Osnovni koncepti teorije nepreciznih vjerojatnosti

Seljan, Bruno

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Bruno Seljan

OSNOVNI KONCEPTI TEORIJE NEPRECIZNIH VJEROJATNOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Miljenko Huzak

Zagreb, studeni 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

0.1 O pojmu neprecizne vjerojatnosti

Teorija vjerojatnosti je matematička disciplina koja se bavi proučavanjem sustava u nedeterminističkom okruženju; dakle u okruženju u kojem iz nekih razloga postoji "nesigurnost" u smislu slučajnosti ili neizvjesnosti. Dobivši veliki zamah u 20. stoljeću, teorija vjerojatnosti iznjedrila je brojne velike rezultate te se opravdano koristi u raznim domenama znanosti, financija, inženjerstva i brojnih drugih disciplina u vidu statističkih obrada podataka, analize slučajnih procesa i ostalim primjenama.

Glavno opravdanje takvog univerzalnog korištenja moderne teorije vjerojatnosti je upravo to što je ta teorija doista *matematička*; kao i svaka druga matematička disciplina, ona počiva na aksiomima (A. Kolmogorov, 1933.) i izvoda teorema iz njih strogim logičkim pravilima. Pritom je glavna korištena struktura u cjelokupnoj teoriji objekt pod nazivom *vjerojatnosni prostor* - uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdje je Ω neprazan skup, $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω, a $\mathbb{P}$ vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$. Prema Kolmogorovljevim aksiomima vjerojatnost je, laički rečeno, "funkcija koja uz neka prirodna pravila događajima pridružuje broj između 0 i 1". Naravno, u primjenama je sasvim moguće da *a priori* ne znamo vjerojatnost nekog događaja, ali uzevši spomenute aksiome u obzir mi znamo da je to jedan jedini broj - trenutno možda nepoznat, ali jedinstven. Tada taj broj, koristeći alate teorije vjerojatnosti, možemo konkretno izračunati ili barem procijeniti na nekoj razini točnosti.

Ono što se pokazuje problemom u praksi su situacije u kojima Kolmogorovljevi aksiomi nisu nužno zadovoljeni. Drugim riječima, čak i ako imamo dobro definirane skupove Ω i $\mathcal{F}$ (to jest ako znamo sva moguća "stanja svijeta" - što također može biti problem), ponekad jednostavno ne znamo događajima pridružiti funkciju koja bi doista predstavljala njihovu stvarnu vjerojatnost, a ujedno i zadovoljavala Kolmogorovljeve aksiome (pritom se najčešće aksiom o σ-aditivnosti smatra problematičnim). Ako pak to uspijemo napraviti, zbog manjka dodatnih informacija ta vjerojatnosna mjera ne mora biti jedinstvena: može postojati čitav skup vjerojatnosti koje u danoj situaciji "imaju smisla". Postavlja se pitanje što nam je činiti u takvim slučajevima. Nasilno pridruživanje konkretne vjerojatnosne mjere danim događajima nam tada, doduše, omogućuje korištenje teorijskih rezultata, međutim takvo postupanje može donijeti rezultate koji se ne slažu sa stvarnošću.

Ukratko, imamo model, ali potencijalno katastrofalan.

Upravo zbog javljanja takvih i sličnih problema rodila se potreba za konceptom neprecizne vjerojatnosti. Ideja je da neprecizna vjerojatnost, što god ona bila, bude pojam koji obuhvaća ne samo vjerojatnost događaja od interesa, nego i "razinu sigurnosti", što god to značilo, da je ta vjerojatnost dobro pridružena. Riječ *neprecizna* u toj sintagmi direktno asocira na posljedice koje proizlaze iz zamjene preciznih vjerojatnosti nepreciznima: ako kažemo da je vjerojatnost događaja 20%, to je precizno, ali možda pogrešno. Ako kažemo da je vjerojatnost istog događaja između 10% i 30%, to je točno (ako dobro računamo), ali neprecizno. U djelu koje se često smatra najbitnijim u teoriji nepreciznih vjerojatnosti, knjizi *Statistical reasoning with imprecise probabilities*, autor Peter Walley razlikuje dva tipa nesigurnosti odnosno neizvjesnosti: *aleatoric uncertianty* (od lat. *alea* - kocka, igra na sreću), ono što smatramo slučajnošću u izvođenju slučajnog pokusa, te *epistemic uncertianty* (od grč. *episteme* - znanje) što predstavlja nesigurnost o informacijama o pokusu samom po sebi, kao i u svojstva modela koji ga opisuje. Može li (klasična, precizna) teorija vjerojatnosti opisati takve situacije? Iako su već godinama u upotrebi statističke metode koje u nekoj mjeri uzimaju u obzir više lica neizvjesnosti (bayesovske metode), iste metode bile su podvrgnute kritikama od strane zagovaratelja neprecizne vjerojatnosti zato što niti one na prihvatljiv način ne pokrivaju razne probleme ranije opisane prirode (detaljna usporedba nepreciznih vjerojatnosti i bayesovskih metoda dana je u [6]).

Teorija nepreciznih vjerojatnosti (*Imprecise probability theory*) usprkos nazivu nije jedna jedinstvena teorija, nego se koristi kao zajednički naziv za čitav skup teorija koje se bave navedenim i srodnim problemima. One su povijesno nastajale često inspirirane jedna drugom, iako svaka na različitoj strani svijeta i sa svojom izvornom motivacijom, pa ne čudi pretjerano da je vrijeme pokazalo da se definicije i rezultati jedne teorije mogu "izreći jezikom" neke druge teorije, tako da bi se jedna teorija često pokazala samo kao poseban slučaj neke druge. Iako neke od ideja datiraju još iz prve polovice 20. stoljeća, sam pojam *neprecizna vjerojatnost* prvi put spominje Peter Walley 1991. godine u ranije spomenutom djelu [6]. Upravo je to djelo populariziralo teoriju i dalo joj zamah koji raste do danas (usprkos još uvijek relativno slaboj popularnosti) tako da su, za neke od tih teorija, ostvareni zaista hvalevrijedni rezultati (recimo samo da je 2012. godine objavljen generalizirani Kolmogorovljev jaki zakon velikih brojeva za neaditivne vjerojatnosti [2]).

Spomenimo sada neke od najpopularnijih postojećih teorija. Uz dio njih navedene su neke, iako nipošto jedine, za tu teoriju zaslužne osobe.

- Teorija donjih predviditelja (*Theory of lower previsions*) - Peter Walley
- Dempster-Shaferove funkcije vjerovanja (*Dempster-Shafer belief functions*) - Arthur Dempster, Glenn Shafer
- Intervalne vjerojatnosti (*Interval probability*) - Vladimir Kuznetsov, Kurt Weichselberger

- *Probability boxes*
- *Possibility theory*
- Neaditivne vjerojatnosne mjere (*Non-additive probability measures*) - Dieter Denneberg

Osim gore navedenih, još neki zagovaratelji nepreciznog pristupa vjerojatnosti bili su John Keynes, Bruno de Finetti, Vladimir Vovk, Henry Kyburg te Isaac Levi.

0.2 Motivacija

U ovome dijelu nastojat ćemo uvjeriti čitatelja da se prethodno uvedeni pojmovi i ideje prirodno javljaju u raznim problemima u praksi.

Primjer 0.2.1. *(Ellsbergov paradoks, 1961.)*
Dana je kutija koja sadrži crvene, bijele i plave kuglice. Znamo da je ukupno 90 kuglica u kutiji, a od toga ih je točno 30 crvenih. Nemamo nikakvih informacija o broju bijelih i plavih kuglica (osim što znamo da ih je ukupno 60). Igraču su ponuđene dvije lutrije (tj. oklade). U svakoj od njih on izvlači naslijepo jednu kuglicu iz kutije. Lutrije su opisane ovako:

- *Lutrija A: Igrač je nagrađen ako izvuče crvenu kuglicu.*
- *Lutrija B: Igrač je nagrađen ako izvuče plavu kuglicu.*

Nagrade su jednake u oba slučaja. Da smo mi osoba koja igra ovu igru, koju bismo lutriju izabrali?

Naglasimo još jednom da, osim što u zbroju daju 60, ne znamo ništa o broju bijelih i plavih kuglica u kutiji; ne znamo čak niti je li svaka njihova distribucija jednako vjerojatna.

Ovaj se eksperiment često spominje kao primjer situacije u kojoj je primjena teorije vjerojatnosti problematična, a takva je zato što imamo ”gotovo potpuno neznanje” o distribuciji bijelih i plavih kuglica. Naime, česta je praksa da se u takvim situacijama pretpostavlja jednaka vjerojatnost svih mogućih distribucija - dakle uniformnost - a pretpostavljanje određene distribucije sa sobom nužno donosi neke informacije koje zapravo nemamo.

Kao što ćemo kasnije vidjeti, više teorija nepreciznih vjerojatnosti, pa tako i ona kojom se pretežito bavimo u ovom radu, motivirano je teorijom donošenja odluka (eng. *Decision theory*). Rezultat Ellsbergovog pokusa je taj da velika većina ispitanika preferira Lutriju A. Primijetimo: iako je ishod izvlačenja u obje lutrije slučajan, to su ipak različiti tipovi slučajnosti (u ranije spomenutom Walleyevom smislu - Lutrija B u sebi uključuje *epistemic uncertianty*, odnosno ono što se u engleskom često naziva *ambiguity* - dok Lutrija A uključuje samo "pitomiji" oblik slučajnosti). Iako vrlo zanimljivi, za potrebe ovog rada ipak nisu toliko bitni sami rezultati eksperimenta, nego činjenica da ga je, u okviru nepreciznih vjerojatnosti, jednostavno modelirati. Kao primjer uzmimo teoriju u kojoj su vjerojatnosti događaja dane intervalima u segmentu $[0, 1]$. Tada ishod izvlačenja kuglice možemo naprosto prikazati kao: $\mathbb{P}(Crvena) = \{\frac{1}{3}\}, \mathbb{P}(Bijela) = \mathbb{P}(Plava) = [0, \frac{2}{3}]$.

Spomenuti princip modeliranja potpune odsutnosti informacija uniformnom distribucijom korijene vuče barem od Laplacea i uglavnom se naziva "princip indiferencije" (eng. *principle of indifference*), a njegovo matematičko opravdanje je takozvani princip maksimalne entropije. Intuitivno gledano, ako o slučajnom pokusu ne znamo apsolutno ništa osim njegovih mogućih ishoda, onda nemamo razloga preferirati neki od ishoda naspram ostalih (tako se događaj "pasti će pismo" smatra jednako vjerojatnim ako bacamo simetričan novčić i ako bacamo novčić nepoznate pristranosti). Princip indiferencije se često nalazi na meti kritičara preciznih vjerojatnosti i bayesovskih metoda. Idući primjer pokazuje što se može dogoditi ako problem koji želimo riješiti ne iskažemo dovoljno detaljno.

Primjer 0.2.2. *(Tvornica kocaka - van Fraasen, 1989.)*

Zamislimo tvornicu koja proizvodi kocke, sve identične ali nepoznate veličine. Dvije osobe su dobile djelomične informacije o veličini kocke: duljina brida kocke je neki broj između 0 i 2 cm. To je ujedno i jedina dostupna informacija.

Osobe su zatim upitane kolika je vjerojatnost da je površina stranice kocke između 0 i 1 cm^2.

Prva upitana osoba bi mogla imati ovakav tok misli: "Znam da je duljina brida kocke između 0 i 2 *cm*. Tada je vjerojatnost da je duljina brida između 0 i 1 *cm* jednaka $\frac{1}{2}$, jer nemam razloga za duljinu brida preferirati interval [0,1] naspram intervala [1,2], a niti obrnuto. Iz geometrije znam kako je površina stranice kocke između 0 i 1 cm^2 ako i samo ako je duljina brida kocke između 0 i 1 *cm*, a već sam zaključio da je vjerojatnost toga jednaka $\frac{1}{2}$. Dakle, tražena vjerojatnost je $\frac{1}{2}$."

Druga pak osoba može razmišljati ovako: "Znam da je duljina brida kocke između 0 i 2 *cm*. Iz geometrije tada znam da je površina stranice kocke između 0 i 4 cm^2. To pak znači da je vjerojatnost da je ta površina između 0 i 1 cm^2 jednaka $\frac{1}{4}$, jer nemam razloga za površinu stranice preferirati interval [0,1] naspram intervala [1,2], [2,3] i [3,4], a niti obrnuto. Dakle, tražena vjerojatnost je $\frac{1}{4}$."

Primijetimo da su oba ispitanika u nekom trenutku iskoristila Laplaceov princip indiferencije u svom zaključivanju. Obojica su zbog ograničenosti dostupnih informacija pretpostavili uniformnu distribuciju, ali je nisu pretpostavili na istoj domeni: prvi ispitanik ju je pretpostavio na duljinama bridova, a drugi na površinama stranica. Tako su ispitanici, koji su imali identične početne informacije, istome događaju pridružili različite vjerojatnosti. Da stvar bude gora, slično smo pitanje mogli postaviti i za volumen kocke - tada bismo imali tri različita rezultata jer je problem moguće riješiti na tri različita načina.

Opisani je primjer inspiriran starijim problemom poznatim pod nazivom Bertrandov paradoks, u kojem je postavljeno pitanje računanja vjerojatnosti vezanih za duljinu slučajno odabrane tetive neke kružnice. Pouka Bertrandovog i van Fraasenovog problema je ista - jer tetiva kružnice se može slučajno odabrati na više od jednog načina, a za različite načine dolazimo do različitih rješenja.

Iako se nazivaju paradoksima, oni to, gledano iz perspektive teorije vjerojatnosti, zapravo nisu. Sve što je potrebno da se dobije jedinstveni rezultat je specificirati na koji se konkretan način nešto slučajno odabire, odnosno jasno definirati domenu nad kojom pretpostavljamo uniformnu distribuciju. No čitava poanta uvođenja nepreciznih vjerojatnosti jest modeliranje u svijetu u kojem takvih dodatnih informacija jednostavno nemamo.

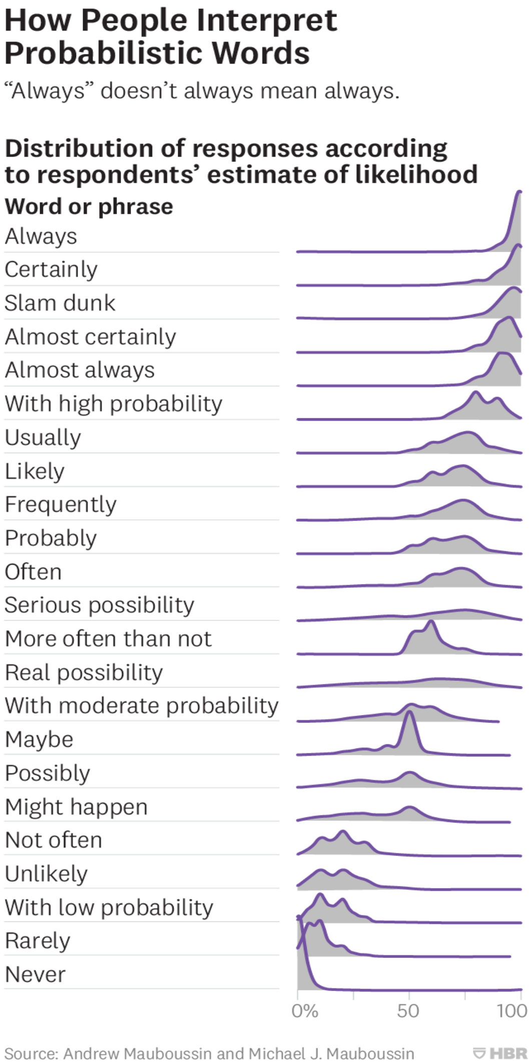
Spomenimo još jedan zanimljiv primjer koji nas podsjeća da se nepreciznost nužno javlja u raznim sferama svakodnevnog života te da informacije koje imamo, čak i kad ih smatramo relativno točnima i preciznima, to u stvarnosti često nisu.

Od stručnjaka u raznim područjima često se očekuju predviđanja nekih budućih događaja ili barem procjene njihove vjerojatnosti. Na primjer, pitanja od interesa mogu biti: "Kolika je vjerojatnost da sutra padne snijeg u Zagrebu?", "Je li izgledan nuklearni rat u bliskoj budućnosti?" ili "Kolike su šanse da Brazil osvoji iduće Svjetsko prvenstvo u nogometu?". Odgovori na takva pitanja u pravilu nisu brojevi već fraze poput: "Izgledno je", "Malo je vjerojatno" i "Nije nemoguće". U narednom primjeru ne naglašavamo činjenicu da su korišteni modeli za predikciju ovakvih događaja, ako uopće postoje, često neprecizni, već pokazujemo kako se preciznost putujuće informacije vrlo lako može neočekivano pogoršati.

Primjer 0.2.3. *(Lingvističko tumačenje vjerojatnosnih izraza, 2018. [4])*
Provedeno je istraživanje kojemu je cilj bio saznati kako ljudi interpretiraju fraze na engleskom jeziku koje opisuju vjerojatnost nekog događaja. Od ispitanika je traženo da za danu frazu predlože broj od 0% do 100% za koji smatraju da najbolje opisuje tu frazu. Rezultati su prikazani na slici 0.1.

Samo jedan pogled na graf dovoljan je da zaključimo kako je opravdano biti zabrinut, jer poprilično velika varijanca u interpretaciji većine fraza govori o tome kolike mogu biti razlike u tumačenju iste fraze od pojedinca do pojedinca. Ako čujemo prognoze da nagli rast cijena nafte "nije izgledan", hoćemo li zaključiti da je vjerojatnost tog događaja otprilike 3% ili otprilike 30%?

Postoji još čitav niz zanimljivih motivacija za uvođenje nepreciznih vjerojatnosti kao alata za modeliranje problema u slučajnom okruženju. Navedimo još, bez većih detalja, tek neke od njih:



Slika 0.1: Interpretacije vjerojatnosnih izraza

- Nepreciznosti koje se javljaju u (preciznoj) teoriji vjerojatnosti i statistici. Pretpostavimo da ne znamo točnu vjerojatnost nekog događaja. Teorija vjerojatnosti je bogata rezultatima koji tada mogu poslužiti da dobijemo gornju i/ili donju ogradu za tu vjerojatnost (poput Čebiševljeve ili Markovljeve nejednakosti), a donekle sličnu ulogu imaju i pouzdani intervali u statistici. Neke od teorija nepreciznih vjerojatnosti omogućuju nam da nastavimo rad s takvim, dakle nepreciznim, oblikom informacija.
- Modeliranje stavova i odluka grupe (ljudi ili modela). Neprecizne vjerojatnosti mogu poslužiti u donošenju grupnog konsenzusa oko nekih pitanja, pogotovo ako se u danoj situaciji javljaju nekonzistentna ili suprotstavljena mišljenja. U glavnome dijelu rada (poglavlje 4) također ćemo spomenuti i načine prikazivanja osobne neodlučnosti, u čemu precizne vjerojatnosti nailaze na probleme.

0.3 Cilj ovog rada

Vidjeli smo da trenutno u svijetu postoje razne teorije koje na neki način izučavaju koncept nepreciznih vjerojatnosti. Međutim, u ovome se radu nećemo baviti svakom od tih teorija. Razlog tome je što bi, iako su te teorije relativno mlade i neistražene (barem u usporedbi s nekim drugim granama matematike) bilo doista teško jasno pokriti osnovne ideje svake od njih u obliku dovoljno sažetom da odgovara strukturi jednog diplomskog rada. O svakoj bismo mogli izreći samo najosnovnije činjenice, bez ikakvog dubljeg ulaska u interpretacije pojmova koje obrađuje, a tada bi čitav rad podsjećao na enciklopedijsko nabrajanje pojmova. Zato se kao bolja ideja svakako čini fokusiranje samo na jednu od teorija nepreciznih vjerojatnosti uz tek usputno spominjanje ostalih.

