kombinacijama indeksa $k_1, \ldots, k_r \in \{1, \ldots, n\}$. Determinanta koja se pojavljuje u pojedinom članu je jednaka 0 osim ako su $k_1, \ldots, k_r$ različiti, te je tada ona do na predznak jednaka $r \times r$ subdeterminanti matrice A. Time smo dokazali prvu tvrdnju teorema. Iz toga slijedi da $D_r(A)$ dijeli svaku $r \times r$ subdeterminantu matrice C. Tada $D_r(A)$ mora dijeliti i njihov najveći zajednički djelitelj $D_r(C)$, čime smo dokazali i drugu tvrdnju leme. □

Definicija 2.3.19. *Neka je $A = \left(a_{ij}\right) \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Matricu $A^\tau = \left(b_{ij}\right) \in M_{nm}(\mathbb{F})$ gdje je $b_{ij} = a_{ji}$ za $\forall i, j$ nazivamo transponiranom matricom matrice A. Drugim riječima, retci matrice A predstavljaju stupce matrice A^τ i obratno.*

Lema 2.3.20. *$D_r(A) \sim D_r(A^\tau)$ za $i = 1, \ldots, n$.*

Dokaz. Skup svih $r \times r$ subdeterminanti matrice A^τ jednak je skupu svih $r \times r$ subdeterminanti matrice A. □

Lema 2.3.21. *$D_r(A) \mid D_r(BA)$ za $r = 1, \ldots, n$.*

Dokaz. Dokaz slijedi direktno iz lema 2.3.18 i 2.3.20 te činjenice da je $(BA)^\tau = A^\tau B^\tau$. □

Lema 2.3.22. *Ako su P i Q unimodularne matrice, tada je $D_r(PAQ) \sim D_r(A)$ za $i = 1, \ldots, n$.*

Dokaz. Prema lemama 2.3.18 i 2.3.21, imamo da vrijedi

$$D_r(A) \mid D_r(AQ) \quad \text{i} \quad D_r(AQ) \mid D_r(PAQ),$$

iz čega slijedi da $D_r(A) \mid D_r(PAQ)$. Također, kako je $A = P^{-1}(PAQ)Q^{-1}$, slijedi da $D_r(PAQ) \mid D_r(A)$. □

Lema 2.3.23. *Neka su P, Q unimodularne matrice i neka je $PAQ = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$ gdje $a_i \mid a_{i+1}$ za $i = 1, \dots, n-1$. Tada $D_r(A) \sim a_1 \cdots a_r$ za $i = 1, \dots, n$.*

Dokaz. Dokaz leme slijedi direktno iz leme 2.3.22 i leme 2.3.17. □

Teorem 2.3.24. *Neka je R Euklidova integralna domena i $A, B \in M_n(R)$. Tada je matrica A ekvivalentna (nad R) matrici B ako i samo ako $D_r(A) \sim D_r(B)$ za $r = 1, \dots, n$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ovo je upravo lema 2.3.22.

($\Leftarrow$) Prema teoremu 2.3.6 postoje unimodularne matrice P, Q, P_1, Q_1 takve da je

$$\begin{aligned} PAQ &= \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n), \quad a_i \mid a_{i+1}, \\ P_1BQ_1 &= \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_n), \quad b_i \mid b_{i+1}. \end{aligned}$$

Prema pretpostavci i lemi 2.3.23, imamo da

$$a_1 \cdots a_r \sim D_r(A) \sim D_r(B) \sim b_1 \cdots b_r \quad \text{za} \quad r = 1, \dots, n. \tag{2.7}$$

Uočimo da je $a_1 = 0$ ako i samo ako je $A = 0$. Nadalje, $a_1 \sim D_1(A)$ je najveći zajednički djelitelj svih elemenata a_{ij} matrice A. Prema (2.7), imamo da $a_1 \sim b_1$, te je $A = 0$ ako i samo ako $B = 0$. U tom slučaju su matrice A i B trivijalno ekvivalentne.

Pretpostavimo da je $a_1 \neq 0$. Tada imamo da je i $b_1 \neq 0$. Neka je m najveći indeks za koji je $a_m \neq 0$. Tada je $D_m(A) = a_1 \cdots a_m \neq 0$. Iz toga slijedi da je $D_m(B) \neq 0$ pa je i $b_m \neq 0$. Sada je, zbog simetričnosti, jasno da je m i najveći indeks za koji je $b_m \neq 0$. Kako $a_i \mid a_{i+1}$, ako je $a_j = 0$ za neki j, tada imamo da je $a_j = a_{j+1} = \cdots = a_n = 0$. Stoga u ovom slučaju imamo da je

$$a_{m+1} = \cdots = a_n = 0, \quad b_{m+1} = \cdots = b_n = 0.$$

Potrebno je još dokazati da $a_i \sim b_i$ za sve i. Tvrdnja trivijalno vrijedi za $i > m$ i dokazali smo da vrijedi $a_1 \sim b_1$. Neka je $1 < r \leq m$. Prema (2.7) imamo da vrijedi

$$a_1 \cdots a_{r-1} \sim b_1 \cdots b_{r-1} \quad \text{i} \quad (a_1 \cdots a_{r-1})a_r \sim (b_1 \cdots b_{r-1})b_r,$$

odakle dobivamo da je $a_r \sim b_r$.

Neka je $b_i = u_i a_i$ za $i = 1, \ldots, n$, gdje je u_i jedinica u R. U slučaju kada je $b_i = 0$ uzimamo da je $u_i = 1$. Tada imamo da je

$$\operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n) = \operatorname{diag}(u_1, \ldots, u_n) \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n).$$

Matrica $P_2 = \operatorname{diag}(u_1, \ldots, u_n)$ je unimodularna, te iz prethodne jednakosti imamo da je $P_1 B Q_1 = P_2(PAQ)$. Tada je

$$A \sim (P_2 P)AQ = P_1 B Q_1 \sim B.$$

□

Drugim riječima, matrice A i B su ekvivalentne ako i samo ako imaju „iste” djelitelje determinante. Na temelju dokaza teorema 2.3.24 slijedi tvrdnja sljedećeg teorema.

