SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Dorotea Rajšel

BANACHOVE I *C**-ALGEBRE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, veljača 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Cilj ovog rada je dati pregled temeljnih rezultata teorije Banachovih i C^*-algebri. Jednostavnost dokazivanja tvrdnji u apstraktnom okviru Banachovih algebri bila je jedna od motivacija za daljnje proučavanje tih objekata. Tako, naprimjer, C^*-algebre apstrahiraju svojstva operatora na Hilbertovim prostorima pa bi se moglo reći da je prostor $B(H)$, gdje je H Hilbertov, prototipičan primjer C^*-algebre.

U prvom poglavlju se definiraju pojmovi i izlažu rezultati bitni za razumijevanje ostatka rada, kao što su temelji algebarskih struktura i funkcionalne analize.

U drugom poglavlju čitatelj se upoznaje s teorijom Banachovih algebri. Pokazuju se veze između spektra, spektralnog radijusa i norme. Uvodi se pojam multiplikativnog linearnog funkcionala te se pokazuje veza između prostora takvih funkcionala te ideala u komutativnoj Banachovoj algebri. Također, u komutativnom slučaju, definira se i dokazuje egzistencija Geljfandove transformacije.

U trećem poglavlju fokus rada se sužava na promatranje C^*-algebri. Dokazuje se bijektivnost Geljfandove transformacije na komutativnim C^*-algebrama. U drugom dijelu poglavlja se definira pozitivni element te se pokazuju osnovni rezultati vezani za tu klasu.

U četvrtom poglavlju se nastavlja proučavanje C^*-algebri. U prvom dijelu se promatraju ideali i hereditarne C^*-podalgebre. Drugi dio promatra svojstva pozitivnih linearnih funkcionala te kulminira rezultatom o reprezentaciji nekomutativnih C^*-algebri.

Poglavlje 1

Osnove

Da bismo napravili pregled teorije Banachovih i C^*-algebri, prvo ćemo uvesti potrebne osnovne pojmove. Definirat ćemo pojam algebre te navesti osnovne rezultate funkcionalne analize. Također ćemo se prisjetiti nekih pojmova iz kompleksne analize i topoloških prostora.

Rezultate koji slijede uglavnom navodimo bez dokaza.

1.1 Pregled teorije algebarskih struktura

Definicija 1.1.1. *Neka je V neprazan skup na kojem su zadane binarna operacija zbrajanja $+ : V \times V \to V$ i operacija množenja skalarima iz polja $\mathbb{F}$, $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$. Kažemo da je uređena trojka $(V, +, \cdot)$* ***vektorski prostor*** *nad poljem $\mathbb{F}$ ako vrijedi:*

1. $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in V$;
2. $\exists\, 0 \in V$ *sa svojstvom* $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in V$;
3. $\forall\, a \in V\ \exists - a \in V$ *tako da je* $a + (-a) = -a + a = 0$;
4. $a + b = b + a, \forall a, b, \in V$;
5. $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}, \forall a \in V$;
6. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $\forall a \in V$;
7. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$, $\forall \lambda \in \mathbb{F}$, $\forall a, b \in V$;
8. $1 \cdot a = a$, $\forall a \in V$.

Iako se prethodna definicija odnosi na općenito polje $\mathbb{F}$, u ovom radu ćemo se orijentirati samo na vektorske prostore nad kompleksnim poljem $\mathbb{C}$.

Definicija 1.1.2. ***Algebra*** *je vektorski prostor A nad poljem $\mathbb{F}$ na kojem je zadana binarna operacija $\cdot : A \times A \to A$ koja zadovoljava iduća svojstva:*

1. *$a(bc) = (ab)c$, $\forall a, b, c \in A$ (asocijativnost);*

2. *$(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$, $\forall a, b \in A$ i $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ (kvaziasocijativnost);*

3. *$a(b + c) = ab + ac$ i $(a + b)c = ac + bc$, $\forall a, b, c \in A$ (distributivnost).*

*Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, algebru nazivamo **kompleksnom**.*

*Element $e \in A$ takav da je $ea = ae = a$, $\forall a \in A$, nazivamo **jedinicom** u algebri A. Ako jedinica postoji, ona je nužno jedinstvena pa ćemo je ubuduće označavati s e. **Unitalnom algebrom** nazivamo algebru u kojoj postoji jedinica.*

Ako je A unitalna algebra, onda s $G(A)$ označavamo skup invertibilnih elemenata algebre A.

Kako je $G(A)$ zatvoren na množenje, $G(A)$ je ujedno i grupa.

Definicija 1.1.3. *Potprostor B algebre A nazivamo **podalgebrom** ako vrijedi*

$$a, b \in B \;\Rightarrow\; ab \in B, \;\forall a, b \in B.$$

*Podalgebra je također algebra s obzirom na iste operacije. Ako je A unitalna, kažemo da je B **unitalna podalgebra** ako sadrži jedinicu algebre A.*

Definicija 1.1.4. *Neka su A, B algebre. Preslikavanje $\varphi : A \to B$ nazivamo **homomorfizmom algebri** ako je linearno i multiplikativno, tj.*

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall a, b \in A;$$
$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \qquad \forall a, b \in A.$$

Neka su sad A i B unitalne algebre s jedinicama e_A i e_B. Ako je φ homomorfizam algebri A i B te ako vrijedi $\varphi(e_A) = e_B$, onda se φ naziva **unitalnim homomorfizmom**. **Monomorfizam** je injektivni homomorfizam, **epimorfizam** je surjektivni homomorfizam, a **izomorfizam** je bijektivni homomorfizam. Kažemo da su algebre A i B **izomorfne** ako postoji izomorfizam algebri $\varphi : A \to B$.

Definicija 1.1.5. *Neka je A algebra i neka je I potprostor od A. Kažemo da je I:*

- ***lijevi ideal** u A ako je $AI \subseteq I$, tj. $(\forall a \in A)(\forall b \in I)(ab \in I)$;*

- ***desni ideal** u A ako je $IA \subseteq I$, tj. $(\forall a \in A)(\forall b \in I)(ba \in I)$;*

- ***(dvostrani/obostrani) ideal** u A ako je I i lijevi i desni ideal u A.*

Za lijevi/desni/dvostrani ideal u A kažemo da je ***pravi*** *ako je $I \neq \{0\}$ i $I \neq A$.*

Za pravi lijevi/desni/dvostrani ideal M u A kažemo da je ***maksimalan*** *ako M nije sadržan niti u jednom drugom pravom lijevom/desnom/dvostranom idealu u A.*

Napomena 1.1.6. *Ako je I pravi lijevi/desni/dvostrani ideal u unitalnoj algebri A, tada I ne sadrži jedinicu. Štoviše, I ne sadrži niti jedan invertibilni element. Obje tvrdnje su očite.*

Teorem 1.1.7. *Neka je A komutativna unitalna algebra. Ako je $I \neq A$ neki ideal u A, onda postoji barem jedan maksimalan ideal M u A takav da $I \subseteq M$. Kao posljedicu imamo da u A postoji barem jedan maksimalan ideal.*

Teorem 1.1.8. *Neka je A komutativna unitalna algebra. Tada je M maksimalan ideal u A ako i samo ako je A/M polje.*

Dokaz prethodnog dva teorema se može pronaći u [5].

1.2 Osnove kompleksne analize

U fokusu našeg proučavanja su kompleksne algebre pa će nam u dokazima biti svakako korisni neki rezultati iz kompleksne analize.

Teoreme navodimo bez dokaza, ali mogu se naći u [6].

Definicija 1.2.1. *Neka je $U \subseteq \mathbb{C}$ otvoren i $f : U \to \mathbb{C}$. Kažemo da je funkcija f* ***analitička (holomorfna)*** *ako je njena derivacija f' definirana u svakoj točki skupa U, tj. ako u svakoj točki $z_0 \in U$ postoji limes*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Ako je funkcija f holomorfna na $\mathbb{C}$, kažemo da je ***cijela****.*

Teorem 1.2.2 (Liouville). *Neka je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cijela i ograničena na $\mathbb{C}$. Tada je f konstantna funkcija.*

Teorem 1.2.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna. Tada f ima derivacije svakog reda, i sve su one holomorfne funkcije na Ω.*

1.3 Osnove funkcionalne analize

Definicija 1.3.1. *Neka je X neprazan skup te τ familija podskupova od X koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. *skupovi $\emptyset$ i X su elementi familije τ;*

2. *unija proizvoljne familije podskupova od τ je opet element familije τ;*

3. *presjek konačne familije podskupova od τ je element od τ.*

*Tada (X, τ) nazivamo **topološkim prostorom**, a τ **topologijom**. Elemente familije τ nazivamo **otvorenim** skupovima, a skupove čiji je komplement element familije τ nazivamo **zatvorenima**.*

Definicija 1.3.2. *Neka su (X, τ_X) i (Y, τ_Y) topološki prostori. Kažemo da je funkcija $f : X \to Y$ **homeomorfizam** ako zadovoljava sljedeće uvjete:*

1. *f je bijekcija;*

2. *f je neprekidna;*

3. *f^{-1} je neprekidna.*

Definicija 1.3.3. ***Norma** na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ sa svojstvima:*

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$;

2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in X$;

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$.

*Uređen par $(X, \|\cdot\|)$ se naziva **normiran prostor**.*

Definicija 1.3.4. *Neka je S neprazan skup. **Niz** u S je funkcija $a : \mathbb{N} \to S$. Umjesto $a(n)$ pišemo a_n i cijeli niz označavamo s (a_n) ili $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Definicija 1.3.5. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normiran prostor i (x_n) niz u X. Kažemo da niz (x_n) **konvergira** ako postoji x_0 takav da vrijedi*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ \|x_n - x_0\| < \epsilon.$$

*x_0 nazivamo **limes** niza (x_n).*

Definicija 1.3.6. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normiran prostor i neka je (x_n) niz u X. Kažemo da je (x_n) **Cauchyjev** niz ako vrijedi*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ \ m, n \geq n_0 \ \Rightarrow\ \|x_m - x_n\| < \epsilon.$$

Propozicija 1.3.7. *Svaki konvergentan niz je Cauchyjev.*

Definicija 1.3.8. *Normiran prostor je* ***potpun (Banachov)*** *ako svaki Cauchyjev niz u njemu konvergira.*

Definicija 1.3.9. *Kažemo da je normiran prostor X* ***separabilan*** *ako postoji prebrojiv skup $S \subseteq X$ takav da vrijedi $\overline{S} = X$. Kaže se još da je S gust u X.*

U ovom radu će nam za opis topologija biti potrebna generalizacija nizova koje zovemo *hipernizovi*.

Definicija 1.3.10. ***Usmjeren skup*** *je uređen par $(A, \leq)$ koji se sastoji od nepraznog skupa A i binarne relacije $\leq$ definirane na A za koju vrijedi:*

1. $\alpha \leq \alpha$, $\forall \alpha \in A$;
2. $\alpha \leq \beta, \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in A$;
3. *za sve* α, $\beta \in A$ *postoji* $\gamma \in A$ *sa svojstvom* $\alpha \leq \gamma$ *i* $\beta \leq \gamma$.

Definicija 1.3.11. *Neka je $(A, \leq)$ usmjeren skup i X normiran prostor.* ***Hiperniz u X*** *je preslikavanje $x : A \to X$. Umjesto $x(\alpha)$ pišemo x_α i hiperniz označavamo s $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$.*

Kažemo da hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ u X ***konvergira*** *ako postoji $x \in X$ takav da*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha_0 \in A,\ \forall \alpha \in A,\ \alpha_0 \leq \alpha \ \Rightarrow\ \|x_\alpha - x\| < \epsilon.$$

U tom slučaju pišemo $x = \lim_{\alpha\in A} x_\alpha$.

Kažemo da je hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ u X ***Cauchyjev*** *ako*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha_0 \in A\ , \forall \alpha_1, \alpha_2 \in A\ , \alpha_0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \ \Rightarrow\ \|x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}\| < \epsilon.$$

Propozicija 1.3.12. *U Banachovom prostoru svaki Cauchyjev hiperniz je konvergentan.*

Neka je J proizvoljan beskonačan skup. Za svaku danu familiju vektora $\{x_j : j \in J\}$ u normiranom prostoru X promatramo familiju $\mathcal{F} := \{F \subseteq J : F \text{ je konačan}\}$. Za F_1, $F_2 \in \mathcal{F}$ definiramo $F_1 \leq F_2$ ako vrijedi $F_1 \subseteq F_2$. S tako definiranom relacijom $(\mathcal{F}, \leq)$ je usmjeren skup pa je sad prirodno promatrati hiperniz $(s_F)_{F\in\mathcal{F}}$, gdje je $s_F = \sum_{j\in F} x_j$.

Definicija 1.3.13. *Neka je dana funkcija $x : J \to X$ pri čemu je J proizvoljan beskonačan skup, a X normiran prostor. Kaže se da je familija vektora $\{x(j) = x_j : j \in J\}$* ***sumabilna*** *te da je njena suma vektor $x_0 \in X$ ako je $x_0 = \lim_{F\in\mathcal{F}} s_F$. U tom slučaju pišemo $x_0 = \sum_{j\in J} x_j$.*

Propozicija 1.3.14. *Neka je X Banachov prostor i $x : J \to X$. Ako je familija $\{\|x_j\| : j \in J\}$ sumabilna u $\mathbb{R}$, onda je sumabilna i familija $\{x_j : j \in J\}$ u X te vrijedi $\left\|\sum_{j\in J} x_j\right\| \leq \sum_{j\in J} \|x_j\|$.*

Propozicija 1.3.15. *Normiran prostor X je Banachov ako i samo ako za svaki niz vektora u X $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergencija reda $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|$ povlači sumabilnost familije $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ u X.*

Definicija 1.3.16. *Neka je X Banachov prostor. Funkcija $\varphi : X \to \mathbb{C}$ je* ***ograničen linearan funkcional*** *ako su zadovoljena sljedeća svojstva:*

1. $\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g)$, $\forall f, g \in X$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$;
2. *postoji* $M \geq 0$ *takav da* $|\varphi(f)| \leq M \|f\|$, $\forall f \in X$.

Propozicija 1.3.17. *Neka je X Banachov prostor, φ linearan funkcional na X. Ekvivalentno je:*

(a) φ *je ograničen;*

(b) φ *je neprekidan;*

(c) φ *je neprekidan u 0.*

Definicija 1.3.18. *Neka je X^* vektorski prostor ograničenih linearnih funkcionala na Banachovom prostoru X. Za $\varphi \in X^*$ definirajmo*

$$\|\varphi\| = \sup\left\{\frac{|\varphi(f)|}{\|f\|} : f \neq 0\right\}. \quad (\star)$$

X^* zovemo ***dualni prostor*** *prostora X.*

Lako se provjeri da je formulom $(\star)$ definirana norma na X^* te je zovemo *operatorskom normom*.

Propozicija 1.3.19. *Neka je X Banachov prostor. Tada je i X^* Banachov.*

Definicija 1.3.20. *Za topološki prostor X kažemo da je* ***Hausdorffov*** *ako za svake dvije točke $x, y \in X$, $x \neq y$, postoje otvorene okoline U_x od x i U_y od y takve da $U_x \cap U_y = \emptyset$.*

S obzirom na to da je pojam konvergencije po točkama prirodan u okviru promatranja funkcionala, važni će nam biti i pojmovi i rezultati vezani uz slabe topologije.

Definicija 1.3.21. *Neka je X skup, Y topološki prostor i $\mathcal{F}$ familija funkcija s X u Y.* ***Slaba topologija*** *na X inducirana familijom $\mathcal{F}$ je najmanja topologija $\mathcal{T}$ na X za koju je svaka funkcija iz $\mathcal{F}$ neprekidna.*

Dakle, $\mathcal{T}$ je topologija generirana skupovima $\{f^{-1}(U) : f \in \mathcal{F},\ U \text{ otvoren u } Y\}$. Konvergencija hipernizova je opisana konvergencijom po točkama. Ako je Y Hausdorffov i $\mathcal{F}$ separira vektore iz X, onda je slaba topologija Hausdorffova.

Definicija 1.3.22. *Za svaki f u X označimo s $\hat{f}$ funkciju na X^* definiranu s $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f)$.* ***$w^*$-topologija*** *na X^* je slaba topologija na X^* inducirana familijom funkcija $\{\hat{f} : f \in X\}$.*

Propozicija 1.3.23. *w^*-topologija na X^* je Hausdorffova.*

Propozicija 1.3.24. *Hiperniz $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A} \subseteq X^*$ konvergira prema $\varphi \in X^*$ u w^*-topologiji ako i samo ako $\lim_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(f) = \varphi(f)$ za svaki $f \in X$.*

Propozicija 1.3.25. *Neka je M gust podskup od X i $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ uniformno ograničen hiperniz u X^* takav da $\lim_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(f) = \varphi(f)$ za $f \in M$. Tada $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ konvergira prema φ u w^*-topologiji.*

Definicija 1.3.26. ***Jedinična kugla** u Banachovom prostoru X je skup $\{f \in X : \|f\| \leq 1\}$ i označavamo ju s $(X)_1$.*

Teorem 1.3.27 (Alaoglu)**.** *Jedinična kugla u dualu Banachovog prostora je kompaktna u w^*-topologiji.*

Sljedeći teorem je jedan od najbitnijih teorema funkcionalne analize. Njegove posljedice ćemo više puta koristiti u teoriji Banachovih i C^*-algebri.

Teorem 1.3.28 (Hahn-Banach)**.** *Neka je X normiran prostor, $M \leq X$. Ako je φ ograničen linearni funkcional na M, onda postoji $\Phi \in X^*$ takav da $\Phi(f) = \varphi(f)$ za sve $f \in M$ i $\|\Phi\| = \|\varphi\|$.*

Korolar 1.3.29. *Neka je X normiran prostor, $f \in X$. Tada postoji $\varphi \in X^*$ takav da $\|\varphi\| = 1$ i $\varphi(f) = \|f\|$.*

Korolar 1.3.30. *Neka je X normiran prostor, $f \in X$. Ako je $\varphi(f) = 0$ za svaki $\varphi \in X^*$, onda je $f = 0$.*

Prisjetimo se za kraj Hilbertovih prostora.

Definicija 1.3.31. ***Skalarni produkt** na kompleksnom vektorskom prostoru X je preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ sa sljedećim svojstvima:*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in X$;

2. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\forall x, y \in X$;

4. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$, $\forall x_1, x_2, y \in X$;

5. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, $\forall x, y \in X$.

Uređen par $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se naziva unitaran prostor.

Propozicija 1.3.32. *Ako je* $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *unitaran prostor, onda je norma* $\| \cdot \|$ *na* X *pridružena skalarnom produktu na* X *definirana s* $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ *za* $f \in X$.

Sljedeća nejednakost se vrlo često koristi pri promatranju unitarnih prostora.

Propozicija 1.3.33 (Cauchy-Schwarz nejednakost)**.** *Neka je* X *unitaran prostor. Tada za sve* $x, y \in X$ *vrijedi*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Definicija 1.3.34. *Potpun unitaran prostor se naziva* ***Hilbertov*** *prostor.*

Teorem 1.3.35 (Rieszov teorem o reprezentaciji funkcionala)**.** *Neka je* H *Hilbertov prostor i* φ *ograničen linearan funkcional na* H. *Tada postoji jedinstveni vektor* $g \in H$ *takav da vrijedi* $\varphi(f) = \langle f, g \rangle$ *za* $f \in H$.

Spomenimo još pojam hermitski adjungiranog operatora, pri čemu pod "operator" mislimo na ograničene linearne funkcionale.