Od svih teorija koje smo ranije spomenuli, ona koju ćemo predstaviti u ovom redu je Walleyeva teorija donjih predviditelja. Glavni razlozi za odabir upravo te teorije su:

- Popularnost. Spomenuli smo već da je veliki zamah u proučavanju nepreciznih vjerojatnosti uslijedio upravo nakon objavljivanja Walleyeve knjige [6], u kojoj autor predstavlja i pomno razrađuje upravo tu teoriju.
- Jednostavnost. Koncepti koje ova teorija predstavlja (barem na svojoj osnovnoj razini) su većinom intuitivni i jednostavni. Pritom je njena matematička pozadina bitno jednostavnija od moderne teorije vjerojatnosti, za čije dublje razumijevanje je ipak nužno biti upoznat s relativno zahtjevnom teorijom mjere.
- Općenitost. Iako se ostalim teorijama nepreciznih vjerojatnosti nećemo baviti sve do završnog dijela rada, istaknimo odmah da su određeni pojmovi iz neke od tih teorija tek poseban slučaj pojmova iz Walleyeve teorije. Dakle, teorija koju obrađujemo nije samo generalizacija (precizne) teorije vjerojatnosti već je ona generalizacija i mnogih drugih teorija nepreciznih vjerojatnosti.

Nadamo se da smo u ovom uvodu, koji je namjerno opširan obzirom da proučavamo relativno nepoznatu temu, čitatelju približili pojam neprecizne vjerojatnosti, kao i motivaciju za njegovo uvođenje. Više riječi o konkretnim pojmovima i idejama u teoriji donjih predviditelja biti će jednom kad do njih dođemo. Prijeđimo sada na glavni dio rada.

Poglavlje 1

Teorija donjih predviditelja

1.1 Uvod u teoriju donjih predviditelja

Kao što smo ranije najavili, sama matematička pozadina teorije donjih predviditelja nije pretjerano komplicirana. Međutim, određene ideje i pojmovi, ako ih u teoriju službeno uvedemo prenaglo, mogu djelovati zbunjujuće, pogotovo jer neki od njih neće imati formalnu matematičku definiciju. Zato se boljim pristupom čini uvođenje glavnih ideja teorije za početak na neslužbenoj, intuitivnoj razini, čime nastojimo olakšati čitateljevo razumijevanje narednih (službenih) definicija.

Uvedimo za početak jednu konvenciju. U većini definicija i primjera u radu će izravnu ili neizravnu ulogu imati netko ili nešto koga možemo smatrati svjesnim donositeljem odluke. No gotovo nigdje nije precizirano što taj donositelj odluke doista jest; u većini će slučajeva biti svejedno je li to čovjek, računalo, životinja, grupa ljudi, tvrtka ili nešto drugo. Zato radi jednostavnosti u nastavku rada koristimo riječ *subjekt* kao univerzalni naziv za svjesnog donositelja odluke.

U uvodnom smo dijelu istaknuli da se s teorijom donjih predviditelja prvenstveno povezuje ime Petera Walleyja, autora koji ju je opširno razradio i objasnio u svom djelu [6]. Walley inzistira na stavu da je za dublje razumijevanje osnova, ali i naprednijeg razvoja te potencijalnih primjena njegove teorije nužno biti upoznat s njezinom interpretacijom. Također, u više navrata naglašava da postoji bitna razlika između interpretacije neke teorije i njezine matematičke formulacije. Ista matematički postavljena teorija može imati različita tumačenja njezinih korisnika, dok se pak ista interpretacija stvarnosti može prevesti na matematički jezik na više načina. Teorije koje proučavaju vjerojatnost nisu nikakva iznimka. Na tom je području najpoznatija podjela na *frekvencionističko* te na *bayesovsko* shvaćanje vjerojatnosti. Pritom je i u toj podjeli razlika prvenstveno u tumačenju, a manje u praktičnim rezultatima obaju teorija (iako i u praksi katkad može doći do različitih zaključaka [3]). Među teorijama nepreciznih vjerojatnosti podjele su dublje. Iako se u ovom radu nećemo pretjerano baviti filozofskom pozadinom raznih teorija vjerojatnosti, radi boljeg shvaćanja Walleyjeve teorije napomenimo kako ju on sam opisuje. Walley kao generalni uzor (iako uz određene kritike) uzima takozvanu *subjektivnu* interpretaciju vjerojatnosti. Ta se interpretacija temelji na shvaćanju vjerojatnosti kao osobnog uvjerenja pojedinca o stupnju neizvjesnosti slučajnog događaja, a njezini su najpoznatiji zagovornici kroz povijest bili Thomas Bayes, Pierre-Simon Laplace i Bruno de Finetti.

Walleyjevim riječima, njegova teorija donjih predviditelja je:

- epistemička (engl. *epistemic*): Ova teorija svoj puni potencijal ostvaruje upravo u modeliranju ranije spomenutih epistemoloških neizvjesnosti (*epistemic uncertianty*).
- bihevioristička (engl. *behavioural*): Vjerojatnost se interpretira prvenstveno u kontekstu subjektovog ponašanja u situacijama u kojima se iste vjerojatnosti pojavljuju (poput preferencije jedne odluke s neizvjesnim ishodom naspram neke druge).
- teoretska (engl. *theoretical*): Vjerojatnosti modeliraju određene teoretske koncepte poput stavova, uvjerenja ili sklonosti koji nisu nužno izravno izmjerivi, ali koji utječu na neke izmjerive varijable.
- racionalistička (engl. *rationalistic*): Zahtijeva se da vjerojatnosti budu na neki način konzistentne s dokazima (npr. slučajnim uzorcima), ali dopušta da ih isti dokazi ne određuju nužno na jedinstven način.
- konstruktivna (engl. *constructive*): Postoje jasne metode kako iz dokaza možemo konstruirati vjerojatnosti od interesa.

Od pet navedenih kategorija, Walley najbitnijom za razumijevanje svoje teorije smatra biheviorističku. Biheviorizam u ovom kontekstu kao glavnu ideju uzima da se subjektove vrijednosti, uvjerenja i stavovi mogu (barem djelomično) dovesti u vezu sa subjektovim ponašanjem. Iako sam Walley priznaje da je većina ljudskog ponašanja instiktivna i spontana, a ostatak je prekompliciran da se jasno odredi "funkcija" koja subjektovim stavovima pridružuje subjektove akcije (ili obrnuto), on zagovara ono što naziva *minimalna bihevioristička interpretacija* (engl. *minimal behavioral interpretation*) vjerojatnosti. Taj pristup podrazumijeva samo to da bi subjektovi stavovi, uvjerenja i pripadne vjerojatnosti trebali utjecati na subjektovo ponašanje, barem u primjerima kada subjekt odluke donosi svjesnim razmatranjem situacije, a ne spontano. Pristup naziva minimalnim jer ne zahtijeva nikakve dodatne apriorne pretpostavke o pojedinostima tog utjecaja; zahtijeva isključivo njegovo postojanje.

Imajući na umu takvo tumačenje, ne čudi da osnovu Walleyeve teorije čine naredna tri koncepta: lutrije (*gambles*), korisnost (*utility*) te subjektov odnos prema lutrijama. O lutriji zasada možemo razmišljati kao o slučajnoj varijabli X na nekom skupu događaja Ω. Njene realizacije u konkretnim točkama $X(\omega)$ često ćemo, radi bliskosti svakodnevnom govoru, nazivati *isplatom* lutrije X u točki ω. Korisnost je realna funkcija koja se gotovo uvijek koristi u kompoziciji s određenom lutrijom a čija je svrha modeliranje "vrijednosti" nekog slučajnog događaja za konkretnog subjekta. Na primjer, ako dvije osobe - siromah i bogataš - igraju istu nagradnu igru, oni se pritom bave istom lutrijom ali su im pripadne funkcije korisnosti vjerojatno bitno različite (mogući dobitak od 10000 kuna bi siromahu bio "vrijedniji" nego bogatašu). Iako je svjestan da to često nije ostvareno, Walleyeva je pretpostavka da je funkcija korisnosti precizna i linearna. Preciznost ovdje znači da funkciju korisnosti, ako nam treba, uvijek znamo egzaktno definirati, bez ikakve dvojbe da je to istinska funkcija korisnosti. Linearnost znači da, ako je u funkcija korisnosti, vrijedi da je $u(kX) = ku(X)$ za sve lutrije X i sve $k \in \mathbb{R}$. Doduše, u ostatku rada nećemo često spominjati korisnost kao funkciju samu po sebi, ali ćemo uvijek prešutno prihvaćati da je isplata lutrije X za subjekta dana na nekoj (preciznoj, linearnoj i za tog subjekta možda specifičnoj) skali korisnosti. Subjektov odnos prema lutriji manifestirat će se kroz pojmove "za subjekta poželjne lutrije", "za subjekta nepoželjne lutrije", "subjektovoj spremnosti da proda/kupi lutriju X po cijeni α" i srodnim frazama.

Da bi teorija donjih predviditelja opravdala svoju pripadnost teorijama nepreciznih vjerojatnosti, očekujemo da ona na određeni način definira (nepreciznu) vjerojatnost. Sam oblik takvih vjerojatnosti bit će prilično intuitivan. Naime, neprecizna će vjerojatnost određenog događaja biti prikazana kao uređeni par donje i gornje vjerojatnosti istog događaja, dok će se sve vrijednosti između smatrati mogućim vjerojatnostima koje taj događaj može poprimiti. Ipak, konkretan postupak uvođenja pojma gornje i donje vjerojatnosti čini se krajnje neobičnim ako ga usporedimo s većinom literature koja se bavi uvodom u klasičnu teoriju vjerojatnosti (poput [5]). U njima se na samom početku uvode pojmovi vjerojatnosti i vjerojatnosnog prostora, a tek potom slučajnih varijabli i njihovih svojstava poput očekivanja. U teoriji donjih predviditelja situacija je potpuno obrnuta. U skladu sa svojim biheviorističkim tumačenjem, primarni objekti koje teorija proučava su lutrije (koje se mogu shvatiti kao generalizirane slučajne varijable) i njihova svojstva poput predviditelja (koji se mogu shvatiti kao generalizacija očekivanja) da bi se tek tada definirala vjerojatnost događaja kao predviditelj definiran na specifičnoj familiji lutrija.

1.2 Osnovne definicije

U prethodnom smo poglavlju spomenuli određene pojmove koje koristimo u ostatku rada, no niti jednog od njih još nismo formalno matematički definirali. To je cilj ovog poglavlja. Međutim, napomenimo još jednom da neće svaki pojam koji koristimo imati formalnu matematičku definiciju. Neki će pojmovi ostati isključivo na razini njihovog shvaćanja iz svakodnevnog života i ljudskih aktivnosti poput "poželjnosti lutrije" ili "kupnje/prodaje lutrije". U nastavku rada takve definicije neće biti službeno označene niti numerirane kao ostale definicije.

Za početak, baš kao u uvodu u (preciznu) teoriju vjerojatnosti, zamislimo pokus čiji ishod nije jednoznačno određen uvjetima u kojima se taj pokus odvija. Takav oblik pokusa nazivamo slučajnim pokusom. Nadalje, pretpostavimo da znamo sve moguće ishode tog pokusa. Sada konstruirajmo skup Ω takav da krajnji ishod pokusa sigurno bude točno jedan element skupa Ω. Takav neprazan skup Ω zovemo **skup elementarnih događaja**. Njegove elemente $\omega \in \Omega$ zovemo **elementarni događaji**, a njegove podskupove $A \subseteq \Omega$ zovemo **događaji**.

Činjenicu da u praktičnom modeliranju slučajnih pokusa nije uvijek jednostavno odrediti pripadni Ω naglašava i Walley ([6], str. 54-57) koji navodi potencijalne probleme u njegovoj konstrukciji. Kao trivijalni primjer uzima poznatu dilemu treba li među ishode bacanja novčića uključiti mogućnost da novčić padne na rub. Takvi problemi ipak premašuju okvire ovog rada pa zato nadalje, uz malu dozu opreza, pretpostavljamo da uvijek znamo točno konstruirati skup Ω.

Definicija 1.2.1. *Neka je Ω skup elementarnih događaja.* ***Lutrija*** *na Ω je svaka ograničena funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Drugim riječima, lutrija je svaka funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ za koju postoji $M > 0$ takav da za sve $\omega \in \Omega$ vrijedi $|X(\omega)| < M$.*

Skup svih lutrija na Ω označavamo s $\mathcal{L}(\Omega)$ ili samo s $\mathcal{L}$ ako je Ω proizvoljan ili jasan iz konteksta. Naglasimo da se u definiciji zahtijeva ograničenost lutrija, što nije nužno uvijek realističan scenarij, ali bitno pojednostavljuje tehnički dio rezultata. Primijetimo da se lutrija može shvatiti kao generalizacija (ograničenih) slučajnih varijabli, koje ipak moraju zadovoljavati dodatan uvjet izmjerivosti.

Sve operacije koje koristimo na lutrijama poput njihovog zbrajanja, međusobnog množenja, množenja skalarom itd. definiramo identično kao na slučajnim varijablama, odnosno po točkama. Na isti način definiramo i parcijalni uređaj na lutrijama:

$$\begin{aligned} X \le Y &\iff (\forall \omega \in \Omega)\, X(\omega) \le Y(\omega), \\ X < Y &\iff (\forall \omega \in \Omega)\, X(\omega) < Y(\omega). \end{aligned}$$

Konstantne lutrije označavamo njihovom (konstantnom) vrijednošću, to jest ako je $X(\omega) = \lambda$, za svaki $\omega \in \Omega$, onda lutriju X označavamo s λ. Nadalje, ako postoji $A \subseteq \Omega$ takav da za lutriju X vrijedi $X(\omega) = 1$ ako je $\omega \in A$ i $X(\omega) = 0$ ako $\omega \notin A$, onda takvu lutriju nazivamo **indikator** skupa A i označavamo je s $\mathbb{1}_A$. Također za $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ koristimo standardne oznake $-\mathcal{K} := \{-X \mid X \in \mathcal{K}\}$ i $\alpha\mathcal{K} := \{\alpha X \mid X \in \mathcal{K}\}$, za $\alpha \neq 0$.

Kažemo da je lutrija X **poželjna** (engl. *desirable*) za subjekt ako taj subjekt prihvaća vlasništvo nad njom u slučaju da mu je ponuđena. Pod "prihvaćanjem vlasništva" nad lutrijom podrazumijevamo da je subjekt spreman snositi isplatu $X(\omega)$ za bilo koji $\omega \in \Omega$ koji se dogodi (isplata može biti i negativna). Lutrije koje za subjekta nisu poželjne svrstavamo sve u istu kategoriju neovisno o konkretnom subjektovom stavu prema X. Naime, ako određena lutrija X za subjekta nije poželjna, to u praksi znači ili da je X za subjekta nepoželjna (subjekt odbija vlasništvo nad X u slučaju da mu je ponuđena) ili da je subjekt neodlučan u svom stavu prema X. No, za potrebe teorije donjih predviditelja uglavnom nećemo raditi takve razlike već ćemo lutrije dijeliti samo na "poželjne" i "ostale". Pojam neodlučnosti u stavovima prema lutrijama veću ulogu igra u jednoj drugoj teoriji nepreciznih vjerojatnosti koja proučava relacije preferencije na lutrijama. Opisanu teoriju kratko obrađujemo u dijelu 4.2.

Skup svih poželjnih lutrija označavamo s $\mathcal{D}(\Omega)$ ili samo s $\mathcal{D}$ ako je Ω proizvoljan ili jasan iz konteksta. Očito je $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$.

Kažemo da je subjekt **spreman kupiti** lutriju X po cijeni $\mu \in \mathbb{R}$ ako je lutrija $X-\mu \in \mathcal{D}$. Analogno, subjekt je **spreman prodati** lutriju X po cijeni $\lambda \in \mathbb{R}$ ako je $\lambda - X \in \mathcal{D}$.

Sada imamo sve preduvjete da napokon definiramo pojam po kojem je čitava teorija dobila ime, a to su donji predviditelji.

Definicija 1.2.2. *Neka je Ω skup elementarnih događaja te neka je $\mathcal{K}$ proizvoljan podskup od $\mathcal{L}(\Omega)$.* ***Donji predviditelj*** *na skupu lutrija $\mathcal{K}$ je svaka funkcija $\underline{P} : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$.*

Navedena službena definicija nam sama po sebi ne govori mnogo. No, od same definicije donjih predviditelja mnogo je jasnija njihova bihevioristička interpretacija u kontekstu ove teorije. Tumačenje donjeg predviditelja konkretne lutrije X jest da je to najviša (u smislu supremuma) cijena po kojoj bi subjekt bio spreman kupiti lutriju X. Takvo tumačenje možemo izraziti u obliku formule:

$$\underline{P}(X) = \sup\{\mu \in \mathbb{R} \mid X - \mu \in \mathcal{D}\}. \tag{1.1}$$

Prije nastavka pojasnimo nekoliko stvari o donjim predviditeljima.

1. Nigdje ne zahtijevamo da donji predviditelj neke lutrije doslovno bude najviša cijena koju je subjekt odredio kao prihvatljivu za kupnju te lutrije. Do donjeg smo predviditelja mogli doći na neki sasvim drugačiji način, pa i potpuno nevezan za pojmove kupnje/prodaje lutrija. Štoviše, možda su nam skupovi Ω, $\mathcal{L}(\Omega)$, $\mathcal{K}$ i funkcija $\underline{P}$ dani u svojoj punoj općenitosti, bez stvarnog konteksta i pozadine. Međutim, poanta je u tome da, neovisno kako smo u stvarnosti odredili donjeg predviditelja lutrije X, njega uvijek možemo *interpretirati* kao najvišu cijenu po kojoj bi subjekt (možda stvaran, a možda i imaginaran u slučaju potpune apstrakcije) kupio lutriju X. Upravo iz tog razloga formula 1.1 nije uzeta kao službena matematička definicija donjeg

predviditelja već samo kao njihovo "objašnjenje". Na ovome se primjeru očituje ranije spomenuta razlika između interpretacije i matematičke reprezentacije određene teorije, na čijem razumijevanju Walley toliko inzistira.

2. Primijetimo da je donji predviditelj definiran kao supremum nekog skupa. Međutim, nemamo nikakvu garanciju da je taj supremum ujedno i maksimum. Drugim riječima, znamo da bi za svaki $\epsilon > 0$ subjekt prihvatio lutriju $X - \underline{P}(X) + \epsilon$, ali nemamo informacija o njegovom prihvaćanju same lutrije $X - \underline{P}(X)$.

3. Iako će subjekt prihvatiti kupnju lutrije X po cijeni strogo manjoj (a možda i jednakoj ako je supremum ujedno i maksimum) od $\underline{P}(X)$, to ne znači nužno da će kupnju iste lutrije odbiti za svaku cijenu strogo veću od $\underline{P}(X)$. Sjetimo se da smo dopustili subjektovu neodlučnost u preferenciji lutrija, tako da u praksi možda postoje lutrije koje istome subjektu nisu niti poželjne niti nepoželjne. Ipak, kao što smo ranije spomenuli, za potrebe teorije donjih predviditelja nećemo raditi takve razlike među lutrijama koje nisu poželjne. Drugim riječima, skup $\mathcal{L}$ uglavnom ćemo dijeliti samo na $\mathcal{D}$ i $\mathcal{D}^c$, bez neke "finije" particije skupa $\mathcal{D}^c$.