Teorem 2.3.25. *Neka je R Euklidova integralna domena i $A, B \in M_n(R)$. Neka su P, P_1, Q, Q_1 unimodularne matrice takve da je*

$$PAQ = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \quad \textit{uz uvjet} \quad a_i \mid a_{i+1},$$

$$P_1 B Q_1 = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n) \quad \textit{uz uvjet} \quad b_i \mid b_{i+1}.$$

Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:

(a) A je ekvivalentna B (nad R);

(b) $D_r(A) \sim D_r(B)$ za $r = 1, \ldots, n$;

(c) $a_i \sim b_i$ za $i = 1, \ldots, n$.

Korolar 2.3.26. *Za matrice $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne:*

(a) A i B su slične nad $\mathbb{F}$;

(b) A i B imaju iste invarijantne faktore;

(c) $D_r(tI - A) = D_r(tI - B)$ za $r = 1, \ldots, n$.

Dokaz. Dokaz slijedi iz teorema 2.3.15 i 2.3.25 za $R = \mathbb{F}[t]$ te $tI - A, tI - B$ u ulogama matrica A, B. □

Primjer 2.3.27. *Za matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

dobivamo da je $D_1(tI - A) = D_1(tI - B) = 1$ *i* $D_3(tI - A) = D_3(tI - B) = (t - 3)^3$*, no* $D_2(tI - A) = 1 \neq t - 3 = D_2(tI - B)$*. Iz toga slijedi kako matrice A i B nisu slične. Štoviše, na temelju leme 2.3.17 možemo zaključiti kako je* $p_{i+1} = D_{i+1}/D_i$*. Sada su invarijantni faktori matrice A polinomi* $1, 1, (t - 3)^3$ *i invarijantni faktori matrice B polinomi* $1, t - 3, (t - 3)^3$*, čime dodatno potvrđujemo da matrice A i B nisu slične.*

Korolar 2.3.28. *Ako je* $A \in M_n(\mathbb{F})$*, tada su matrice A i* A^τ *slične.*

Dokaz. Prema lemi 2.3.20, skup djelitelja deteminante matrice $tI - A$ jednak je skupu djelitelja determinante matrice $tI - A^\tau = (tI - A)^\tau$. Stoga tvrdnja slijedi direktno iz korolara 2.3.26. □

Korolar 2.3.29. *Neka je* $\mathbb{F}$ *potpolje polja* $\mathbb{K}$ *i neka su* $A, B \in M_n(\mathbb{F})$*. Tada su matrice A i B slične nad poljem* $\mathbb{F}$ *ako i samo ako su slične nad poljem* $\mathbb{K}$*.*

Dokaz. Djelitelje determinante možemo računati u $\mathbb{F}[t]$ koristeći Euklidov algoritam. Promatramo li kako se taj račun odvija u $\mathbb{K}[t]$ zaključujemo da se ishod ne mijenja. Stoga tvrdnja slijedi direktno iz korolara 2.3.26. □

Slijedi još jedna zanimljiva posljedica fundamentalnog teorema sličnosti:

Korolar 2.3.30. *Neka su* $A, B \in M_n(\mathbb{F})$*. Ako postoje unimodularne matrice* $P, Q \in M_n(\mathbb{F}[t])$ *takve da je* $P(tI - A)Q = tI - B$*, tada se P i Q mogu izabrati tako da budu u* $M_n(\mathbb{F})$ *te da je* $PQ = I$*.*

Dokaz. Iz uvjeta $P(tI - A)Q = tI - B$ vidljivo je da su matrice $tI - A$ i $tI - B$ ekvivalentne nad $\mathbb{F}[t]$. Prema teoremu 2.3.15, matrice A i B su slične nad $\mathbb{F}$, dakle postoji invertibilna matrica $C \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $B = CAC^{-1}$. Nadalje, imamo da je $P(tI - A)Q = tPQ - PAQ$ i $tI - B = tI - CAC^{-1}$, iz čega slijedi da je $PQ = I$ i $PAQ = CAC^{-1}$. Dovoljno je uzeti $P = C \in M_n(\mathbb{F})$. □

2.4 Pridružena matrica. Racionalna kanonska forma

Definicija 2.4.1. *Neka je* $p \in \mathbb{F}[t]$ *normirani polinom stupnja* $m \geq 1$ *takav da je* $p(t) = t^m + c_1 t^{m-1} + \cdots + c_{m-1} t + c_m$*. Matrica* $C_p \in M_m(\mathbb{F})$ *pridružena polinomu p je kvadratna matrica reda m definirana sa*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -c_m & \cdots & \cdots & -c_2 & -c_1 \end{pmatrix}.$$

Dogovorno, matrica pridružena polinomu $t + c_1$ je kvadratna matrica prvog reda $\begin{pmatrix} -c_1 \end{pmatrix}$.

Primjer 2.4.2. *Neka je*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrice A je $p_A(t) = \det(tI - A) = t^2 - 2t - 3$. Matrica pridružena karakterističnom polinomu matrice A je matrica

$$C_{p_A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Teorem 2.4.3 (Teorem o matrici pridruženoj polinomu p)**.** *Za svaki normirani polinom $p \in \mathbb{F}[t]$ stupnja $m \geq 1$, njemu pridružena matrica C_p ima invarijantne faktore $1, \dots, 1, p$. Drugim riječima, prvih $m - 1$ invarijantnih faktora su trivijalni, dok se minimalni polinom i karakteristični polinom podudaraju s polinomom p.*

Dokaz. Uvedimo oznaku $D_r = D_r(tI - C_p)$ za r-tog djelitelja determinante matrice $tI - C_p$. Dokaz provodimo pomoću matematičke indukcije po stupnju m polinoma p.