Propozicija 1.3.36. *Ako je* T *operator na Hilbertovom prostoru* H, *onda postoji jedinstven operator* S *na* X *takav da vrijedi*

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, Sg \rangle, \quad \forall f, g \in X.$$

Definicija 1.3.37. *Ako je* T *operator na Hilbertovom prostoru* H, *za operator* S *na* H *takav da vrijedi*

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, Sg \rangle, \quad \forall f, g \in X,$$

kažemo da je ***hermitski adjungiran*** *operatoru* T *te ga označavamo s* T^*.

Ako je X unitaran i $T \in B(X)$ takav da postoji $T^* \in B(X)$, kažemo da je operator T:

- hermitski, ako je $T^* = T$;
- unitaran, ako je $T^*T = TT^* = I$;
- normalan, ako je $T^*T = TT^*$.

Sljedeća propozicija sažima svojstva preslikavanja $B(H) \to B(H)$, $T \mapsto T^*$, koje je primjer *involucije*. Involuciju ćemo definirati u trećem poglavlju gdje uvodimo pojam C^*-*algebre*.

Propozicija 1.3.38. *Ako je* H *Hilbertov, onda vrijedi:*

(1) $T^{**} = (T^*)^* = T$ *za* $T \in B(H)$;

(2) $\|T\| = \|T^*\|$ *za* $T \in B(H)$*;*

(3) $(\alpha S + \beta T)^* = \overline{\alpha} S^* + \overline{\beta} T^*$ *i* $(ST)^* = T^* S^*$ *za sve* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *i sve* $S, T \in B(H)$*;*

(4) $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ *za invertibilni* $T \in B(H)$*;*

(5) $\|T\|^2 = \|T^* T\|$ *za* $T \in B(H)$*.*

Poglavlje 2

Banachove algebre

U ovom poglavlju upoznajemo se s pojmom normirane i Banachove algebre. Pokazat će se osnovni rezultati i primjeri vezani uz teoriju Banachovih algebri. Također ćemo definirati Geljfandovu transformaciju i promotriti svojstva multiplikativnih funkcionala na komutativnim Banachovim algebrama.

2.1 Uvod

Definicija 2.1.1. *Kaže se da je algebra A s jedinicom e* ***normirana*** *ako je A normiran vektorski prostor te ako norma na A zadovoljava:*

1. $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|,\ \forall a, b \in A;$

2. $\|e\| = 1.$

Kaže se da je normirana algebra A ***Banachova algebra*** *ako je A Banachov prostor u predmetnoj normi.*

U ovom radu fokusirat ćemo se samo na kompleksne Banachove algebre te ćemo u daljnjem to podrazumijevati bez eksplicitnog navođenja.

Primjer 2.1.2. *Za X Banachov prostor, prostor svih ograničenih linearnih operatora na X $B(X)$ s operatorskom normom je Banachova algebra, pri čemu je jedinični element operator $I : X \to X$, $I(x) = x$. Algebra $B(X)$ je komutativna samo u slučaju kad je dimenzija prostora X jednaka 1.*

Specijalno, algebra $n \times n$ kompleksnih matrica $M_n(\mathbb{C})$ s operatorskom normom je Banachova algebra. Naime, prostor $M_n(\mathbb{C})$ je izomorfan prostoru $B(\mathbb{C}^n)$.

Primjer 2.1.3. *Za kompaktan Hausdorffov prostor X, prostor $C(X)$ kompleksnih neprekidnih funkcija je komutativna Banachova algebra. Operacije zbrajanja i množenja su definirane po točkama, a jedinični element je konstantna funkcija $x \mapsto 1$.*

Primjer 2.1.4. *Promotrimo skup $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ i skup svih ograničenih kompleksnih funkcija na $\mathbb{Z}^+$ koji označavamo s $l^\infty(\mathbb{Z}^+)$. Uz operacije zbrajanja i množenja po točkama te normu $\|f\|_\infty = \sup\{|f(n)| : n \in \mathbb{Z}^+\}$, $l^\infty(\mathbb{Z}^+)$ postaje komutativna Banachova algebra. Štoviše, ona je i unitalna; jedinica u algebri $l^\infty(\mathbb{Z}^+)$ je konstantna funkcija $1(n) = 1$, $n \in \mathbb{Z}^+$.*

Primjer 2.1.5. *Neka je Ω topološki prostor. Tada je skup svih ograničenih kompleksnih funkcija na Ω $l^\infty(\Omega)$ također Banachova algebra, uz normu $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}$ i operacije po točkama.*

S $C_b(\Omega)$ označavamo skup svih neprekidnih ograničenih kompleksnih funkcija definiranih na Ω. $C_b(\Omega)$ je zatvoreni potprostor od $l^\infty(\Omega)$ pa je $C_b(\Omega)$ ujedno i zatvorena podalgebra od $l^\infty(\Omega)$. Posebno, $C_b(\Omega)$ je unitalna Banachova algebra. Ako je Ω kompaktan, onda vrijedi $C_b(\Omega) = C(\Omega)$, gdje s $C(\Omega)$ označavamo skup svih neprekidnih kompleksnih funkcija na Ω.

Primjer 2.1.6. *Za Ω lokalno kompaktan Hausdorffov prostor, kažemo da neprekidna funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ iščezava u beskonačnosti ako je za svaki $\epsilon > 0$ skup $\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| \geq \epsilon\}$ kompaktan. S $C_0(\Omega)$ označavamo skup svih neprekidnih kompleksnih funkcija koje iščezavaju u beskonačnosti. Uočimo da je $C_0(\Omega)$ zatvorena podalgebra od $C_b(\Omega)$ pa je i sama Banachova algebra. Nadalje, $C_0(\Omega)$ je unitalna ako i samo ako je Ω kompakt, a tada vrijedi i $C_0(\Omega) = C_b(\Omega)$. Prostor $C_0(\Omega)$ će nam se pokazati vrlo bitnim u nastavku rada.*

Propozicija 2.1.7. *Neka je A normirana algebra. Množenje $(a, b) \mapsto ab$ je neprekidna funkcija s $A \times A$ u A. Štoviše, množenje je i uniformno neprekidno na ograničenim skupovima.*

Dokaz. Neka su $a, b \in A$. Neka je $M > 0$ takav da vrijedi $\max\{\|a\|, \|b\|\} \leq M$ i $\epsilon > 0$. Definirajmo $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{2M+1}\right\}$. Za $x, y \in A$ takve da je $\|x - a\| < \delta$ i $\|y - b\| < \delta$ imamo:

$$\begin{aligned}\|xy - ab\| &= \|(x - a)(y - b) + a(y - b) + (x - a)b\| \\ &\leq \|x - a\| \, \|y - b\| + \|a\| \, \|y - b\| + \|x - b\| \, \|b\| \\ &< \delta^2 + M\delta + \delta M < \delta + 2M\delta = \delta(1 + 2M) < \epsilon.\end{aligned}$$

□

Propozicija 2.1.8. *Neka je A normirana algebra. Tada je preslikavanje $a \mapsto a^{-1}$ neprekidna bijekcija s $G(A)$ u $G(A)$.*

Dokaz. Neka je $a \in G(A)$. Uzmimo $x \in G(A)$ takav da vrijedi $\|x - a\| < \frac{1}{2\|a^{-1}\|}$. Tada je

$$\left\|x^{-1}\right\| - \left\|a^{-1}\right\| \leq \left\|x^{-1} - a^{-1}\right\| = \left\|x^{-1}(x-a)a^{-1}\right\| \leq \left\|x^{-1}\right\| \|x - a\| \left\|a^{-1}\right\| < \frac{1}{2}\left\|x^{-1}\right\|.$$

Dakle, imamo $\left\|x^{-1}\right\| < 2\left\|a^{-1}\right\|$. Ubacimo li ovaj podatak u prethodni račun, dobivamo

$$\left\|x^{-1} - a^{-1}\right\| \leq \left\|x^{-1}\right\| \|x - a\| \left\|a^{-1}\right\| < 2\left\|a^{-1}\right\|^2 \|x - a\|.$$

□

Teorem 2.1.9. *Neka je A Banachova algebra i $a \in A$ takav da je $\|a\| < 1$. Tada je $e - a \in G(A)$ i*

$$(e - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.$$

Također vrijedi

$$\|(e - a)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|a\|}.$$

Dokaz. Vrijedi $\|a^n\| \leq \|a\|^n < 1$ pa red $\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\|$ konvergira. Kako je A ujedno i Banachov prostor, konvergira i red $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$. Označimo sumu tog reda sa s, a parcijalnu sumu sa $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k$. Vrijedi $s_n(e - a) = (e - a)s_n = e - a^n$. Prelaskom na limes kad $n \to \infty$ i koristeći neprekidnost množenja dobivamo $(e - a)s = s(e - a) = e$.

Nadalje,

$$\|(e - a)^{-1}\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} a^n\right\| = \lim_{N\to\infty} \left\|\sum_{n=0}^{N} a^n\right\| \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \|a\|^n = \frac{1}{1 - \|a\|}.$$

□

Propozicija 2.1.10. *Neka je A Banachova algebra s jedinicom. Tada je grupa regularnih elemenata $G(A)$ otvoren skup u A.*

Dokaz. Neka je $a \in G(A)$ i $x \in K\left(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\right)$. Tada je

$$\left\|e - a^{-1}x\right\| = \left\|a^{-1}(a - x)\right\| \leq \left\|a^{-1}\right\| \|a - x\| < 1$$

pa je po prethodnom teoremu $e - (e - a^{-1}x) = a^{-1}x \in G(A)$ iz čega slijedi da je i $x \in G(A)$. □

Primjer 2.1.11. *Ako unitalna normirana algebra A nije potpuna, tada $G(A)$ nije nužno otvoren podskup od A. Primjerice, promotrimo algebru $\mathbb{C}[z]$ i pokažimo da ona nije Banachova, tj. nije potpuna.*

Definirajmo polinome $p_n(z) = \frac{z}{n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Kako je $p_n(-n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, oni nisu invertibilni u $\mathbb{C}[z]$. S druge strane, $\lim_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$ što je invertibilan element u $\mathbb{C}[z]$. Dakle, $G(\mathbb{C}[z])$ nije otvoren skup u $\mathbb{C}[z]$.

2.2 Spektar i spektralni radijus

Definicija 2.2.1. *Neka je B Banachova algebra i $f \in B$. **Spektar elementa** f definiramo kao skup*

$$\sigma_B(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : f - \lambda \textit{ nije invertibilan u } B\}.$$

***Rezolventni skup** elementa f definiramo kao*

$$\rho_B(f) = \mathbb{C} \setminus \sigma_B(f).$$

***Spektralni radijus** elementa f se definira kao*

$$\nu_B(f) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_B(f)\}.$$

U daljnjem podrazumijevamo $\sigma(f) = \sigma_B(f)$, $\rho(f) = \rho_B(f)$ i $\nu(f) = \nu_B(f)$ kada je očito iz konteksta na koju se Banachovu algebru ovi pojmovi odnose.

Također, za $\lambda \in \mathbb{C}$ i jedinicu e pišemo λ umjesto λe kad je jasno iz kojeg je prostora element u pitanju.

Primjer 2.2.2. *Neka je X kompaktan Hausdorffov prostor i $f \in C(X)$. Za $\lambda \in \mathbb{C}$, $f(x) - \lambda$ je različito od 0 za svaki $x \in X$ ako i samo ako λ nije sadržano u slici funkcije f. Zaključujemo da je $\sigma(f) = f(X)$.*

Pokazat ćemo da je spektar elementa Banachove algebre neprazan i kompaktan. U dokazu nepraznosti spektra bitna je činjenica da se radi o kompleksnoj Banachovoj algebri.

Propozicija 2.2.3. *Neka je B Banachova algebra i $f \in B$. Tada je $\sigma(f)$ kompaktan i vrijedi $\nu(f) \leq \|f\|$.*

Dokaz. Definirajmo funkciju $\varphi : \mathbb{C} \to B$ sa $\varphi(\lambda) = f - \lambda$. Tada je φ neprekidna pa je $\rho(f) = \varphi^{-1}(G(B))$ otvoren jer je skup regularnih elemenata $G(B)$ otvoren prema propoziciji 2.1.10. Slijedi da je $\sigma(f) = \mathbb{C} \setminus \rho(f)$ zatvoren.

Da bismo pokazali da je $\sigma(f)$ kompaktan, preostaje nam još pokazati ograničenost. Uzmimo $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > \|f\|$. Tada je

$$1 > \frac{\|f\|}{|\lambda|} = \left\|\frac{f}{\lambda}\right\| = \left\|1 - \left(1 - \frac{f}{\lambda}\right)\right\|$$

iz čega slijedi prema propoziciji 2.1.9 da je $1 - \dfrac{f}{\lambda}$ invertibilan pa je onda i $f - \lambda$ invertibilan. Dakle, λ je nužno sadržan u $\rho(f)$, tj. $\nu(f) \leq \|f\|$, te je $\sigma(f)$ ograničen. □

Sljedeći teorem je jedan od temeljnih rezultata u teoriji Banachovih algebri.

Teorem 2.2.4. *Neka je B Banachova algebra, $f \in B$. Tada je $\sigma(f)$ neprazan.*

Dokaz. Promotrimo funkciju $F : \rho(F) \to B$ definiranu sa $F(\lambda) = (f - \lambda)^{-1}$. Za $\lambda_0 \in \rho(f)$ imamo:

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{F(\lambda) - F(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} &= \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{(f - \lambda_0)^{-1}[(f - \lambda_0) - (f - \lambda)](f - \lambda)^{-1}}{\lambda - \lambda_0} \\ &= \lim_{\lambda \to \lambda_0} (f - \lambda_0)^{-1}(f - \lambda)^{-1} \\ &= (f - \lambda_0)^{-2}.\end{aligned}$$

Dakle, F je analitička. Posebno, za $\varphi \in B^*$ je $\varphi \circ F$ kompleksna analitička funkcija na $\rho(f)$.

Pokažimo još da F trne u beskonačnosti. Za $|\lambda| > \|f\|$ je kao u dokazu prethodne propozicije $1 - \dfrac{f}{\lambda}$ invertibilan te vrijedi

$$\left\| \left(1 - \frac{f}{\lambda}\right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \|f/\lambda\|}.$$

Sada možemo ocijeniti $F(\lambda)$:

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \to \infty} \|F(\lambda)\| &= \lim_{\lambda \to \infty} \left\| \frac{1}{\lambda} \left(\frac{f}{\lambda} - 1\right)^{-1} \right\| \\ &\leq \lim_{|\lambda| \to \infty} \sup \frac{1}{|\lambda|(1 - \|f/\lambda\|)} = 0.\end{aligned}$$

Dakle, za $\varphi \in B^*$ imamo $\lim_{\lambda \to \infty} \varphi(F(\lambda)) = 0$.

Pretpostavimo sad da je $\sigma(f)$ prazan, tj. $\rho(f) = \mathbb{C}$ i neka je $\varphi \in B^*$. Tada je $\varphi \circ F$ cijela funkcija koja trne u beskonačnosti. Prema Liouvilleovom teoremu slijedi da je $\varphi \circ F \equiv 0$. Posebno je za fiksirani $\lambda \in \mathbb{C}$ $\varphi(F(\lambda)) = 0$, $\forall \varphi \in B^*$. Prema korolaru 1.3.30 slijedi da je $F(\lambda) = 0$ što je u kontradikciji s definicijom funkcije F. □

Sljedeći rezultat je direktna posljedica prethodnog teorema i ključan je u dokazivanju željenih svojstava Geljfandove transformacije.

Teorem 2.2.5 (Geljfand-Mazur)**.** *Neka je B Banachova algebra s jedinicom e u kojoj je svaki ne-nul element invertibilan. Tada postoji izometrički izomorfizam s B u $\mathbb{C}$.*

Dokaz. Neka je $f \in B$. Prema prethodnom teoremu $\sigma(f)$ je neprazan. Ako je $\lambda_f \in \sigma(f)$, onda $f - \lambda_f$ nije invertibilan po definiciji. Kako je u algebri B svaki ne-nul element invertibilan, mora vrijediti $f = \lambda_f$. Za $\lambda \neq \lambda_f$ imamo da je $f - \lambda = \lambda_f - \lambda \neq 0$ što je invertibilno. Dakle, za svaki $f \in B$ $\sigma(f)$ se sastoji od točno jednog skalara λ_f.

Definirajmo preslikavanje $\phi : B \to \mathbb{C}$ s $\phi(f) = \lambda_f$. ϕ je očito traženi izometrički izomorfizam.

$\square$

Propozicija 2.2.6. *Neka je A unitalna algebra.*

(i) Za $f \in A$ i $p \in \mathbb{C}[z]$ vrijedi

$$\sigma(p(f)) = p(\sigma(f)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(f)\}.$$

(ii) Za sve $f \in G(A)$ vrijedi

$$\sigma(f^{-1}) = \sigma(f)^{-1} = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(f)\}.$$

Dokaz. (i) Neka su zadani $f \in A$, $p \in \mathbb{C}[z]$.

Dokažimo prvo inkluziju $p(\sigma(f)) \subseteq \sigma(p(f))$. Neka je $\lambda \in \sigma(f)$. Tada postoji polinom $q \in \mathbb{C}[z]$ takav da je

$$p(z) - p(\lambda) = (z - \lambda)q(z). \quad (1)$$

Definirajmo preslikavanje $\varphi_f : \mathbb{C}[z] \to A$ sa $\varphi_f(p) = p(f)$. φ_f je unitalni homomorfizam algebri.

Ako sad na jednakost (1) djelujemo homomorfizmom φ_f, dobivamo

$$p(f) - p(\lambda) = (f - \lambda)q(f).$$

Pretpostavimo da je $p(f) - p(\lambda)$ invertibilan u A te definirajmo $b := (p(f) - p(\lambda))^{-1}$. Sad imamo

$$1 = b(p(f) - p(\lambda)) = bq(f)(f - \lambda) = (f - \lambda)bq(f)$$

iz čega slijedi da je $f - \lambda$ invertibilan u A što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $\lambda \in \sigma(f)$. Dakle, pretpostavka je bila kriva; $p(f) - p(\lambda)$ nije invertibilan, tj. $p(\lambda) \in \sigma(p(f))$.

Pokažimo sad obratnu inkluziju. Pretpostavimo da je $stp = n$ i neka je $\mu \in \sigma(p(f))$. Prema osnovnom teoremu algebre postoje $\alpha \neq 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ takvi da vrijedi

$$p(z) - \mu = \alpha(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_n).$$

Primijenimo li opet homomorfizam φ_f na gornju jednakost, dobivamo

$$p(f) - \mu = \alpha(f - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (f - \lambda_n).$$

Kako je $\mu \in \sigma(p(f))$, $p(f) - \mu$ nije invertibilan pa zaključujemo da postoji $j \in \{1, \ldots, n\}$ takav da element $f - \lambda_j$ nije invertibilan, tj. $\lambda_j \in \sigma(f)$. Slijedi da je $\mu = p(\lambda_j)$ sadržan u $p(\sigma(f))$. Kako je $\mu \in \sigma(p(f))$ bio proizvoljan, zaključujemo $\sigma(p(f)) \subseteq p(\sigma(f))$.