Definicija 1.2.3. *Neka je $\underline{P} : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ donji predviditelj na skupu lutrija $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$. Tada je funkcija $\overline{P} : -\mathcal{K} \to \mathbb{R}$ **konjugirani gornji predviditelj** od $\underline{P}$ ako vrijedi:*

$$\overline{P}(X) = -\underline{P}(-X), \quad \forall X \in -\mathcal{K}. \tag{1.2}$$

Ovakva definicija gornjeg predviditelja također ima svoje opravdanje. Naime, pretpostavimo da je subjekt spreman kupiti neku lutriju X po cijeni μ. Tada bi isti subjekt trebao biti spreman prodati lutriju $-X$ po cijeni $-\mu$. Ako to prihvatimo kao istinu, onda bi interpretacija gornjeg predviditelja lutrije X bila da je to najniža (u smislu infimuma) cijena za koju bi subjekt bio spreman prodati lutriju X, dok bi formalni izvod te tvrdnje iz formule 1.2 bio:

$$\begin{aligned}
\overline{P}(X) = -\underline{P}(-X) &= -\sup\{\mu \in \mathbb{R} \mid -X - \mu \in \mathcal{D}\} \\
&= \inf\{-\mu \in \mathbb{R} \mid -X - \mu \in \mathcal{D}\} \\
&= \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid -X - (-\lambda) \in \mathcal{D}\} \\
&= \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda - X \in \mathcal{D}\}.
\end{aligned}$$

Iako smo gornje predviditelje definirali pozivajući se na ranije definirane donje predviditelje, nema nikakvog posebnog razloga zašto isto ne bismo mogli napraviti u obrnutom poretku. Tako možemo, potpuno analogno ranijem postupku, najprije definirati gornji predviditelj na nekom skupu lutrija $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ kao proizvoljnu funkciju $\overline{P} : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$, a njemu konjugirani donji predviditelj $\underline{P} : -\mathcal{K} \to \mathbb{R}$ bio bi definiran formulom:

$$\underline{P}(X) = -\overline{P}(-X), \quad \forall X \in -\mathcal{K}. \tag{1.3}$$

U nastavku rada pretpostavljamo da je skup svih lutrija $\mathcal{L}(\Omega)$ realni vektorski prostor, odnosno da je svaka linearna kombinacija lutrija također lutrija (na istom skupu Ω). Također, sve do poglavlja 3 ćemo radi jednostavnosti isto pretpostaviti i za domenu donjeg predviditelja $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$, iako ćemo takvu pretpostavku uvijek eksplicitno spomenuti gdjegod da je koristimo. Primijetimo da u tom slučaju, dakle ako je $\mathcal{K}$ iz definicije donjeg predviditelja vektorski prostor, vrijedi $-\mathcal{K} = \mathcal{K}$. Ako imamo donji predviditelj definiran na takvom $\mathcal{K}$ onda uvijek postoji i njemu konjugirani gornji predviditelj definiran na istoj domeni formulom 1.2. Analogno, ako imamo gornji predviditelj na $\mathcal{K}$, uvijek će postojati i njemu konjugirani donji predviditelj na istoj domeni definiran formulom 1.3. Zaključak koji iz toga možemo izvući jest da su donji i gornji predviditelji (definirani na vektorskom prostoru) jednoznačno određeni jedni drugima pa je rad dovoljno nastaviti samo s jednim od ta dva koncepta. Konvencija je da se uzimaju donji predviditelji te se tada cjelokupna teorija naziva samo *teorija donjih predviditelja* umjesto *teorija donjih i gornjih predviditelja*.

U ostatku rada će se u izrazima poput "neka su $\underline{P}$ i $\overline{P}$ redom donji i gornji predviditelji" podrazumijevati, osim ako ne naglasimo drugačije, da je $\overline{P}$ konjugirani gornji predviditelj od $\underline{P}$ (a ne neki drugi gornji predviditelj) ili da je $\underline{P}$ konjugirani donji predviditelj od $\overline{P}$ (a ne neki drugi donji predviditelj). Pritom veznik "ili" u prethodnoj rečenici slobodno možemo zamijeniti s "i" jer je iz formula 1.2 i 1.3 jasno da vrijedi (uz skraćenice radi preglednosti: KDP/KGP = Konjugirani donji/gornji predviditelj): $KDP(KGP(\underline{P})) = \underline{P}$ i $KGP(KDP(\overline{P})) = \overline{P}$. Dakle, donji i gornji predviditelji jednoznačno su određeni jedni drugima čak i kada njihova domena nije vektorski prostor, samo u tom slučaju nisu nužno definirani na istoj domeni.

Definicija 1.2.4. *Neka je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ proizvoljna familija događaja te neka je donji predviditelj $\underline{P}$ definiran (barem) na svim lutrijama oblika $\mathbb{1}_A$, za svaki događaj $A \in \mathcal{A}$. Tada definiramo **donju vjerojatnost** na familiji događaja $\mathcal{A}$ kao funkciju $\underline{\mathbb{P}} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ definiranu formulom $\underline{\mathbb{P}}(A) := \underline{P}(\mathbb{1}_A)$. Realan broj $\underline{\mathbb{P}}(A)$ nazivamo **donja vjerojatnost događaja** A.*

*Pomoću donje vjerojatnosti definiramo i **gornju vjerojatnost** na familiji $\mathcal{A}^c = \{A^c | A \in \mathcal{A}\}$ kao funkciju $\overline{\mathbb{P}} : \mathcal{A}^c \to \mathbb{R}$ danu formulom $\overline{\mathbb{P}}(A) := 1 - \underline{\mathbb{P}}(A^c)$ te realan broj $\overline{\mathbb{P}}(A)$ nazivamo **gornja vjerojatnost događaja** A.*

Nije teško provjeriti da smo gornju vjerojatnost događaja A ekvivalentno mogli definirati kao $\overline{\mathbb{P}}(A) := \overline{P}(\mathbb{1}_A)$, gdje je $\overline{P}$ konjugirani gornji predviditelj od $\underline{P}$ (naravno, pod uvjetom da se lutrija $\mathbb{1}_A$ nalazi u domeni od $\overline{P}$).

Donje i gornje vjerojatnosti definirane su jednostavno kao donji i gornji predviditelji restringirani na neku familiju indikatorskih lutrija (uočimo sličnost s rezultatom iz klasične teorije vjerojatnosti: $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$). U kontekstu interpretacije donjih i gornjih predviditelja kao redom najviše cijene subjektove kupnje lutrije i najniže cijene subjektove prodaje lutrije, donja se vjerojatnost događaja A može tumačiti kao "najviša cijena po kojoj bi se subjekt bio spreman okladiti na događaj A" (gdje on dobiva isplatu 0 ako se A ne dogodi, a 1 ako se dogodi), a gornja vjerojatnost kao "najniža cijena po kojoj bi se subjekt bio spreman okladiti protiv A" (odnosno okladiti na A^c). Pritom smatramo da (bihevioristički gledano) akcije "biti spreman kupiti lutriju $\mathbb{1}_A$ po cijeni α" i "biti spreman kladiti se na događaj A po cijeni α" u praksi imaju isto značenje.

Iz same definicije nije jasno zadovoljavaju li na ovaj način uvedene gornje i donje vjerojatnosti određena svojstva koja bismo intuitivno zahtijevali. Na primjer, sigurno bismo htjeli da i donja i gornja vjerojatnost poprimaju isključivo vrijednosti između 0 i 1. Također, kako bismo opravdali nazive *donja* i *gornja*, očekujemo da za svaki događaj A vrijedi da je $\underline{\mathbb{P}}(A) \leq \overline{\mathbb{P}}(A)$. Da su navedene tvrdnje zaista istinite dokazat ćemo kad uvedemo za ovu teoriju ključan pojam koherentnosti.

1.3 Koherentnost

U dijelu 1.2 smo donjim i gornjim predviditeljima, pa tako i vjerojatnostima, glavnu interpretaciju dali pozivajući se na skup poželjnih lutrija $\mathcal{D}$. Iako smo naglasili da je to tek interpretacija i da se formalne definicije navedenih pojmova ne referiraju na poželjnost lutrija, ipak je od interesa istražiti kako bi skup poželjnih lutrija, ako u danoj situaciji postoji, doista trebao izgledati. Prvi razlog tome je taj što je donošenje odluka vezanih uz lutrije u ovisnosti o subjektovim stavovima prema njima doista realističan problem vrijedan proučavanja - nekim je subjektima donošenje takvih odluka čak i svakodnevna zadaća. Drugi je razlog taj što u ovom poglavlju uvodimo pojam koherentnosti predviditelja. Iako to možemo napraviti i direktno, boljim se načinom čini prvotno uvođenje pojma koherentnosti na skupu poželjnih lutrija. O tome možemo razmišljati kao intuitivnom međukoraku koji vodi prema definiciji koherentnosti predviditelja, koja se ipak može činiti neobičnom na prvi pogled.

U raznim problemima nužno je znati koje su točno lutrije u danoj situaciji za subjekta poželjne. No, nemamo nikakvu garanciju da je definiranje skupa poželjnih lutrija u praksi lagan zadatak pa zato postavljamo nekoliko prirodnih pitanja:

1. Skup svih lutrija $\mathcal{L}$ može biti kardinalitetom izuzetno velik, a u pravilu je čak beskonačan jer ga konvencionalno smatramo vektorskim prostorom. Je li doista nužno da se subjekt izjasni o poželjnosti svake pojedinačne lutrije kako bismo odredili $\mathcal{D}$? Ako saznamo da su određene lutrije za subjekta poželjne, možemo li iz toga dobiti informacije o poželjnosti nekih drugih lutrija?

2. Poželjnost istih lutrija definiranih na istom prostoru može se drastično razlikovati od subjekta do subjekta. Međutim, postoje li ipak određene lutrije koje možemo *a priori*, potpuno neovisno o subjektu, smatrati poželjnima/nepoželjnima? Drugim riječima, postoje li lutrije koje su "uvijek poželjne" ili "uvijek nepoželjne"?

Pojam koherentnosti garantira pozitivan odgovor na oba pitanja. Neformalno, kažemo da je subjektov odnos prema lutrijama koherentan ako je taj odnos na neki način ”racionalan”. Što to konkretno znači govori nam sljedeća definicija.

Definicija 1.3.1. *Neka je $\mathcal{D}$ skup poželjnih lutrija. Za skup $\mathcal{D}$ kažemo da je **koherentan** ako zadovoljava sljedeća četiri uvjeta:*

(D1) Pozitivna homogenost: $X \in \mathcal{D}, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda X \in \mathcal{D}$

(D2) Aditivnost: $X, Y \in \mathcal{D} \Rightarrow X + Y \in \mathcal{D}$

(D3) Prihvaćanje sigurnog dobitka: $inf X > 0 \Rightarrow X \in \mathcal{D}$

(D4) Odbijanje sigurnog gubitka: $sup X < 0 \Rightarrow X \notin \mathcal{D}$

Kažemo da je subjekt koherentan ili da je subjektov odnos prema lutijama koherentan ako je skup njemu poželjnih lutrija $\mathcal{D}$ koherentan.

Komentirajmo odmah prethodnu definiciju. Ako je lutrija X poželjna za subjekta, onda uvjet (D1) pretpostavlja da je istom subjektu tada poželjna i svaka lutrija oblika λX, za proizvoljan realan broj $\lambda > 0$. Uvjet (D2) zahtijeva da bi subjekt, ako je spreman prihvatiti pojedinačne lutrije X i Y, trebao biti spreman prihvatiti i njihov zbroj $X + Y$. Uvjet (D3) pretpostavlja da je svaka lutrija koja, neovisno o ishodu, subjektu donosi pozitivnu isplatu za subjekta nužno poželjna (osim u rijetkim situacijama kada je $X > 0$ ali je $inf X = 0$, što je nemoguće u slučaju kad je Ω konačan skup). Analogno, ako subjekt prihvaćanjem određene lutrije može samo izgubiti, onda (D4) pretpostavlja da je ta lutrija za njega nepoželjna (opet, osim kada je $X < 0$ ali $sup X = 0$, što je također nemoguće za konačan Ω).

Prije nego nastavimo rad s koherentnim skupovima poželjnih lutrija, valja napomenuti nekoliko stvari. Teorija donjih predviditelja nipošto nije jedina teorija koja na neki način definira racionalno ponašanje subjekata i očekuje takvo ponašanje u stvarnosti. Više je psiholoških i ekonomskih teorija u praksi zakazalo upravo jer se proučavani subjekti nisu držali definiranih pravila racionalnosti. Iako smo ranije spomenuli da u ovoj teoriji razmatramo prvenstveno ona ponašanja koja su plod svjesnog razmatranja problema, a ne spontana i intuitivna, iste su teorije zakazale čak i u takvim situacijama. Štoviše, ponekad je zabrinjavajuće lako konstruirati realističan primjer u kojem je neki od uvjeta racionalnosti narušen (vidi primjer 1.3.2, u kojem ponašanje subjekta nije iracionalno samo za racionalnost definiranu teorijom donjih predviditelja, već i za racionalnost kako je definiraju mnogo poznatije i korištenije teorije poput teorije očekivane korisnosti (engl. *expected utility theory*)). Ipak, to ne znači da bi istog trena trebalo prekinuti raspravu o teoriji donjih predviditelja i okrenuti se nečemu potencijalno boljem. Sve što je potrebno napraviti kako bismo izbjegli pogreške ranijih teorija jest posvetiti dovoljno pažnje ispitivanju pretpostavki na kojima ta teorija počiva. Također, ako postoji opravdana sumnja u ispunjenost određenih pretpostavki teorije (poput uvjeta koherentnosti, linearnosti funkcije korisnosti ili ograničenosti lutrija), bilo bi korisno proučiti potencijalne posljedice korištenja rezultata iste teorije pod takvim uvjetima.

Primjer 1.3.2. *Neka je X ograničena slučajna varijabla (posebno je X tada lutrija) s distribucijom*

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

i pretpostavimo da su navedene isplate u kunama. Isti subjekt može biti voljan prihvatiti lutriju X (jer će vjerojatno zaraditi, a ako izgubi posljedice nisu strašne), ali istovremeno odbiti lutriju

$$10000 \cdot X \sim \begin{pmatrix} -10000 & 20000 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

jer iako će opet vjerojatno zaraditi, gubitak bi ga doveo u ozbiljne financijske probleme. Takvim ponašanjem je narušen uvjet koherentnosti (D1).

Sada ćemo uvesti pojam koherentnosti donjih i gornjih predviditelja. Ako se opet prisjetimo interpretacije donjeg predviditelja pomoću skupa poželjnih lutrija, za očekivati je da se definicija 1.3.1 može lako preformulirati kako bismo koherentnost mogli definirati na predviditeljima. Pretpostavimo da je donji predviditelj $\underline{P}$ doista dobiven kao $\underline{P}(X) = sup\{\mu \in \mathbb{R} | X - \mu \in \mathcal{D}\}$. Lako je provjeriti da je tada $\underline{P}$ koherentan u smislu definicije 1.3.3 ako i samo ako je skup $\mathcal{D}$ koherentan u smislu definicije 1.3.1. U nastavku rada koherentnost predviditelja imat će veću ulogu nego koherentnost od $\mathcal{D}$ jer su osnovni objekti u ovoj teoriji ipak predviditelji, a ne skupovi poželjnih lutrija. Njih nadalje možemo smatrati tek pomoćnim alatom za lakše razumijevanje pojma predviditelja.

Definicija 1.3.3. *Neka je $\underline{P}$ donji predviditelj na $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$, gdje je $\mathcal{K}$ vektorski prostor. Kažemo da je $\underline{P}$* ***koherentan*** *donji predviditelj ako vrijede sljedeća tri uvjeta:*

(KDP1) Prihvaćanje sigurnog dobitka: $\underline{P}(X) \geq infX, \quad \forall X \in \mathcal{K}$

(KDP2) Pozitivna homogenost: $\underline{P}(\lambda X) = \lambda \underline{P}(X), \quad \forall X \in \mathcal{K}, \forall \lambda > 0$

(KDP3) Superaditivnost: $\underline{P}(X + Y) \geq \underline{P}(X) + \underline{P}(Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{K}$

Za gornji predviditelj $\overline{P}$ na $\mathcal{K}$ kažemo da je koherentan ako vrijede uvjeti:

(KGP1) Prihvaćanje sigurnog dobitka: $\overline{P}(X) \leq supX, \quad \forall X \in \mathcal{K}$

(KGP2) Pozitivna homogenost: $\overline{P}(\lambda X) = \lambda \overline{P}(X), \quad \forall X \in \mathcal{K}, \forall \lambda > 0$

(KGP3) Subaditivnost: $\overline{P}(X + Y) \leq \overline{P}(X) + \overline{P}(Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{K}$

U definiciji smo pretpostavili da je $\mathcal{K}$ vektorski prostor kako bismo osigurali da su uvjeti (KDP2), (KDP3), (KGP2) i (KGP3) dobro definirani te kako bi gornji/donji predviditelj imao konjugiranog donjeg/gornjeg predviditelja na istoj domeni. Lako se provjeri da je gornji predviditelj $\overline{P}$ koherentan ako i samo ako je njegov konjugirani donji predviditelj $\underline{P}(X) = -\overline{P}(-X)$ koherentan. Dodatno, ako je neki donji/gornji predviditelj koherentan na vektorskom prostoru $\mathcal{K}$, onda je jasno kako je njegova restrikcija na proizvoljan vektorski potprostor od $\mathcal{K}$ također koherentna na tom potprostoru.

Navedimo sada neka od glavnih svojstava koherentnih donjih i gornjih predviditelja. Kako zasada znamo definirati koherentnost predviditelja samo na vektorskim prostorima, u svakom od narednih teorema pretpostavit ćemo da je domena $\mathcal{K}$ vektorski prostor. No, isti teoremi vrijede i u slučaju kad je domena proizvoljan skup lutrija (koherentnost predviditelja na proizvoljnom skupu lutrija definiramo u poglavlju 3) pa zato u teoremima 1.3.4-1.3.7 namjerno nećemo eksplicitno naglasiti da domena $\mathcal{K}$ ima strukturu vektorskog prostora.

Teorem 1.3.4. *([6], str. 76) Neka su $\underline{P}$ i $\overline{P}$ redom donji predviditelj i njemu konjugirani gornji predviditelj definirani na skupu $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$. Ako su oni koherentni, onda za sve lutrije $X, Y \in \mathcal{K}$ vrijede tvrdnje:*

a) $inf X \leq \underline{P}(X) \leq \overline{P}(X) \leq sup X$

b) $\underline{P}(\mu) = \overline{P}(\mu) = \mu, \quad (\forall \mu \in \mathbb{R})$

c) $\underline{P}(X + \mu) = \underline{P}(X) + \mu, \ \ \overline{P}(X + \mu) = \overline{P}(X) + \mu, \quad (\forall \mu \in \mathbb{R})$

d) $X \geq Y + \mu \ \Rightarrow \ \underline{P}(X) \geq \underline{P}(Y) + \mu, \ \ \overline{P}(X) \geq \overline{P}(Y) + \mu, \quad (\forall \mu \in \mathbb{R})$

e) $\underline{P}(X) + \underline{P}(Y) \leq \underline{P}(X + Y) \leq \underline{P}(X) + \overline{P}(Y) \leq \overline{P}(X + Y) \leq \overline{P}(X) + \overline{P}(Y)$

Dokaz teorema se može naći u [6], str. 77.

Za kraj ovog poglavlja iskažimo tri bitna rezultata koji govore o načinima konstrukcije novih koherentnih predviditelja koristeći već postojeće koherentne predviditelje. Navedeni rezultati se pokazuju vrlo korisnima u daljnjem razvoju teorije donjih predviditelja te ćemo neke od njih koristiti u ostatku rada.