Ako je $m = 1$, odnosno $p(t) = t + c_1$, tada je $C_p = \begin{pmatrix} -c_1 \end{pmatrix}$, $tI - C_p = \begin{pmatrix} t + c_1 \end{pmatrix}$ te je $t + c_1 = p(t)$ jedini invarijantni faktor. Na taj način interpretiramo tvrdnju teorema u slučaju kada je $m = 1$. Zaista, postoji $m - 1 = 0$ trivijalnih invarijantnih faktora.

Ako je $m = 2$, odnosno $p(t) = t^2 + c_1 t + c_2$, tada je

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c_2 & -c_1 \end{pmatrix}, \quad tI - C_p = \begin{pmatrix} t & -1 \\ c_2 & t + c_1 \end{pmatrix}.$$

Sada je jasno da je $D_1 = 1$ i $D_2 = \det(tI - C_p) = t(t + c_1) + c_2 = t^2 + c_1 t + c_2 = p(t)$. Stoga su invarijantni faktori upravo 1 i p čime je tvrdnja teorema u ovom slučaju dokazana.

Neka je $m \geq 3$ i pretpostavimo da tvrdnja teorema vrijedi za stupanj $m - 1$. Neka je $p(t) = t^m + c_1 t^{m-1} + \cdots + c_{m-1} t + c_m$ tako da je C_p matrica oblika prikazanog u definiciji 2.4.1. Uklonimo li prvi stupac i m-ti redak matrice $tI - C_p$, ostaje nam submatrica tipa $m - 1$ koja je upravo trokutasta matrica s elementima -1 na dijagonali, stoga je njezina determinanta jednaka $(-1)^{m-1} = \pm 1$. Iz toga slijedi da je $D_{m-1} = 1$, stoga je $D_1 = D_2 = \cdots = D_{m-1} = 1$. Preostaje nam dokazati da je $D_m = p(t)$, odnosno da je $\det(tI - C_p) = p(t)$.

Prvi stupac matrice $tI - C_p$ je

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Razvijemo li $\det(tI - C_p)$ po prvom stupcu, opstaju samo dva člana:

$$t\begin{vmatrix} t & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t & -1 \\ c_{m-1} & \cdots & \cdots & c_2 & t + c_1 \end{vmatrix} + (-1)^{m+1}c_m \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t & -1 \end{vmatrix}.$$

Determinanta prvog člana je $\det(tI - C_q)$, gdje je $q(t) = t^{m-1} + c_1t^{m-2} + \cdots + c_{m-2}t + c_{m-1}$. Prema pretpostavci indukcije je navedena determinanta jednaka $q(t)$, stoga je prvi član od $\det(tI - C_p)$ jednak $tq(t)$. Determinanta drugog člana je $(-1)^{m-1}$, stoga je drugi član od $\det(tI - C_p)$ jednak c_m. Zaključujemo da je

$$\det(tI - C_p) = tq(t) + c_m = t^m + c_1t^{m-1} + \cdots + c_{m-1}t + c_m = p(t),$$

čime je dokazana tvrdnja teorema. □

Teorem 2.4.4 (Racionalna kanonska forma)**.** *Ako su $p_1, \ldots, p_r$, gdje $p_i \mid p_{i+1}$, netrivijalni invarijantni faktori matrice $A \in M_n(\mathbb{F})$ i ako je C_{p_i} matrica pridružena polinomu p_i, tada je matrica A slična matrici*

$$C = \begin{pmatrix} C_{p_1} & & & \\ & C_{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{p_r} \end{pmatrix}.$$

Dokaz. Iz definicije 2.3.8 i diskusije koja joj prethodi imamo da je matrica $tI - A$ ekvivalentna matrici $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, p_1, p_2, \ldots, p_r)$. Prema Fundamentalnom teoremu sličnosti (teorem 2.3.15), potrebno je još dokazati da je matrica $tI - C$ ekvivalentna istoj dijagonalnoj matrici.

Označimo sa C_i matricu pridruženu polinomu p_i. Prema teoremu 2.4.3, invarijantni faktori matrice C_i su $1, \ldots, 1, p_i$, pri čemu je $n_i - 1$ broj invarijantnih faktora koji su jednaki 1, gdje je n_i red matrice C_i. Stoga je matrica $tI - C_i$ ekvivalentna matrici $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, p_i)$. Neka su P_i i Q_i unimodularne matrice nad $\mathbb{F}[t]$ takve da je

$$P_i(tI - C_i)Q_i = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, p_i).$$

Matrice

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_r \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_1 & & & \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_r \end{pmatrix}$$

su također unimodularne i vrijedi

$$P(tI - C)Q = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, p_1, 1, \ldots, 1, p_2, \ldots, 1, \ldots, 1, p_r).$$

Primijetimo da elemente b_{ii} i b_{jj} neke matrice B možemo zamijeniti tako da zamijenimo retke i i j. To se može postići množenjem s lijeva i množenjem s desna s istom permutacijskom matricom (matrica koja nastaje iz jedinične matrice nekom permutacijom stupaca ili redaka, ona je sama sebi inverz), što je upravo i definicija sličnih matrica. Ovu transformaciju zbog toga možemo nazvati i „transformacijom sličnosti". Ako je matrica B dijagonalna, matrica koju dobivamo nakon množenja je identična matrici B osim što su njezini elementi b_{ii} i b_{jj} zamijenili mjesta. Slično se mogu permutirati i blokovi dijagonalne blok-matrice.