(ii) Neka je $f \in A$ i $\lambda \in \sigma(f)$. Vrijedi

$$\lambda - f = \lambda(f^{-1} - \lambda^{-1})f$$

iz čega slijedi da je $\lambda^{-1} \in \sigma(f^{-1})$. Time smo dokazali $\sigma(f)^{-1} \subseteq \sigma(f^{-1})$. Substituiranjem f^{-1} umjesto f dobivamo $\sigma(f^{-1})^{-1} \subseteq \sigma(f)$ što nam daje traženu inkluziju $\sigma(f^{-1}) \subseteq \sigma(f)^{-1}$. □

Propozicija 2.2.7. *Neka je A unitalna algebra. Tada vrijedi*

$$\sigma(fg) \setminus \{0\} = \sigma(gf) \setminus \{0\}, \quad \forall f, g \in A.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\lambda \notin \sigma(ab)$, $\lambda \neq 0$. Tada je $\lambda - ab$ invertibilan pa postoji $c \in A$ takav da je $(\lambda - ab)c = c(\lambda - ab) = e$. Slijedi da je $abc = \lambda c - e = cab$. Pokažimo da je $\lambda - ba$ invertibilan:

$$(\lambda - ba)(\frac{1}{\lambda}e + \frac{1}{\lambda}bca) = e + bca - \frac{1}{\lambda}ba - \frac{1}{\lambda}b(abc)a = e.$$

Slično dobivamo i da je $(\frac{1}{\lambda}e + \frac{1}{\lambda}bca)(\lambda - ba) = e$. Dakle, $\lambda - ba$ je invertibilan, tj. $\lambda \notin \sigma(ba)$. Zamjenom uloga a i b dobivamo da invertibilnost elementa $\lambda - ba$ povlači invertibilnost elementa $\lambda - ab$. Time smo ujedno i pokazali tvrdnju propozicije. □

Propozicija 2.2.8. *Neka je B Banachova algebra. Vrijedi:*

(i) $\nu(\lambda f) = |\lambda|\nu(f)$, $\forall f \in B$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$;

(ii) $\nu(f^n) = \nu(f)^n$, $\forall f \in B$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(iii) $\nu(fg) = \nu(gf)$, $\forall f, g \in B$.

Dokaz. Tvrdnje lako slijede iz prethodnih dviju propozicija. □

Ako algebra koju promatramo nema jedinicu, može ju se proširiti do algebre s jedinicom.

Za algebru A definiramo njenu **unitizaciju** $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$. Množenje na tom vektorskom prostoru je definirano na sljedeći način:

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu), \quad a, b \in A, \ \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Tako definirano množenje čini prostor $\tilde{A}$ algebrom s jedinicom $(0, 1)$.

Preslikavanje

$$A \to \tilde{A}, \quad a \mapsto (a, 0),$$

je injektivan homomorfizam pomoću kojeg promatramo algebru A kao ideal u $\tilde{A}$. Umjesto (a, λ) pišemo $a + \lambda$. Preslikavanje

$$\tilde{A} \to \mathbb{C}, \quad a + \lambda \mapsto \lambda,$$

je unitalni homomorfizam čija je jezgra A, a naziva se *kanonskim* homomorfizmom.

Unitizacije algebre A je komutativna ako je i A komutativna.

Ako je A normirana, $\tilde{A}$ postaje normirana algebra s normom definiranom pomoću

$$\|a + \lambda\| = \|a\| + |\lambda|.$$

Ako je A Banachova, onda je i njena unitizacija Banachova.

Za Banachovu algebru A bez jedinice i $a \in A$ definiramo:

$$\sigma_A(a) = \sigma_{\tilde{A}}(a), \quad \nu(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\tilde{A}}(a)\}.$$

Primijetimo da je u ovom slučaju 0 sadržan u spektru elementa algebre A.

2.3 Multiplikativni linearni funkcionali

Pojam (ograničenog) linearnog funkcionala je vrlo bitan u proučavanju normiranih prostora. U slučaju Banachovih algebra, posebice prostora $C(X)$, bitan je pojam *multiplikativnog linearnog funkcionala*.

Definicija 2.3.1. *Neka je B Banachova algebra s jedinicom. Kažemo da je kompleksan linearan funkcional φ na B* ***multiplikativan*** *ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$, $\forall f, g \in B$;
2. $\varphi(e) = 1$.

Propozicija 2.3.2. *Neka je B Banachova algebra s jedinicom i φ multiplikativan linearan funkcional na B. Tada vrijedi:*

(i) $\varphi(f) \neq 0$, $\forall f \in G(B)$;

(ii) $\varphi(f) \in G(B)$, $\forall f \in B$.

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi iz

$$1 = \varphi(e) = \varphi(ff^{-1}) = \varphi(f)\varphi(f^{-1}).$$

(ii) Neka je $\lambda \in \rho(f)$. Tada je $f - \lambda$ invertibilan pa je prema prethodnoj tvrdnji $0 \neq \varphi(f - \lambda) = \varphi(f) - \lambda$, tj. $\varphi(f) \neq \lambda$. □

Skup svih multiplikativnih linearnih funkcionala na B označavamo s $\Omega = \Omega(B)$. U sljedećim tvrdnjama ćemo pokazati da je skup Ω ograničen te da je Ω w^* -kompaktan podskup jedinične kugle dualnog prostora od B.

Propozicija 2.3.3. *Neka je B Banachova algebra s jedinicom i $\varphi \in \Omega$. Tada je $\|\varphi\| = 1$.*

Dokaz. Označimo s $\mathcal{R}$ jezgru funkcionala φ, tj. $\mathcal{R} = \{f \in B : \varphi(f) = 0\}$. Jer je

$$\varphi(f - \varphi(f)) = \varphi(f) - \varphi(f)\varphi(e) = 0,$$

slijedi da se svaki element algebre B može zapisati kao u obliku $\lambda + f$ za neki $f \in \mathcal{R}$. Slijedi

$$\|\varphi\| = \sup_{g \neq 0} \frac{|\varphi(g)|}{\|g\|} = \sup_{f \in \mathcal{R}, \lambda \neq 0} \frac{|\varphi(\lambda + f)|}{\|\lambda + f\|} = \sup_{f \in \mathcal{R}, \lambda \neq 0} \frac{|\lambda|}{\|\lambda + f\|} = \sup_{h \in \mathcal{R}} \frac{1}{\|1 + h\|}$$

jer kad bi vrijedilo $\|1 + h\| < 1$, onda bi h bio invertibilan prema korolaru 2.1.9 iz čega bi slijedilo $h \notin \mathcal{R}$. □

Propozicija 2.3.4. *Ako je B Banachova algebra s jedinicom, onda je Ω w^*-kompaktan podskup jedinične kugle dualnog prostora B^*.*

Dokaz. Neka je $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A} \subseteq \Omega$ hiperniz multiplikativnih linearnih funkcionala koji konvergira u w^*-topologiji na $(B^*)_1$ prema $\varphi \in (B^*)_1$. Da bismo pokazali da je Ω w^*-kompaktan, dovoljno je prema teoremu 1.3.27 pokazati da je Ω zatvoren, tj. da je $\varphi \in \Omega$. Dakle, potrebno je pokazati multiplikativnost i svojstvo $\varphi(e) = 1$:

$$\begin{aligned}
\varphi(fg) &= \lim_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(fg) && (\varphi_\alpha \text{ multiplikativan}) \\
&= \lim_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(f)\varphi_\alpha(g) \\
&= \lim_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(f) \lim_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(g) \\
&= \varphi(f)\varphi(g);
\end{aligned}$$

$$\varphi(e) = \lim_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(e) = [\varphi_\alpha(e) = 1] = \lim_{\alpha \in A} 1 = 1.$$

□

Pokazali smo da je Ω kompaktan Hausdorffov prostor u relativnoj w^*-topologiji. Prisjetimo se familije funkcija $\{\hat{f} : f \in B\}$, definiranih pomoću $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f)$, $\varphi \in B^*$. w^*-topologija je definirana tako da su te funkcije neprekidne. Kako je prema prethodnoj propoziciji Ω w^*-kompaktan podskup od $(B^*)_1$, tada su i restrikcije tih funkcija $\hat{f}\big|_\Omega$ neprekidne na Ω. Također, skup $\{\varphi \in \Omega : |\varphi(f)| \geq \epsilon\}$ je kompaktan za svaki $\epsilon > 0$ pa je $\hat{f}\big|_\Omega \in C_0(\Omega)$, $\forall f \in B$.

Definicija 2.3.5. *Neka je B Banachova algebra s jedinicom.* ***Geljfandova transformacija*** *je funkcija $\Gamma : B \to C_0(\Omega)$ definirana s $\Gamma(f) = \hat{f}\big|_{\Omega}$, tj. $\Gamma(f)(\varphi) = \varphi(f), \ \ \varphi \in \Omega$.*

Propozicija 2.3.6. *Neka je B Banachova algebra s jedinicom i Γ Geljfandova transformacija na B. Tada vrijedi:*

(i) Γ je homomorfizam algebri;

(ii) $\|\Gamma(f)\|_\infty \leq \|f\|$ za $f \in B$.

Dokaz. (i) Γ je linearna:

$$\Gamma(\alpha f+\beta g)(\varphi) = \varphi(\alpha f+\beta g) = \alpha\varphi(f)+\beta\varphi(g) = \alpha\Gamma(f)(\varphi)+\beta\Gamma(\varphi), \ \ \forall f, g \in B, \forall\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall\varphi \in \Omega.$$

Preostaje još pokazati multiplikativnost:

$$\Gamma(fg)(\varphi) = \varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g) = \Gamma(f)(\varphi)\Gamma(g)(\varphi) = [\Gamma(f)\Gamma(g)](\varphi), \ \ \forall f, g \in B, \forall\varphi \in \Omega.$$

(ii) Neka je $f \in B$.

$$\|\Gamma(f)\|_\infty = \left\|\hat{f}\big|_{\Omega}\right\|_\infty \leq \left\|\hat{f}\right\|_\infty = \max_{\varphi\in\Omega} \|\varphi(f)\| \leq \max_{\varphi\in\Omega} \|\varphi\| \, \|f\| = \|f\|$$

jer je prema propoziciji 2.3.3 $\|\varphi\| = 1$. □

Prisjetimo se sad kvocijentnih prostora. Neka je X Banachov prostor i $M \leq X$ zatvoren. Neka X/M označava vektorski prostor koji je sačinjen od klasa ekvivalencije $\{[f] : f \in X\}$, gdje je $[f] = \{f - g : g \in M\}$. Norma na X/M je definirana sa

$$\|[f]\| = \inf_{g\in M} \|f - g\| = \inf_{h\in[f]} \|h\|.$$

Lako se pokaže da je X/M s tako definiranom normom Banachov prostor.

Neka je B Banachova algebra i pretpostavimo da je M zatvoreni (dvostrani) ideal u B. M je također zatvoren potprostor od B pa je B/M prema prethodnom Banachov prostor. Pokažimo da je B/M Banachova algebra:

$$\|1\| = \inf_{g\in M} \|1 - g\| = 1$$

jer kad bi $\|1-g\| < 1$, onda bi prema teoremu 2.1.9 g bio invertibilan, a pravi ideal ne može sadržavati invertibilne elemente. Nadalje, za $f, g \in B$ imamo

$$\begin{aligned}
\|[f][g]\| = \|[fg]\| &= \inf_{h\in M} \|fg - h\| \\
&\leq \inf_{h_1,h_2\in M} \|(f - h_1)(g - h_2)\| \\
&\leq \inf_{h_1\in M} \|f - h_1\| \inf_{h_2\in M} \|g - h_2\| \\
&= \|[f]\| \, \|[g]\|.
\end{aligned}$$

Dakle, B/M je Banachova algebra.

2.4 Komutativne Banachove algebre

Posebnu pozornost obraćamo na komutativne Banachove algebre te svojstva Geljfandove transformacije u tom slučaju.

Propozicija 2.4.1. *Neka je B komutativna unitalna Banachova algebra. Tada postoji bijekcija između skupa Ω multiplikativnih linearnih funkcionala na B i skupa maksimalnih dvostranih ideala u B.*

Dokaz. Neka je $\varphi \in \Omega$ i neka je $\mathcal{R} = \ker \varphi = \{f \in B : \varphi(f) = 0\}$. $\mathcal{R}$ je pravi dvostrani ideal u B. Za $f \notin \mathcal{R}$ jedinicu možemo zapisati u obliku

$$e = \left(e - \frac{f}{\varphi(f)} + \frac{f}{\varphi(f)}\right).$$

Primijetimo da je $(1 - f/\varphi(f)) \in \mathcal{R}$ pa linearna ljuska koja je razapeta s f i $\mathcal{R}$ sadrži jedinicu. Zaključujemo da je $\mathcal{R}$ maksimalni dvostrani ideal u B.

Pretpostavimo da je M pravi dvostrani ideal u B. Kako M ne sadrži invertibilne elemente, slijedi da je $\|1 - f\| \geq 1$ za svaki $f \in M$ prema teoremu 2.1.9. Dakle, zatvarač skupa M ne sadrži e. Kako je $\overline{M}$ opet dvostrani ideal koji ne sadrži jedinicu, vrijedi da je $M \subseteq \overline{M} \subsetneq B$. Kako je M maksimalan ideal u B, zaključujemo da je M nužno zatvoren. Tada je B/M Banachova algebra. Štoviše, prema teoremu 1.1.8 svaki ne-nul element te algebre je invertibilan pa prema teoremu 2.2.5 postoji izometrički izomorfizam ϕ algebri B i B/M. Označimo li prirodni homomorfizam π s B u B/M, onda je kompozicija $\psi = \phi \circ \pi$ multiplikativni linearni funkcional na B, različit od nul-funkcionala. Dakle, $\psi \in \Omega$ i vrijedi $M = \ker \pi = \ker \psi$.

Pretpostavimo sad da postoje dva multiplikativna linearna funkcionala ϕ_1 i ϕ_2 s jednakom jezgrom, $\ker \phi_1 = \ker \phi_2 = M$. Tada je

$$(\varphi_1(f) - \varphi_2(f))e = (f - \varphi_2(f)) - (f - \varphi_1(f))$$

istovremeno element skupa M i umnožak skalara i jedinice. Kad bi vrijedilo $\varphi_1(f) \neq \varphi_2(f)$, onda bi jedinica bila sadržana u M što je kontradikcija jer je M pravi ideal. Dakle, mora vrijediti $\varphi_1(f) = \varphi_2(f)$, $\forall f \in B$. □

Propozicija 2.4.2. *Neka je B komutativna unitalna Banachova algebra i $f \in B$. Tada je f invertibilan u B ako i samo ako je $\Gamma(f)$ invertibilan u $C(\Omega)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f invertibilan u B. Tada je

$$(\Gamma(f)\Gamma(f^{-1}))(\varphi) = \Gamma(f)(\varphi)\Gamma(f^{-1})(\varphi) = \varphi(f)\varphi(f^{-1}) = \varphi(ff^{-1}) = \varphi(e) = 1$$

za svaki $\varphi \in \Omega$ pa zaključujemo da je $\Gamma(f^{-1})$ inverz od $\Gamma(f)$ u $C(\Omega)$.

Ako f nije invertibilan u B, onda je $M_0 = \{gf : g \in B\}$ pravi ideal u B jer M_0 ne sadrži jedinicu. Iz teorema 1.1.7 slijedi da je M_0 sadržan u nekom maksimalnom idealu M. Po prethodnoj propoziciji postoji $\varphi \in \Omega$ čija je jezgra jednaka M_0. Tada je

$$\Gamma(f)(\varphi) = \varphi(f) = 0$$

što znači da $\Gamma(f)$ nije invertibilan u $C(\Omega)$. □

Sljedeći teorem daje pregled dosadašnjih rezultata u slučaju komutativne Banachove algebre.

Teorem 2.4.3 (Geljfand)**.** *Neka je B komutativna unitalna Banachova algebra, Ω pripadni prostor multiplikativnih linearnih funkcionala te $\Gamma : B \to C(\Omega)$ Geljfandova transformacija. Tada vrijedi:*

(i) Ω *je neprazan;*

(ii) Γ *je homomorfizam algebri;*

(iii) $\|\Gamma(f)\|_\infty \leq \|f\|, \forall f \in B;$

(iv) f *je invertibilan u B ako i samo ako je $\Gamma(f)$ invertibilan u $C(\Omega)$.*

Da bismo došli do *Geljfandove formule spektralnog radijusa*, potrebna su nam sljedeća dva korolara.

Korolar 2.4.4. *Neka je B komutativna unitalna Banachova algebra i $f \in B$. Tada je $\sigma(f) = \operatorname{Im}\Gamma(f)$ i $\nu(f) = \|\Gamma(f)\|_\infty$.*

Dokaz. Neka je $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(f)$. Tada je $f - \lambda$ invertibilan u B što prema prethodnom teoremu implicira da je $\Gamma(f) - \lambda$ invertibilan u $C(\Omega)$. Dakle, za svaki φ iz Ω imamo $(\Gamma(f) - \lambda)(\varphi) \neq 0$ $\Leftrightarrow (\Gamma(f))(\varphi) \neq \lambda$. Obratno, ako λ nije sadržan u slici od $\Gamma(f)$, onda je $\Gamma(f) - \lambda$ invertibilan u $C(\Omega)$ pa ponovno prema prethodnom teoremu slijedi da je $f - \lambda$ invertibilan u B. Dakle, λ nije sadržan u $\sigma(f)$. □

Sljedeći rezultat, *formulu spektralnog preslikavanja*, pokazali smo u slučaju polinoma. Pomoću Geljfandove transformacije sada to lako možemo pokazati za bilo koju cijelu funkciju na $\mathbb{C}$.

Korolar 2.4.5. *Ako je B unitalna Banachova algebra, $f \in B$ i φ cijela funkcija na $\mathbb{C}$, tada je*

$$\sigma(\varphi(f)) = \varphi(\sigma(f)) = \{\varphi(\lambda) : \lambda \in \sigma(f)\}.$$

Dokaz. Ako je $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ Taylorov red za φ, onda $\varphi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f^n$ konvergira u B.

Neka je B_0 podalgebra od B generirana elementima e, f i elementima oblika $(f-\lambda)^{-1}$ za $\lambda \in \rho(f)$ i $(\varphi(f)-\mu)^{-1}$ za $\mu \in \rho(\varphi(f))$. Primijetimo da je tako definirana algebra komutativna te da vrijedi $\sigma_B(f) = \sigma_{B_0}(f)$ i $\sigma_B(\varphi(f)) = \sigma_{B_0}(\varphi(f))$. Dakle, možemo pretpostaviti da je B komutativna i primijeniti Geljfandovu transformaciju.

Koristeći prethodni korolar dobivamo da vrijedi

$$\sigma(\varphi(f)) = \operatorname{Im}\Gamma(\varphi(f)) = \operatorname{Im}\varphi(\Gamma(f)) = \varphi(\operatorname{Im}\Gamma(f)) = \varphi(\sigma(f)).$$

□

Teorem 2.4.6. *Neka je B unitalna Banachova algebra i $f \in B$. Tada vrijedi $\nu_B(f) = \lim_{n\to\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}}$.*

Dokaz. Neka je B_0 algebra generirana jedinicom e, f i elementima oblika $(f^n-\lambda)^{-1}$ za $\lambda \in \rho_B(f^n)$, $n \in \mathbb{Z}^+$. B_0 je zatvorena komutativna podalgebra od B i za svaki $n \in \mathbb{Z}^+$ vrijedi $\sigma_B(f^n) = \sigma_{B_0}(f^n)$.