Teorem 1.3.5. *(Teorem o donjoj envelopi (engl. Lower envelope theorem)) ([6], str. 78)*

*Neka je Γ proizvoljan neprazan skup indeksa te neka je $\underline{P}_\gamma$ koherentan donji predviditelj na domeni $\mathcal{K}$ za svaki indeks $\gamma \in \Gamma$. Tada je **donja envelopa** familije predviditelja $\{\underline{P}_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$, definirana kao $\underline{P}(X) = inf\{\underline{P}_\gamma(X) | \gamma \in \Gamma\}$, također koherentan donji predviditelj na $\mathcal{K}$.*

Teorem 1.3.6. *(Teorem o konveksnosti (engl. Convexity theorem)) ([6], str. 79)*
Neka su $\underline{P}_1$ *i* $\underline{P}_2$ *koherentni donji predviditelji na istoj domeni* $\mathcal{K}$ *i neka je* $0 < \lambda < 1$ *proizvoljan. Tada je* ***konveksna kombinacija predviditelja*** $\underline{P}_1$ *i* $\underline{P}_2$*, definirana kao* $\underline{P}(X) = \lambda\underline{P}_1(X) + (1-\lambda)\underline{P}_2(X)$*, također koherentan donji predviditelj na* $\mathcal{K}$*.*

Teorem 1.3.7. *(Teorem o konvergenciji (engl. Convergence theorem)) ([6], str. 79)*
Neka je $(\underline{P}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *niz donjih predviditelja na istoj domeni* $\mathcal{K}$ *koji* ***konvergira po točkama*** *prema donjem predviditelju* $\underline{P}$ *na* $\mathcal{K}$ *(što znači da niz realnih brojeva* $(\underline{P}_i(X))_{i\in\mathbb{N}}$ *konvergira prema realnom broju* $\underline{P}(X)$*, za svaki* $X \in \mathcal{K}$*). Ako je* $\underline{P}_i$ *koherentan predviditelj na* $\mathcal{K}$ *za svaki* $i \in \mathbb{N}$*, onda je* $\underline{P}$ *također koherentan donji predviditelj na* $\mathcal{K}$*.*

Poglavlje 2

Posebni slučajevi

U ovome dijelu smanjit ćemo razinu apstrakcije na kojoj proučavamo donje i gornje predviditelje time da ćemo istražiti klase predviditelja koji zadovoljavaju neke specifične uvjete.

2.1 Linearni predviditelji

Definicija 2.1.1. *Neka je $\underline{P}$ donji predviditelj definiran na vektorskom prostoru $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$. Kažemo da je $\underline{P}$* ***linearan predviditelj*** *ako je $\underline{P}$ koherentan te ako je jednak svojem konjugiranom gornjem predviditelju $\overline{P}$ na $\mathcal{K}$, odnosno ako vrijedi*

$$\underline{P}(X) = \overline{P}(X), \quad \forall X \in \mathcal{K}.$$

Prethodnu definiciju također možemo iskazati u obliku: $\underline{P}$ je linearan predviditelj na vektorskom prostoru $\mathcal{K}$ ako, uz koherentnost, vrijedi $\underline{P}(X) = -\underline{P}(-X)$, za svaki $X \in \mathcal{K}$. Upravo radi tog svojstva se često kaže da je linearan predviditelj **sam sebi konjugiran** (engl. *self-conjugate*). Linearne predviditelje uglavnom označavamo s P umjesto s $\underline{P}$ ili $\overline{P}$.

Prisjetimo se interpretacije donjeg i gornjeg predviditelja neke lutrije X kao redom najviše cijene subjektove kupnje lutrije X i najniže cijene subjektove prodaje lutrije X. U slučaju linearnog predviditelja te se dvije vrijednosti podudaraju, što riječima možemo izraziti kao: subjekt je spreman lutriju X kupiti za svaku cijenu manju od $P(X)$, a istu je lutriju spreman prodati za svaku cijenu višu od $P(X)$ (dok za cijenu koja iznosi točno $P(X)$ bez dodatnih informacija ipak ne možemo donijeti nikakav zaključak). Reći ćemo da je tada realan broj $P(X)$ subjektova **'fer' cijena** (engl. *fair price*) za lutriju X.

Walley prihvaća izraz *fer cijena* referirajući se na terminologiju koju je u svojim radovima koristio talijanski statističar Bruno de Finetti. Zagovaratelj subjektivnog pristupa vjerojatnosti, de Finetti se, između ostalog, bavio konceptom linearnih predviditelja i njihovim svojstvima, iako nije ulazio u toliku općenitost kao Walley koji linearne predviditelje doživljava tek kao poseban slučaj donjih predviditelja. Navedimo de Finettijevu definiciju

([6] str. 66): P je linearan predviditelj na vektorskom prostoru $\mathcal{K}$ ako zadovoljava uvjete (1) i (2):

(1) $P(X+Y) = P(X) + P(Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{K}$

(2) $infX \leq P(X) \leq supX, \quad \forall X \in \mathcal{K}$

Može se dokazati ([6], str. 66) da iz (1) i (2) slijedi:

(3) $P(\lambda X) = \lambda P(X), \quad \forall X \in \mathcal{K}$ i $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Definicija 2.1.1 ekvivalentna je de Finettijevoj definiciji linearnih predviditelja. Drugim riječima, donji predviditelj P zadovoljava uvjete koherentnosti (KDP1)-(KDP3) i sam je sebi konjugiran ako i samo ako zadovoljava navedene de Finettijeve uvjete.

Primijetimo, ako je $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ vektorski prostor i P linearni predviditelj na $\mathcal{K}$, onda iz svojstava (1) i (3) slijedi da je P zapravo linearni operator (odnosno linearni funkcional) $P : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$. Radi tog svojstva se P naziva upravo *linearnim* predviditeljem.

2.2 Neinformativni predviditelji

Linearne smo predviditelje definirali kao takve donje predviditelje $\underline{P}$ koji zadovoljavaju jednakost $\underline{P}(X) = \overline{P}(X)$, za sve lutrije X iz nekog vektorskog prostora $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$. Izraz $\overline{P}(X) - \underline{P}(X)$ možemo interpretirati kao "razinu nepreciznosti" para predviditelja $\overline{P}$ i $\underline{P}$ za konkretnu lutriju X. Takva interpretacija postaje jasnija ako je riječ o gornjim i donjim vjerojatnostima (jer u tom slučaju "razina nepreciznosti" postaje razlika između gornje i donje ograde za vjerojatnost nekog događaja), ali možemo je proučavati i na općenitijoj razini predviditelja. Iz teorema 1.3.4 slijedi da koherentni parovi donjih i gornjih predviditelja moraju zadovoljavati $infX \leq \underline{P}(X) \leq \overline{P}(X) \leq supX$, za sve lutrije $X \in \mathcal{K}$. Posebno, tada za svaku lutriju $X \in \mathcal{K}$ mora vrijediti $\overline{P}(X) - \underline{P}(X) \geq 0$. Ako je $\underline{P}$ linearan predviditelj, možemo reći da on minimizira razinu nepreciznosti na skupu $\mathcal{K}$ (jer je tada $\overline{P}(X) - \underline{P}(X) = 0$ za sve $X \in \mathcal{K}$).

Suprotni ekstrem, odnosno koherentan par donjeg i gornjeg predviditelja koji na vektorskom prostoru $\mathcal{K}$ maksimizira razinu nepreciznosti $\overline{P}(X) - \underline{P}(X)$ nazivamo neinformativnim predviditeljima (engl. *vacuous previsions*). Iz iste tvrdnje teorema 1.3.4 nije teško zaključiti kako će oni konkretno izgledati:

Definicija 2.2.1. *Neka su $\underline{P}$ i $\overline{P}$ redom donji i gornji konjugirani predviditelji definirani na vektorskom prostoru $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$. Kažemo da je $\underline{P}$* ***neinformativni donji predviditelj****, a $\overline{P}$* ***neinformativni gornji predviditelj*** *ako su dani kao:*

$$\underline{P}(X) = infX, \quad \overline{P}(X) = supX, \quad \forall X \in \mathcal{K}.$$

Iz superaditivnosti i pozitivne homogenosti funkcije $infimum$ lako možemo ustvrditi da je neinformativni donji predviditelj $\underline{P}$ (a onda i njemu konjugirani $\overline{P}$) koherentan predviditelj.

Bihevioristička interpretacija neinformativnih predviditelja je na neki način minimalna. Sve što u tom slučaju možemo zaključiti o subjektovom ponašanju jest da se subjekt ponaša koherentno. Takav model donosi minimalne, odnosno "neinformativne" pretpostavke na subjektovo ponašanje.

Sljedeći poseban slučaj donjih/gornjih predviditelja koji bismo htjeli proučiti su donje i gornje vjerojatnosti, koje smo definirali kao restrikcije donjeg/gornjeg predviditelja na neki skup indikatorskih lutrija. U detaljnijem proučavanju donjih/gornjih vjerojatnosti ključnim će se pokazati pojam koherentnosti. No, sjetimo se da zasada znamo definirati koherentnost samo onih predviditelja čija domena je vektorski prostor, a nijedan skup indikatorskih lutrija to nije (npr. za indikator $\mathbb{1}_A$ nepraznog skupa A, lutrija $2\mathbb{1}_A$ nije indikatorska jer postiže vrijednosti izvan $\{0, 1\}$). Tako ćemo koherentnost donjih/gornjih vjerojatnosti definirati tek u idućem poglavlju - nakon što uvedemo pojam koherentnosti predviditelja čija domena nije nužno vektorski prostor.

Poglavlje 3

Razna proširenja i usporedba s teorijom vjerojatnosti

3.1 Koherentnost na proizvoljnom skupu lutrija

U većini definicija i teorema iz ranijih poglavlja koristili smo pretpostavku da skup lutrija $\mathcal{K}$, koji nam je u toj definiciji/teoremu od interesa, ima strukturu vektorskog prostora. Naravno, u stvarnosti to ne mora biti istina. Uzmimo samo jednostavan slučaj kad je skup lutrija $\mathcal{K}$ konačan. Međutim, ranije obrađeni koncepti imaju svoju generaliziranu verziju kada je $\mathcal{K}$ proizvoljan skup lutrija. Razlog zašto takve generalizirane definicije obrađujemo tek sada je lakše razumijevanje. Naime, sam oblik definicija je mnogo jednostavniji u slučaju kad je $\mathcal{K}$ vektorski prostor. Zato sada, kad smo već dobro upoznati s konceptima poput predviditelja i njihove koherentnosti, ranije uvedene pojmove izlažemo u njihovom najopćenitijem obliku kada skupu lutrija $\mathcal{K}$ ne pretpostavljamo nikakvu dodatnu strukturu.

Sjetimo se da u definiciji donjih predviditelja 1.2.2 nismo pretpostavili dodatne uvjete na njegovu domenu $\mathcal{K}$. Njemu konjugirani gornji predviditelj je uvijek dobro definiran na domeni $-\mathcal{K}$, samo je ta domena različita ako je $\mathcal{K} \neq -\mathcal{K}$. No, prave razlike u slučaju proizvoljnog skupa $\mathcal{K}$ nastupaju u definiciji koherentnosti. Primijetimo da definicija 1.3.3 koherentnog donjeg predviditelja nema svoje očito poopćenje s vektorskog prostora na proizvoljnu domenu.

Prije same definicije koherentnog donjeg predviditelja $\underline{P}$ na proizvoljnom skupu lutrija $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$ definirat ćemo jedan slabiji, ali vrlo važan, uvjet racionalnog ponašanja subjekta pod nazivom *izbjegavanje sigurnog gubitka*. Iako će se koherentnost pokazati jačim uvjetom od izbjegavanja sigurnog gubitka (u smislu da svaki koherentan donji predviditelj izbjegava sigurni gubitak), posebno ga proučavamo jer je taj uvjet u praksi često lakše zadovoljiti od same koherentnosti. Dodatno, u idućem poglavlju vidjet ćemo da se nekoherentan donji predviditelj koji izbjegava sigurni gubitak eksplicitnom formulom može redefinirati na dijelu domene kako bi postao koherentan. Dakle, ako je zadovoljeno izbjegavanje sigurnog gubitka, koherentnost se može postići indirektno.

Uvedimo sada pojam granične lutrije. Ona će u nastavku rada uglavnom imati ulogu pomoćnog alata, korisnog radi preglednijeg zapisa formula.

Definicija 3.1.1. *Neka je $\underline{P}$ donji predviditelj na proizvoljnoj domeni $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$. Za lutriju $X \in \mathcal{K}$ definiramo njenu* ***graničnu lutriju*** *(engl. marginal gamble) kao $G(X) := X - \underline{P}(X)$.*

Primijetimo da za graničnu lutriju $G(X)$ vrijedi da je lutrija $G(X) + \epsilon$ subjektu poželjna za svaki $\epsilon > 0$. Tako se može reći da je $G(X)$ "skoro poželjna" lutrija (nemamo informacija o poželjnosti same lutrije $G(X)$).

Sjetimo se da smo, prije samog uvođenja uvjeta koherentnosti donjeg predviditelja (KDP1)-(KDP3) na vektorskom prostoru $\mathcal{K}$, definirali mnogo intuitivnije uvjete koherentnosti skupa poželjnih lutrija $\mathcal{D}$ (D1)-(D4). Koristeći formulu $\underline{P}(X) = sup\{\mu \in \mathbb{R} | X - \mu \in \mathcal{D}\}$ za sve $X \in \mathcal{K}$, uvjete (KDP1)-(KDP3) mogli smo opravdati time da su se pokazali ekvivalentnima uvjetima (D1)-(D4). Tako ćemo i uvjet koherentnosti na proizvoljnom skupu lutrija (pa tako i slabiji uvjet izbjegavanja sigurnog gubitka) opravdati pozivajući se na iste uvjete koherentnosti skupa poželjnih lutrija (D1)-(D4).

Za početak, pretpostavimo da subjektov skup poželjnih lutrija $\mathcal{D}$ zadovoljava (D1)-(D4). Neka je $\underline{P}$ donji predviditelj na proizvoljnom $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ dobiven formulom $\underline{P}(X) = sup\{\mu \in \mathbb{R} | X - \mu \in \mathcal{D}\}$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathcal{K}$. Tada su lutrije $G(X_1) + \delta, ..., G(X_n) + \delta \in \mathcal{D}$ za proizvoljan $\delta > 0$. Proširujući indukcijom po n uvjet (D2) na konačne sume, slijedi da je $\sum_{j=1}^{n} [G(X_j) + \delta] \in \mathcal{D}$. Iz (D4) tada slijedi da je $sup \sum_{j=1}^{n} [G(X_j) + \delta] \geq 0$, a iz proizvoljnosti realnog broja $\delta > 0$ slijedi da je $sup \sum_{j=1}^{n} G(X_j) \geq 0$. Time smo dokazali da uvjeti racionalnosti (D1)-(D4) impliciraju dolje definirano izbjegavanje sigurnog gubitka.

Definicija 3.1.2. *Kažemo da donji predviditelj $\underline{P}$ na proizvoljnom skupu lutrija $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$* ***izbjegava sigurni gubitak*** *ako je*

$$sup \sum_{j=1}^{n} G(X_j) \geq 0, \tag{3.1}$$

za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$ i sve (ne nužno različite) lutrije $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathcal{K}$.

Ako u nastavku rada kažemo da subjekt (ne) izbjegava sigurni gubitak, time će se podrazumijevati da to čini donji predviditelj $\underline{P}$ koji u danoj situaciji modelira subjektove cijene kupnje/prodaje lutrija.

Kako bismo dodatno pojasnili ovakav uvjet racionalnosti, pretpostavimo da on nije zadovoljen, ali da su zadovoljeni (D1)-(D4). Ako subjekt ne izbjegava sigurni gubitak, to znači da postoje $\epsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ i $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{K}$ takvi da je $\sum_{j=1}^{n} G(X_j) \leq -\epsilon < 0$. Ako uvedemo oznaku $\delta = \frac{\epsilon}{n+1}$ i preformuliramo prethodni izraz, dobivamo da je $\sum_{j=1}^{n}[G(X_j) + \delta] \leq -\delta$. Lutrije $G(X_1) + \delta, ..., G(X_n) + \delta$ su za subjekta poželjne jer je $\delta > 0$. Iz uvjeta racionalnosti (D2) slijedi da je tada poželjna i njihova suma $S := \sum_{j=1}^{n}[G(X_j) + \delta]$. Međutim, S je manja ili jednaka konstantnoj lutriji $-\delta$, koja nije poželjna po (D4) jer subjekt njenim prihvaćenjem može samo izgubiti. Očito tada svaka lutrija koja je manja ili jednaka od $-\delta$ (a S je takva lutrija) subjektu također jamči siguran gubitak pa mu zbog (D4) niti ona nije poželjna. Iz navedenih razmatranja slijedi da je istodobno $S \in \mathcal{D}$ i $S \notin \mathcal{D}$, što je kontradikcija s pretpostavkom da su zadovoljeni uvjeti (D1)-(D4). Drugim riječima, onaj subjekt koji ne izbjegava sigurni gubitak se ne ponaša racionalno (u smislu da ne zadovoljava uvjete (D1)-(D4)). Dodatno, iz prethodnog raspisa možemo izvući sljedeću tvrdnju: ako subjekt ne izbjegava sigurni gubitak, onda postoji konačno mnogo pojedinačno poželjnih lutrija čija suma subjektu donosi siguran gubitak.

Lako je dokazati da vrijedi i obrat prethodne tvrdnje. Naime, pretpostavimo da postoji konačno mnogo poželjnih lutrija $X_1, ..., X_n \in \mathcal{D}$ takvih da je $sup \sum_{j=1}^{n} X_j < 0$. Kako je $X_j - 0 = X_j \in \mathcal{D}$ i $\underline{P}(X_j) = sup\{\mu \in \mathbb{R} | X_j - \mu \in \mathcal{D}\}$ za svaki $1 \leq j \leq n$, slijedi da je $\underline{P}(X_j) \geq 0$ za svaki $1 \leq j \leq n$. Tada je očito i $\sum_{j=1}^{n} \underline{P}(X_j) \geq 0$. Ako tu sumu oduzmemo od obje strane nejednakosti $sup \sum_{j=1}^{n} X_j < 0$ i preformuliramo dobiveni izraz, onda imamo da je $sup \sum_{j=1}^{n} G(X_j) \leq -\sum_{j=1}^{n} \underline{P}(X_j) < 0$ pa $\underline{P}$ ne izbjegava sigurni gubitak.

Zaključak oba prethodna raspisa, ujedno i koristan kriterij provjere uvjeta 3.1, ali i jasna interpretacija pojma izbjegavanja sigurnog gubitka je sljedeća: subjekt ne izbjegava sigurni gubitak ako i samo ako postoji konačno mnogo pojedinačno poželjnih lutrija čija suma subjektu donosi siguran gubitak.

Definirajmo sada koherentnost na općenitom skupu lutrija.

Definicija 3.1.3. *Kažemo da je donji predviditelj $\underline{P}$ na proizvoljnom skupu lutrija $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$* ***koherentan*** *ako je*

$$sup\Big[\sum_{j=1}^{n} G(X_j) - mG(X_0)\Big] \geq 0, \tag{3.2}$$

za sve $m, n \in \mathbb{N}$ i sve (ne nužno različite) lutrije $X_0, X_1, ..., X_n \in \mathcal{K}$.

U [6], str. 75, je dokazano da je prethodna definicija ekvivalentna uvjetima (KDP1)-(KDP3) u slučaju kad je domena donjeg predviditelja vektorski prostor. Raspišimo ovdje jedan smjer tog dokaza. Pretpostavimo da donji predviditelj $\underline{P}$ zadovoljava gornji uvjet 3.2 te da je njegova domena vektorski prostor. Ako u 3.2 uzmemo $n = 0$, $m = 1$ i $X_0 = X$, vidimo da vrijedi (KDP1). Uvjet (KDP3) provjerimo uzimajući u istoj formuli $n = 2$, $m = 1$, $X_0 = X + Y$, $X_1 = X$ i $X_2 = Y$. Nadalje, ako u a) dijelu teorema 3.1.5 (vidi str. 30) uzmemo $n = 1$, $X_0 = X$, $X_1 = \lambda X$, $\lambda_0 = \lambda$ i $\lambda_1 = 1$, vidimo da je $\lambda \underline{P}(X) \geq \underline{P}(\lambda X)$. Obrnutu nejednakost dobijemo ako (X_0, λ_0) zamijenimo s (X_1, λ_1). Tako dobivamo da vrijedi $\lambda\underline{P}(X) = \underline{P}(\lambda X)$, što je upravo uvjet (KDP2). Obrat teorema, odnosno da uvjeti (KDP1)-(KDP3) na vektorskom prostoru povlače 3.2, dokazan je u [6], str. 75.