Sada je dijagonalna matrica s desne strane prethodne jednakosti ekvivalentna dijagonalnoj matrici

$$\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, p_1, p_2, \ldots, p_r),$$

što je i trebalo dokazati. □

Definicija 2.4.5. *Uz oznake iz teorema 2.4.4, matricu C nazivamo racionalnom kanonskom formom matrice A.*

Primjer 2.4.6. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ čiji su netrivijalni invarijantni faktori*

$$t - 1, \quad t^2 - t, \quad (t^2 - t)(t^2 + t + 1).$$

Kako je karakterističan polinom p_A matrice A jednak umnošku netrivijalnih invarijantnih faktora i kako je $\deg p_A = n$*, zaključujemo da je $n = 7$. Stoga su*

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \cdots = p_4(t) = 1, \\ p_5(t) &= t - 1, \\ p_6(t) &= t^2 - t, \\ p_7(t) &= (t^2 - t)(t^2 + t + 1) = t^4 - t. \end{aligned}$$

Matrice pridružene netrivijalnim invarijantnim faktorima su:

$$C_{p_5} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad C_{p_6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i \quad C_{p_7} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrica A je slična svojoj racionalnoj kanonskoj formi, odnosno matrici

$$C = \left(\begin{array}{c|cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Teorem 2.4.7. *Matrice $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ su slične ako i samo ako one imaju jednake racionalne kanonske forme.*

Dokaz. ($\Leftarrow$) Ako matrice A i B imaju istu racionalnu kanonsku formu C, tada su prema teoremu 2.4.4 obje slične matrici C. Iz toga slijedi da su one slične i jedna drugoj.

($\Rightarrow$) Ako su matrice A i B slične, tada prema korolaru 2.3.26 one imaju iste invarijantne faktore. Odakle, prema definiciji 2.4.5 imaju i jednake racionalne kanonske forme. □

2.5 Minimalni polinom. Hamilton-Cayleyev teorem

Naš sljedeći cilj je dokazati da je svaka kvadratna matrica nultočka svog karakterističnog polinoma, odnosno ako je $A \in M_n(\mathbb{F})$, gdje je $\mathbb{F}$ polje, tada je $p_A(A) = 0$. Ključ dokaza možemo pronaći u matricama pridruženim odgovarajućim polinomima.

Lema 2.5.1. *Neka je $p \in \mathbb{F}[t]$ nekonstantni normirani polinom i neka je C_p njemu pridružena matrica. Tada je $p(C_p) = 0$, odnosno matrica C_p pridružena polinomu p je nultočka polinoma p.*

Dokaz. Neka je $D = C_p^\tau$ transponirana matrica matrice C_p. Kako vrijedi da je $(p(C_p))^\tau = p(C_p^\tau) = p(D)$, dovoljno je dokazati da je $p(D) = 0$. Izabrali smo raditi s transponiranom matricom jer nam je njezin matrični prikaz pogodniji s obzirom da ćemo raditi s linearnim operatorom.

Neka je $p(t) = t^m + c_1 t^{m-1} + \cdots + c_{m-1} t + c_m$. Tada je

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_m \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -c_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -c_1 \end{pmatrix}.$$

Neka je V m-dimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, $x_1, \ldots, x_m$ baza vektorskog prostora V i neka je $T \in \mathcal{L}(V)$ linearan operator čiji je matrični prikaz u bazi $x_1, \ldots, x_m$ upravo matrica D. Matrični prikaz operatora $p(T)$ u istoj bazi je $p(D)$, stoga je dovoljno dokazati da je $p(T) = 0$.

Uvidom u matricu D imamo da je

$$\begin{aligned} Tx_i &= x_{i+1} \quad \text{za} \quad i = 1, \ldots, m-1, \\ Tx_m &= -\, c_m x_1 - c_{m-1} x_2 - \cdots - c_1 x_m. \end{aligned}$$

Iz toga slijedi da je

$$T^i x_1 = \; x_{i+1} \quad \text{za} \quad i = 0, 1, \ldots, m-1,$$

dok je

$$\begin{aligned} T^m x_1 &= T(T^{m-1} x_1) = Tx_m \\ &= -\, c_m x_1 - c_{m-1} x_2 - \cdots - c_1 x_m \\ &= -\, c_m I x_1 - c_{m-1} T x_1 - \cdots - c_1 T^{m-1} x_1 \\ &= -\, (c_m I + c_{m-1} T + \cdots + c_1 T^{m-1}) x_1. \end{aligned}$$

Odatle je

$$(T^m + c_1 T^{m-1} + \cdots + c_{m-1} T + c_m I) x_1 = \theta,$$

odnosno imamo da je $p(T)x_1 = \theta$.

Da bismo dokazali da je $p(T) = 0$, dovoljno je dokazati da je $p(T)x_i = \theta$ za $i = 1, \ldots, m$. Za $i = 1$ smo to već dokazali. Za $1 < i \leq m$ imamo da je

$$p(T)x_i = p(T)T^{i-1}x_1 = T^{i-1}p(T)x_1 = T^{i-1}\theta = \theta,$$

što je i trebalo dokazati. □

Lema 2.5.2. *Uz oznake kao u lemi 2.5.1, ako je* $f \in \mathbb{F}[t]$ *nenul polinom sa* $\deg f < \deg p$*, tada je* $f(C_p) \neq 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da je polinom f normiran i neka je

$$f = t^k + a_1 t^{k-1} + \cdots + a_{k-1} t + a_k,$$

gdje je $0 \leq k < m$. Uz oznake kao u lemi 2.5.1, imamo da je

$$\begin{aligned} f(T)x_1 &= T^k x_1 + a_1 T^{k-1} x_1 + \cdots + a_{k-1} T x_1 + a_k I x_1 \\ &= x_{k+1} + a_1 x_k + \cdots + a_{k-1} x_2 + a_k x_1, \end{aligned}$$

stoga je $f(T)x_1 \neq \theta$ zbog linearne neovisnosti vektora $x_1, \ldots, x_{k+1}$. Posebno, $f(T) \neq 0$. Kako $f(T)$ ima matrični zapis $f(D)$ u toj bazi, zaključujemo da je $f(D) \neq 0$, stoga je $f(C_p) \neq 0$. □

Lema 2.5.3. *Uz oznake kao u lemi 2.5.1, ako je $f \in \mathbb{F}[t]$ tada je $f(C_p) = 0$ ako i samo ako $p \mid f$.*

Dokaz. ($\Leftarrow$) Ako $p \mid f$ u $\mathbb{F}[t]$, recimo da je $f = pq$, tada prema lemi 2.5.1 imamo da je $f(C_p) = p(C_p)q(C_p) = 0q(C_p) = 0$.