Koristeći prethodni korolar za funkciju $\varphi(z) = z^n$, $z \in \mathbb{C}$, dobivamo da vrijedi $\sigma_{B_0}(f^n) = \sigma_{B_0}(f)^n$ odakle slijedi

$$\nu_B(f)^n = \nu_{B_0}(f)^n = \nu_{B_0}(f^n) = \nu_B(f^n) \leq \|f^n\|.$$

Iz $\nu_B(f)^n \leq \|f^n\|$ dobivamo da je $\nu_B(f) \leq \|f^n\|^{\frac{1}{n}}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, pa zaključujemo da vrijedi

$$\nu_B(f) \leq \liminf_{n\to\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Promotrimo sad analitičku funkciju

$$F(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{f}{\lambda}\right)^n$$

koja konvergira za $|\lambda| > \limsup_{n\to\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}}$ prema propoziciji 1.3.14. Primijetimo da je za $|\lambda| > \|f\|$ $f-\lambda$ invertibilan te prema teoremu 2.1.9 vrijedi da je

$$(f-\lambda)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{f}{\lambda}-e\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{f}{\lambda}\right)^n = F(\lambda).$$

Zaključujemo da je $\nu_B(f) \geq \limsup_{n\to\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}}$. Konačno, iz prethodnih zaključaka dobivamo da je

$$\nu_B(f) \geq \limsup_{n\to\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}} \geq \liminf_{n\to\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}} \geq \nu_B(f).$$

□

Korolar 2.4.7. *Neka je B komutativna Banachova algebra. Geljfandova transformacija na B je izometrija ako i samo ako je $\|f^2\| = \|f\|^2$ za svaki $f \in B$.*

Dokaz. Prema korolaru 2.4.4 znamo da je $\nu(f) = \|\Gamma(f)\|_\infty$ za svaki $f \in B$. Dakle, Γ je izometrija ako i samo ako je $\nu(f) = \|f\|$ za svaki $f \in B$. Prema korolaru 2.4.5 imamo da je $\nu(f^2) = \nu(f)^2$ odakle slijedi da je Γ izometrija ako i samo ako je $\|f^2\| = \|f\|^2$. □

Podsjetimo se; za neprazan kompaktni skup $K \subseteq \mathbb{C}$ njegov komplement $\mathbb{C} \setminus K$ sadrži točno jednu neograničenu komponentu. Ograničene komponente skupa $\mathbb{C} \setminus K$ nazivamo *rupe* kompakta K. U propoziciji 2.2.3 smo pokazali da je spektar elementa Banachove algebre kompaktan skup.

Teorem 2.4.8. *Neka je A unitalna Banachova algebra i B njena zatvorena podalgebra koja sadrži jedinicu od A.*

(1) Skup $G(B)$ je otvoren i zatvoren podskup od $B \cap G(A)$.

(2) Za svaki $b \in B$ vrijedi

$$\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b), \quad \partial\sigma_B(b) \subseteq \partial\sigma_A(b).$$

(3) Ako je $b \in B$ i $\sigma_A(b)$ ne sadrži rupe, tada je $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$.

Dokaz. (1) Očito je $G(B)$ otvoren u $B \cap G(A)$. Preostaje pokazati da je zatvoren. Neka je $(b_n) \subseteq G(B)$ niz koji konvergira prema $b \in B \cap G(A)$. Zbog neprekidnosti invertiranja niz $(b_n^{-1}) \subseteq G(B)$ konvergira prema b^{-1} u A. B je zatvorena pa je $b^{-1} \in B$. Dakle, b je invertibilan u B pa je $G(B)$ zatvoren u $B \cap G(A)$.

(2) Iz $G(B) \subseteq G(A)$ slijedi inkluzija $\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b)$.

Neka je sad $\lambda \in \partial\sigma_B(b)$. Tada postoji niz $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$ čiji je limes λ. Dakle, elementi $b - \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, su invertibilni u B, a $b - \lambda$ nije pa $b - \lambda$ nije invertibilan ni u A. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ $b - \lambda_n$ je invertibilan pa je λ_n sadržan u $\sigma_A(b)$. Kako je $\lambda \in \sigma_A(b)$ i limes niza sadržanog u $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$, slijedi da je $\lambda \in \partial\sigma_A(b)$.

(3) Neka je $b \in B$ i neka $\sigma_A(b)$ nema rupa. Tada je $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$ povezan. Prema prve dvije tvrdnje teorema $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$ je otvoren i zatvoren podskup od $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$ pa slijedi da je $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b) = \mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$, tj. $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$. □

Poglavlje 3

C^*-algebre

Prelazimo na centralni objekt interesa u ovom radu - C^*-algebre. Cilj ovog poglavlja je pokazati Geljfandov teorem koji tvrdi da su sve komutativne C^*-algebre izomorfne algebri $C_0(\Omega)$, gdje je Ω lokalno kompaktan Hausdorffov prostor.

3.1 Uvod

U definiciji C^*-algebre bitna je *involucija* pa taj pojam prvo definiramo u ovom poglavlju.

Definicija 3.1.1. *Neka je A algebra.* ***Involucija*** *je antilinearno preslikavanje $a \mapsto a^*$ na A takvo da vrijedi $(a^*)^* = a$ te $(ab)^* = b^*a^*$ za sve $a, b \in A$.*

Uređeni par $(A, *)$ naziva se ***involutivna algebra*** *ili* ***$*$-algebra***.

Ako je $S \subseteq A$, označavamo $S^* = \{a^* : a \in S\}$. Ako je $S = S^*$, kažemo da je S samoadjungiran.

Samoadjungirana podalgebra B od algebre A je $*$-podalgebra od A i $*$-algebra s involucijom restringiranom na B.

Presjek familije $*$-podalgebri od A je opet $*$-algebra pa za svaki podskup S od A postoji najmanja $*$-algebra B od A koja sadrži S i kažemo da je B *generirana* skupom S.

Ako je I samoadjungirani ideal u A, onda je kvocijentna algebra A/I $*$-algebra na kojoj je involucija definirana formulom

$$(a + I)^* = a^* + I, \quad a \in A.$$

Na unitizaciji $\tilde{A}$ $*$-algebre A involucija je definirana izrazom

$$(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda}), \quad \forall a \in A, \lambda \in \mathbb{C}.$$

S tako definiranom involucijom $\tilde{A}$ je $*$-algebra u kojoj je A samoadjungirani ideal.

Kažemo da je element $a \in A$ *samoadjungiran* ili *hermitski* ako je $a^* = a$. Za svaki $a \in A$ postoje jedinstveni hermitski elementi $b, c \in A$ takvi da vrijedi $a = b + ic$. Vrijedi $b = \frac{1}{2}(a + a^*)$ i $c = \frac{1}{2i}(a - a^*)$. Primijetimo da su elementi a^*a i aa^* hermitski.

Skup hermitskih elemenata u A označavamo s A_{sa}.

Kažemo da je $a \in A$ *normalan* ako je $a^*a = aa^*$. Tada je $*$-algebra generirana s $\{a\}$ komutativna.

Element $p \in A$ je *projektor* ako vrijedi $p = p^* = p^2$.

U algebri A s jedinicom e vrijedi $e^* = (ee^*)^* = e$.

Ako je a invertibilan u A, tada je $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. Dakle, za svaki $a \in A$ vrijedi

$$\sigma(a^*) = \sigma(a)^* = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Element $u \in A$ zovemo *unitarnim* ako je $u^*u = uu^* = 1$.

Neka su A i B $*$-algebre i $\varphi : A \to B$ homomorfizam. Ako φ čuva adjungiranje, tj. ako za svaki $a \in A$ vrijedi $\varphi(a^*) = (\varphi(a))^*$, kažemo da je φ $*$-homomorfizam. $\ker(\varphi)$ je samoadjungirani ideal u A, a $\operatorname{Im} A$ je $*$-podalgebra od B. Ako je φ ujedno i bijekcija, kažemo da je φ $*$-izomorfizam.

Ako je $*$-algebra A ujedno i Banachova algebra s normom za koju vrijedi $||a^*|| = ||a||$ $\forall a \in A$, kažemo da je A *Banachova $*$-algebra*. Ako A sadrži jedinicu e takvu da vrijedi $||e|| = 1$, kažemo da je A *Banachova $*$-algebra s jedinicom* ili *unitalna Banachova $*$-algebra*.

Definicija 3.1.2. *Banachovu $*$-algebra za koju vrijedi*

$$||a^*a|| = ||a||^2, \quad \forall a \in A,$$

zovemo ***C^*-algebrom****.*

Zatvorena $*$-podalgebra C^*-algebre je također C^*-algebra pa ju možemo zvati C^*- podalgebrom.

Primijetimo da u unitalnoj C^*-algebri vrijedi $||e|| = 1$ jer je $||e|| = ||ee|| = ||e^*e|| = ||e||^2$. Slično, za ne-nul projektor p vrijedi da je $||p|| = ||p^2|| = ||p^*p|| = ||p||^2$ pa zaključujemo da je $||p|| = 1$. Za unitarni element $u \in A$ vrijedi $||u|| = 1$ jer je $||u||^2 = ||u^*u|| = ||e|| = 1$. Dakle, $\sigma(u)$ je sadržan u jediničnom krugu. Kako je $u^{-1} = u^*$, vrijedi da je $\sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*) = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(u)\}$. Odatle zaključujemo da je $\sigma(u)$ sadržan u jediničnoj kružnici.

Primjer 3.1.3. *Polje $\mathbb{C}$ je unitalna C^*-algebra gdje je involucija funkcija kompleksnog konjugiranja.*

Primjer 3.1.4. *Za Ω lokalno kompaktan Hausdorffov prostor, $C_0(\Omega)$ je C^*-algebra na kojoj je involucija preslikavanje $f \mapsto \bar{f}$.*

Primjer 3.1.5. *Neka je H Hilbertov prostor. Tada je $B(H)$ C^*-algebra s involucijom koja operatoru iz $B(H)$ pridružuje njemu hermitski adjungiran operator.*

Ova C^*-algebra je od posebnog interesa u Geljfand-Naimarkovom teoremu koji ćemo dokazati u sljedećem poglavlju.

Teorem 3.1.6. *Neka je a samoadjungirani element C^*-algebre A. Tada vrijedi $\nu(a) = \|a\|$.*

Dokaz. Vrijedi $\|a^2\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$ pa se indukcijom lako pokaže da je $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Odatle slijedi da je

$$\nu(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|a\|.$$

$\square$

Iz prethodnog teorema slijedi ovaj zanimljiv rezultat:

Korolar 3.1.7. *Postoji najviše jedna norma na $*$-algebri koja je čini C^*-algebrom.*

Dokaz. Pretpostavimo da su $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ norme na $*$-algebri A s obzirom na koje je A C^*-algebra. Tada za proizvoljan $a \in A$ vrijedi

$$\|a\|_j^2 = \|a^*a\|_j = \nu(a^*a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a^*a)\}, \quad j = 1, 2,$$

gdje jednakost $\|a^*a\|_j = \nu(a^*a)$ slijedi iz prethodnog teorema i činjenice da je a^*a samoadjungiran.

Kako definicija spektralnog radijusa ne ovisi o normi, zaključujemo da je $\|a\|_1 = \|a\|_2$. $\square$

Još jedan interesantan rezultat pokazuje kako je zahtjev u definiciji C^*-algebre prejak, tj. nije nužno zahtijevati jednakost, već je dovoljno zahtijevati nejednakost.

Teorem 3.1.8. *Neka je A Banachova algebra nad kojom je definirana involucija takva da za svaki $a \in A$ vrijedi $\|a\|^2 \leq \|a^*a\|$. Tada je A C^*-algebra.*

Dokaz. Iz $\|a\|^2 \leq \|a^*a\| \leq \|a\|\|a^*\|$ slijedi da je $\|a\| \leq \|a^*\|$. Kako onda vrijedi i $\|a^*\| \leq \|(a^*)^*\| = \|a\|$, zaključujemo je $\|a\| = \|a^*\|$. Odatle slijedi da je $\|a^2\| = \|a^*a\|$. $\square$

U prethodnom poglavlju smo pokazali da je unitizacija Banachove algebre također Banachova algebra s normom $\|(a, \lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$. Posebno, unitizacija Banachove $*$-algebre je također Banachova $*$-algebra s istom normom. No, unitizacija C^*-algebre nije nužno C^*-algebra s tako definiranom normom.

No, možemo snabdjeti $\tilde{A}$ normom s kojom ona postaje C^*-algebra. Da bismo to pokazali, trebaju nam *dvostruki centralizatori*.

Definicija 3.1.9. ***Dvostruki centralizator*** *C^*-algebre A je uređeni par (L, R) ograničenih linearnih preslikavanja na A takav da za sve $a, b \in A$ vrijedi*

$$L(ab) = L(a)b, \quad R(ab) = aR(b), \quad R(a)b = aL(b).$$

Primjer 3.1.10. *Neka je A C^*-algebra te $c \in A$. Definirajmo sljedeća preslikavanja na A:*

$$L_c(a) = ca, \quad R_c(a) = ac.$$

L_c i R_c su očito linearna preslikavanja te je (L_c, R_c) dvostruki centralizator na A. Iz submultiplikativnosti norme imamo

$$\|c\| = \sup_{\|b\| \leq 1} \|cb\| = \sup_{\|b\| \leq 1} \|bc\|$$

pa slijedi da je $\|L_c\| = \|R_c\| = \|c\|$.

Lema 3.1.11. *Ako je (L, R) dvostruki centralizator na C^*-algebri A, tada je $\|L\| = \|R\|$.*

Dokaz. Za $a, b \in A$ vrijedi $\|aL(b)\| = \|R(a)b\| \leq \|R\| \|a\| \|b\|$ iz čega slijedi

$$\|L(b)\| = \sup_{\|a\| \leq 1} \|aL(b)\| \leq \|R\| \|b\|.$$

Dakle, $\|L\| \leq \|R\|$. Analognim zaključivanjem iz $\|R(a)b\| = \|aL(b)\| \leq \|L\| \|a\| \|b\|$ dobivamo da je

$$\|R(a)\| = \sup_{\|b\| \leq 1} \|R(a)b\| \leq \|L\| \|a\|$$

pa vrijedi da je $\|R\| \leq \|L\|$. □

Skup dvostrukih centralizatora na C^*-algebri A označavamo s $M(A)$. Na tom skupu se zbrajanje i množenje skalarom definira po komponentama. Uz tako definirane operacije $M(A)$ postaje vektorski prostor. Normu na tom prostoru možemo definirati pomoću

$$\|(L, R)\| = \|L\| = \|R\|, \quad (L, R) \in M(A),$$

te je ona dobro definirana zbog prethodne leme. Lako se provjeri da je $M(A)$ zatvoreni potprostor prostora $B(A) \oplus B(A)$.

Za $(L_1, R_1), (L_2, R_2) \in M(A)$ definiramo njihov produkt na sljedeći način:

$$(L_1, R_1)(L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1).$$

Direktnim računom se pokaže da je množenje na $M(A)$ dobro definirano, tj. produkt dva dvostruka centralizatora na A je ponovo dvostruki centralizator na A te je $M(A)$ algebra s tako definiranim množenjem.

Za preslikavanje $L : A \to A$ definiramo $L^* : A \to A$ pomoću $L^*(a) = (L(a^*))^*$. Tako definirano preslikavanje L^* je linearno te je preslikavanje $L \mapsto L^*$ antilinearna izometrija s $B(A)$ u samog sebe. Vrijedi da je $L^{**} = L$ te $(L_1L_2)^* = L_1^*L_2^*$. Ako je (L, R) dvostruki centralizator na A, onda je $(L, R)^* = (R^*, L^*)$. Primijetimo da je preslikavanje $(L, R) \mapsto (L, R)^*$ involucija na $M(A)$.

Teorem 3.1.12. *Ako je A C^*-algebra, onda je $M(A)$ C^*-algebra s gore definiranim množenjem, normom i involucijom.*

Dokaz. Jedino je potrebno provjeriti uvjet na normu u definiciji C^*-algebre; vrijedi li za $T = (L, R) \in M(A)$ $||T^*T|| = ||T||^2$. Za $a \in A$, $||a|| \leq 1$ imamo:

$$\begin{aligned} ||L(a)||^2 &= ||(L(a))^*L(a)|| \\ &= ||L^*(a^*)L(a)|| \\ &= ||L^*(a^*L(a))|| \\ &= ||a^*R^*L(a)|| \\ &\leq ||R^*L|| \\ &= ||T^*T|| \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$||T||^2 = ||L||^2 = \sup_{||a|| \leq 1||} ||L(a)||^2 \leq ||T^*T|| \leq ||T||^2.$$

Dakle, $||T^*T|| = ||T||^2$. □

Algebra $M(A)$ se zove *multiplikatorska algebra* od A.

U primjeru 3.1.10 smo pokazali da je preslikavanje

$$A \to M(A), \ \ a \mapsto (L_a, R_a),$$

izometrički $*$-homomorfizam pa možemo identificirati A kao C^*-podalgebru od $M(A)$. Štoviše, vrijedi sljedeći rezultat.

Lema 3.1.13. *Ako je A C^*-algebra, onda je A ideal u $M(A)$.*

Dokaz. Neka je $T = (L, R)$ dvostruki centralizator na A te $S = (L_a, R_a)$, pri čemu su L_a i R_a definirani u primjeru 3.1.10. Tada je $TS = (L, R)(L_a, R_a) = (LL_a, R_aR)$. Želimo pokazati da je TS oblika (L_x, R_y) za neke $x, y \in A$. Kako je $LL_a(b) = L(ab) = L(a)b = L_{L(a)}(b)$ te $R_aR(b) = R(b)a = bL(a) = R_{L(a)}(b)$, slijedi da je $TS = (L_{L(a)}, R_{L(a)})$. Analogno se pokaže da je i ST dvostruki centralizator tog oblika. □

Uočimo također da je $M(A)$ unitalna algebra; jedinica je dvostruki centralizator (id_A, id_A) pri čemu s id označavamo identitetu pa zaključujemo da je A izomorfna $M(A)$ ako i samo ako A posjeduje jedinicu.

Sljedeći teorem je razlog uvođenja prostora dvostrukih centralizatora na C^*-algebri.

Teorem 3.1.14. *Neka je A C^*-algebra. Tada postoji jedinstvena norma na njenoj unitizaciji $\tilde{A}$ s kojom prostor $\tilde{A}$ postaje C^*-algebra te koja proširuje normu na A.*

Dokaz. Ako pokažemo egzistenciju takve norme, jedinstvenost slijedi iz korolara 3.1.7.

Pretpostavimo da je A unitalna. Tada je preslikavanje $\varphi : \tilde{A} \to A \oplus \mathbb{C}$ definirano s

$$\varphi(a, \lambda) = (a + \lambda, \lambda)$$

$*$-izomorfizam. Dakle, $\tilde{A}$ postaje C^*-algebra s normom definiranom pomoću tog preslikavanja; $\|(a, \lambda)\| = \|\varphi(a, \lambda)\|$ za $(a, \lambda) \in \tilde{A}$.

Pretpostavimo sad da A ne posjeduje jedinicu. Ako s 1 označimo jedinicu u $M(A)$, onda je $A \cap \mathbb{C}1 = \{0\}$. Preslikavanje φ s $\tilde{A}$ u C^*-podalgebru $A \oplus \mathbb{C}1$ od $M(A)$ definirano s $\varphi(a, \lambda) = a + \lambda 1$ je $*$-izomorfizam. Dakle, $\tilde{A}$ s normom definiranom pomoću

$$\|(a, \lambda)\| = \|\varphi(a, \lambda)\|, \quad (a, \lambda) \in \tilde{A},$$

je C^*-algebra. □

U nastavku, uvijek ćemo na unitizaciji C^*-algebre promatrati onu normu uz koju unitizacija postaje C^*-algebra.

Spomenuli smo da su u slučaju kad je A unitalna prostori A i $M(A)$ izomorfni. Kada to nije slučaj, prostor $M(A)$ može biti puno veći. Naprimjer, kada je Ω lokalno kompaktan Hausdorffov prostor, $C_0(\Omega)$ ne sadrži jedinicu te je $M(C_0(\Omega)) = C_b(\Omega)$.