Dodatno, iz gore raspisanog dokaza jasno je sljedeće: ako donji predviditelj $\underline{P}$ na domeni $\mathcal{K}$ zadovoljava općenitu definiciju koherentnosti 3.1.3, onda uvjeti (KDP1)-(KDP3) vrijede kad god su oni dobro definirani, neovisno o strukturi domene $\mathcal{K}$. Na primjer, ako $\mathcal{K}$ nije vektorski prostor onda za $X, Y \in \mathcal{K}$ nije nužno da je $X + Y \in \mathcal{K}$. No, ako to ipak vrijedi, onda vrijedi i uvjet (KDP3) koji kaže da je $\underline{P}(X + Y) \geq \underline{P}(X) + \underline{P}(Y)$. Dodatno, niti u jednom od dva smjera gornjeg dokaza nije nužna činjenica da je $\mathcal{K}$ vektorski prostor - dovoljan je slabiji uvjet da $\mathcal{K}$ ima strukturu konveksnog konusa (zatvorenost na pozitivne linearne kombinacije svojih elemenata). Dakle, definicija 3.1.3 ekvivalentna je uvjetima (KDP1)-(KDP3) čak i kad je $\mathcal{K}$ konveksni konus.

Kao što smo to učinili za izbjegavanje sigurnog gubitka, definiciju koherentnog donjeg predviditelja također želimo opravdati pokazujući da je u skladu s uvjetima koherentnosti poželjnih lutrija (D1)-(D4). U tu svrhu promotrimo izraz 3.2 u tri slučaja:

- $m = 0$

  U ovome se slučaju definicija koherentnosti 3.1.3 svodi na definiciju izbjegavanja sigurnog gubitka koju smo već opravdali uvjetima (D1)-(D4). Tako je jasno da svaki koherentan donji predviditelj izbjegava sigurni gubitak.

- $m > 0, n = 0$

  Uz ove uvjete formula 3.2 postaje nejednakost $sup[-mG(X_0)] \geq 0$, iz čega slijedi da je $sup[-G(X_0)] \geq 0$, za sve $X_0 \in \mathcal{K}$. Kako je $-inf[X_0 - \underline{P}(X_0)] = -infG(X_0) = sup[-G(X_0)] \geq 0$, vrijedi da je $\underline{P}(X_0) \geq infX_0$, za sve $X_0 \in \mathcal{K}$. To jednostavno znači da su sve lutrije oblika $X_0 - \mu$, gdje je $\mu < infX_0$, za subjekta poželjne. Kako iste lutrije subjektu donose siguran dobitak, to je u skladu s uvjetom (D3) (prihvaćanje sigurnog dobitka).

- $m > 0, n > 0$

  Pretpostavimo da uvjet 3.2 nije zadovoljen. To znači da postoje $m, n > 0$, lutrije $X_0, X_1, ..., X_n \in \mathcal{K}$ i $\delta > 0$ takvi da je

  $$\sum_{j=1}^{n}[G(X_j) + \delta] \leq m[G(X_0) - \delta].$$

  Lutrija na lijevoj strani nejednakosti je poželjna jer je ona suma poželjnih lutrija $G(X_j) + \delta$, $j = 1, ..., n$. Očito je tada poželjna i "bolja" lutrija $m[G(X_0) - \delta]$. Ako tu lutriju pomnožimo s $\frac{1}{m}$, po (D1) je i lutrija $G(X_0) - \delta$ poželjna. Međutim, kako je (po definiciji granične lutrije) $X_0 - (\underline{P}(X_0) + \delta) = G(X_0) - \delta \in \mathcal{D}$, to znači da bi subjekt bio spreman kupiti lutriju X_0 po cijeni strogo višoj od $\underline{P}(X_0)$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $\underline{P}(X_0)$ najviša cijena po kojoj bi subjekt bio spreman kupiti X_0. Dakle, donji predviditelj $\underline{P}$, iako dobro definiran u matematičkom smislu (po definiciji 1.2.2 donji predviditelj je bilo koja funkcija $\underline{P} : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$), nije dobro definiran u interpretativnom smislu ($\underline{P}(X) = sup\{\mu \in \mathbb{R} | X - \mu \in \mathcal{D}\}$) i valjalo bi ga redefinirati kako bi on uvjerljivije opisao subjektove stavove.

Kao i ranije, kažemo da je konjugirani gornji predviditelj $\overline{P}$ od $\underline{P}$ koherentan ako je $\underline{P}$ koherentan u smislu prethodne definicije 3.1.3. Ako pak želimo direktno provjeriti koherentnost od $\overline{P}$, uvjet 3.2 možemo lako preformulirati u terminima od $\overline{P}$ (koristeći $\overline{P}(X) = -\underline{P}(-X)$). Definicija koherentnosti tada prelazi u uvjet

$$inf\Big[\sum_{j=1}^{n} X_j - mX_0\Big] \leq \sum_{j=1}^{n} \overline{P}(X_j) - m\overline{P}(X_0), \tag{3.3}$$

za sve $m, n \geq 0$ i sve $X_j \in -\mathcal{K}$.

Ilustrirajmo sada primjerom pojmove koherentnosti i izbjegavanja sigurnog gubitka.

Primjer 3.1.4. *Neka je $\Omega = \{A, B, C\}$ skup elementarnih događaja, pri čemu zahtijevamo da su A, B i C u parovima disjunktni neprazni skupovi. Pretpostavimo da je donji predviditelj $\underline{P}$ definiran na skupu lutrija $\mathcal{K}_P = \{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B, \mathbb{1}_{A\cup B}\}$ (posebno je $\underline{P}$ tada donja vjerojatnost $\underline{\mathbb{P}}$ na $\{A, B, A \cup B\}$). Neka je $\underline{P}(\mathbb{1}_A) = \underline{P}(\mathbb{1}_B) = 0.4$, $\underline{P}(\mathbb{1}_{A\cup B}) = 0.5$. Tada $\underline{P}$ nije koherentan jer formula 3.2 ne vrijedi za $n = 2, m = 1, X_1 = \mathbb{1}_A, X_2 = \mathbb{1}_B, X_0 = \mathbb{1}_{A\cup B}$. Korištenjem činjenice da je $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ (jer su A i B disjunktni) i uvrštavanjem u 3.2 dobijemo $sup[(\mathbb{1}_A - 0.4) + (\mathbb{1}_B - 0.4) - (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 0.5)] = -0.3 \ngeq 0$. No, $\underline{P}$ ipak izbjegava sigurni gubitak - lako se provjeri da je uvjet 3.1 zadovoljen za sve kombinacije lutrija iz $\mathcal{K}_P$. U dijelu 3.3, kada uvedemo pojam prirodnog proširenja, vidjet ćemo kako se $\underline{P}$ može lako "ispraviti" na dijelu domene da bi postao koherentan. U ovom slučaju, ako zadržimo jednakosti $\underline{P}(\mathbb{1}_A) = \underline{P}(\mathbb{1}_B) = 0.4$, predviditelj $\underline{P}$ će postati koherentan ako redefiniramo $\underline{P}(\mathbb{1}_{A\cup B})$ sa 0.5 na $\lambda \in [0.8, 1]$ (spomenuto prirodno proširenje će λ postaviti na minimalnu moguću vrijednost koja zadovoljava koherentnost - dakle na 0.8 u ovoj situaciji).*

Neka je pak donji predviditelj $\underline{Q}$ definiran na skupu lutrija $\mathcal{K}_Q = \{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B, \mathbb{1}_C\}$ (posebno je $\underline{Q}$ tada donja vjerojatnost $\underline{\mathbb{Q}}$ na jednočlanim podskupovima od Ω) kao $\underline{\mathbb{Q}}(A) = \underline{\mathbb{Q}}(B) = \underline{\mathbb{Q}}(C) = 0.4$. Ako subjekt prihvati kupnju sve tri ponuđene lutrije po cijeni od npr. 0.39 za svaku od njih, posljedica takve transakcije će biti subjektov siguran gubitak od -0.17, neovisno o $\omega \in \Omega$ koji se dogodi. Dakle, $\underline{\mathbb{Q}}$ ne izbjegava sigurni gubitak.

Iz prethodnih razmatranja postaje jasnije zašto smo izbjegavanje sigurnog gubitka izdvojili kao poseban uvjet iako je slabiji od koherentnosti. Da bi subjekt definirao koherentan donji predviditelj na nekoj domeni, on mora biti siguran da vrijednosti tog predviditelja na jednom dijelu domene neće promijeniti njegove stavove o lutrijama iz nekog drugog dijela domene. Za pojašnjenje te tvrdnje vratimo se na prvi dio prethodnog primjera. Zamislimo konkretne događaje A, B, C kao "Iduće Svjetsko nogometno prvenstvo osvojit će: Argentina (A), Brazil (B) ili netko drugi (C)". Pretpostavimo da je subjekt definirao donje vjerojatnosti događaja A i B kao $\underline{\mathbb{P}}(A) = \underline{\mathbb{P}}(B) = 0.4$. Ako će subjekt kasnije htjeti konstruirati koherentan donji predviditelj, on će događaju $A \cup B$ dodijeliti donju vjerojatnost koja iznosi minimalno $\underline{\mathbb{P}}(A) + \underline{\mathbb{P}}(B) = 0.8$. U drugu ruku, zamislimo da je subjekt u međuvremenu zaboravio kako je definirao $\underline{\mathbb{P}}(A)$ i $\underline{\mathbb{P}}(B)$ te je neovisno o tome zatražen za mišljenje o donjoj vjerojatnosti da "Svjetsko prvenstvo osvoji Argentina ili Brazil" (događaj $A \cup B$). Tada je lako moguće da subjekt, kao u prethodnom primjeru, definira $\underline{\mathbb{P}}(A \cup B) = 0.5$, što će $\underline{\mathbb{P}}$ učiniti nekoherentnim predviditeljem. Ako se isti subjekt kasnije prisjeti kako je definirao $\underline{\mathbb{P}}(A)$ i $\underline{\mathbb{P}}(B)$, on će u skladu s time biti prisiljen promijeniti svoje stavove o $A \cup B$ kako bi osigurao koherentnost.

S druge strane, izbjegavanje sigurnog gubitka intuitivno se čini kao bitno fundamentalniji oblik racionalnog ponašanja (a time i lakše ostvariv u praksi) od same koherentnosti. Ono zahtijeva tek da ne postoji konačan skup pojedinačno poželjnih lutrija takvih da je subjekt, ako ih sve prihvati, nužno u gubitku.

Očekivano, rezultati iz prethodnih poglavlja koji koriste pojam koherentnosti na vektorskom prostoru (teoremi 1.3.4, 1.3.5, 1.3.6, 1.3.7) vrijede i na proizvoljnoj domeni ako su izrazi u njima dobro definirani. Na primjer, ako je $\mathcal{K}$ proizvoljan i $X, Y \in \mathcal{K}$, onda nije nužno da je $X + Y \in \mathcal{K}$. No, ako to vrijedi, onda vrijedi i e) dio teorema 1.3.4 koji (između ostalog) tvrdi da je $\underline{P}(X) + \underline{P}(Y) \leq \underline{P}(X + Y)$ za koherentan donji predviditelj $\underline{P}$ na $\mathcal{K}$.

Navedimo sada još dvije bitne karakterizacije koherentnosti koje će nam trebati u ostatku rada.

Teorem 3.1.5. *([6], str. 75) Neka je $\underline{P}$ donji predviditelj na $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$.*

a) $\underline{P}$ je koherentan ako i samo ako je $sup[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j G(X_j) - \lambda_0 G(X_0)] \geq 0$ za sve $n \geq 1$, $X_j \in \mathcal{K}$, $\lambda_j \geq 0$, $0 \leq j \leq n$.

b) Neka je slika lutrije X (to jest $\{X(\omega) | \omega \in \Omega\}$) konačan skup za sve $X \in \mathcal{K}$. Tada je $\underline{P}$ koherentan ako i samo ako za sve $m, n \geq 0$ i sve $X_0, X_1, ..., X_n \in \mathcal{K}$ postoji $\omega \in \Omega$ takav da je $\sum_{j=1}^{n} G(X_j)(\omega) \geq mG(X_0)(\omega)$.

Nenegativne brojeve $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ u a) dijelu teorema možemo interpretirati kao subjektove uloge za kupnju lutrija. Naime, pod pretpostavkom uvjeta (D1) (pozitivna homogenost), ako je subjekt spreman platiti cijenu μ za lutriju X, onda je on spreman platiti cijenu $\lambda\mu$ za lutriju s λ puta većim isplatama od X, a to je λX.

Generalizirajmo još važan pojam linearnih predviditelja s vektorskog prostora na proizvoljnu domenu.

Definicija 3.1.6. *Neka je $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$ te neka je $P : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ realna funkcija na $\mathcal{K}$. Kao i prije, označimo sa $G(X) = X - P(X)$ graničnu lutriju od X ($G(X)$ opravdano zovemo graničnom lutrijom jer P možemo shvatiti kao donji predviditelj na $\mathcal{K}$). Kažemo da je P* ***linearan predviditelj*** *na $\mathcal{K}$ ako je*

$$sup\Big[\sum_{j=1}^{n} G(X_j) - \sum_{j=1}^{m} G(Y_j)\Big] \geq 0, \tag{3.4}$$

za sve $m, n \geq 0$ i sve $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_m \in \mathcal{K}$.

$P(X)$ i dalje možemo shvatiti kao subjektovu "fer cijenu" za lutriju X, što znači da bi subjekt trebao biti spreman prodati lutriju X po svakoj cijeni višoj od $P(X)$ ali i kupiti X za svaku cijenu nižu od $P(X)$. Ako je to doista slučaj (općenito ne mora biti: primijetimo da u definiciji ne zahtijevamo postojanje fer cijena) onda su $G(X) + \epsilon = X - (P(X) - \epsilon)$ i $-G(X) + \epsilon = (P(X) + \epsilon) - X$ obje subjektu poželjne za svaki $\epsilon > 0$. Tada uvjet 3.4 zapravo kaže da subjektove fer cijene moraju izbjegavati siguran gubitak. Dakle, ako subjekt odredi fer cijenu $P : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ za sve lutrije u $\mathcal{K}$ i te fer cijene (shvaćene kao donji predviditelj na $\mathcal{K}$) izbjegavaju siguran gubitak, onda su one linearan predviditelj na $\mathcal{K}$.

Svaki linearan predviditelj je koherentan donji predviditelj, što provjerimo ako u 3.4 uzmemo $Y_1 = ... = Y_m = X_0$, ali je ujedno i koherentan gornji predviditelj (zadovoljava uvjet 3.3), što vidimo ako u 3.4 uzmemo $X_1 = ... = X_n = Y_0$. Također, korištenjem a) dijela teorema 3.1.5, dobivamo da vrijedi uvjet ekvivalentan definiciji linearnog predviditelja: $sup \sum_{j=1}^{n} \lambda_j G(X_j) \geq 0$ za sve $n \geq 1$, $X_j \in \mathcal{K}$ i $\lambda_j \in \mathbb{R}$ za sve $1 \leq j \leq n$ (ovdje su skalari $\lambda_j \in \mathbb{R}$, za razliku od teorema 3.1.5 a), gdje smo zahtijevali $\lambda_j \geq 0$). Navedeni uvjet se ponekad koristi (npr. u de Finettijevim radovima) kao definicija linearnog predviditelja na proizvoljnoj domeni.

Teorem 3.1.7. *([6], str. 87) Neka je P donji predviditelj na domeni $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ takvoj da je $-\mathcal{K} = \mathcal{K}$. Tada vrijedi:*

a) P je linearan predviditelj ako i samo ako on izbjegava sigurni gubitak i sam je sebi konjugiran ($P(X) = -P(-X)$ za sve $X \in \mathcal{K}$)

b) P je linearan predviditelj ako i samo ako je on koherentan i sam je sebi konjugiran

Primijetimo da ovaj teorem pogotovo vrijedi u slučaju kad je $\mathcal{K}$ vektorski prostor pa - po njegovom b) dijelu - vidimo da je tada definicija linearnog predviditelja 2.1.1 ekvivalentna definiciji 3.1.6. Štoviše, za ekvivalenciju tih uvjeta dovoljno je da je $-\mathcal{K} = \mathcal{K}$. Također, po a) dijelu teorema, ako je P sam sebi konjugiran onda je dovoljno provjeriti da P izbjegava sigurni gubitak (što je slabiji uvjet od koherentnosti) kako bi se zaključilo da je P linearan predviditelj.

3.2 Gornje i donje vjerojatnosti

Iako je svrstavamo među teorije nepreciznih vjerojatnosti, teorija donjih predviditelja, sukladno svom nazivu, donje predviditelje smatra na neki način fundamentalnijim pojmom od donjih vjerojatnosti. Filozofski dio tog argumenta sastoji se u tome da je pojam lutrije kao isplate u ovisnosti o nekom nedeterminiranom ishodu i akcija poput njihove kupnje/prodaje na neki način dio ljudskih aktivnosti već tisućama godina pa je tako poprilično jasan većini ljudi, neovisno o razini njihovog obrazovanja. Uz filozofski, već smo upoznali i matematički dio argumenta jer je donja vjerojatnost definirana kao donji predviditelj restringiran na manju domenu indikatorskih lutrija. Ipak, oba navedena argumenta oslabila bi ako bi se pokazalo kako donje vjerojatnosti imaju jedinstveno proširenje na veću domenu svih lutrija. Matematički gledano, tada bi određeni donji predviditelj bilo dovoljno definirati samo na događajima (to jest indikatorima događaja) kako bismo znali kako on izgleda na svim lutrijama. Iz filozofske perspektive, subjektovi bi stavovi o doslovno svim lutrijama (koje često mogu biti kompliciranog oblika) tada bili potpuno opisani njegovim stavovima o (prilično jednostavnim) indikatorskim lutrijama, što smo interpretirali kao "subjektovu spremnost da se za neku cijenu kladi na određeni događaj". Međutim, idući nam primjer govori kako to nije istina. To jest, donje vjerojatnosti nemaju nužno jedinstveno proširenje na ostale lutrije.

Primjer 3.2.1. *([6], str. 82-84) Neka je $\Omega = \{a, b, c\}$ skup elementarnih događaja. Definiramo četiri funkcije (zapravo vjerojatnosne mjere na Ω) oblika $P_i = (P_i(a), P_i(b), P_i(c))$ za $1 \leq i \leq 4$, kao $P_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$, $P_2 = (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$, $P_3 = (\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3})$, $P_4 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Svaki P_i možemo proširiti na $\mathcal{L}(\Omega)$ formulom $P_i(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P_i(\omega)$. Nije teško provjeriti da su tako definirane funkcije doista proširenja od P_i te da je tako prošireni P_i linearan predviditelj (primjetimo sličnost formule s definicijom očekivanja diskretne slučajne varijable). Uz pomoć tih predviditelja konstruirat ćemo četiri različita donja predviditelja koji se podudaraju na indikatorskim lutrijama.*

Neka je $\underline{P}_1(X) = min\{P_1(X), P_2(X)\}$, za sve $X \in \mathcal{L}$. Prema teoremu o donjoj envelopi, $\underline{P}_1$ je koherentan donji predviditelj pa je njegova restrikcija na indikatorske lutrije koherentna donja vjerojatnost (definicija 3.2.2). $\underline{P}_1$ i njemu konjugirani $\overline{P}_1$ postižu ove vrijednosti na elementarnim događajima:

	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$
$\overline{P}_1$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\underline{P}_1$	$\frac{1}{3}$	0	0

Time je $\underline{P}_1$ ujedno definiran na svim događajima (npr. za $\underline{P}_1(\{a\} \cup \{b\}) = 1 - \overline{P}_1(\{c\})$). Nadalje definiramo $\underline{P}_2(X) = min\{P_1(X), P_2(X), P_3(X)\}$, $\underline{P}_3(X) = min\{P_1(X), P_2(X), P_4(X)\}$, $\underline{P}_4(X) = min\{P_1(X), P_2(X), P_3(X), P_4(X)\}$, za sve $X \in \mathcal{L}$. Uz primjenu teorema o donjoj envelopi i malo računa lako je provjeriti da su $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \underline{P}_3, \underline{P}_4$ koherentni donji predviditelji koji se podudaraju na indikatorima događaja.