($\Rightarrow$) Prema algoritmu za dijeljenje, zapišimo da je $f = qp + r$, gdje je $r = 0$ ili je $\deg r < \deg p$. Uz pretpostavku da je $f(C_p) = 0$, dokažimo da je $r = 0$. Imamo sljedeće:

$$r(C_p) = f(C_p) - q(C_p)p(C_p) = 0 - q(C_p)0 = 0.$$

Kako je, prema lemi 2.5.2, isključena mogućnost da je $\deg r < \deg p$, preostaje nam da je $r = 0$. □

Definicija 2.5.4. *Neka su $p_1, \dots, p_n$ uz $p_i \mid p_{i+1}$ invarijantni faktori matrice $A \in M_n(\mathbb{F})$. Neka je r broj invarijantnih faktora koji su jednaki 1. Dakle, $1, \dots, 1, p_{r+1}, \dots, p_n$ su invarijantni faktori matrice A, pri čemu su $p_{r+1}, \dots, p_n$ nekonstantni polinomi. Prvih r invarijantnih faktora nazivamo trivijalnim, dok preostale netrivijalnim invarijantnim faktorima. Posljednji invarijantni faktor nazivamo minimalnim polinomom matrice A i označavamo $p_n = m_A$. Primijetimo kako je karakterističan polinom p_A matrice A produkt netrivijalnih invarijantnih faktora, dok je minimalni polinom matrice A upravo invarijantan faktor s najvećim stupnjem.*

Teorem 2.5.5 (Teorem o minimalnom polinomu)**.** *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ i neka je m_A minimalni polinom matrice A. Za $f \in \mathbb{F}[t]$ vrijedi da je $f(A) = 0$ ako i samo ako $m_A \mid f$.*

Dokaz. Neka su $p_1, \dots, p_r$ netrivijalni invarijantni faktori matrice A, gdje $p_i \mid p_{i+1}$ za $i = 1, \dots, r-1$. Prema definiciji je $m_A = p_r$. Neka je C racionalna kanonska forma matrice A i neka je C_i matrica pridružena polinomu p_i. Stoga imamo da je $C = \operatorname{diag}(C_1, \dots, C_r)$. Kako $p_i \mid m_A$, prema lemi 2.5.3 imamo da je $m_A(C_i) = 0$ za $i = 1, \dots, r$, zbog čega je i $m_A(C) = 0$.

Prema teoremu 2.4.4, matrica A je slična matrici C pa neka je $A = Q^{-1}CQ$. Preslikavanje $B \mapsto Q^{-1}BQ$ je automorfizam prstena $M_n(\mathbb{F})$ i posebice vrijedi $Q^{-1}C^kQ = (Q^{-1}CQ)^k$ za $k = 0, 1, 2, \dots$. Stoga je

$$m_A(A) = m_A(Q^{-1}CQ) = Q^{-1}m_A(C)Q = Q^{-1}0Q = 0,$$

odnosno A je nultočka svog minimalnog polinoma.

($\Leftarrow$) Ako $m_A \mid f$, tada je $f(A) = 0$, što je jasno iz prethodno navedenog.

($\Rightarrow$) Ako je $f(A) = 0$, tada je $f(C) = f(QAQ^{-1}) = Qf(A)Q^{-1} = 0$. Stoga je $f(C_i) = 0$ za $i = 1, \dots, r$. Posebice imamo da je $f(C_r) = 0$. Konačno, prema lemi 2.5.3 slijedi da $m_A \mid f$. □

Korolar 2.5.6 (Hamilton-Cayleyjev teorem)**.** *Ako je $A \in M_n(\mathbb{F})$, tada $p_A(A) = 0$.*

Dokaz. Prema definiciji 2.5.4, za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi da $m_A \mid p_A$. Odatle, nakon primjene teorema 2.5.5 slijedi da je $p_A(A) = 0$, što je i trebalo dokazati. □

Definicija 2.5.7. *Za polje $\mathbb{F}$ kažemo da je algebarski zatvoreno polje ako svaki nekonstantni polinom $p \in \mathbb{F}[t]$ možemo zapisati kao produkt polinoma prvog stupnja s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$. Drugim riječima, ako svaki nekonstantni polinom iz $\mathbb{F}[t]$ ima bar jednu nultočku u $\mathbb{F}$.*

Teorem 2.5.8. *Neka je $\mathbb{F}$ algebarski zatvoreno polje, $A \in M_n(\mathbb{F})$ i m_A minimalni polinom matrice A. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

- *(a) A je slična (nad $\mathbb{F}$) dijagonalnoj matrici;*
- *(b) nultočke minimalnog polinoma m_A su različite.*

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b): Neke slične matrice imaju jednake invarijatne faktore, posebice mogu imati i jednake minimalne polinome. Pretpostavimo da je matrica A dijagonalna. Elementi na dijagonali matrice A su nultočke polinoma p_A, odnosno karakteristične vrijednosti matrice A. Pretpostavimo da su $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ različite karakteristične vrijednosti matrice A. Primijenimo li neku „transformaciju sličnosti" (slično smo koristili u dokazu teorema 2.4.4), možemo pretpostaviti da su jednaki elementi na dijagonali matrice A grupirani zajedno. Pretpostavimo da je

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_1 & & & \\ & \boxed{\lambda_2 I_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s I_s \end{pmatrix},$$

gdje je I_k jedinična matrica reda jednakog kratnosti karakteristične vrijednosti λ_k u polinomu p_A.