Primijetimo da se svaki $*$-homomorfizam između $*$-algebri A i B može na jedinstven način proširiti do unitalnog $*$-homomorfizma između njihovih unitizacija.

Teorem 3.1.15. *Neka je A $*$-algebra, a B C^*-algebra. $*$-homomorfizam $\varphi : A \to B$ je kontrakcija.*

Dokaz. Zbog prethodnih razmatranja možemo pretpostaviti da su algebre A i B unitalne te da je φ unitalni $*$-homomorfizam između tih algebri.

Za $a \in A$ vrijedi $\sigma(\varphi(a)) \subseteq \sigma(a)$ pa odatle slijedi:

$$\begin{aligned} \|\varphi(a)\|^2 &= \|\varphi(a)^*\varphi(a)\| \\ &= \|\varphi(a^*a)\| \\ &= \nu(\varphi(a^*a)) && (\sigma(\varphi(a)) \subseteq \sigma(a)) \\ &\leq \nu(a^*a) \leq \|a^*a\| \leq \|a\|^2. \end{aligned}$$

Dakle, $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$.

$\square$

Sljedeći teorem ćemo iskazati, ali ga nećemo dokazivati (pogledati teorem 2.1.8. u [4]). Dokaz nije kompliciran, ali koristi teoriju koja nije spomenuta u radu.

Teorem 3.1.16. *Spektar hermitskog elementa C^*-algebre je realan.*

Teorem 3.1.17. *Ako je φ multiplikativan linearan funkcional na C^*-algebri A, tada φ čuva adjungiranje.*

Dokaz. Neka je $a \in A$. Tada postoje jedinstveni hermitski elementi $b, c \in A$ takvi da je $a = b + ic$. Zbog prethodnog teorema i činjenice da je $\varphi(x) \in \sigma(x)$ za svaki $x \in A$, $\varphi(b)$ i $\varphi(c)$ su realni. Dakle,

$$\varphi(a^*) = \varphi(b - ic) = \varphi(b) - i\varphi(c) = (\varphi(b) + i\varphi(c))^* = \varphi(a)^*.$$

$\square$

U prethodnom poglavlju (teorem 2.4.3) smo pokazali da je prostor multiplikativnih linearnih funkcionala na unitalnoj komutativnoj Banachovoj algebri neprazan pa to posebno vrijedi i za C^*-algebre. No, postoje neke netrivijalne komutativne Banachove algebre bez jedinice čiji je prostor multiplikativnih linearnih funkcionala prazan. U slučaju C^*-algebri taj prostor je uvijek neprazan.

Neka je A ne-nul komutativna C^*-algebra koja ne sadrži jedinicu. Tada postoji ne-nul element $a \in A$ čiji je rastav na realni i imaginarni hermitski dio $a = b + ic$, $b, c \in A_{sa}$. Pretpostavimo da je $b \neq 0$. Tada je $\nu(b) = \|b\|$ prema teoremu 3.1.6 pa slijedi da postoji multiplikativan linearan funkcional φ na $\tilde{A}$ takav da je $|\varphi(b)| = \|b\| \neq 0$. Restringiranjem tog preslikavanja na A dobivamo ne-nul homomorfizam, tj. multiplikativan linearan funkcional na A.

Sljedećim teoremom ćemo u potpunosti opisati komutativne C^*-algebre. Vrlo je značajan u konstrukciji funkcionalnog računa koji je iznimno koristan alat u proučavanju nekomutativnih C^*-algebri.

Teorem 3.1.18 (Geljfand)**.** *Ako je A ne-nul komutativna C^*-algebra, onda je Geljfandova transformacija*

$$\Gamma : A \to C_0(\Omega(A)), \quad a \mapsto \hat{a},$$

izometrički $*$-izomorfizam.

Dokaz. Prema razmatranjima koja su prethodila ovom teoremu znamo da je $\Omega(A)$ neprazan, a prema teoremu 3.1.15 slijedi da je homomorfizam Γ ujedno i kontrakcija za koji vrijedi da je $\|\Gamma(a)\|_\infty = \nu(a)$, $\forall a \in A$. Za $\varphi \in \Omega(A)$ vrijedi:

$$\Gamma(a^*)(\varphi) = \varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)} = (\Gamma(a))^*(\varphi)$$

pa je Γ $*$-homomorfizam.

Također, Γ je izometrija što slijedi iz

$$\|\Gamma(a)\|_\infty^2 = \|\Gamma(a)^*\Gamma(a)\|_\infty = \|\Gamma(a^*a)\|_\infty = \nu(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2, \quad \forall a \in A.$$

Dakle, $\operatorname{Im}\Gamma$ je zatvorena $*$-podalgebra od $C_0(\Omega(A))$ te za svaki $\varphi \in \Omega(A)$ postoji $a \in A$ takav da je $\Gamma(a)(\varphi) \neq 0$. Prema Stone-Weierstrassovom teoremu ([2], teorem 2.40) sada slijedi da je $\operatorname{Im}\Gamma = C_0(\Omega(A))$. □

Neka je A C^*-algebra i $S \subseteq A$. C^*-algebra *generirana* skupom S je najmanja C^*-podalgebra od A koja sadrži S. Ako je $S = \{a\}$, C^*-podalgebru od A generiranu sa S označavamo s $C^*(a)$. Primijetimo da je $C^*(a)$ komutativna kad je $a \in A$ normalan. Ako je A još i unitalna, onda je i C^*-podalgebra od A generirana s $\{e, a\}$ komutativna.

Primjenjujući prethodni teorem na $C^*(a)$, gdje je a normalan element C^*-algebre A, dobivamo da je $\nu(a) = \|a\|$.

Teorem 3.1.19. *Neka je A unitalna C^*-algebra te B njena C^*-podalgebra koja sadrži jedinicu od A. Tada za svaki $b \in B$ vrijedi*

$$\sigma_B(b) = \sigma_A(b).$$

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $b \in B$ hermitski. Kako je tada σ_B realan, onda nema rupa pa prema teoremu 2.4.8 slijedi da je $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$.

Neka je sad $b \in B$ invertibilan A, pri čemu je $a \in A$ njegov inverz. Tada vrijedi da je $a^*b^* = b^*a^* = 1$. Iz toga i iz $ab = ba = 1$ slijedi da je $bb^*a^*a = 1$, tj. bb^* je invertibilan u A. Kako je bb^* također hermitski, prema prethodnom dijelu dokaza zaključujemo da je bb^* invertibilan i u B. Neka je $c \in B$ njegov inverz u B, tj. vrijedi $bb^*c = 1$. Zaključujemo da je b^*c inverz od b pa vrijedi $a = b^*c$, tj. a je sadržan u B.

Dakle, pokazali smo da je proizvoljan element iz B invertibilan u A ako i samo ako je invertibilan u B iz čega direktno slijedi tvrdnja teorema. □

Sljedeći dio poglavlja postavlja temelje funkcionalnog računa za što nam prvo treba par opservacija.

Neka su Ω i Ω' dva kompaktna Hausdorffova prostora. Za neprekidno preslikavanje $\theta : \Omega \to \Omega'$, definiramo *transpoziciju* s

$$\theta^t : C(\Omega') \to C(\Omega), \ \ f \mapsto f \circ \theta,$$

koje je unitalni $*$-homomorfizam. Ako je θ homeomorfizam, onda je θ^t $*$-izomorfizam.

Također, direktna posljedica teorema 3.1.15 je da je $*$-izomorfizam C^*-algebri nužno izometrija.

Teorem 3.1.20. *Neka je A unitalna C^*-algebra, $a \in A$ normalan te $z : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ inkluzija. Tada postoji jedinstveni unitalni $*$-homomorfizam $\varphi : C(\sigma(a)) \to A$ za koji vrijedi $\varphi(z) = a$. Nadalje, φ je izometrija, a $\operatorname{Im}\varphi$ je C^*-podalgebra od A generirana elementima e i a.*

Dokaz. Neka je B C^*-podalgebra od A generirana s e i a te $\Gamma : B \to C(\Omega(B))$ Geljfandova transformacija. Po teoremu 3.1.18 Γ je $*$-izomorfizam. Preslikavanje $\hat{a} : \Omega(B) \to \sigma(a)$, $\phi \mapsto \phi(a)$, u potpunosti određuje djelovanje funkcionala $\tau \in \Omega(B)$ pa zaključujemo da je $\hat{a}$ homeomorfizam. Prema opasci prije ovog teorema slijedi da je $\hat{a}^t : C(\sigma(a)) \to C(\Omega(B))$ $*$-izomorfizam. Neka je preslikavanje $\varphi : C(\sigma(a)) \to A$ definirano s $\varphi(z) = \Gamma^{-1}(\hat{a}^t(z))$. φ je unitalan $*-$homomorfizam te vrijedi:

$$\varphi(z) = \Gamma^{-1}(\hat{a}^t(z)) = \Gamma^{-1}(\hat{a}) = a.$$

Prema Stone-Weierstrassovom teoremu znamo da je $C(\sigma(a))$ generiran s $\{e, z\}$ iz čega slijedi da je takav φ jedinstven.

Očito je φ izometrija te $\operatorname{Im}\varphi = B$. □

Neka je a normalan element unitalne C^*-algebre A kao u prethodnom teoremu te $z : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ inkluzija. Jedinstveni unitalni $*$-homomorfizam $\varphi : C(\sigma(a)) \to A$ takav da je $\varphi(z) = a$ zovemo *funkcionalni račun* u C^*-algebri A za normalan element a.

Za polinom p vrijedi $\varphi(p) = p(a)$ pa za svaki $f \in C(\sigma(a))$ pišemo $f(a)$ umjesto $\varphi(f)$. Primijetimo također da je $f(a)$ normalan.

Neka je $B = \operatorname{Im}\varphi$. B je C^*-algebra generirana skupom $\{e, a\}$. Za $\tau \in \Omega(B)$ vrijedi $f(\tau(a)) = \tau(f(a))$ budući da su preslikavanja $f \mapsto f(\tau(a))$ i $f \mapsto \tau(f(a))$ s $C(\sigma(a))$ u $\mathbb{C}$ $*$-homomorfizmi koji se podudaraju na generatorima $C(\sigma(a))$ *id* i z.

Za kraj ovog poglavlja iskazujemo rezultat o prostoru multiplikativnih linearnih funkcionala C^*-algebre $C(X)$ kad je X kompaktan Hausdorffov prostor. Dokaz se može pronaći u [4], teorem 2.1.15.

Teorem 3.1.21. *Neka je X kompaktan Hausdorffov prostor. Za svaki $x \in X$ označimo s δ_x preslikavanje*

$$\delta_x : C(X) \to X, \;\; \delta_x(f) = f(x).$$

Tada je preslikavanje

$$X \to \Omega(C(X)), \;\; x \mapsto \delta_x$$

homeomorfizam.

3.2 Pozitivni elementi C^*-algebri

U ovom dijelu uvodimo parcijalni uređaj na skupu hermitskih elemenata C^*-algebre. Cilj ove točke je pokazati egzistenciju i jedinstvenost pozitivnog korijena svakog pozitivnog elementa u C^*-algebri.

Primjer 3.2.1. *Neka je X lokalno kompaktan Hausdorffov prostor. Skup hermitskih elemenata prostora $C_0(X)$ je jednak skupu svih realnih funkcija iz $C_0(X)$, a parcijalni uređaj na tom skupu prirodno je zadan po točkama;*

$$f \leq g \text{ ako i samo ako } f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in X.$$

Element $f \in C_0(X)$ je pozitivan ($f \geq 0$) ako je f oblika $g\overline{g}$ za neki $g \in C_0(X)$. Takav element ima jedinstven pozitivan korijen; funkciju $x \mapsto \sqrt{f(x)}$.

Ako je $f = \overline{f}$, uvjet pozitivnosti možemo izraziti i pomoću norme; za $t \in [0, \infty\rangle$ f je pozitivan ako je $\|f - t\| \leq t$, a ako je $\|f\| \leq t$ i $f \geq 0$, onda je $\|f - t\| \leq t$.

Definicija parcijalnog uređaja i pozitivnih elemenata na proizvoljnoj C^*-algebri će biti generalizacija ovog primjera.

Neka je A unitalna algebra s jedinicom e i B podalgebra od A takva da $B + \mathbb{C}1 = A$. Tada vrijedi $\sigma_B(b) \cup \{0\} = \sigma_A(b) \cup \{0\}$, $\forall b \in B$. Ako B ne sadrži jedinicu, tvrdnja proizlazi iz činjenice da je preslikavanje $\tilde{B} \to A$, $(b, \lambda) \mapsto b + \lambda e$, izomorfizam. Ako B ima jedinicu e_B različitu od jedinice e u A, onda za svaki $b \in B$ i $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, invertibilnost elementa $b + \lambda e$ u A je ekvivalentna invertibilnosti elementa $b + \lambda e_B$ u B.

Iz ovih razmatranja te teorema 3.1.19 proizlazi da za svaku C^*-podalgebru B C^*-algebre A vrijedi $\sigma_B(b) \cup \{0\} = \sigma_A(b) \cup \{0\}$, $\forall b \in B$.

Definicija 3.2.2. *Kažemo da je element a C^*-algebre A* ***pozitivan*** *ako je a hermitski i ako je $\sigma(a) \subseteq [0, \infty\rangle$.*

Pozitivnost elementa a označavamo s $a \geq 0$. Skup pozitivnih elemenata od A označavamo s A^+.

Zbog prethodne opaske zaključujemo da za proizvoljnu C^*-podalgebru B vrijedi $B^+ = B \cap A^+$.

Ako je A C^*-algebra i $a \in A$ hermitski, primijetimo da je $C^*(a)$ zatvarač skupa svih polinoma u a čiji je slobodni član jednak 0.

Teorem 3.2.3. *Neka je A C^*-algebra i $a \in A^+$. Tada postoji jedinstveni element $b \in A^+$ takav da vrijedi $b^2 = a$.*

Dokaz. Neka je $\Omega = \Omega(C^*(a))$. Prema teoremu 3.1.18 $C^*(a)$ je izometrički $*$-izomorfan prostoru $C_0(\Omega)$. Egzistencija elementa b sada proizlazi iz primjera 3.2.1 uz pomoć Geljfandove transformacije.

Pretpostavimo sad da postoji $c \in A^+$ takav da je $c^2 = a$. Jer c i a komutiraju, c nužno komutira i s b, budući da je b limes niza polinoma u a.

Neka je B C^*-podalgebra od A generirana elementima b i c, nužno komutativna. Neka je $\Gamma : B \to \mathbb{C}_0(\Omega(B))$ Geljfandova transformacija. Tada su $\Gamma(b)$ i $\Gamma(c)$ pozitivni korijeni elementa $\Gamma(a)$ u $C_0(\Omega(B)$ pa još jednom primjenom primjera 3.2.1 dobivamo da je $\Gamma(b) = \Gamma(c)$, pa onda i $b = c$. $\square$

Neka je A C^*-algebra i $a \in A$. Element $b \in A^+$ takav da vrijedi $b^2 = a$ označavamo s $a^{1/2}$ te ga zovemo *pozitivnim korijenom* od a.

Ako je $c \in A$ hermitski element, onda je c^2 pozitivan pa možemo uvesti oznake

$$|c| := (c^2)^{1/2}, \quad c^+ := \frac{1}{2}(|c| + c), \quad c^- := \frac{1}{2}(|c| - c).$$

Korištenjem Geljfandove transformacije C^*-algebre $C^*(c)$, lako se provjeri da su $|c|$, c^+ i c^- pozitivni elementi od A takvi da vrijede jednakosti

$$c = c^+ - c^-, \quad |c| = c^+ + c^-, \quad c^+c^- = 0.$$

Napomena 3.2.4. *Ako je a hermitski element zatvorene jedinične kugle unitalne C^*-algebre A, onda je $1 - a^2$ pozitivan, a elementi*

$$u = a + i\sqrt{1 - a^2}, \quad v = a - i\sqrt{1 - a^2}$$

su unitarni te vrijedi $a = \frac{1}{2}(u + v)$. Dakle, unitarni elementi linearno razapinju A_{sa}. Kako A_{sa} linearno razapinje A, zaključujemo da unitarni elementi linearno razapinju A što će nam ubuduće biti vrlo koristan rezultat.

Lema 3.2.5. *Neka je A unitalna C^*-algebra, $a \in A$ hermitski i $t \in [0, \infty\rangle$. Tada je $a \geq 0$ ako $\|a - t\| \leq t$. Obratno, ako je $\|a\| \leq t$ i $a \geq 0$, onda je $\|a - t\| \leq t$.*

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je A C^*-podalgebra generirana elementima e i a pa je prema teoremu 3.1.18 A izometrički $*$-izomorfna s $C_0(\Omega(A))$. Tvrdnja leme sada slijedi primjenom primjera 3.2.1. □

Iz prethodne leme slijedi da je skup pozitivnih elemenata od A zatvoren u A.

Lema 3.2.6. *Zbroj dva pozitivna elementa C^*-algebre je pozitivan element.*

Dokaz. Neka je A C^*-algebra te $a, b \in A^+$. Možemo pretpostaviti da je A unitalna.

Korištenjem leme 3.2 za $t = \|a\|$ i $t = \|b\|$ dobivamo da je $\|a - \|a\|\,\| \leq \|a\|$ i $\|b - \|b\|\,\| \leq \|b\|$. Odavde slijedi

$$\|a + b - (\|a\| + \|b\|)\| \leq \|a - \|a\|\,\| + \|b - \|b\|\,\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

Ponovnom primjenom leme dobivamo da je $a + b$ pozitivan. □

Teorem 3.2.7. *Neka je A C^*-algebra i $a \in A$ proizvoljan. Tada je a^*a pozitivan.*

Dokaz. Pokažimo prvo da iz pozitivnosti elementa oblika $-c^*c$ nužno slijedi $c = 0$. Neka je $c \in A$ takav da je $-c^*c$ pozitivan. Iz $\sigma(-c^*c) \setminus \{0\} = \sigma(-cc^*) \setminus \{0\}$ zaključujemo da je tada i $-cc^*$ pozitivan. Zapišimo c u obliku $c = f + ig$, gdje su $f, g \in A$ hermitski. Tada je

$$c^*c + cc^* = (f - ig)(f + ig) + (f + ig)(f - ig) = 2f^2 + 2g^2$$

iz čega zaključujemo da je $c^*c = 2f^2 + 2g^2 - cc^*$ pozitivan. Dakle, $\sigma(c^*c) = \{0\}$. Iz jednakosti $\|c\|^2 = \|c^*c\| = \nu(c^*c) = 0$ slijedi da je $c = 0$.

Pretpostavimo sad da je a proizvoljan netrivijalan element od A te označimo $b := a^*a$. b je hermitski element pa možemo pisati $b = b^+ - b^-$. Definirajmo $c := ab^-$. Tada je $-c^*c = -b^-a^*ab^- = -b^-(b^+ - b^-)b^- = (b^-)^3 \in A^+$. Prema prvom dijelu dokaza zaključujemo da je $c = 0$ pa iz $0 = -c^*c = (b^-)^3$ slijedi $b^- = 0$. Dakle, $a^*a = b = b^+ \in A^+$. □

Iz prethodnog teorema slijedi da možemo proširiti definiciju apsolutne vrijednosti elementa sa skupa pozitivnih elemenata na cijelu C^*-algebru. Neka je A C^*-algebra te $a \in A$ proizvoljan. Definiramo $|a| = (a^*a)^{1/2}$.