No, ako uzmemo lutriju $Y = \mathbf{1}_{\{a\}} - \mathbf{1}_{\{b\}}$, *vidimo da je* $\underline{P}_1(Y) = \overline{P}_1(Y) = \frac{1}{3}, \underline{P}_2(Y) = \frac{1}{3}, \overline{P}_2(Y) = \frac{2}{3}, \underline{P}_3(Y) = 0, \overline{P}_3(Y) = \frac{1}{3}, \underline{P}_4(Y) = 0, \overline{P}_4(Y) = \frac{2}{3}$. *Iz toga zaključujemo da su sva četiri navedena donja predviditelja različita, iako imaju istu restrikciju na indikatore događaja.*

Sada imamo čvrste argumente da donje predviditelje doista smatramo fundamentalnijim i informativnijim pojmom od donjih vjerojatnosti, ali to nikako ne znači da bi u ostatku analize trebalo zanemariti donje i gornje vjerojatnosti. Štoviše, iako su donje vjerojatnosti poseban slučaj donjih predviditelja, obilje je argumenata da su one možda i najvažniji poseban slučaj pa se zato u ostatku ovog potpoglavlja pobliže bavimo donjim i gornjim vjerojatnostima.

Definicija 3.2.2. *Donja/gornja vjerojatnost* $\underline{\mathbb{P}}/\overline{\mathbb{P}}$ *na nekoj familiji događaja* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *je* ***koherentna*** *ako je pripadajući donji/gornji predviditelj* $\underline{P}/\overline{P}$ *koherentan na* $\{\mathbb{1}_A | A \in \mathcal{A}\}$. *Pod "pripadajući" pritom mislimo na onaj donji/gornji predviditelj* $\underline{P}/\overline{P}$ *za koji je* $\underline{P}(\mathbb{1}_A) = \underline{\mathbb{P}}(A)/\overline{P}(\mathbb{1}_A) = \overline{\mathbb{P}}(A)$.

Navedimo sada neka osnovna svojstva koherentnih gornjih i donjih vjerojatnosti. Sljedeći teorem je verzija teorema 1.3.4 u slučaju kad su predviditelji restringirani na događaje:

Teorem 3.2.3. *([6], str. 84-85) Neka je* $\mathcal{A}$ *familija događaja na* Ω, *neka je* $\underline{\mathbb{P}}$ *koherentna donja vjerojatnost na* $\mathcal{A}$ *i* $\overline{\mathbb{P}}$ *njoj konjugirana gornja vjerojatnost na* $\mathcal{A}^c$. *Sljedeća svojstva vrijede za sve događaje* A, B *za koje su izrazi u formulama dobro definirani:*

a) $0 \leq \underline{\mathbb{P}}(A) \leq \overline{\mathbb{P}}(A) \leq 1$

b) $\underline{\mathbb{P}}(\emptyset) = \overline{\mathbb{P}}(\emptyset) = 0, \quad \underline{\mathbb{P}}(\Omega) = \overline{\mathbb{P}}(\Omega) = 1$

c) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; \underline{\mathbb{P}}(A) \leq \underline{\mathbb{P}}(B)$ *i* $\overline{\mathbb{P}}(A) \leq \overline{\mathbb{P}}(B)$

d) $\underline{\mathbb{P}}(A \cup B) \leq \underline{\mathbb{P}}(A) + \overline{\mathbb{P}}(B), \quad \overline{\mathbb{P}}(A \cup B) \leq \overline{\mathbb{P}}(A) + \overline{\mathbb{P}}(B)$

e) $A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \underline{\mathbb{P}}(A \cup B) \geq \underline{\mathbb{P}}(A) + \underline{\mathbb{P}}(B)$ *i* $\overline{\mathbb{P}}(A \cup B) \geq \underline{\mathbb{P}}(A) + \overline{\mathbb{P}}(B)$

Posebno su zanimljivi slučajevi kada su donje i gornje vjerojatnosti (bolje rečeno njima pripadajući predviditelji) linearni ili neinformativni predviditelji. Kako sada koherentnost znamo definirati na proizvoljnoj domeni, sljedeće definicije imaju smisla.

Definicija 3.2.4. *Kažemo da je funkcija* $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ***konačno aditivna vjerojatnost*** *na* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *ako je* P *linearan predviditelj na* $\{\mathbb{1}_A | A \in \mathcal{A}\}$, *gdje je* $P(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$ *za sve* $A \in \mathcal{A}$.

Definicija 3.2.5. *Donja/gornja vjerojatnost je* ***neinformativna donja/gornja vjerojatnost*** *na $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ako je pripadajući donji/gornji predviditelj neinformativan na $\{\mathbb{1}_A | A \in \mathcal{A}\}$.*

Konačno aditivne vjerojatnosti poslužit će nam da pokažemo kako je teorija donjih predviditelja doista poopćenje teorije vjerojatnosti. Neka je Ω skup elementarnih događaja i neka je $\mathcal{A}$ algebra podskupova od Ω. Po definiciji algebre skupova to znači da je $\emptyset \in \mathcal{A}$, da je $\mathcal{A}$ zatvorena na uzimanje komplementa te da je svaka konačna unija elemenata od $\mathcal{A}$ također element od $\mathcal{A}$.

Teorem 3.2.6. *([6], str. 90) Neka je funkcija $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ definirana na algebri skupova $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Tada je $\mathbb{P}$ konačno aditivna vjerojatnost na $\mathcal{A}$ ako i samo ako za sve $A, B \in \mathcal{A}$ vrijede uvjeti:*

1) $\mathbb{P}(A) \geq 0$ *(Nenegativnost)*

2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *(Normiranost)*

3) $A \cap B = \emptyset \implies \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ *(Konačna aditivnost)*

Dokaz se može naći u [6], str. 90-91.

S druge strane, prisjetimo se klasične definicije vjerojatnosti ([5], str. 13): neka je Ω skup elementarnih događaja i neka je $\mathcal{A}$ σ-algebra podskupova od Ω (dakle algebra koja je zatvorena i na prebrojive unije svojih elemenata, a ne samo na konačne unije). Funkcija $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ je **vjerojatnost** ili **vjerojatnosna mjera** na $(\Omega, \mathcal{A})$ ako za sve $A, B, A_1, A_2, A_3 ... \in \mathcal{A}$ zadovoljava takozvane Kolmogorovljeve aksiome:

1) $\mathbb{P}(A) \geq 0$ (Nenegativnost)

2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (Normiranost)

3) $\{A_i | i \in \mathbb{N}\}$ međusobno disjunktni događaji $\implies \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

(Prebrojiva aditivnost ili σ-aditivnost)

Očito, ako je $\mathcal{A}$ σ-algebra, onda je $\mathcal{A}$ posebno i algebra jer zatvorenost skupa na prebrojive unije povlači njegovu zatvorenost na konačne unije. Slično, ako je određena funkcija σ-aditivna, onda je ona i konačno aditivna. Iz toga slijedi da, ako je $\mathbb{P}$ vjerojatnosna mjera na $(\Omega, \mathcal{A})$ (dakle zadovoljava aksiome Kolmogorova), onda ona posebno zadovoljava uvjete teorema 3.2.6 pa je, prema istom teoremu, $\mathbb{P}$ konačno aditivna vjerojatnost u smislu definicije 3.2.4. Kako obrat ne mora vrijediti (jer konačno aditivna funkcija nije nužno i σ-aditivna pa konačno aditivna vjerojatnost općenito nije vjerojatnosna mjera), zaista možemo zaključiti da je (klasična, precizna) vjerojatnosna mjera poseban slučaj modela u teoriji donjih predviditelja kada donje vjerojatnosti od našeg interesa nisu tek konačno aditivne, već i σ-aditivne. Upravo se iz tog razloga teorija donjih predviditelja s pravom smatra generalizacijom teorije vjerojatnosti.

Na kraju ovog dijela recimo još nekoliko riječi o neinformativnim vjerojatnostima. Iz definicije neinformativnih gornjih i donjih predviditelja ($\underline{P}(X) = infX$, $\overline{P}(X) = supX$) i teorema 3.2.3 je lako zaključiti koje vrijednosti takve vjerojatnosti poprimaju. Neinformativne vjerojatnosti na familiji događaja $\mathcal{A}$ zadovoljavaju svojstva:

1. $\underline{\mathbb{P}}(\emptyset) = \overline{\mathbb{P}}(\emptyset) = 0$
2. $\underline{\mathbb{P}}(\Omega) = \overline{\mathbb{P}}(\Omega) = 1$
3. $\underline{\mathbb{P}}(A) = 0,\ \overline{\mathbb{P}}(A) = 1 \quad, \forall A \in \mathcal{A} \backslash \{\emptyset, \Omega\}$.

Ranije smo spomenuli kako neinformativni predviditelji daju tek minimalne pretpostavke na subjektovo ponašanje jer iz njih možemo zaključiti da se subjekt ponaša koherentno, ali gotovo ništa više od toga. Upravo radi te minimalnosti dostupnih informacija čini se kako bi neinformativne vjerojatnosti mogle poslužiti kao adekvatan model za situacije u kojima je količina dostupnih informacija doista minimalna (prisjetimo se motivacijskog primjera 0.2.2 i problemima uzimanja uniformne distribucije kao "najmanje pogrešnog modela" za prikaz manjka informacija). Neinformativne vjerojatnosti pokazuju se korisnima upravo u takvim situacijama. Proučimo sljedeći primjer:

Primjer 3.2.7. *Igra se nogometna utakmica između ekipe A i ekipe B. Subjekt koji se uopće ne razumije u nogomet upitan je koja je vjerojatnost da ekipa A pobijedi. Njegov odgovor ovisi o njegovoj konstrukciji skupa mogućih ishoda utakmice* Ω*: konačan rezultat njegove analize nije jednak ako je subjekt moguće ishode utakmice shvatio kao* $\Omega_1 = \{$*"ekipa A pobjeđuje","ekipa A ne pobjeđuje"*$\}$ *ili kao* $\Omega_2 = \{$*"pobjeda ekipe A","remi","pobjeda ekipe B"*$\}$*. U svom "gotovo potpunom neznanju" o nogometu i o kvaliteti ekipa A i B, subjekt će sve ishode shvatiti kao jednako vjerojatne i pretpostaviti uniformnu distribuciju na* $\Omega_i, i \in \{1, 2\}$*, ali u ovisnosti o indeksu "i" će traženu vjerojatnost procijeniti kao 50% (za i =* 1*) ili kao cca. 33% (za i =* 2*).*

No, ako subjekt koristi neprecizinu, neinformativnu vjerojatnost, događaje od interesa može modelirati kao:

$$\underline{\mathbb{P}}(\text{"pobjeda ekipe A"}) = 0, \quad \overline{\mathbb{P}}(\text{"pobjeda ekipe A"}) = 1$$

Što je najbitnije, gornje relacije ne ovise o subjektovom odabiru skupa mogućih ishoda utakmice. Štoviše, ako bi subjekt moguće ishode utakmice shvatio još opširnije (poput konkretnog rezultata utakmice), model neinformativih vjerojatnosti bi ostao isti, dok bi raniji model koji koristi uniformnu distribuciju bio osjetno različit.

3.3 Prirodno proširenje

Pretpostavimo da je donji predviditelj $\underline{P}$ definiran na proizvoljnom skupu lutrija $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$. Tada se nameću dva prirodna pitanja:

- Neka je $\underline{P}$ koherentan na $\mathcal{K}$. Možemo li, koristeći isključivo pretpostavku da se subjekt ponaša koherentno, $\underline{P}$ proširiti na domenu svih lutrija $\mathcal{L}$? Drugim riječima, postoji li donji predviditelj $\underline{Q}$ koji je definiran i koherentan na cijelom skupu $\mathcal{L}$ takav da se $\underline{P}$ i $\underline{Q}$ podudaraju na $\mathcal{K}$?

- Ako pak $\underline{P}$ nije koherentan na $\mathcal{K}$, možemo li ga na relativno jednostavan i konstruktivan način redefinirati na dijelu domene kako bi on postao koherentan?

Ono što ćemo definirati kao prirodno proširenje riješit će oba navedena problema odjednom. Preciznije, pokazat ćemo da je dovoljno da donji predviditelj $\underline{P}$ na $\mathcal{K}$ izbjegava sigurni gubitak. Tada će ga njegovo prirodno proširenje $\underline{E}$, ako treba, "ispraviti" do koherentnosti na $\mathcal{K}$, a taj ispravak će zatim proširiti do koherentnog donjeg predviditelja na čitavom skupu $\mathcal{L}$.

Definiciju prirodnog proširenja najlakše ćemo uvesti tako da pokušamo odgovoriti na drugo od gornja dva pitanja. Pretpostavimo da $\underline{P}$ nije koherentan na $\mathcal{K}$. Ta tvrdnja je, po teoremu 3.1.5, ekvivalentna tome da postoje lutrije $X_0, X_1, ..., X_n \in \mathcal{K}$, $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ i $\alpha > \underline{P}(X_0)$ takvi da je $X_0 - \alpha \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j G(X_j) =: S$. Lutrija S je barem "skoro poželjna" (tj. sama lutrija S ne mora biti, ali je $S + \delta$ poželjna za svaki $\delta > 0$) pa je subjekt za lutriju X_0 sigurno spreman platiti do α (što znači da je $\alpha \leq \underline{P}(X_0)$). Kako je $\alpha > \underline{P}(X_0)$, prisutna je nekoherentnost, koju smo ionako i pretpostavili. Međutim, ovaj nam raspis nagovještava kako se koherentnost može postići: vrijednost $\underline{P}(X_0)$ bi trebala biti veća ili jednaka najvišoj (u smislu supremuma) vrijednosti skalara α za koji postoje $X_0, X_1, ..., X_n \in \mathcal{K}$ i $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ takvi da je $X_0 - \alpha \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j G(X_j)$. Mi ćemo odabrati baš tu vrijednost, a ne neku veću od nje. Pokazat će se (u teoremu 3.3.2) da uz takav $\underline{P}(X_0)$ doista ispunjavamo uvjet koherentnosti. Zato prirodno proširenje definiramo upravo na sljedeći način.

Definicija 3.3.1. *Neka je $\underline{P}$ donji predviditelj na skupu lutrija $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$. Tada definiramo* ***prirodno proširenje*** *(engl. natural extension) od $\underline{P}$ kao funkciju $\underline{E} : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ danu formulom*

$$\underline{E}(X) = sup\left\{\alpha \in \mathbb{R} \;\middle|\; X - \alpha \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j G(X_j) \;\;, n \geq 0, X_j \in \mathcal{K}, \lambda_j \geq 0\right\}. \tag{3.5}$$

Za početak proučavanja prirodnog proširenja, pretpostavimo ne samo da $\underline{P}$ nije koherentan na $\mathcal{K}$ već i da ne izbjegava sigurni gubitak. U tom se slučaju izraz $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j G(X_j)$ može proizvoljno povećati uzimajući dovoljno velike skalare λ_j. Zato se broj α u definiciji prirodnog proširenja također može proizvoljno povećati, što zapravo znači da je $\underline{E}(X) =$

$+\infty$ za sve $X \in \mathcal{L}$. S druge strane, ako $\underline{P}$ izbjegava sigurni gubitak i $X - \alpha \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j G(X_j)$, onda je $supX - \alpha \geq sup \sum_{j=1}^{n} \lambda_j G(X_j) \geq 0$, iz čega slijedi da je $\underline{E}(X) \leq sup(X) < +\infty$ (jer smo još na početku pretpostavili ograničenost svih lutrija). Također, ako u definiciji 3.3.1 uzmemo $n = 0$ i $\alpha = infX$, dobijemo $\underline{E}(X) \geq infX$. Ovime smo istodobno dokazali a) dio narednog teorema i sljedeću važnu činjenicu: donji predviditelj $\underline{P}$ izbjegava sigurni gubitak ako i samo ako je njegovo prirodno proširenje $\underline{E}$ konačno.

Teorem 3.3.2. *([6], str. 123) Neka donji predviditelj $\underline{P}$ na $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ izbjegava sigurni gubitak. Tada njegovo prirodno proširenje $\underline{E}$ zadovoljava sljedeća svojstva:*

a) $infX \leq \underline{E}(X) \leq supX, \forall X \in \mathcal{L}$

b) $\underline{E}$ *je koherentan donji predviditelj na* $\mathcal{L}$

c) $\underline{E}$ *dominira* $\underline{P}$ *na* $\mathcal{K}$*, odnosno* $\underline{P}(X) \leq \underline{E}(X), \forall X \in \mathcal{K}$

d) $\underline{E}$ *i* $\underline{P}$ *se podudaraju na* $\mathcal{K}$ *ako i samo ako je* $\underline{P}$ *koherentan*

e) $\underline{E}$ *je minimalan koherentan donji predviditelj na* $\mathcal{L}$ *koji dominira* $\underline{P}$ *na* $\mathcal{K}$*, odnosno:*

$$\underline{Q} : \mathcal{L} \to \mathbb{R} \text{ koherentan i } \underline{P}(X) \leq \underline{Q}(X), \ \forall X \in \mathcal{K}$$
$$\Longrightarrow \underline{E}(Y) \leq \underline{Q}(Y), \ \forall Y \in \mathcal{L}$$

f) Ako je $\underline{P}$ *koherentan, onda je* $\underline{E}$ *minimalno koherentno proširenje od* $\underline{P}$ *na* $\mathcal{L}$

Ovaj teorem sažima u sebi više razloga zašto je pojam prirodnog proširenja toliko bitan u teoriji donjih predviditelja. Kao prvo, koherentnost od $\underline{P}$ se u potpunosti može karakterizirati njegovim prirodnim proširenjem $\underline{E}$ ($\underline{P}$ je koherentan ako i samo ako se $\underline{E}$ i $\underline{P}$ podudaraju na $\mathcal{K}$). U tom je slučaju $\underline{E}$ doista *proširenje* od $\underline{P}$ u matematičkom smislu te riječi, odnosno $\underline{P}$ je restrikcija od $\underline{E}$ na domenu $\mathcal{K}$. Kada $\underline{P}$ izbjegava sigurni gubitak ali ipak nije koherentan, $\underline{E}$ dominira $\underline{P}$ na $\mathcal{K}$, ali postoji lutrija $X \in \mathcal{K}$ takva da je $\underline{E}(X) \neq \underline{P}(X)$ (zapravo, $\underline{E}(X_0) > \underline{P}(X_0)$ samo za one $X_0 \in \mathcal{K}$ za koje uvjet koherentnosti 3.2 nije zadovoljen). Tada prirodno proširenje $\underline{E}$ "ispravlja" $\underline{P}$ do koherentnosti na $\mathcal{K}$ te zapravo nije, za razliku od prethodnog slučaja, proširenje od $\underline{P}$ u pravom smislu te riječi. Tako zaista vidimo dvostruku funkciju prirodnog proširenja - da nekoherentne donje predviditelje $\underline{P}$ na $\mathcal{K}$ učini koherentnima na njihovoj domeni te da ih proširi na skup svih lutrija $\mathcal{L}$ na koherentan način.

Dodatno, u primjeru 3.2.1 smo vidjeli kako koherentan donji predviditelj $\underline{P}$ nema nužno jednistveno koherentno proširenje na veću domenu. No prirodno proširenje $\underline{E}$ je minimalno od svih takvih proširenja predviditelja $\underline{P}$. Primijetimo da je tako definirano prirodno proširenje u skladu s Walleyevim minimalnim biheviorističkim pristupom. Naime, donji predviditelj $\underline{E}$ određenoj lutriji $X \in \mathcal{L} \backslash \mathcal{K}$ određuje najvišu cijenu subjektove kupnje te lutrije kao najmanju moguću cijenu takvu da je zadovoljena koherentnost, pritom koristeći samo informacije o lutrijama iz $\mathcal{K}$. U stvarnosti, možda bi subjekt bio voljan lutriju X platiti do 10 kuna, ali će, u manjku dodatnih informacija, predviditelj $\underline{E}$ zaključiti slabiju tvrdnju da je subjekt lutriju X voljan platiti do npr. 8 kuna. Takvim svojstvom prirodno proširenje donosi najmanje moguće zaključke o nepoznatim lutrijama takve da je subjektovo ponašanje koherentno.