Neka je $q(t) = (t - \lambda_1) \ldots (t - \lambda_s)$. Jasno je da je $q(A) = 0$, iz čega prema teoremu 2.5.5 slijedi da $m_A \mid q$. Kako su nultočke polinoma q različite, isto vrijedi i za m_A. Štoviše, kako svi invarijantni faktori matrice A dijele m_A i kako je njihov produkt p_A, te kako m_A ne izostavlja nijednu nultočku od p_A, imamo da je $m_A = q$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Svaki invarijantni faktor od A je djelitelj od m_A, stoga svaki ima različite nultočke. Neka su $p_1, \ldots, p_r = m_A$ netrivijalni invarijantni faktori matrice A, neka je C_i matrica pridružena polinomu p_i i $C = \operatorname{diag}(C_1, \ldots, C_r)$ racionalna kanonska forma matrice A. Kako, prema teoremu 2.4.3, C_i ima karakteristični polinom p_i i kako su nultočke od p_i različite, prema teoremu 2.2.10 slijedi da je C_i slična dijagonalnoj matrici. Pretpostavimo da je $P_i^{-1} C_i P_i$ dijagonalna matrica za $i = 1, \ldots, r$. Tada je matrica $P = \operatorname{diag}(P_1, \ldots, P_r)$ invertibilna i matrica C je slična dijagonalnoj matrici $P^{-1}CP$. Stoga je, prema teoremu 2.4.4 i matrica A slična istoj dijagonalnoj matrici. □

Teorem 2.5.9. *Ako je R Euklidova integralna domena, $a, b \in R$ relativno prosti, tada su matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$$

ekvivalentne nad R i invarijantni faktori matrice A su $1, ab$.

Dokaz. Neka su $D_i(A)$ za $i = 1, 2$ i-ti djelitelji determinante matrice A. Kako je $D_2(A) = \det A = ab$ i $(a, b) = 1$, slijedi da je $D_1(A) = 1$. Za matricu B dobivamo da je $D_2(B) = D_2(A) = ab$ i $D_1(B) = D_1(A) = 1$. Iz toga prema teoremu 2.3.24 slijedi da su matrice A i B ekvivalentne nad R i $1, ab$ su invarijantni faktori matrice A. □

2.6 Elementarni djelitelji. Jordanova kanonska forma

U ovom potpoglavlju pretpostavljamo da je polje $\mathbb{F}$ algebarski zatvoreno, stoga svaki nekonstantni polinom $p \in \mathbb{F}[t]$ ima nultočke iz $\mathbb{F}$ i p je produkt linearnih polinoma iz $\mathbb{F}[t]$.

Pretpostavimo da $A \in M_n(\mathbb{F})$ ima netrivijalne invarijantne faktore $p_1, \dots, p_r$, gdje $p_i \mid p_{i+1}$ i da je $m_A = p_r$ minimalni polinom matrice A. Pretpostavimo da karakteristični polinom p_A ima s različitih nultočki $c_1, \dots, c_s$ koje mogu biti i višestruke. Kako je $p_A = p_1 \cdots p_r$, nultočke svakog p_i možemo naći među c_i, a kako su p_i normirani imamo da su

$$\begin{aligned}
p_1(t) &= (t - c_1)^{\alpha_{11}}(t - c_2)^{\alpha_{12}} \cdots (t - c_s)^{\alpha_{1s}}, \\
p_2(t) &= (t - c_1)^{\alpha_{21}}(t - c_2)^{\alpha_{22}} \cdots (t - c_s)^{\alpha_{2s}}, \\
&\vdots \\
p_r(t) &= (t - c_1)^{\alpha_{r1}}(t - c_2)^{\alpha_{r2}} \cdots (t - c_s)^{\alpha_{rs}},
\end{aligned}$$

za odgovarajuće brojeve $\alpha_{ij} \in \mathbb{N}$. Ti brojevi imaju sljedeća svojstva:

(a) Za svaki $i = 1, \dots, r$ vrijedi da je
$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij} = \deg p_i \geq 1 \quad \text{(odnosno } p_i \text{ nisu trivijalni polinomi).}$$

(b)
$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij} = \sum_{i=1}^{r} \deg p_i = \deg p_A = n.$$

(c) Za svaki $j = 1, \dots, s$, vrijedi $\alpha_{1j} \leq \alpha_{2j} \leq \dots \alpha_{rj}$ (jer $p_i \mid p_{i+1}$).

(d) Za svaki $j = 1, \dots, s$ je $\alpha_{rj} > 0$ (jer je c_i nultočka polinoma p_A, stoga je i nultočka polinoma m_A).

Definicija 2.6.1. *Uz prethodne oznake, polinome* $(t - c_j)^{\alpha_{ij}}$ *za koje je* $\alpha_{ij} > 0$ *zovemo elementarnim djeliteljima matrice* A*.*

Prema tome, svaki netrivijalni invarijantni faktor je produkt nekih elementarnih djelitelja, te je produkt svih elementarnih djelitelja upravo karakteristični polinom.

Primjer 2.6.2. *Neka matrica* A *ima netrivijalne invarijantne faktore*

$$(t-1)(t^2-2), \quad (t^2-2)(t+1)^2.$$

Tada je $p_A(t) = (t-1)(t^2-2)^2(t+1)^2$ *stupnja* 7 *i* A *je kvadratna matrica reda* 7*. Invarijantni faktori matrice* A *su:*
$p_1(t) = p_2(t) = p_3(t) = p_4(t) = p_5(t) = 1, \quad p_6(t) = (t-1)(t^2-2), \quad p_7(t) = (t^2-2)(t+1)^2.$

Elementarni djelitelji matrice A *su:*

$$t-2, \quad t-2, \quad t-1, \quad t+2, \quad t+2, \quad (t+1)^2.$$

Primjer 2.6.3. *Neka matrica* A *ima elementarne djelitelje*

$$t-3, \quad (t-3)^2, \quad t+1, \quad (t+1)^2, \quad (t+1)^3, \quad t+4.$$

Njihov produkt je polinom $p_A(t) = (t-3)^3(t+1)^6(t+4)$ *sa stupnjem* 10*, pa je* A *kvadratna matrica reda* 10*. Invarijantni faktori matrice* A *su*

$$\begin{aligned} p_{10}(t) &= (t-3)^2(t+1)^3(t+4) = m_A(t), \\ p_9(t) &= (t-3)(t+1)^2, \\ p_8(t) &= t+1, \\ p_7(t) &= \cdots = p_1(t) = 1. \end{aligned}$$

Iz definicije 2.6.1 je jasno da invarijantni faktori određuju elementarne djelitelje. Iz prethodnog primjera je također jasno da elementarni djelitelji određuju invarijantne faktore na način da ih „rekonstruiraju" kao svoje produkte počevši s najvećim stupnjevima različitih linearnih faktora.