Za C^*-algebru A, skup hermitskih elemenata od A s relacijom $\leq$ definiranom pomoću

$$a \leq b \iff b - a \in A^+.$$

je parcijalno uređen. Relacija je tranzitivna, tj. vrijedi $a + c \leq b + c$, $\forall a, b, c \in A_{sa}$. Također za svake $a, b \in A_{sa}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} a \leq b &\Rightarrow ta \leq tb, \quad \forall t \geq 0, \\ a \leq b &\Leftrightarrow -a \geq -b. \end{aligned}$$

Sljedeći teorem sumira elementarne rezultate vezane uz skup pozitivnih elemenata C^*-algebre.

Teorem 3.2.8. *Neka je A C^*-algebra.*

(1) $A^+ = \{a^*a : a \in A\}$.

(2) Za $a, b \in A_{sa}$, $a \leq b$ povlači $c^*ac \leq c^*bc$ za sve $c \in A$.

(3) $\forall a, b \in A$, $0 \leq a \leq b \Rightarrow \|a\| \leq \|b\|$.

(4) Ako je A unitalna te $a, b \in A^+$ invertibilni, onda $a \leq b$ povlači $0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$.

Dokaz. Tvrdnja (1) slijedi iz egzistencije pozitivnog korijena pozitivnih elemenata i teorema 3.2.7.

(2) Neka su $a, b \in A$ hermitski takvi da vrijedi $a \leq b$. Po definiciji relacije $\leq$ to znači da je $b - a$ pozitivan pa prema tvrdnji (1) vrijedi $b - a = dd^*$, za neki $d \in A^+$. Za $c \in A$ imamo:

$$c^*bc - c^*ac = c^*(a + dd^*)c - c^*(b - dd^*)c = c^*(a - b + 2dd^*)c = c^*dd^*c = (d^*c)^*(d^*c)$$

iz čega primjenom tvrdnje (1) slijedi tvrdnja (2).

(3) Možemo pretpostaviti da je A unitalna. Primjenom Geljfandove transformacije na C^*-algebru generiranu s e i b dobivamo nejednakost $b \leq \|b\|$. Odavde slijedi i $a \leq \|b\|$. Ponovnom primjenom Geljfandove transformacije na C^*-algebru generiranu s e i a dobivamo da je $\|a\| \leq \|b\|$.

(4) Uočimo prvo da je $c \in A$ takav da vrijedi $c \geq 1$ invertibilan. To slijedi iz činjenice da je $\sigma(c)$ sadržan u $[1, \infty\rangle$. Primjenom Geljfandove transformacije na C^*-algebru generiranu s e i c dobivamo da je $c^{-1} \leq 1$. Neka su sad $a, b \in A^+$ invertibilni, $a \leq b$. Primjenom upravo pokazanog te tvrdnje (2) slijedi

$$\begin{aligned} a \leq b \quad &\Rightarrow \quad 1 = a^{-1/2}aa^{-1/2} \leq a^{-1/2}ba^{-1/2} \\ &\Rightarrow \quad (a^{-1/2}ba^{-1/2})^{-1} \leq 1 \\ &\Rightarrow \quad a^{1/2}b^{-1}a^{1/2} \leq 1 \\ &\Rightarrow \quad b^{-1} \leq (a^{1/2})^{-1}(a^{1/2})^{-1} = a^{-1}. \end{aligned}$$

□

Teorem 3.2.9. *Neka je A C^*-algebra, $a, b \in A^+$. Tada $a \leq b$ povlači $a^{1/2} \leq b^{1/2}$.*

Dokaz. Ako pokažemo da $a^2 \leq b^2$ povlači $a \leq b$, slijedi tvrdnja teorema. Pretpostavimo da je A unitalna. Neka je $t > 0$ te promotrimo element $(t + b + a)(t + b - a)$ i njegov rastav na realni i imaginarni hermitski dio $(t + b + a)(t + b - a) = c + id$. Tada je

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}\left[(t + b + a)(t + b - a) + (t + b - a)(t + b + a)\right] \\ &= t^2 + 2tb + b^2 - a^2 \\ &\geq t^2 > 0. \end{aligned}$$

Dakle, c je pozitivan i invertibilan. Primijetimo prvo da za svaki hermitski element $f \in A$ te svaki $\tau \in \Omega(C^*(1, f))$ vrijedi $\tau(1 + if) = 1 + i\tau(f) \neq 0$. Odatle zaključujemo da je $1 + if$ invertibilan u $C^*(1, f)$. Vrijedi $1 + ic^{-1/2}dc^{-1/2} = c^{-1/2}(c + id)c^{-1/2}$ te je $1 + ic^{-1/2}dc^{-1/2}$ invertibilan pa slijedi da je i $c + id$ invertibilan. Odavde zaključujemo da $t + b - a$ ima lijevi inverz, a kako je $t + b - a$ hermitski, mora biti invertibilan. Dakle, $-t \notin \sigma(b - a)$. Kako je $t > 0$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\sigma(b - a) \subseteq [0, \infty\rangle$, tj. $b - a$ je pozitivan. □

Poglavlje 4

Ideali i pozitivni funkcionali u C^*-algebrama

U ovom poglavlju ćemo pokazati da se svaka C^*-algebra može prikazati kao C^*-podalgebra prostora $B(H)$ za neki Hilbertov prostor H. To je upravo tvrdnja Geljfand-Naimarkovog teorema, jednog od fundamentalnih rezultata teorije C^*-algebri. Da bismo ga dokazali, moramo uspostaviti vezu između pozitivnih linearnih funkcionala i reprezentacija algebri. Također ćemo spomenuti hereditarne C^*-podalgebre koje su svojevrsna generalizacija ideala i bitan objekt u ovom poglavlju.

4.1 Ideali u C^*-algebrama

U prethodnim poglavljima smo često koristili unitizaciju C^*-algebre te rezultate dokazivali pomoću tog pojma. No, nije uvijek prikladno promatrati unitizaciju. U ovoj sekciji ćemo uvesti pojam *aproksimativne jedinice* koja će nam koristiti u dokazu raznih rezultata vezanih uz ideale i homomorfizme na C^*-algebrama.

Neka je A C^*-algebra i Λ skup svih pozitivnih elemenata $a \in A$ za koje vrijedi $\|a\| \leq 1$. U prethodnom poglavlju smo uveli relaciju $\leq$ na skupu hermitskih elemenata A_{sa} uz koju je A_{sa} parcijalno uređen. Kako je $\Lambda \subseteq A_{sa}$, $(\Lambda, \leq)$ je također parcijalno uređen.

Lema 4.1.1. *Neka je A C^*-algebra i $\Lambda = \{a \in A^+ : \|a\| \leq 1\}$. Tada je $(\Lambda, \leq)$ usmjeren skup.*

Dokaz. Neka su $a, b \in A^+$, $a \leq b$. Tada su $1 + a$ i $1 + b$ invertibilni u $\tilde{A}$. Po teoremu 3.2.9 vrijedi $(1 + a)^{-1} \geq (1 + b)^{-1}$, jer $0 \leq a \leq b$ povlači $1 + a \leq 1 + b$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
(1 + a)^{-1} \geq (1 + b)^{-1} \quad &\Rightarrow \quad 1 - (1 + a)^{-1} \leq 1 - (1 + b)^{-1} \\
&\Rightarrow \quad (1 + a)(1 + a)^{-1} - (1 + a)^{-1} \leq (1 + b)(1 + b)^{-1} - (1 + b)^{-1} \\
&\Rightarrow \quad a(1 + a)^{-1} \leq b(1 + b)^{-1}.
\end{aligned}$$

Primjenom Geljfandove transformacije C^*-podalgebre generirane elementima e i a na $a \in A^+$ dobivamo da je $a(1+a)^{-1}$ sadržan u Λ.

Neka su sad $a, b \in \Lambda$. Označimo $a' = a(1+a)^{-1}$, $b' = b(1+b)^{-1}$ i $c = (a' + b+)(1 + a' + b')^{-1}$. Tada je $c \in \Lambda$, a kako je $a' \leq a' + b'$ i $a = a'(1+a')^{-1}$, dobivamo da je $a \leq c$ primjenjujući ponovo nejednakost iz prvog dijela dokaza.

Analagno se dokaže $b \leq c$.

□

Primijetimo da smo dokaz prethodne leme provodili u unitizaciji C^*-algebre A. Slično ćemo raditi i u nastavku rada, bez eksplicitnog navođenja.

U prethodnoj lemi smo pokazali da je $(\Lambda, \leq)$ usmjeren skup pa možemo definirati aproksimativnu jedinicu.

Definicija 4.1.2. *Neka je A C^*-algebra.* ***Aproksimativna jedinica*** *C^*-algebre A je rastući hiperniz $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ pozitivnih elemenata zatvorene jedinične kugle od A takav da vrijedi*

$$a = \lim_{\lambda} a u_\lambda, \quad \forall a \in A.$$

Ekvivalentan je zahtjev

$$a = \lim_{\lambda} u_\lambda a, \quad \forall a \in A.$$

Sljedeći teorem tvrdi da za svaku C^*-algebru postoji aproksimativna jedinica.

Teorem 4.1.3. *Neka je A C^*-algebra i Λ skup pozitivnih elemenata u zatvorenoj jediničnoj kugli od A. Ako definiramo $u_\lambda = \lambda$ za $\lambda \in \Lambda$, onda je hiperniz $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica od A koju nazivamo kanonskom aproksimativnom jedinicom.*

Dokaz. Za $\lambda \in \Lambda$ definirajmo $u_\lambda = \lambda$ kao u iskazu teorema. Iz prethodne leme znamo da je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ rastući hiperniz sadržan u zatvorenoj jediničnoj kugli prostora A^+. Preostaje nam pokazati da vrijedi $a = \lim_\lambda u_\lambda a$, za svaki $a \in A$. Po napomeni 3.2.4 slijedi da skup Λ linearno razapinje A. Dakle, dovoljno je tvrdnju pokazati za svaki $a \in \Lambda$.

Neka je $a \in \Lambda$ i $\epsilon > 0$. Neka je $\varphi : C^*(a) \to C_0(\Omega)$ Geljfandova transformacija. Ako označimo $f = \varphi(a)$, onda je skup $K = \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| \geq \epsilon\}$ kompaktan pa prema Urisonovoj lemi postoji neprekidna funkcija $g : \Omega \to [0,1]$ s kompaktnim nosačem za koju vrijedi $g(\omega) = 1, \forall \omega \in K$. Odaberimo $\delta > 0$ takav da je $\delta < 1$ i $\delta > 1 - \epsilon$. Tada vrijedi $\|f - \delta g f\| \leq \epsilon$. Ako stavimo $\lambda_0 = \varphi^{-1}(\delta g)$, onda je $\lambda_0 \in \Lambda$ te vrijedi $\|a - u_{\lambda_0} a\| \leq \epsilon$. Neka je sad $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \geq \lambda_0$. Tada je $e - u_\lambda \leq e - u_{\lambda_0}$ pa vrijedi $a(1 - u_\lambda)a \leq a(e - u_{\lambda_0})a$. Odavde slijedi

$$\begin{aligned}
\|a - u_\lambda a\|^2 &= \|(e-u_\lambda)^{1/2}(e-u_\lambda)^{1/2}a\|^2 \\
&\leq \|(e-u_\lambda)^{1/2}a\|^2 \\
&= \|a(e-u_\lambda)a\| \\
&\leq \|a(1-u_{\lambda_0})a\| \\
&\leq \|(1-u_{\lambda_0})^{1/2}a\| \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

čime je pokazano $a = \lim_\lambda u_\lambda a$. □

Napomena 4.1.4. *U separabilnoj C^*-algebri A postoje i aproksimativne jedinice koje su nizovi. Jer je A separabilna, postoji niz konačnih skupova $(F_n)_n$ takav da vrijedi $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots \subseteq F_n$ i $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ je gust u A. Neka je $(u_\lambda)_\lambda$ proizvoljna aproksimativna jedinica od A. Za $\epsilon > 0$ i $F_n = \{a_1, \ldots, a_m\}$ postoje $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ takvi da $\|a_j - a_j u_\lambda\| < \epsilon$ za $\lambda \geq \lambda_j$. Neka je $\lambda_\epsilon \in \Lambda$ takav da $\lambda_\epsilon \geq \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Tada je $\|a - au_\lambda\| < \epsilon$ za sve $a \in F_n$ i $\lambda \geq \lambda_\epsilon$.*

Dakle, za $n \in \mathbb{N}$ i $\epsilon = \frac{1}{n}$ postoji $\lambda_n = \lambda_\epsilon \in \Lambda$ takav da $\|a - a\lambda_n\| < \frac{1}{n}$ za sve $a \in F_n$. Možemo odabrati $(\lambda_n)_n$ tako da vrijedi $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Iz toga slijedi da je $\lim_{n\to\infty} \|a - au_{\lambda_n}\| = 0$, za sve $a \in F$, a kako je F gust u A, to vrijedi za sve $a \in A$. Dakle, $(u_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ je aproksimativna jedinica za A.

Teorem 4.1.5. *Neka je A C^*-algebra. Ako je L zatvoren lijevi ideal u A, onda postoji rastući hiperniz $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ pozitivnih elemenata u zatvorenoj jediničnoj kugli od L takav da vrijedi $a = \lim_\lambda au_\lambda$ za sve $a \in L$.*

Dokaz. Definirajmo $B = L \cap L^*$. Tada je B C^*-algebra pa prema teoremu 4.1.3 postoji aproksimativna jedinica $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ od B, gdje s Λ označavamo skup pozitivnih elemenata u zatvorenoj jediničnoj kugli od L.

Ako je $a \in L$, onda je $a^*a \in B$ pa po definiciji aproksimativne jedinice vrijedi $0 = \lim_\lambda a^*a(e - u_\lambda)$. Odavde slijedi

$$\lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2 = \lim_\lambda \|(e-u_\lambda)a^*a(e-u_\lambda)\| \leq \lim_\lambda \|a^*a(e-u_\lambda)\| = 0.$$

Dakle, $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ je aproksimativna jedinica od L. □

Teorem 4.1.6. *Neka je A C^*-algebra. Ako je I zatvoren ideal u A, onda je I samoadjungiran pa onda i C^*-podalgebra od A. Ao je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica od I, onda za svaki $a \in A$ vrijedi*

$$\|a + I\| = \lim_\lambda \|a - u_\lambda a\| = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|.$$

Dokaz. Prema teoremu 4.1.5 postoji aproksimativna jedinica $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Za $a \in I$ vrijedi $a = \lim_\lambda au_\lambda$ odakle slijedi $a^* = \lim_\lambda u_\lambda a^*$. Kako su svi u_λ sadržani u I, slijedi da je $a^* \in I$, tj. I je samoadjungiran.

Neka je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ proizvoljna aproksimativna jedinica od I te neka su $a \in A$ i $\epsilon > 0$. Tada postoji $b \in I$ takav da $\|a + b\| \leq \|a + I\| + \frac{\epsilon}{2}$. Kako je $b = \lim_\lambda u_\lambda b$, spostoji $\lambda_0 \in \Lambda$ takva da $\|b - u_\lambda b\| < \frac{\epsilon}{2}$ za sve $\lambda \geq \lambda_0$. Dakle, za $\lambda \geq \lambda_0$ imamo

$$\begin{aligned}\|a - u_\lambda a\| &\leq \|(e - u_\lambda)(a + b)\| + \|b - u_\lambda b\| \\ &\leq \|a + b\| + \|b - u_\lambda b\| \\ &\leq \|a + I\| + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

odakle slijedi $\|a + I\| = \lim_\lambda \|a - u_\lambda a\|$ pa onda i $\|a + I\| = \|a^* + I\| = \lim_\lambda \|a^* - u_\lambda a^*\| = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|$. □

Napomena 4.1.7. *Neka je I zatvoren ideal u C^*-algebri A i J zatvoren ideal u I. Tada je J također ideal u A. Da bismo to dokazali, dovoljno je pokazati*

$$a \in A,\ \ b \in J^+ \ \ \Rightarrow\ \ ab,\ \ ba \in J$$

jer J^+ linearno razapinje J. Neka je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica u I. Tada je $b^{1/2} \in C^*(b) \subseteq J \subseteq I$ pa vrijedi $b^{1/2} = \lim_\lambda u_\lambda b^{1/2}$. Odavde slijedi $ab = \lim_a \lambda u_\lambda b^{1/2} b^{1/2}$. Zaključujemo da je $ab \in J$ jer je $b^{1/2} \in J$, $au_\lambda b^{1/2} \in I$, a J ideal u I. Također je i a^*b sadržan u J pa onda i $ba = (a^*b)^*$ jer je J samoadjungiran prema teoremu 4.1.6.

Teorem 4.1.8. *Neka je A C^*-algebra i I zatvoren ideal u A. Tada je kvocijentni prostor A/I i sam C^*-algebra s uobičajeno definiranim operacijama zbrajanja i množenja te kvocijentnom normom.*

Dokaz. Neka je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica od I. Za $a \in A$ i $b \in I$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\|a + I\|^2 &= lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2 \\ &= \lim_\lambda \|(e - u_\lambda)a^*a(e - u_\lambda)\| \\ &\leq \sup_\lambda \|(e - u_\lambda)(a^*a + b)(e - u_\lambda)\| + \lim_\lambda \|(e - u_\lambda)b(e - u_\lambda)\| \\ &\leq \|a^*a + b\| + \lim_\lambda \|b - bu_\lambda\| \\ &= \|a^*a + b\|.\end{aligned}$$

Dakle, $\|a + I\|^2 \leq \|a^*a + I\|$. Po lemi 3.1.8 slijedi da je A/I C^*-algebra. □

Teorem 4.1.9. *Ako je $\varphi : A \to B$ injektivni $*$-homomorfizam između C^*-algebri A i B, onda je φ nužno izometrija.*

Dokaz. Pokazat ćemo da vrijedi $\|\varphi(a^*a)\| = \|a^*a\|$, $\forall a \in A$, što je ekvivalentno tvrdnji $\|\varphi(a)\|^2 = \|a\|^2$, $\forall a \in A$. Možemo pretpostaviti da je A i B komutativne (inače promatramo $C(a^*a)$ kao domenu i $\overline{\operatorname{Im}\varphi}$ kao kodomenu). Također, pretpostavljamo da su A, B i φ unitalni (inače promatramo njihove unitizacije i proširenje $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \to \tilde{B}$).

Ako je $\tau \in \Omega(B)$, onda je $\tau \circ \varphi \in \Omega(A)$. Preslikavanje

$$\varphi' : \Omega(B) \to \Omega(A), \quad \tau \mapsto \tau \circ \varphi,$$

je neprekidno pa onda kompaktnost prostora $\Omega(B)$ povlači kompaktnost skupa $\varphi'(\Omega(B))$. Dakle, $\varphi'(\Omega(B))$ je zatvoren u $\Omega(A)$.