U nastavku poglavlja proučit ćemo posebne slučajeve kada domena $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ s koje donjeg predviditelja $\underline{P}$ proširujemo na $\mathcal{L}$ ima određenu strukturu. Zanima nas kako u takvim situacijama izgleda prirodno proširenje od $\underline{P}$.

Kažemo da je skup $\mathcal{K}$ konveksni konus ako je zatvoren na sve pozitivne linearne kombinacije svojih elemenata; to jest ako za sve $x, y \in \mathcal{K}$ te za sve $\alpha, \beta > 0$ vrijedi da je $\alpha x + \beta y \in \mathcal{K}$.

Teorem 3.3.3. *([6], str. 125) Neka je $\underline{P}$ koherentan donji predviditelj definiran na konveksnom konusu $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$. Tada je njegovo prirodno proširenje $\underline{E}$ dano kao:*

$$\begin{aligned} \underline{E}(X) &= sup\{\alpha \in \mathbb{R} \mid X - \alpha \geq G(Y) \, , Y \in \mathcal{K}\} \\ &= sup\{\underline{P}(Y) + \mu \mid X \geq Y + \mu \, , Y \in \mathcal{K}, \mu \in \mathbb{R}\}, \ \forall X \in \mathcal{L}, \end{aligned}$$

dok je konjugirani gornji predviditelj od $\underline{E}$ dan kao:

$$\begin{aligned} \overline{E}(X) &= inf\{\beta \in \mathbb{R} \mid \beta - X \geq G(Y) \, , Y \in \mathcal{K}\} \\ &= inf\{\overline{P}(Y) + \mu \mid X \leq Y + \mu \, , Y \in -\mathcal{K}, \mu \in \mathbb{R}\}, \ \forall X \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Dodatno, ako $\mathcal{K}$ sadrži sve konstantne lutrije, gornje formule poprimaju jednostavniji oblik:

$$\begin{aligned} \underline{E}(X) &= sup\{\underline{P}(Y) \mid X \geq Y \, , Y \in \mathcal{K}\}, \\ \overline{E}(X) &= inf\{\overline{P}(Y) \mid X \leq Y \, , Y \in -\mathcal{K}\}. \end{aligned}$$

Očito, ako je $\mathcal{K}$ vektorski prostor, tada je on posebno konveksni konus pa prethodni teorem vrijedi i za takav $\mathcal{K}$ (dodatno je tada $-\mathcal{K} = \mathcal{K}$).

Teorem 3.3.4. *([6], str. 127) Neka je $\underline{\mathbb{P}}$ koherentna donja vjerojatnost definirana na algebri događaja $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Tada je prirodno proširenje $\underline{E}$ od $\underline{\mathbb{P}}$, koje je definirano na skupu svih lutrija $\mathcal{L}(\Omega)$, pogotovo definirano i na svim indikatorskim lutrijama na kojima je dano kao:*

$$\begin{aligned} \underline{E}(\mathbb{1}_B) &= sup\{\underline{\mathbb{P}}(A) \mid A \subseteq B \, , A \in \mathcal{A}\}, \ \forall B \in \mathcal{P}(\Omega), \\ \overline{E}(\mathbb{1}_B) &= inf\{\overline{\mathbb{P}}(A) \mid A \supseteq B \, , A \in \mathcal{A}\}, \ \forall B \in \mathcal{P}(\Omega). \end{aligned}$$

Ako u prethodnom teoremu dodatno pretpostavimo da je $\mathcal{A}$ σ-algebra (dakle zatvorena i na prebrojive unije svojih elemenata, a ne samo na konačne), onda se supremum i infimum u formulama za $\underline{E}$ i $\overline{E}$ postižu za neki $A \in \mathcal{A}$. Odnosno, te formule tada postaju:

$$\underline{E}(\mathbb{1}_B) = max\{\underline{\mathbb{P}}(A) \mid A \subseteq B\,, A \in \mathcal{A}\},\ \forall B \in \mathcal{P}(\Omega),$$
$$\overline{E}(\mathbb{1}_B) = min\{\overline{\mathbb{P}}(A) \mid A \supseteq B\,, A \in \mathcal{A}\},\ \forall B \in \mathcal{P}(\Omega).$$

Ako je $\mathbb{P}$ vjerojatnosna mjera definirana na nekoj σ-algebri $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, onda se njeno prirodno proširenje $\underline{E}$ restringirano na indikatore svih događaja (tj. na skup $\{\mathbb{1}_A | A \subseteq \Omega\}$) naziva i **unutarnja mjera** generirana vjerojatnosnom mjerom $\mathbb{P}$, dok se konjugirani gornji predviditelj $\overline{E}$ od $\underline{E}$, restringiran na isti skup, još naziva **vanjska mjera** generirana s $\mathbb{P}$. Unutarnja i vanjska mjera su korisni alati da se vjerojatnosna mjera na koherentan način proširi s neke σ-algebre događaja na cijeli $\mathcal{P}(\Omega)$. Također, ovako definirane unutarnja i vanjska mjera odgovaraju uobičajenim definicijama unutarnje i vanjske mjere generirane nekom (ne nužno vjerojatnosnom) mjerom $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$. Unutarnja/vanjska mjera su tada proširenja mjere μ na $\mathcal{P}(\Omega)$, iako se one ne moraju nužno podudarati na čitavom $\mathcal{P}(\Omega)$ niti same po sebi biti mjere na $\mathcal{P}(\Omega)$. No, $\underline{E}$ je barem unutarnja mjera, a $\overline{E}$ barem vanjska mjera na $\mathcal{P}(\Omega)$ u smislu da $\underline{E}$ zadovoljava uvjete nenegativnosti, monotonosti i σ-subaditivnosti, a $\overline{E}$ uvjete nenegativnosti, monotonosti i σ-superaditivnosti.

U prethodnom smo dijelu 3.2 vidjeli kakva je veza između klasično definirane vjerojatnosne mjere i donjih predviditelja. Za kraj ovog dijela proučimo još vezu između prirodnog proširenja i matematičkog očekivanja. Primijetimo da se u teoriji vjerojatnosti pojam matematičkog očekivanja može interpretirati kao svojevrsno proširenje vjerojatnosne mjere. Naime, pretpostavimo da je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te da je (uz oznaku $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$) matematičko očekivanje $\mathbb{E} : \mathcal{L}^1 \to \overline{\mathbb{R}}$ dobro definirano na skupu slučajnih varijabli $\mathcal{L}^1$ koji je nadskup familije $\mathbb{1}_{\mathcal{F}}$ svih indikatora događaja iz $\mathcal{F}$ ($\mathbb{1}_{\mathcal{F}} := \{\mathbb{1}_A | A \in \mathcal{F}\}$). Restrikcija očekivanja na $\mathbb{1}_{\mathcal{F}}$ je dana jednostavno kao $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$ pa su vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}$ i očekivanje $\mathbb{E}$ na skupu $\mathbb{1}_{\mathcal{F}}$ potpuno određeni jedno drugim.

U teoriji donjih predviditelja imamo sličnu situaciju. Neka je $\mathbb{P}$ konačno aditivna vjerojatnost na algebri događaja $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Prirodno proširenje od $\mathbb{P}$ na skup svih lutrija $\mathcal{L}(\Omega)$ dano je sa (prva jednakost je definicija prirodnog proširenja, a druga slijedi iz leme 3.1.3 (str. 124) u [6]):

$$\underline{E}(X) = sup\Big\{\alpha \in \mathbb{R} \,\Big|\, X - \alpha \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j G(\mathbb{1}_{A_j})\,, n \geq 0, A_j \in \mathcal{A}, \lambda_j \geq 0\Big\}$$
$$= sup\Big\{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbb{P}(A_j) + \mu \Big| X \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j + \mu\,, n \geq 0, A_j \in \mathcal{A}, \lambda_j \geq 0, \mu \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Kako je granična lutrija $G(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_A - \mathbb{P}(A) = (1 - \mathbb{1}_{A^c}) - (1 - \mathbb{P}(A^c)) = -(\mathbb{1}_{A^c} - \mathbb{P}(A^c)) = -G(\mathbb{1}_{A^c})$, možemo dopustiti da skalari λ_j iz obje formule poprimaju sve realne vrijednosti. Također, μ u drugoj formuli možemo redom zamijeniti s $\mu\mathbb{P}(\Omega)$ i $\mu\Omega$ jer je $\Omega \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ je algebra) i $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Uz navedene izmjene, izraz koji dobivamo je:

$$\underline{E}(X) = sup\Big\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbb{P}(A_j) \,\Big|\, X \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j \,, n \geq 0, A_j \in \mathcal{A}, \lambda_j \in \mathbb{R} \Big\}. \tag{3.6}$$

Ako ubacimo dodatne pretpostavke da je $\mathcal{A}$ σ-algebra i $\mathbb{P}$ σ-aditivna funkcija na $\mathcal{A}$ (dakle ako je $\mathbb{P}$ vjerojatnosna mjera na $(\Omega, \mathcal{A})$) te ako je X $\mathcal{A}$-izmjeriva lutrija (tj. ako za svaki Borelov skup $B \subseteq \mathbb{R}$ vrijedi da je $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ - uz te uvjete X možemo smatrati ograničenom slučajnom varijablom na $(\Omega, \mathcal{A})$), prethodna formula se ponekad uzima kao definicija matematičkog očekivanja ograničene slučajne varijable X obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}$, odnosno kao definicija integrala ograničene $\mathcal{A}$-izmjerive funkcije X po mjeri $\mathbb{P}$. Dakle, uz sve navedene pretpostavke vrijedi da je $\underline{E}(X) = \mathbb{E}(X) = \int_\Omega X d\mathbb{P}$.

Već smo spomenuli da koherentan donji predviditelj na domeni $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$ ne mora nužno imati jedinstveno koherentno proširenje na čitav $\mathcal{L}$. No, idući teorem nam govori da je u nekim situacijama ipak osigurana jedinstvenost koherentnog proširenja te da je to proširenje upravo prirodno proširenje. Za proizvoljnu familiju događaja $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ označimo s $\mathbb{1}_\mathcal{A}$ skup svih indikatora događaja iz $\mathcal{A}$, to jest $\mathbb{1}_\mathcal{A} := \{\mathbb{1}_A \mid A \in \mathcal{A}\}$. Ako je $\mathcal{A}$ algebra, onda s $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ označimo skup svih $\mathcal{A}$-izmjerivih lutrija, odnosno $\mathcal{K}(\mathcal{A}) := \{X \in \mathcal{L}(\Omega) \mid X^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}_\mathbb{R}\}$.

Uz navedene oznake za proizvoljnu algebru $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ vrijede relacije:

$$\mathcal{L}(\Omega) \supseteq \mathbb{1}_{\mathcal{P}(\Omega)} \supseteq \mathbb{1}_\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(\Omega).$$

U teoremu 3.3.4 smo vidjeli pojednostavljeni oblik prirodnog proširenja $\underline{E}$ koherentne donje vjerojatnosti $\underline{\mathbb{P}} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ kada je $\underline{E}$ restringiran na $\mathbb{1}_{\mathcal{P}(\Omega)}$. Naredni teorem, uz dodatnu pretpostavku da je $\mathbb{P}$ konačno aditivna vjerojatnost, govori o svojstvima prirodnog proširenja $\underline{E}$ restringiranog na $\mathcal{A}$-izmjerive lutrije.

Teorem 3.3.5. *([6], str. 129) Neka je $\mathbb{P}$ konačno aditivna vjerojatnost na algebri $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, neka je P njoj pridruženi (linearni) predviditelj te neka je $\underline{E}$ prirodno proširenje od P s $\mathbb{1}_\mathcal{A}$ na $\mathcal{L}(\Omega)$. Tada vrijede tvrdnje:*

a) $\underline{E}$ je linearan predviditelj na $\mathcal{K}(\mathcal{A})$

b) $\underline{E}$ je jedinstveni koherentan donji predviditelj (pa onda i jedinstveni linearni predviditelj) na $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ koji se podudara s P na domeni $\mathbb{1}_\mathcal{A}$

c) Ako je $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, onda je $\underline{E}$ jedinstven koherentan donji predviditelj (pa onda i jedinstven linearni predviditelj) koji je proširenje funkcije P s $\mathbb{1}_\mathcal{A}$ na $\mathcal{L}(\Omega)$.

Poglavlje 4

Daljnji razvoj teorija nepreciznih vjerojatnosti

4.1 Dosezi teorije donjih predviditelja

Kad se sagleda cjelokupan razvoj teorije donjih predviditelja, vidimo da smo u ovom radu pokrili tek najosnovnije pojmove teorije: lutrije, donje i gornje predviditelje, koherentnost, linearne i neinformativne predviditelje, donje i gornje vjerojatnosti te prirodno proširenje. No, ti su pojmovi ključni za daljnji razvoj i razumijevanje teorije jer se dobar dio naprednijih pojmova definira koristeći ove navedene. Praktična primjena teorije donjih predviditelja na ovom je nivou ipak vrlo skromna: zasada bismo znali modelirati tek one situacije koje nisu bitno složenije od primjera korištenih u radu. Za modeliranje bilo kakvih ozbiljnijih problema nužan je daljnji razvoj teorije. U ovome potpoglavlju dajemo kratki pregled naprednijeg razvoja teorije donjih predviditelja. Iako je sveukupno znanje o teoriji donjih predviditelja (mjereno objavljenim knjigama i znanstvenim radovima na tu temu) neusporedivo manje od većine ostalih matematičkih teorija, ono nipošto nije zanemarivo. Već je sam Walley 1991. godine teoriju razradio dovoljno da bude upotrebljiva u relativno složenim domenama poput statistike pa ćemo, iako je u međuvremenu napredovala, većinu primjera daljnjeg razvoja navesti iz Walleyevog djela [6].

Prvi bitan rezultat u teoriji koji možemo navesti - jer smo definirali sve pojmove koji se u njemu koriste - kaže da se koherentnost donjeg predviditelja $\underline{P}$ na domeni $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ može karakterizirati klasom linearnih predviditelja $\mathcal{M}(\underline{P})$ koji dominiraju $\underline{P}$ na $\mathcal{K}$: $\mathcal{M}(\underline{P}) := \{P : \mathcal{L} \to \mathbb{R} | P \text{ linearan i } P(X) \geq \underline{P}(X), \forall X \in \mathcal{K}\}$. Rezultat kaže sljedeće:

Teorem 4.1.1. *([6], str. 134) Neka je $\underline{P}$ donji predviditelj na skupu lutrija $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ i neka je $\mathcal{M}(\underline{P})$ skup linearnih predviditelja na $\mathcal{L}$ koji dominiraju $\underline{P}$ na $\mathcal{K}$. Tada vrijedi:*

a) $\underline{P}$ izbjegava sigurni gubitak ako i samo ako je $\mathcal{M}(\underline{P})$ neprazan

b) $\underline{P}$ *je koherentan ako i samo ako je* $\underline{P}$ *donja envelopa od* $\mathcal{M}(\underline{P})$
(tj. $\underline{P}$ *je koherentan ako i samo ako je* $\underline{P}(X) = inf\{P(X)|P \in \mathcal{M}(\underline{P})\}$ *za sve* $X \in \mathcal{K}$*).*

Važnost ovog teorema opravdana je s dva stajališta. Prvo, teorem pruža još jednu bitnu interpretaciju pojma donjeg predviditelja koja se često naziva *interpretacija analizom senzitivnosti* (engl. *sensitivity analysis interpretation*). Takva interpretacija pretpostavlja da u teoriji postoji točan linearan model za subjektove stavove o lutrijama (to jest u teoriji postoje egzaktne fer cijene koje je subjekt odredio svim lutrijama iz $\mathcal{K}$), samo što je određivanje tih fer cijena u praksi teško ili nemoguće. Zato se, kao alternativa, prirodno nameće rad s donjom envelopom svih potencijalno mogućih fer cijena za lutrije. Po teoremu, tako dobiveni donji predviditelj $\underline{P}$ je koherentan (čim je $\mathcal{M}(\underline{P})$ neprazan) pa ima sva korisna svojstva koja slijede iz koherentnosti. Posebno, ako se ograničimo na indikatorske lutrije, ova interpretacija nudi tumačenje donje/gornje vjerojatnosti nekog događaja kao redom donje/gornje granice svih mogućih vjerojatnosti koje, sukladno našim informacijama, smatramo da taj događaj može poprimiti. Drugim riječima, ona pretpostavlja da je vjerojatnost određenog događaja (u teoriji) konkretan broj između 0 i 1 kojeg ne znamo egzaktno, ali koristeći dostupne informacije barem možemo suziti interval u kojem se nalazi. Opisano tumačenje donjih predviditelja/vjerojatnosti je blisko objektivnom shvaćanju vjerojatnosti kao prirodnog svojstva određenog događaja koje je dano nekim predefiniranim brojem između 0 i 1 (za razliku od Walleyevog subjektivnog pristupa). Zato ovakva interpretacija teorije donjih predviditelja nju može približiti i onima koji imaju zamjerke na Walleyjeva tumačenja pojmova frazama poput "spremnosti da se lutrija X kupi po cijeni μ".

Osim navedene interpretativne, ovaj teorem ima i svoju važnu praktičnu ulogu u smislu da je on baza za nekoliko daljnjih rezultata koji pomažu u računanju prirodnog proširenja u praksi (sama definicija prirodnog proširenja već na prvi pogled nije suviše operativna). No, za pojašnjenja i dokaze tih teorema ipak su potrebni napredniji matematički rezultati poput teorema o razdvajajućoj hiperravnini pa ih u ovom radu nećemo eksplicitno spominjati.

Uz računanje prirodnog proširenja, u praksi problematično može biti već i provjeravanje uvjeta koherentnosti, pogotovo kad domena $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$ donjeg predviditelja $\underline{P}$ čiju koherentnost provjeravamo nema nikakvu specifičnu strukturu poput vektorskog prostora. Ipak, u slučaju kad je Ω konačan skup elementarnih događaja, Walley je razvio algoritam ([6], str. 596-598) za provjeru koherentnosti koji se svodi na rješavanje određenog broja (koji ovisi o veličini i "složenosti" skupa $\mathcal{K}$) sustava od n linearnih jednadžbi s n ili manje nepoznanica, gdje je $n \in \mathbb{N}$ kardinalitet skupa Ω. Bez suvišnih detalja recimo samo da navedena složenost od $\mathcal{K}$ ovisi, rječnikom linearne algebre, o njegovoj dimenziji, to jest o broju linearno nezavisnih lutrija iz $\mathcal{K}$. Dakle, brzina provjere koherentnosti u praksi ovisi o kardinalitetu skupa Ω te o kardinalitetu i strukturi skupa $\mathcal{K}$.

Vidjeli smo da neki od elementarnih pojmova teorije vjerojatnosti poput vjerojatnosne mjere i matematičkog očekivanja imaju svoje pripadajuće generalizacije u teoriji donjih predviditelja. Takav je i pojam uvjetnih vjerojatnosti, koje se generaliziraju na uvjetne donje predviditelje (vidi [6], poglavlje 6 i [1], str. 42-53). Za događaj $B \subseteq \Omega$ te za lutriju $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ označimo sa $\underline{P}(X|B)$ **uvjetni donji predviditelj** lutrije X uz uvjet B. Službeno, kao u definiciji (neuvjetnog) donjeg predviditelja, dopuštamo da $\underline{P}(\cdot|B)$ bude bilo koja realna funkcija na nekoj domeni $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$, ali interpretacija uvjetnog donjeg predviditelja $\underline{P}(\cdot|B)$ evaluiranog u lutriji X jest da je to najviša (u smislu supremuma) cijena $\mu \in \mathbb{R}$ takva da je lutrija $(X - \mu)\mathbb{1}_B$ za subjekta poželjna. Primijetimo da, uz navedenu interpretaciju, ako je $B = \Omega$ onda $\underline{P}(\cdot|\Omega)$ možemo smatrati neuvjetnim donjim predviditeljem.