Teorem 2.6.4. *Neka je* $\mathbb{F}$ *algebarski zatvoreno polje. Matrice* $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ *su slične (nad poljem* $\mathbb{F}$*) ako i samo ako one imaju iste elementarne djelitelje.*

Dokaz. Na temelju prethodnih primjera, dokaz slijedi direktno iz korolara 2.3.26. □

Prema teoremu 2.4.4, svaka je matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ slična svojoj racionalnoj kanonskoj formi. Racionalna kanonska forma sastavljena je od blokova matrica pridruženih netrivijalnim invarijantnim faktorima koje dobivamo iz posebne faktorizacije karakterističnog polinoma.

Elementarni djelitelji također zahtjevaju posebnu faktorizaciju karakterističnog polinoma. Također, postoji posebna matrica slična matrici A koju zovemo Jordanovom kanonskom formom matrice A. Ona je sastavljena od blokova koji odgovaraju određenom elementarnom djelitelju $(t-c)^m$, točnije od kvadratnih matrica $J_m(c)$ reda m definiranih u daljnjem tekstu.

Definicija 2.6.5. *Neka je $c \in \mathbb{F}$ i m pozitivan cijeli broj. Matricu definiranu sa*

$$J_m(c) = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & c & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & c & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & c \end{pmatrix}$$

zovemo Jordanovom blok matricom.

Dogovorno, $J_1(c)$ je kvadratna matrica prvog reda $\big(c\big)$.

Lema 2.6.6. *Neka je $J_m(c)$ Jordanova blok matrica. Tada je $(t-c)^m$ njezin karakteristični polinom, minimalni polinom i jedini elementarni djelitelj, te je matrica $tI - J_m(c)$ ekvivalentna nad $\mathbb{F}[t]$ dijagonalnoj matrici* $\operatorname{diag}(1,\ldots,1,(t-c)^m)$.

Dokaz. Uočimo, uklonimo li prvi stupac i m-ti redak matrice $tI - J_m(c)$ ostaje nam submatrica reda $m-1$ koja je upravo trokutasta matrica s elementima -1 na dijagonali. Njezina je determinanta jednaka $(-1)^{m-1}$, iz čega zaključujemo da je $D_{m-1} = 1$. Iz toga slijedi da je matrica $tI - J_m(c)$ ekvivalentna nad $\mathbb{F}[t]$ matrici

$$\operatorname{diag}(1,\ldots,1,(t-c)^m).$$

Stoga je $(t-c)^m$ karakterističan polinom, minimalan polinom i jedini elementarni djelitelj matrice $J_m(c)$. □

Lema 2.6.7. *Neka su $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_s$ pozitivni cijeli brojevi, $c \in \mathbb{F}$ i*

$$B = \begin{pmatrix} J_{\alpha_1}(c) & & & \\ & \boxed{J_{\alpha_2}(c)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\alpha_s}(c) \end{pmatrix}.$$

Tada je matrica $tI - B$ ekvivalentna nad $\mathbb{F}[t]$ matrici $\operatorname{diag}(1,\ldots,1,(t-c)^{\alpha_1},\ldots,(t-c)^{\alpha_s})$, *gdje je broj trivijalnih invarijantnih faktora jednak $\alpha_1+\cdots+\alpha_s-s$. Štoviše, $(t-c)^{\alpha_1},\ldots,(t-c)^{\alpha_s}$ su netrivijalni invarijantni faktori i elementarni djelitelji matrice B.*

Dokaz. Matrica $tI - B$ ekvivalentna je nad $\mathbb{F}[t]$ dijagonalnoj matrici

$$\operatorname{diag}(1,\ldots,1,(t-c)^{\alpha_1},1,\ldots,1,(t-c)^{\alpha_2},\ldots,1,\ldots,1,(t-c)^{\alpha_s}).$$

Stoga je ekvivalentna i dijagonalnoj matrici

$$\operatorname{diag}(1,\ldots,1,(t-c)^{\alpha_1},(t-c)^{\alpha_2},\ldots,(t-c)^{\alpha_s}).$$

Prema tome su $(t-c)^{\alpha_1},\ldots,(t-c)^{\alpha_s}$ netrivijalni invarijantni faktori i elementarni djelitelji matrice B. □

Teorem 2.6.8 (Jordanova kanonska forma)**.** *Neka je $\mathbb{F}$ algebarski zatvoreno polje, matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ i pretpostavimo da su*

$$(t - c_1)^{k_1}, (t - c_2)^{k_2}, \ldots, (t - c_r)^{k_r}$$

elementarni djelitelji matrice A, gdje c_i nisu nužno različiti i k_i nisu u nekom posebnom poretku. Tada je matrica A slična nad poljem $\mathbb{F}$ matrici

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(c_1) & & & \\ & J_{k_2}(c_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_r}(c_r) \end{pmatrix}.$$

Dokaz. Prema teoremu 2.6.4, dovoljno je dokazati da matrica J ima iste elementarne djelitelje kao i matrica A. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po broju r elementarnih djelitelja matrice A. U slučaju kada je $r = 1$, tvrdnja je dokazana u lemi 2.6.6.