Ako je $\varphi'(\Omega(B)) \neq \Omega(A)$, onda prema Urisonovoj lemi postoji netrivijalna neprekidna funkcija $f : \Omega(A) \to \mathbb{C}$ koja iščezava na $\varphi'(\Omega(B))$. Prema teoremu 3.1.18 postoji $a \in A$ takav da je $f = \hat{a}$. Dakle, za svaki $\tau \in \Omega(B)$ vrijedi $\tau(\varphi(a)) = \hat{a}(\tau \circ \varphi) = f(\tau \circ \varphi) = 0$. Odavde slijedi $\varphi(a) = 0$, a kako je φ injektivan, zaključujemo da je $a = 0$. f je netrivijalna pa smo dobili kontradikciju jer je $0 \equiv \hat{a} = f$. Dakle, mora vrijediti $\varphi'(\Omega(B)) = \Omega(A)$ pa za svaki $a \in A$ vrijedi

$$\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty = \sup_{\tau \in \Omega(A)} |\tau(a)| = \sup_{\tau \in \Omega(B)} |\tau(\varphi(a))| = \|\varphi(a)\|.$$

□

Teorem 4.1.10. *Ako je $\varphi : A \to B$ $*$-homomorfizam C^*-algebri A i B, onda je* $\operatorname{Im}\varphi$ *C^*-podalgebra od B.*

Dokaz. Preslikavanje

$$A/\ker\varphi \to B, \quad a + \ker\varphi \mapsto \varphi(a),$$

je injektivni $*$-homomorfizam C^*-algebri pa je prema prethodnom teoremu izometrija. Slijedi da je prostor $\operatorname{Im}\varphi$ potpun pa onda i zatvoren u B. □

Teorem 4.1.11. *Neka je A C^*-algebra, B njena C^*-podalgebra i I zatvoren ideal u A. Tada je $B + I$ C^*-podalgebra od A.*

Dokaz. $B + I$ je podalgebra što slijedi iz činjenice da je I ideal u A. B je samoadjungirana po definiciji C^*-podalgebre, a I po teoremu 4.1.6. Dakle, $B + I$ je $*$-podalgebra od A. Preostaje pokazati zatvorenost.

Neka je $\pi : A \to A/I$ kvocijentni homomorfizam. Ako je $i : B \to A$ inkluzija, onda je $\varphi = \pi \circ i : B \to A/I$ $*$-homomorfizam C^*-algebri. Prema prethodnom teoremu $\varphi(B)$ je zatvoren. Kako je π neprekidan, slijedi da je $\pi^{-1}(\varphi(B)) \subseteq A$ zatvoren. Sada je $\pi^{-1}(\varphi(B)) = \pi^{-1}(\pi(B)) = B + I$. Dakle, $B + I \subseteq A$ je zatvoren.

Lagano se pokaže da je $B/(B \cap I)$ $*$-izomorfan prostoru $(B + I)/I$. □

4.2 Hereditarne C^*-podalgebre

U ovoj sekciji upoznajemo se s posebnom klasom C^*-podalgebri koje se nazivaju *hereditarnim*. Imaju dobra svojstva vezana uz proširenja pozitivnih linearnih funkcionala te koncept prostih algebri.

Definicija 4.2.1. *Kažemo da je C^*-podalgebra B C^*-algebre A **hereditarna** ako vrijedi*

$$\forall a \in A^+, b \in B^+ \quad a \leq b \quad \Rightarrow \quad a \in B.$$

Primjerice, $\{0\}$ i A su očito hereditarne C^*-podalgebre od A. Također, svaki presjek hereditarnih C^*-podalgebri je opet hereditarna C^*-podalgebra. Stoga, možemo definirati hereditarnu C^*-podalgebru *generiranu* skupom S kao najmanju hereditarnu C^*-podalgebru od A koja sadrži S.

Primjer 4.2.2. *Ako je p projektor u C^*-algebri A, onda je C^*-podalgebra pAp hereditarna. Za $b \in A^+$ i $a \in A$, $b \leq pap$ povlači $0 \leq (1-p)b(1-p) \leq (1-p)pap(1-p) = 0$ odakle slijedi $(1-p)b(1-p) = 0$. Stoga vrijedi $\|b^{1/2}(1-p)\|^2 = \|(1-p)b(1-p)\| = 0$ pa je onda $b(1-p) = 0$. Zaključujemo da je $b = pbp \in pAp$.*

Sljedeći teorem nam daje korisnu vezu između hereditarnih C^*-podalgebri i zatvorenih lijevih ideala.

Teorem 4.2.3. *Neka je A C^*-algebra.*

(1) Ako je L zatvoren lijevi ideal u A, onda je $L \cap L^*$ hereditarna C^*-podalgebra od A. Preslikavanje $L \mapsto L \cap L^*$ je bijekcija sa skupa zatvorenih lijevih ideala od A u skup hereditarnih C^*-podalgebri od A.

(2) Ako su L_1 i L_2 zatvoreni lijevi ideali od A, onda je $L_1 \subseteq L_2$ ako i samo ako je $L_1 \cap L_1^* \subseteq L_2 \cap L_2^*$.

(3) Ako je B hereditarna C^*-podalgebra od A, onda je skup

$$L(B) = \{a \in A : a^* a \in B\}$$

jedinstven zatvoren lijevi ideal od A pridružen B.

Dokaz. (1) Neka je L zatvoren lijevi ideal u A. Tada je $B = L \cap L^*$ C^*-podalgebra od A. Neka su $a \in A^+$ i $b \in B^+$ takvi da vrijedi $a \leq b$. Po teoremu 4.1.5 postoji aproksimativna jedinica $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ u zatvorenoj jediničnoj kugli od L^+ takva da vrijedi $\lim_\lambda bu_\lambda = b$. Odavde slijedi $0 \leq (e - u_\lambda)a(e - u_\lambda) \leq (e - u_\lambda)b(e - u_\lambda)$ što povlači

$$\|a^{1/2} - a^{1/2}u_\lambda\|^2 = \|(e - u_\lambda)a(e - u_\lambda)\| \leq \|(e - u_\lambda)b(e - u_\lambda)\| \leq \|b - bu_\lambda\|.$$

Dakle, $a^{1/2} = \lim_\lambda a^{1/2}u_\lambda$ pa vrijedi $a^{1/2} \in L$ jer je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq L$, a L je zatvoren. Slijedi da je $a \in B$ pa zaključujemo da je B hereditarna C^*-podalgebra od A.

(2) Neka su sad L_1 i L_2 zatvoreni lijevi ideali od A. Smjer $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L_1 \cap L_1^* \subseteq L_2 \cap L_2^*$ je očit. Pretpostavimo da vrijedi $L_1 \cap L_1^* \subseteq L_2 \cap L_2^*$. Neka je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica od $L_1 \cap L_1^*$ i $a \in L_1$. Tada iz $a^*a \in L_1 \cap L_1^*$ slijedi

$$\lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2 = \lim_\lambda \|(e - u_\lambda)a^*a(e - u_\lambda)\| \leq \lim_\lambda \|a^*a(e - u_\lambda)\| = 0.$$

Dakle, $a = \lim_\lambda au_\lambda$ pa zaključujemo da je $a \in L_2$ budući da je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq L_1 \cap L_1^* \subseteq L_2$.

(3) Neka je B hereditarna C^*-podalgebra od A i $L = L(B)$. Za $a, b \in L$ vrijedi

$$(a + b)^*(a + b) \leq (a + b)^*(a'b) + (a - b)^*(a - b) = 2a^*a + 2b^*b \in B$$

pa je $(a + b)^*(a + b) \in B$ te $a + b \in L$. Za $a \in A$, $b \in L$,

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \leq \|a\|^2 b^*b \in B$$

pa je i $ab \in L$. Slično dobivamo da je L zatvoren na množenje skalarom. Dakle, L je lijevi ideal, a zatvorenost od L slijedi iz zatvorenosti od B. Ako je $b \in B$, onda je $b^*b \in B$ pa slijedi $b \in L$. Dakle, $B \subseteq L \cap L^*$. Ako je $b \geq 0$ i $b \in L \cap L^*$, onda je $b^2 = b^*b \in B$ pa slijedi $b \in B$, tj. $L \cap L^* \subseteq B$. Dakle, $L \cap L^* = B$.

Pokazali smo da je svaka hereditarna C^*-podalgebra oblika $L \cap L^*$, gdje je L zatvoreni lijevi ideal u A. Također, $L \cap L^*$ je hereditarna C^*-algebra za svaki zatvoreni lijevi ideal od A. Time smo pokazali i tvrdnju (1) o bijektivnosti. □

Direktno dobivamo sljedeći korolar.

Korolar 4.2.4. *Svaki zatvoreni ideal C^*-algebre je hereditarna C^*-algebra.*

Dokaz. Neka je A C^*-algebra i I zatvoren ideal u A. Tada je prema teoremu 4.1.6 $I = I^*$. Kako je I lijevi ideal, $I = I \cap I^*$ je hereditarna C^*-podalgebra od A prema teoremu 4.2.3. □

Korolar 4.2.5. *Neka je A komutativna C^*-algebra. Tada je $I \subseteq A$ hereditarna C^*-podalgebra od A ako i samo ako je I zatvoren ideal u A.*

Dokaz. Svaki zatvoreni lijevi ideal u A je dvostran zbog komutativnosti pa je onda i samo-adjungiran prema teoremu 4.1.6. Dakle, bijekcija $L \mapsto L \cap L^*$ između zatvorenih lijevih ideala i hereditarnih C^*-podalgebri od A je zapravo $L \mapsto L$. □

Teorem 4.2.6. *Neka je B C^*-podalgebra od C^*-algebre A. Tada je B hereditarna u A ako i samo za svaki $b, b' \in B$ i svaki $a \in A$ vrijedi $bab' \in B$.*

Dokaz. Ako je B hereditarna C^*-podalgebra od C^*-algebre A, onda je prema teoremu 4.2.3 $B = L \cap L^*$ za neki zatvoreni lijevi ideal L od A. Dakle, za $b, b' \in B$ i $a \in A$ vrijedi $bab' = b(ab') \in L$ i $(bab')^* = b'^*(a^*b^*) \in L$ pa zaključujemo da je $bab' \in B$.

Obratno, pretpostavimo da je B C^*-podalgebra od C^*-algebre A za koju vrijedi

$$\forall b, b' \in B, \ \ \forall a \in A \ \ bab' \in B.$$

Neka je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica od B. Neka su $a \in A^+$, $b \in B^+$ takvi da je $a \leq b$. Tada je $0 \leq (e - u_\lambda)a(e - u_\lambda) \leq (e - u_\lambda)b(e - u_\lambda)$ odakle slijedi $\|a^{1/2} - a^{1/2}u_\lambda\| \leq \|b^{1/2} - b^{1/2}u_\lambda\|$. Jer je $b^{1/2} \in B$, vrijedi $b^{1/2} = \lim_\lambda b^{1/2}u_\lambda$ pa onda i $a^{1/2} = \lim_\lambda a^{1/2}u_\lambda$. Dakle, $a = \lim_\lambda u_\lambda a u_\lambda \in B$. □

Korolar 4.2.7. *Neka je $a \in A$ C^*-algebra i $a \in A^+$. Tada je $\overline{aAa}$ hereditarna C^*-podalgebra od A generirana s a.*

Dokaz. Neka je A C^*-algebra i $a \in A^+$. Prema teoremu 4.2.6 slijedi da je $\overline{aAa} \subseteq B$ za svaku hereditarnu C^*-podalgebru B koja sadrži a.

Pokažimo da $\overline{aAa}$ sadrži a. Neka je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica od A. Tada vrijedi $a^2 = \lim_\lambda a u_\lambda a$ pa je $a^2 \in \overline{aAa}$. $\overline{aAa}$ je C^*-algebra pa slijedi $a = (a^2)^{1/2} \in \overline{aAa}$.

Kako je $\overline{aAa} = Aa \cap (Aa)^*$, prema teoremu 4.2.3 je $\overline{aAa}$ hereditarna C^*-podalgebra od A. □

Teorem 4.2.8. *Neka je B separabilna hereditarna C^*-podalgebra C^*-algebre A. Tada postoji pozitivan element $a \in B$ takav da je $B = \overline{aAa}$.*

Dokaz. B je separabilna C^*-algebra pa prema napomeni 4.1.4 postoji aproksimativna jedinica $(u_n)_{n=1}^\infty$ u B. Red $\sum_{n=1}^\infty u_n/2^n$ konvergira apsolutno pa možemo definirati $a = \sum_{n=1}^\infty u_n/2^n$. Kako je $a \in B^+$, slijedi $\overline{aAa} \subseteq B$.

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $u_n/2^n \leq a$, a kako je $\overline{aAa}$ hereditarna i generirana s a, slijedi da je $u_n \in \overline{aAa}$, $\forall n$. Za $b \in B$ vrijedi $b = \lim_n u_n b u_n$ te $u_n b u_n \in \overline{aAa}$ pa zaključujemo da je b sadržan u $\overline{aAa}$. Dakle, $B \subseteq \overline{aAa}$. □

Teorem 4.2.9. *Neka je A unitalna C^*-algebra, B njena hereditarna C^*-podalgebra i $a \in A^+$. Ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $b \in B^+$ takav da vrijedi $a \leq b + \epsilon$, onda je $a \in B$.*

Dokaz. Neka je je $\epsilon > 0$. Po pretpostavci teorema tada postoji $b_\epsilon \in B^+$ takav da vrijedi $a \leq b_\epsilon^2 + \epsilon^2$ odakle slijedi $a \leq (b_\epsilon + \epsilon)^2$. Dakle, $(b_\epsilon + \epsilon)^{-1}a(b_\epsilon + \epsilon)^{-1} \leq 1$ odakle slijedi $\|(b_\epsilon + \epsilon)^{-1}a(b_\epsilon + \epsilon)^{-1}\| \leq 1$. Vrijedi $1 - b\epsilon(b_\epsilon + \epsilon)^{-1} = \epsilon(b_\epsilon + \epsilon)^{-1}$ iz čega slijedi:

$$\begin{aligned}
\|a^{1/2} - a^{1/2}b_\epsilon(b_\epsilon + \epsilon)^{-1}\|^2 &= \|a^{1/2}\epsilon(b_\epsilon + \epsilon)^{-1}\|^2 \\
&= \epsilon^2\|(b_\epsilon + \epsilon)^{-1}a(b_\epsilon + \epsilon)^{-1}\| \\
&\leq \epsilon^2.
\end{aligned}$$

Dakle, $a^{1/2} = \lim_{\epsilon\to 0} a^{1/2} b_\epsilon (b_\epsilon + \epsilon)^{-1}$, a adjungiranjem slijedi i $a^{1/2} = \lim_{\epsilon\to 0} (b_\epsilon + \epsilon)^{-1} b_\epsilon a^{1/2}$. Zaključujemo da vrijedi $a = \lim_{\epsilon\to 0} (b_\epsilon + \epsilon)^{-1} b_\epsilon a b_\epsilon (b_\epsilon + \epsilon)^{-1}$. Kako je $b_\epsilon (b_\epsilon + \epsilon)^{-1} \in B$ i $(b_\epsilon + \epsilon)^{-1} \leq b_\epsilon \in B$, slijedi da je i $(b_\epsilon + \epsilon)^{-1} b_\epsilon a b_\epsilon (b_\epsilon + \epsilon)^{-1} \in B$. Dakle, $a \in B$. □

Za kraj ove sekcije ćemo prikazati vezu između ideala u C^*-algebri i njenih hereditarnih C^*-podalgebri.

Teorem 4.2.10. *Neka je A C^*-algebra, B njena hereditarna C^*-podalgebra i J zatvoren ideal u B. Tada postoji zatvoren ideal I u A takav da vrijedi $J = B \cap I$.*

Dokaz. Definirajmo $I = AJA$. Tada je I zatvoren ideal u A. Prema korolaru 4.2.4 J je C^*-algebra, a pomoću egzistencije aproksimativne jedinice od J se pokaže da vrijedi $J = J^3$. Pomoću teorema 4.2.6 te aproksimativnih jedinica pokaže se da vrijedi $B \cap I = BIB$. Dakle, $B \cap I = BIB = B(AJA)B = BAJ^3AB \subseteq BJB$ jer su BAJ i JAB sadržani u B po teoremu 4.2.6. Budući da je $BJB = J$, slijedi $B \cap I \subseteq J$. Inkluzija $J \subseteq B \cap I$ slijedi iz postojanja aproksimativne jedinice u A. □

Sljedeći objekt koji definiramo pokazuje se bitnim u teoriji C^*-algebri pa ga stoga ovdje spominjemo te iznosimo jedan rezultat vezan uz hereditarne C^*-podalgebre.

Definicija 4.2.11. *Kažemo da je C^*-algebra A **prosta** ako su $\{0\}$ i A jedini zatvoreni ideali u A.*

Teorem 4.2.12. *Neka je A prosta C^*-algebra. Svaka hereditarna C^*-podalgebra od A je prosta.*

Dokaz. Neka je B hereditarna C^*-podalgebra od A te J zatvoreni ideal u B. Prema prethodnom teoremu je $J = B \cap I$ za neki zatvoreni ideal I u A. Kako je I ili $\{0\}$ ili A, slijedi da je J jednak ili $\{0\}$ ili B pa je B također prosta. □

4.3 Pozitivni linearni funkcionali

U slučaju komutativnih C^*-algebri mogli smo u potpunosti odrediti njihovu strukturu pomoću prostora multiplikativnih linearnih funkcionala što možemo shvatiti kao jednodimenzionalnu reprezentaciju. Pokaže se da je u slučaju nekomutativnih C^*-algebri situacija drukčija i kompleksnija; reprezentacija takvih C^*-algebru može biti proizvoljne dimenzije.

Ovu sekciju ćemo posvetiti proučavanju pozitivnih linearnih funkcionala C^*-algebre jer postoji duboka veza između njih i reprezentacija C^*-algebre.

Definicija 4.3.1. *Neka su A, B C^*-algebre. Kažemo da je linearno preslikavanje $\varphi : A \to B$ **pozitivno** ako vrijedi $\varphi(A^+) \subseteq B^+$.*

Ako je φ pozitivan linearan funkcional između C^*-algebri A i B, onda također vrijedi $\varphi(A_{sa}) \subseteq B_{sa}$ te je preslikavanje $\varphi|_{A_{sa}} : A_{sa} \to B_{sa}$ rastuće.

Uočimo da je svaki $*$-homomorfizam pozitivan.

Primjer 4.3.2. *Promotrimo prostor $B(\mathbb{C}^n)$ i linearno preslikavanje*

$$tr : B(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}, \;\; A \mapsto \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i, e_i \rangle,$$

koje zovemo trag. Za svaki $A \in B(\mathbb{C}^n)$ vrijedi:

$$tr(A^*A) = \sum_i \langle A^*Ae_i, e_i \rangle = \sum \langle Ae_i, Ae_i \rangle \geq 0.$$

Kako je svaki pozitivni element prostora $B(\mathbb{C}^n)$ oblika A^*A, zaključujemo da je trag pozitivan linearan funkcional.

Neka je V kompleksan vektorski prostor. Preslikavanje $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ je *seskvilinearna forma* ako vrijedi:

$$(\lambda a, b) = \lambda(a, b), \;\; (a, \lambda b) = \overline{\lambda}(a, b), \;\; \forall a, b \in V, \lambda \in \mathbb{C},$$

tj. ako je linearno po prvoj varijabli i antilinearno po drugoj.

Lako se provjeri da je za seskvilinearnu formu $(\cdot, \cdot)$ na V ekvivalentno:

(i) $(b, a) = \overline{(a, b)}, \forall a, b \in V$;

(ii) $(a, a) \in \mathbb{R}, \forall a \in V$.

Seskvilinearna forma koja zadovoljava ova ekvivalentna svojstva zove se *hermitska*.

Kaže se da je seskvilinearna forma $(\cdot, \cdot)$ *pozitivna* ako je $(a, a) \geq 0$ za sve a iz V.

Neka je A C^*-algebra i τ pozitivan linearan funkcional na A. Tada je preslikavanje

$$A \times A \to \mathbb{C}, \;\; (a, b) \mapsto \tau(b^*a),$$

pozitivna seskvilinearna forma na A. Dakle, $\tau(b^*a) = \overline{\tau(a^*b)}$ te vrijedi $|\tau(b^*a)| \leq \tau(a^*a)^{1/2}\tau(b^*b)^{1/2}$ po Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti. Nadalje, funkcija $a \mapsto \tau(a^*a)^{1/2}$ je polunorma na A.