Kao što smo to napravili za neuvjetne donje predviditelje, za uvjetne donje predviditelje također možemo definirati svojstva poput izbjegavanja sigurnog gubitka, koherentnosti, prirodnog proširenja i ostalih te ih povezati s pripadajućim "neuvjetnim verzijama" istih definicija. Tako dolazimo do jednog od najvažnijih rezultata u čitavoj teoriji donjih predviditelja, a to je, kako ga Walley naziva, **generalizirano Bayesovo pravilo** (engl. *generalised Bayes rule*) (vidi [6], str. 297-301 i [1], str. 49-50). Ono dovodi u vezu koherentne uvjetne i koherentne neuvjetne donje predviditelje a u praksi se (kao, uostalom, i klasično Bayesovo pravilo) uglavnom koristi kako bi se subjektovi stavovi o lutrijama "ažurirali" u svijetlu novih informacija. Također, sukladno svom nazivu, može se pokazati da je ono doista generalizacija originalnog Bayesovog teorema iz teorije vjerojatnosti. Za ilustraciju primjene generaliziranog Bayesovog teorema u teoriji donjih predviditelja, recimo da je ono u principu slično takozvanoj *bayesovskoj analizi robustnosti* u statistici. Takva analiza, umjesto jedne precizne, uzima čitav skup mogućih apriornih vjerojatnosnih distribucija. Njih zatim pojedinačno ažurira koristeći Bayesovo pravilo, čime se opet dobije skup posteriornih vjerojatnosnih distribucija.

Generalizirano Bayesovo pravilo temelj je naprednijih primjena teorije donjih predviditelja, pogotovo u statistici. No, s vremenom je teorija našla primjenu i u raznim drugim domenama: u teoriji igara, teoriji donošenja odluka, slučajnim procesima (pogotovo u Markovljevim lancima), analizi financijskog rizika, inženjerstvu i računarstvu. Osnovne primjene teorije donjih predviditelja, ali i ostalih teorija nepreciznih vjerojatnosti u navedenim domenama dane su u [1]. U Walleyevom djelu [6] naglasak je na primjeni teorije donjih predviditelja u statistici.

4.2 Srodne teorije nepreciznih vjerojatnosti

Za kraj ovog rada malo ćemo pažnje posvetiti i ostalim teorijama nepreciznih vjerojatnosti. Kako je teško razraditi njihove temeljne ideje u kratkim crtama, usredotočit ćemo se samo na one teorije koje su usko vezane uz teoriju donjih predviditelja. Vidjet ćemo da se osnovni koncepti te teorije poput koherentnosti i prirodnog proširenja, upravo zahvaljujući jednostavnim vezama između njih, lako prenose na teorije koje ćemo spomenuti. Općenito, granice između raznih teorija nepreciznih vjerojatnosti uglavnom nisu strogo određene već se često događa da jedna teorija "posuđuje" pojedine ideje iz neke druge. Tako se - kako smo već bili spomenuli u uvodu, a tomu ćemo ovdje svjedočiti - određeni pojmovi jedne teorije ponekad mogu "izreći jezikom" neke druge teorije.

Skupovi poželjnih lutrija

Iako smo skupove poželjnih lutrija djelomično obradili u teoriji donjih predviditelja, tamo su nam uglavnom služili samo kao koristan pomoćni alat u interpretaciji određenih pojmova poput donjih/gornjih predviditelja i koherentnosti. Međutim, teoriju koja se bavi skupovima poželjnih lutrija možemo shvatiti kao teoriju samu za sebe. Dodatno, ova nam teorija dopušta da razlikujemo dva tipa poželjnosti lutrija. U stvarnosti određena lutrija X može za subjekta biti poželjna (ponekad se kaže i strogo poželjna), a može biti i *skoro poželjna* (engl. *almost desirable* ili *marginally desirable*), što znači da je, za proizvoljan $\delta > 0$, svaka lutrija oblika $X + \delta$ subjektu poželjna, dok sama lutrija X može, ali ne mora biti poželjna. Sjetimo se da donji predviditelj, ako ga odredimo formulom $\underline{P}(X) = sup\{\mu \in \mathbb{R} | X - \mu \in \mathcal{D}\}$, ne može izraziti razliku između navedena dva tipa poželjnosti, odnosno ne znamo je li lutrija $X - \underline{P}(X)$ samo skoro poželjna ili strogo poželjna.

Kao ranije, označimo s $\mathcal{L}(\Omega)$ skup svih lutrija na skupu elementarnih događaja Ω te sa $\mathcal{D}(\Omega)$ skup svih poželjnih lutrija na Ω (ako lutriju nazovemo samo *poželjnom*, onda podrazumijevamo strogu poželjnost). Također, uvedimo oznake za skupove svih pozitivnih i svih negativnih lutrija iz $\mathcal{L}(\Omega)$: $\mathcal{L}^+(\Omega) := \{X \in \mathcal{L}(\Omega) | X > 0\}$ i $\mathcal{L}^-(\Omega) := \{X \in \mathcal{L}(\Omega) | X < 0\}$. Sada možemo, koristeći navedene oznake, preformulirati uvjete koherentnosti poželjnih lutrija (definicija 1.3.1). Kažemo da je skup poželjnih lutrija $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}$ koherentan ako vrijede uvjeti:

- Pozitivna homogenost: $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda\mathcal{D} = \mathcal{D}$, tj. $(\lambda > 0 \wedge X \in \mathcal{D}) \Rightarrow \lambda X \in \mathcal{D}$
- Aditivnost: $\mathcal{D} + \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$, tj. $X, Y \in \mathcal{D} \Rightarrow X + Y \in \mathcal{D}$
- Prihvaćanje sigurnog dobitka: $Int(\mathcal{L}^+(\Omega)) \subseteq \mathcal{D}$, tj. $inf X > 0 \Rightarrow X \in \mathcal{D}$
- Odbijanje sigurnog gubitka: $\mathcal{D} \cap Int(\mathcal{L}^-(\Omega)) = \emptyset$, tj. $sup X < 0 \Rightarrow X \notin \mathcal{D}$.

U gornjim uvjetima koristili smo $Int(\cdot)$ kao oznaku za interior skupa. Pritom pretpostavljamo da je norma na $\mathcal{L}$ dana sa $\|X\| := sup\{|X(\omega)| : \omega \in \Omega\}$ za sve $X \in \mathcal{L}$ (tzv. *supremum norma*). Ponekad se koriste i jače verzije posljednja dva uvjeta, zvane i *uvjeti parcijalne koherentnosti*:

- Pozitivna homogenost: $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda\mathcal{D} = \mathcal{D}$, tj. $(\lambda > 0 \wedge X \in \mathcal{D}) \Rightarrow \lambda X \in \mathcal{D}$
- Aditivnost: $\mathcal{D} + \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$, tj. $X, Y \in \mathcal{D} \Rightarrow X + Y \in \mathcal{D}$

- Prihvaćanje parcijalnog dobitka: $\mathcal{L}^+(\Omega) \subseteq \mathcal{D}$ tj. $X > 0 \Rightarrow X \in \mathcal{D}$
- Odbijanje parcijalnog gubitka: $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}^-(\Omega) = \emptyset$ tj. $X < 0 \Rightarrow X \notin \mathcal{D}$.

Kažemo da je $\mathcal{D}$ *parcijalno koherentan* ako zadovoljava gornja četiri uvjeta parcijalne koherentnosti.

Nadalje, za proizvoljan $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ označimo sa $posi(\mathcal{K})$ takozvanu *pozitivnu ljusku* od $\mathcal{K}$, odnosno skup svih pozitivnih linearnih kombinacija elemenata iz $\mathcal{K}$: $posi(\mathcal{K}) := \{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j | X_1, ..., X_n \in \mathcal{K}, \lambda_1, ..., \lambda_n > 0, n \in \mathbb{N}\}$. Prema gornjim uvjetima pozitivne homogenosti i aditivnosti, ako je $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{D}$ i ako je $\mathcal{D}$ koherentan (na bilo koji od navedena dva načina), onda je i $posi(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{D}$. Posebno je $posi(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ pa, ako je $\mathcal{D}$ koherentan, onda je $\mathcal{D}$ konveksni konus.

Funkcija $posi(\cdot)$ nam je od koristi da definiramo *izbjegavanje parcijalnog gubitka*: skup $\mathcal{K}$ izbjegava parcijalni gubitak ako je $posi(\mathcal{K}) \cap \mathcal{L}^-(\Omega) = \emptyset$. Primijetimo da je izbjegavanje parcijalnog gubitka jači uvjet od odbijanja parcijalnog gubitka. No, ako $\mathcal{K}$ zadovoljava uvjete parcijalne koherentnosti, onda $\mathcal{K}$ i odbija i izbjegava parcijalni gubitak.

Sada za proizvoljan $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$ možemo definirati *prirodno proširenje skupa* $\mathcal{K}$ kao $\varepsilon(\mathcal{K}) := posi(\mathcal{K} \cup \mathcal{L}^+(\Omega))$. Očekivano, prirodno proširenje skupa lutrija ima svojstva slična prirodnom proširenju donjeg predviditelja. Na primjer, ako su sve lutrije iz $\mathcal{K}$ poželjne, to jest ako je $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{D}$, onda su i sve lutrije iz $\varepsilon(\mathcal{K})$ poželjne i taj skup zadovoljava uvjete parcijalne koherentnosti. Nadalje, $\varepsilon(\mathcal{K})$ je najmanje koherentno proširenje od $\mathcal{K}$ (u smislu da je svako drugo koherentno proširenje od $\mathcal{K}$ nadskup od $\varepsilon(\mathcal{K})$) ako i samo ako $\mathcal{K}$ izbjegava parcijalni gubitak. Tako vidimo da, baš kao u teoriji donjih predviditelja, prirodno proširenje $\varepsilon(\mathcal{K})$ i ovdje ima ulogu takvog koherentnog proširenja koje donosi minimalne moguće zaključke o preferencijama lutrija izvan $\mathcal{K}$.

Za kraj, napomenimo da smo korištene definicije lako mogli preformulirati kako bi odgovarale uvjetima "obične", a ne parcijalne koherentnosti. Na primjer, možemo reći da $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ *izbjegava sigurni gubitak* ako je $posi(\mathcal{K}) \cap Int(\mathcal{L}^-(\Omega)) = \emptyset$.

Sav obrađeni sadržaj o skupovima poželjnih lutrija može se naći u [1], str. 2-5.

Relacije preferencija na lutrijama

Katkad u praksi nije lako odlučiti je li određena lutrija, pogotovo ako je kompliciranog oblika, poželjna ili nije. Jedan potencijalno lakši pristup tada može biti da tu lutriju usporedimo s nekom drugom i odlučimo koju od njih preferiramo. Na taj način zapravo definiramo tzv. *relaciju preferencije* (engl. *partial preference order*) na lutrijama, preko koje onda indirektno možemo odrediti skup poželjnih lutrija. Dodatno, vidjet ćemo da uspostavljanjem takve relacije možemo definirati karakteristike subjektovog ponašanja koje ranije nismo mogli definirati, barem ne toliko jednostavno.

Relacije preferencije ugrubo se dijele na dvije vrste: relacije stroge i blage preferencije. Kažemo da subjekt lutriju X *strogo preferira* u odnosu na lutriju Y ako je voljan zamijeniti Y za X. Subjekt *blago preferira* X u odnosu na Y ako zamjenu lutrije Y za lutriju X neće odbiti - dakle ako tu zamjenu prihvaća ili je prema njoj ravnodušan.

Kako je pojam neodlučnosti u preferenciji lutrija lakše definirati ako je korištena relacija preferencije blaga, u nastavku ovog dijela bavit ćemo se blagim relacijama preferencije. Službeno, blaga relacija preferencije je bilo koja relacija $\trianglerighteq$ na $\mathcal{L}(\Omega) \times \mathcal{L}(\Omega)$ za koju pretpostavljamo da ju je subjekt odredio na ranije opisani način. Također, ako se složimo da je proizvoljna lutrija Z poželjna ako i samo ako Z blago preferiramo u odnosu na nul-lutriju, onda postaje jasna veza između relacije $\trianglerighteq$ i skupa poželjnih lutrija $\mathcal{D}$:

$$X \trianglerighteq Y \iff X - Y \trianglerighteq 0 \iff X - Y \in \mathcal{D}.$$

Kažemo da je relacija $\trianglerighteq$ *koherentna* ako je pripadajući skup poželjnih lutrija $\mathcal{D}$ koherentan. Naravno, treba naglasiti koji od dva skupa uvjeta koherentnosti pritom koristimo - mi ćemo koristiti jače uvjete parcijalne koherentnosti. Koherentnost od $\trianglerighteq$ pokazuje se ekvivalentna idućim uvjetima koji moraju vrijediti za sve lutrije $X, Y, Z \in \mathcal{L}(\Omega)$:

- Refleksivnost: $X \trianglerighteq X$
- Tranzitivnost: $X \trianglerighteq Y \wedge Y \trianglerighteq Z \Rightarrow X \trianglerighteq Z$
- *Mix-independence* (vidi [1], str. 13)

$$0 < \mu \leq 1 \Rightarrow (X \trianglerighteq Y \iff \mu X + (1-\mu)Z \trianglerighteq \mu Y + (1-\mu)Z)$$

- Monotonost: $X > Y \quad \Rightarrow \quad X \trianglerighteq Y \wedge Y \ntrianglerighteq X$

Koristeći relaciju $\trianglerighteq$ možemo definirati dodatne dvije relacije na $\mathcal{L}(\Omega) \times \mathcal{L}(\Omega)$. Kažemo da je subjekt *neodlučan* u preferenciji između lutrija X i Y, u oznaci $X \approx Y$, ako blago preferira X naspram Y, ali i obrnuto. Službeno:

$$X \approx Y \iff X \trianglerighteq Y \wedge Y \trianglerighteq X.$$

Još možemo definirati i *neusporedivost* dviju lutrija ako ne preferiramo blago nijednu od njih naspram one druge, odnosno:

$$X \bowtie Y \iff X \ntrianglerighteq Y \wedge Y \ntrianglerighteq X.$$

Teoriju možemo nastaviti razvijati koristeći matematička svojstva navedenih relacija. Na primjer, relacija neodlučnosti $\approx$ je relacija ekvivalencije pa prostor $\mathcal{L}(\Omega)$ možemo podijeliti na klase ekvivalencije i nastaviti rad s njima.

Postoje metode da se iz definirane relacije blage preferencije generira relacija stroge preferencije, iako za to nema jedinstvenog načina i često je upitno koji način je dobar za određeni problem u praksi. Također, moguć je i obrnut postupak prvotnog definiranja relacije stroge preferencije pa naknadnog dobivanja relacije blage preferencije iz nje. Neki od tih načina, kao i sav ovdje obrađeni materijal o relacijama preferencija, može se naći u [1], str. 11-16.

Za kraj ilustrirajmo još kako se neke svakodnevne tvrdnje (barem one jednostavnije) o vjerojatnostima događaja lako mogu matematički izraziti u obrađenim teorijama nepreciznih vjerojatnosti ([6], str. 169-170):

(i) Vjerojatnije je da će se događaj A dogoditi nego da neće: $\mathbb{1}_A - \frac{1}{2} \in \mathcal{D}$, $\underline{\mathbb{P}}(A) \geq \frac{1}{2}$, $\mathbb{1}_A \trianglerighteq \frac{1}{2}$

(ii) A je vjerojatan barem koliko i B: $\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B \in \mathcal{D}$, $\underline{P}(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B) \geq 0$, $\mathbb{1}_A \trianglerighteq \mathbb{1}_B$

(iii) Neodlučni smo između lutrija X i Y: $X - Y \in \mathcal{D}$ i $Y - X \in \mathcal{D}$, $\underline{P}(X - Y) = \overline{P}(X - Y) = 0$, $X \approx Y$

(iv) Događaj A je barem λ puta vjerojatniji od događaja B: $\mathbb{1}_A - \lambda\mathbb{1}_B \in \mathcal{D}$, $\underline{P}(\mathbb{1}_A - \lambda\mathbb{1}_B) \geq 0$, $\mathbb{1}_A \trianglerighteq \lambda\mathbb{1}_B$

(v) Šanse da se događaj A ne dogodi su barem λ naprema jedan: $\mathbb{1}_{A^c} - \lambda\mathbb{1}_A \in \mathcal{D}$, $\overline{\mathbb{P}}(A) \leq (1 + \lambda)^{-1}$, $\mathbb{1}_{A^c} \trianglerighteq \lambda\mathbb{1}_A$

(vi) Subjekt je voljan kupiti lutriju X po cijeni λ: $X - \lambda \in \mathcal{D}$, $\underline{P}(X) \geq \lambda$, $X \trianglerighteq \lambda$

Također, mnoge tvrdnje u naprednijoj teoriji donjih predviditelja se mogu konstruirati preko gore navedenih, kao u ovom statističkom primjeru:

(vii) Donja varijanca lutrije X je barem λ: za sve $\mu \in \mathbb{R}$ je $(X - \mu)^2 - \lambda \in \mathcal{D}$, $\underline{P}[(X - \mu)^2] \geq \lambda$, $(X - \mu)^2 \trianglerighteq \lambda$.

Bibliografija

[1] T. Augustin, F. P. A. Coolen, G. de Cooman i M. C. M. Troffaes, *Introduction to Imprecise Probabilities*, Wiley, 2014.

[2] Z. Chen, P. Wu i B. Li, *A strong law of large numbers for non-additive probabilities*, International Journal of Approximate Reasoning **54** (2013), 365–377.

[3] B. Efron, *Bayes' Theorem in the 21st Century*, Science **340** (2013), 1177–1178, `https://doi.org/10.1126/science.1236536`.

[4] A. Mauboussin i M. J. Mauboussin, *If You Say Something Is "Likely," How Likely Do People Think It Is?*, Harvard Business Review (2018), `https://hbr.org/2018/07/if-you-say-something-is-likely-how-likely-do-people-think-it-is`.

[5] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, 1987.

[6] P. Walley, *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*, Chapman and Hall, 1991.

Sažetak

Teorija nepreciznih vjerojatnosti zajednički je naziv za više međusobno povezanih matematičkih teorija koje se mogu smatrati generalizacijama teorije vjerojatnosti. Od svih takvih teorija, mi detaljnije obrađujemo jednu od trenutno najpopularnijih: *teoriju donjih predviditelja* Petera Walleya. U ovome radu bavimo se redom: samim pojmom nepreciznih vjerojatnosti i motivacijom za njihovo proučavanje, osnovnim konceptima teorije donjih predviditelja i njenim poveznicama s (klasičnom, preciznom) teorijom vjerojatnosti, jednostavnim primjerima modela u praksi te usporedbom teorije donjih predviditelja s nekoliko blisko povezanih teorija nepreciznih vjerojatnosti.

Summary

Imprecise probability theory is an umbrella term for many interconnected mathematical theories, most of which can be seen as generalisations of probability theory. Of all those theories, the theory that we describe in detail here is currently one of the most popular ones: Peter Walley's *theory of lower previsions*. In this work will be presented: the idea of imprecise probability and motivation for its use, basic concepts of theory of lower previsions and its connections to (classical, precise) probability theory, simple practical examples and comparison of theory of lower previsions to several closely connected imprecise probability theories.

Životopis

Rođen sam 12. listopada 1996. godine u Karlovcu. U istom gradu završavam Osnovnu školu "Braća Seljan" 2010. godine. Gimnaziju Karlovac (smjer: Opća gimnazija) završavam 2014. godine. Iste godine upisujem Preddiplomski sveučilišni studij matematike na zagrebačkom Prirodoslovno-matematičkom fakultetu (PMF), kojeg završavam 2017. godine i time stječem titulu Sveučilišnog prvostupnika matematike (*univ. bacc. math.*). Iste godine na PMF-u upisujem diplomski sveučilišni studij Matematička statistika, kojeg završavam ovim radom u studenom 2019. godine.