Neka je $r \geq 2$ i pretpostavimo da tvrdnja teorema vrijedi kada je broj elementarnih djelitelja matrice A manji od r. Neka je $c_1 = c$ i neka je s broj pojavljivanja nultočke c među nultočkama c_i elementarnih djelitelja matrice A. Jordanove blokove koji čine matricu J možemo permutirati (koristeći neku „transformaciju sličnosti") tako da se prvo pojavljuje s blokova vezanih uz nultočku c i to od najmanje do najveće potencije odgovarajućeg elementarnog djelitelja. Sada je matrica J oblika

$$J = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

gdje matrica B sadrži prvih s blokova i matrica C preostale blokove na dijagonali matrice J. Prema lemi 2.6.7, matrica B ima elementarne djelitelje

$$(t - c)^{k_1}, (t - c)^{k_2}, \ldots, (t - c)^{k_s}.$$

Prema pretpostavci indukcije, elementarni djelitelji matrice C su preostali elementarni djelitelji matrice A, odnosno

$$(t - c_i)^{k_i} \quad \text{za} \quad i > s.$$

Jasno je da je $(p_B, p_C) = 1$. Faktorizacija invarijantnih faktora pokazuje da elementarne djelitelje matrice J čine elementarni djelitelji matrice B zajedno s elementarnim djeliteljima matrice C, odnosno da matrice J i A imaju iste elementarne djelitelje. □

Definicija 2.6.9. *Uz oznake kao u teoremu 2.6.8, matricu J nazivamo Jordanovom kanonskom formom matrice A.*

Teorem 2.6.10. *Ako je polje $\mathbb{F}$ algebarski zatvoreno, tada je svaka matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ slična (nad poljem $\mathbb{F}$) trokutastoj matrici B.*

Dokaz. Prema teoremu 2.6.8 imamo da je matrica A slična nad poljem $\mathbb{F}$ svojoj Jordanovoj kanonskoj formi, koja je prema definiciji 2.6.5 upravo gornjetrokutasta matrica. □

Napomena 2.6.11. *Neka je $B = (b_{ij})$, uz iste oznake kao u teoremu 2.6.10. Tada je*

$$p_A(t) = (t - b_{11})(t - b) \dots (t - b_{nn}),$$

tj. elementi na dijagonali matrice B su upravo svojstvene vrijednosti matrice A. Dokaz je trivijalan za $n = 1$, tvrdnja se jednostavno dokaže pomoću indukcije (razvijanjem $\det(tI - B)$ *po n-tom retku).*

Primjer 2.6.12. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ čiji su elementarni djelitelji $(t-2)^3, (t+3)^2, (t+3)^2$. Tada je polinom $p_A(t) = (t-2)^3(t+3)^2(t+3)^2$ stupnja 7 te je A matrica reda 7. Tada su Jordanove blok matrice koje pripadaju pojedinom elementarnom djelitelju sljedeće:*

$$J_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad i \quad J_2(-3) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Zaključujemo, matrica A slična je svojoj Jordanovoj kanonskoj formi, odnosno matrici

$$J = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Općenito, ne postoji preferirani poredak karakterističnih nultočki, zbog čega Jordanova kanonska forma nije jedinstvena. No, možemo reći da je jedinstvena do na poredak blokova. Stoga, kad kažemo da neke matrice A i B imaju „iste" Jordanove kanonske forme, pretpostavljamo da njihove odgovarajuće matrice J možemo jednu iz druge dobiti nekom permutacijom blokova na dijagonali. Primijetimo da je takva permutacija blokova upravo „transformacija sličnosti".

Teorem 2.6.13. *Neka je $\mathbb{F}$ algebarski zatvoreno polje. Matrice $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ su slične ako i samo ako imaju „iste" Jordanove kanonske forme.*

Dokaz. Ako matrice A i B imaju „iste" Jordanove kanonske forme, tada su prema teoremu 2.6.8 obje slične matrici J. Iz toga slijedi da su matrice A i B slične i jedna drugoj.

Obrnuto, ako su matrice A i B slične, tada prema teoremu 2.6.4 imaju jednake elementarne djelitelje. Iz toga prema definiciji 2.6.9 slijedi da imaju „iste" Jordanove kanonske forme. □

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] S. K. Berberian, *Linear Algebra*, Dover Publications, New York, 2014.

[3] K. Horvatić, *Linearna algebra*, Golden marketing, Zagreb, 2004.

[4] B. Širola, *Algebarske strukture*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/alg/predavanja/ASpred.pdf` (studeni 2019.)

[5] Z. Franušić i J. Šiftar, *Linearna algebra 1*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~fran/predavanja-LA1.pdf` (studeni 2019.)

[6] Z. Franušić i J. Šiftar, *Linearna algebra 2*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~fran/predavanja-LA2.pdf` (studeni 2019.)

Sažetak

Za matrice $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ kažemo da su slične nad poljem $\mathbb{F}$ ako postoji regularna matrica $P \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $B = P^{-1}AP$. U ovom diplomskom radu izloženi su različiti nužni i dovoljni uvjeti za sličnost matrica. Sličnost matrica promatramo kao moćan alat za transformaciju matrica u što jednostavniji oblik, misleći pritom na dijagonalne ili trokutaste matrice.

Summary

Matrices $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ are said to be similar over a field $\mathbb{F}$ if there exists an invertible matrix $P \in M_n(\mathbb{F})$ such that $B = P^{-1}AP$. In this thesis various necessary and sufficient conditions for the similarity of matrices are presented. We consider the similarity of matrices as a powerful tool for transforming matrices into simpler forms, like diagonal or triangular matrices.

Životopis

Rođena sam 30. listopada 1991. godine u Varaždinu, pod prezimenom Ružić. Svoje djetinjstvo sam provela u malom selu Zamlaka koje se nalazi između Varaždina i Ludbrega. U istom selu živim i sada. Svoje osnovnoškolsko obrazovanje završavam u OŠ Šemovec, u susjednom selu Šemovec. Po završetku osnovne škole, upisujem prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Prvoj gimnaziji Varaždin, gdje pred kraj četverogodišnjeg obrazovanja razvijam ljubav prema matematici. Nakon toga, 2010. godine upisujem preddiplomski studij Matematika, smjer: nastavnički, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2013. osnivam vlastitu obitelj i postajem majka prekrasne djevojčice Ele. Akademski naziv prvostupnice edukacije matematike stječem 2016. godine. Nakon toga, tijekom školske godine 2016./2017., radim na mjestu učitelja matematike u OŠ Novi Marof i stječem korisna radna iskustva. Daljnje obrazovanje nastavljam 2017. godine na diplomskom studiju Matematika, smjer: nastavnički, na istom fakultetu.