Neka je sad τ samo linearan funkcional na A i $M \in [0, \infty\rangle$ takav da je $|\tau(a)| \leq M$ za sve pozitivne a iz zatvorene jedinične kugle od A. Lako se pokaže da je τ tada ograničen te da vrijedi $\|\tau\| \leq 4M$.

Teorem 4.3.3. *Svaki pozitivan linearan funkcional na C^*-algebri A je ograničen.*

Dokaz. Neka je τ pozitivan linearan funkcional na C^*-algebri A te pretpostavimo da nije ograničen. Tada je prema razmatranjima prije teorema $\sup_{a\in S} \tau(a) = \infty$, pri čemu je S skup svih pozitivnih elemenata od A čija norma nije veća od 1. Dakle, postoji niz $(a_n) \subseteq S$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $2^n \leq \tau(a_n)$. Definirajmo $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n/2^n$. Vrijedi $a \in A^+$ te $1 \leq \tau(a_n/2^n)$, $\forall n$. Dakle, za svaki $N \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$N \leq \sum_{n=0}^{N-1} \tau\left(\frac{a_n}{2^n}\right) = \tau\left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{2^n}\right) \leq \tau(a).$$

Dakle, $\tau(a)$ je gornja međa za $\mathbb{N}$ što je nemoguće. Zaključujemo da je pretpostavka bila kriva, odnosno τ je nužno ograničen. $\square$

Teorem 4.3.4. *Neka je τ pozitivan linearan funkcional na C^*-algebri A. Tada je $\tau(a^*) = \overline{\tau(a)}$ i $|\tau(a)|^2 \leq \|\tau\|\tau(a^*a)$.*

Dokaz. Neka je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica od A. Tada je

$$\tau(a^*) = \lim_\lambda \tau(a^*u_\lambda) = \lim_\lambda \overline{\tau(u_\lambda a)} = \overline{\tau(a)}.$$

Nadalje, $|\tau(a)|^2 = \lim_\lambda |\tau(u_\lambda a)|^2 \leq \sup_\lambda \tau(u_\lambda^2)\tau(a^*a) \leq \|\tau\|\tau(a^*a)$. $\square$

Teorem 4.3.5. *Neka je τ ograničen linearan funkcional na C^*-algebri A. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne.*

(1) τ je pozitivan.

(2) Za svaku aproksimativnu jedinicu $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ od A vrijedi $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$.

(3) Za neku aproksimativnu jedinicu $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ od A vrijedi $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$.

Dokaz. Možemo pretpostaviti $\|\tau\| = 1$.

(1) $\Rightarrow$ (2): Neka je τ pozitivan i $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica od A. Tada je $(\tau(u_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ rastući hiperniz u $\mathbb{R}$ pa konvergira prema svom supremumu koji ne može biti veći od 1. Dakle, $\lim_\lambda \tau(u_\lambda) \leq 1$. Neka je sad $a \in A$, $\|a\| \leq 1$. Tada je

$$|\tau(u_\lambda a)|^2 \leq \tau(u_\lambda^2)\tau(a^*a) \leq \tau(u_\lambda)\tau(a^*a) \leq \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$$

pa vrijedi $|\tau(a)|^2 \leq \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$. Dakle, $1 \leq \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$ pa konačno zaključujemo $1 = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$.

Smjer (2) $\Rightarrow$ (3) je očit.

(3) $\Rightarrow$ (1): Neka je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica takva da vrijedi $1 = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$. Neka je $a \in A_{sa}$ takav da je $\|a\| \leq 1$ i $\tau(a) = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je $\beta \leq 0$ te pokažimo da je $\tau(a)$ realan broj. Za $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned}\|a - inu_\lambda\|^2 &= \|(a + inu_\lambda)(a - inu_\lambda)\|\\ &= \|a^2 + n^2u_\lambda^2 - in(au_\lambda - u_\lambda a)\|\\ &\leq 1 + n^2 + n\|au_\lambda - u_\lambda a\|\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$|\tau(a - inu_\lambda)|^2 \leq 1 + n^2 + n\|au_\lambda - u_\lambda a\|. \quad (*)$$

Kako je $\lim_\lambda \tau(a - inu_\lambda = \tau(a) - in$, a $\lim_\lambda au_\lambda - u_\lambda a = 0$, iz $(*)$ kad $\lambda \to \infty$ zaključujemo

$$|\tau(a) - in|^2 = |\alpha + i\beta - in|^2 \leq 1 + n^2$$

odakle dobivamo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$-2n\beta \leq 1 - \beta^2 - \alpha^2.$$

Budući da je $\beta \leq 0$, nejednakost vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$ te $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$, zaključujemo da je nužno $\beta = 0$. Dakle, za hermitski a $\tau(a)$ je realan.

Pretpostavimo sad da je a pozitivan i $\|a\| \leq 1$. Tada je $u_\lambda - a$ hermitski te vrijedi $\|u_\lambda - a\| \leq 1$ pa je prema prethodnom dijelu dokaza $\tau(u_\lambda - a) \leq 1$. Odavde slijedi $1 - \tau(a) = \lim_\lambda \tau(u_\lambda - e) \leq 1$ pa zaključujemo da je $\tau(a) \geq 0$. Dakle, τ je pozitivan. □

Korolar 4.3.6. *Ako je τ ograničen linearan funkcional na unitalnoj C^*-algebri, onda je τ pozitivan ako i samo ako vrijedi $\tau(e) = \|\tau\|$.*

Dokaz. Za $u_\lambda = e$, $\forall\lambda \in \Lambda$, hiperniz $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ je aproksimativna jedinica od A. Primjenom prethodnog teorema slijedi tvrdnja korolara. □

Korolar 4.3.7. *Neka su τ, τ' pozitivni linearni funkcionali na C^*-algebri. Tada je $\|\tau+\tau'\| = \|\tau\| + \|\tau'\|$.*

Dokaz. Neka je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica algebre, tada je prema teoremu 4.3.5 $\|\tau + \tau'\| = \lim_\lambda(\tau + \tau')(u_\lambda) = \lim_\lambda \tau(u_\lambda) + \lim_\lambda \tau'(u_\lambda) = \|\tau\| + \|\tau'\|$. □

Definicija 4.3.8. *Neka je A C^*-algebra. Kažemo da je pozitivan funkcional τ na A **stanje** ako vrijedi $\|\tau\| = 1$.*

Skup svih stanja od A označavamo sa $S(A)$.

Teorem 4.3.9. *Neka je A ne-nul C^*-algebra i $a \in A$ normalan. Tada postoji stanje τ od A takvo da vrijedi $\|a\| = |\tau(a)|$.*

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je $a \neq 0$. Neka je B C^*-algebra generirana elemetima e i a u $\tilde{A}$. Budući da je B komutativna i $\hat{a}$ neprekidna na kompaktnom prostoru $\Omega(B)$, postoji multiplikativan linearan funkcional τ_2 na B takav da vrijedi $\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty = |\tau_2(a)|$. Po Hahn-Banachovom teoremu postoji ograničen linearan funkcional τ_1 na $\tilde{A}$ koji proširuje τ_2 i čuva normu pa je $\|\tau_1\| = 1$. Kako je $\tau_1(e) = \tau_2(e) = 1$, τ_1 je pozitivan po korolaru 4.3.6. Neka je $\tau = \tau_1|_A$. Tada je τ pozitivan linearan funkcional na A takav da vrijedi $\|a\| = |\tau(a)|$. Dakle, $\|a\| = |\tau(a)| \leq \|\tau\|\|a\|$ odakle zaključujemo da je $\|\tau\| \geq 1$. Obratna nejednakost slijedi iz $\|\tau_1\| = 1$. Dakle, τ je stanje na A. □

Teorem 4.3.10. *Neka je τ pozitivan linearan funkcional na C^*-algebri A.*

(1) Za svaki $a \in A$ $\tau(a^*a) = 0$ ako i samo ako je $\tau(ba) = 0$ za sve $b \in A$.

(2) Za sve $a, b \in A$ vrijedi $\tau(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\|\tau(b^*b)$.

Dokaz. Tvrdnja (1) slijedi iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti.

Da bismo pokazali tvrdnju (2), zbog tvrdnje (1) možemo pretpostaviti da vrijedi $\tau(b^*b) > 0$. Preslikavanje

$$\rho : A \to \mathbb{C}, \quad c \mapsto \tau(b^*cb)/\tau(b^*b),$$

je linearno i pozitivno. Neka je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica od A. Tada je prema teoremu 4.3.5

$$\|\rho\| = \lim_\lambda \rho(u_\lambda) = \lim_\lambda \tau(b^*u_\lambda b)/\tau(b^*b) = \tau(b^*b)/\tau(b^*b) = 1.$$

Dakle, $\rho(a^*a) \leq \|a^*a\|$ odakle slijedi $\tau(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\|\tau(b^*b)$. □

Teorem 4.3.11. *Neka je A C^*-algebra, B njena C^*-podalgebra i τ pozitivan linearan funkcional na B. Tada postoji pozitivan linearan funkcional τ' na A koji proširuje τ tako da vrijedi $\|\tau'\| = \|\tau\|$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $A = \tilde{B}$. Definirajmo linearan funkcional τ' na A pomoću $\tau'(b + \lambda) = \tau(b) + \lambda\|\tau\|$ za $b \in B$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Neka je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica od B. Prema teoremu 4.3.5 vrijedi $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$. Neka su sad $b \in B$, $\mu \in \mathbb{C}$. Tada je

$$|\tau'(b+\mu)| = |\lim_\lambda \tau(bu_\lambda)+\mu \lim_\lambda \tau(u_\lambda)| = |\lim_\lambda \tau((b+\mu)u_\lambda)| \leq \sup_\lambda \|\tau\|\,\|(b+\mu)u_\lambda\| \leq \|\tau\|\,\|b+u_\lambda\|.$$

Dakle, $\|\tau'\| \leq \|\tau\|$. Obratna nejednakost je očita. Zaključujemo da je $\|\tau'\| = \|\tau\|$ te vrijedi $\tau'(e) = \tau(e) = \|\tau\| = \|\tau'\|$ pa je τ' pozitivan prema korolaru 4.3.6.

Pretpostavimo sad da je A proizvoljna C^*-algebra i B njena C^*-podalgebra. Možemo pretpostaviti da je A unitalna te da B sadrži jedinicu od A (po potrebi zamijenimo A i B s njihovim unitizacijama). Po Hahn-Banachovom teoremu postoji funkcional $\tau' \in A^*$ koji proširuje τ čuvajući normu. Budući da je $\tau'(e) = \tau(1) = \|\tau\| = \|\tau'\|$, kao prije zaključujemo prema korolaru 4.3.6 da je τ' pozitivan. □

U slučaju hereditarne C^*-podalgebre iz prethodnog teorema pokaže se da vrijedi jači rezultat.

Teorem 4.3.12. *Neka je A C^*-algebra, B njena hereditarna C^*-podalgebra i τ pozitivan linearan funkcional na B. Tada postoji jedinstven pozitivan linearan funkcional τ' na A koji proširuje τ i čuva normu. Nadalje, ako je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica od B, onda je $\tau'(a) = \lim_\lambda \tau(u_\lambda a u_\lambda)$ za svaki $a \in A$.*

Dokaz. Egzistencija proširenja τ' slijedi iz prethodnog teorema.

Neka τ' pozitivan linearan funkcional na A koji proširuje τ čuvajući normu. Sada možemo τ' proširiti na $\tilde{A}$ čuvajući normu do funkcionala τ''. Neka je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica od B. Vrijedi $\lim_\lambda \tau(u_\lambda) = \|\tau\| = \|\tau''\| = \tau(e)$ odakle slijedi $\lim_\lambda \tau''(e - u_\lambda) = 0$. Koristeći teorem 4.3.10 te $(e - u_\lambda)^2 \leq (e - u_\lambda)$ pokazujemo da za svaki $a \in A$ vrijedi

$$\begin{aligned}
|\tau''(a) - \tau(u_\lambda a u_\lambda)| &\leq |\tau'(a - u_\lambda)| + |\tau''(u_\lambda a - u_\lambda a u_\lambda)| \\
&\leq \tau''((e - u_\lambda)^2)^{1/2}\tau''(a^*a)^{1/2} + \tau''(a^*u_\lambda^2 a)^{1/2}\tau''((e - u_\lambda)^2)^{1/2} \\
&\leq \tau''((e - u_\lambda))^{1/2}\tau''(a^*a)^{1/2} + \tau''(a^*a)^{1/2}\tau''((e - u_\lambda)^2)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Budući da je $\lim_\lambda \tau'(e - u_\lambda) = 0$, zaključujemo da vrijedi $\lim_\lambda \tau(u_\lambda a u_\lambda) = \tau'(a)$. □

4.4 Geljfand-Naimarkova reprezentacija

U ovoj finalnoj sekciji pokazujemo da svaku C^*-algebru možemo poistovjetiti s C^*- podalgebrom prostora $B(H)$, gdje je H neki Hilbertov prostor. Zbog ove reprezentacije teorija C^*-algebri je pristupačnija od generalne teorije Banachovih algebri.

Definicija 4.4.1. ***Reprezentacija*** *C^*-algebre A je par (H, φ) gdje je H Hilbertov prostor, a $\varphi : A \to B(H)$ $*$-homomorfizam. Kažemo da je reprezentacija (H, φ)* ***vjerna*** *ako je φ injektivan.*

Ako je $(H_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ familija reprezentacija od A, direktnu sumu tih reprezentacija dobivamo definirajući $H = \oplus_\lambda H_\lambda$, $\varphi(a)((x_\lambda)_\lambda) = (\varphi_\lambda(a)(x_\lambda))_\lambda$ za sve $a \in A$, $(x_\lambda)_\lambda \in H$. Lako se provjeri da je (H, φ) doista reprezentacija od A. Ako za svaki ne-nul element $a \in A$ postoji $\lambda \in \Lambda$ takav da vrijedi $\varphi_\lambda(a) \neq 0$, onda je (H, φ) vjerna reprezentacija.

Podsjetimo se da za unitarni prostor H postoji jedinstven skalarni produkt na njegovom upotpunjenju do Banachovog prostora $\hat{H}$ koji proširuje skalarni produkt na H te je norma dobivena od tog skalarnog produkta upravo norma na $\hat{H}$. $\hat{H}$ s navedenim skalarnim produktom zovemo *upotpunjenjem prostora H do Hilbertovog prostora*.

Svakom pozitivnom linearnom funkcionalu je pridružena reprezentacija. Neka je τ pozitivan linearan funkcional an C^*-algebri A. Definiramo

$$N_\tau = \{a \in A : \tau(a^*a) = 0\}.$$

Prema teoremu 4.3.10 $N_\tau = \{a \in A : \tau(ba) = 0, \forall b \in A\}$. Lako se pokaže da je $N\tau$ zatvoreni lijevi ideal u A te da je preslikavanje

$$A/N_\tau \times A/N_\tau \to \mathbb{C}, \ \ (a + N_\tau, b + N_\tau) \mapsto \tau(b^* a),$$

dobro definiran skalarni produkt na prostoru A/N_τ. Označimo upotpunjenje prostora A/N_τ do Hilbertovog s H_τ.

Za $a \in A$ definirajmo operator $\varphi(a) \in B(A/N_\tau)$ pomoću

$$\varphi(a)(b + N_\tau) = ab + N_\tau.$$

Koristeći teorem 4.3.10 pokaže se da vrijedi

$$||\varphi(a)(b + N_\tau)||^2 = \tau(b^* a^* ab) \leq ||a||^2 \tau(b^* b) = ||a||^2 ||b + N_\tau||^2$$

odakle slijedi $||\varphi(a)|| \leq ||a||$. Operator $\varphi(a)$ ima jedinstveno proširenje do ograničenog operatora $\varphi_\tau(a)$ na H_τ. Preslikavanje

$$\varphi_\tau : A \to B(H_\tau), \ \ a \mapsto \varphi_\tau(a),$$

je $*$-homomorfizam.

Reprezentacija (H_τ, φ_τ) od A se zove *Geljfand-Naimark-Segalova reprezentacija* (kraće, *GNS reprezentacija*) pridružena pozitivnom funkcionalu τ.

Ako je A ne-nul C^*-algebra, definiramo njenu *univerzalnu* reprezentaciju kao direktnu sumu familije reprezentacija $((H_\tau, \varphi_\tau))_{\tau \in S(A)}$.

Teorem 4.4.2 (Geljfand-Naimark)**.** *Ako je A C^*-algebra, onda A ima vjernu reprezentaciju. Konkretno, njena univerzalna reprezentacija je vjerna.*

Dokaz. Neka je (H, φ) univerzalna reprezentacija C^*-algebre A i neka je $a \in A$ takav da vrijedi $\varphi(a) = 0$. Prema teoremu 4.3.9 postoji stanje τ na A takvo da vrijedi $\tau(a^* a) = ||a^* a||$. Ako označimo $b = (a^* a)^{1/4}$, onda slijedi

$$||a||^2 = \tau(a^* a) = \tau(b^4) = ||\varphi_\tau(b)(b + N_\tau)||^2 = 0$$

budući da je $\varphi_\tau(b^4) = \varphi_\tau(a^* a) = 0$ pa onda i $\varphi_\tau(b) = 0$. Dakle, $a = 0$ pa slijedi da je φ injektivan. $\square$

Geljfand-Naimarkov teorem se vrlo često primjenjuje, a mi navodimo primjenu na algebri matrica jer su one važan objekt u K-teoriji C^*-algebri.

Za algebru A $M_n(A)$ je algebra $n \times n$ matrica čiji su elementi iz A. Operacije se definiraju kao i za matrice sa skalarnim elementima. Ako je A $*$-algebra, onda je i $M_n(A)$ $*$-algebra s ivolucijom $(a_{ij})_{i,j} \mapsto (a^*_{ji})_{i,j}$.

Ako je $\varphi : A \to B$ $*$-homomorfizam između $*$-algebri A i B, onda je preslikavanje

$$\varphi : M_n(A) \to M_n(B),\ \ (a_{ij})_{i,j} \mapsto (\varphi(a_{ij})_{i,j},$$

$*$-homomorfizam koji se naziva *inflacija*.

Ako je H Hilbertov, pišemo $H^{(n)}$ za ortogonalnu sumu n kopija od H. Norma na tom prostoru je dana s $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sum_{i=1}^n \|x_i\|,\ \ (x_1, \dots x_n) \in H^{(n)}$. Za $u \in M_n(B(H))$ definiramo operator $\varphi(u) \in B(H^{(n)})$ s

$$\varphi(u)\,(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n u_{1j}\left(x_j\right), \dots, \sum_{j=1}^n u_{nj}\left(x_j\right)\right),\ \ (x_1, \dots, x_n) \in H^{(n)}.$$

Preslikavanje

$$\varphi : M_n(B(H)) \to B\left(H^{(n)}\right), u \mapsto \varphi(u),$$

je $*$-homomorfizam te ga nazivamo *kanonskim* $*$-izomorfizmom s $M_n(B(H))$ u $B(H^{(n)})$ te ga koristimo da bismo poistovjetili ove dvije algebre.

Ako za operator $b \in B(H^{(n)})$ takav da je $v = \varphi(u)$ za neki $u \in M_n\left(B(H^{(n)})\right)$, onda u zovemo *matricom operatora* v. Normu na $M_n\left(B(H^{(n)})\right)$ s kojom ta algebra postaje C^*-algebra definiramo pomoću

$$\|u\| = \|\varphi(u)\|,\ \ u \in M_n\left(B(H)\right).$$

Lako se provjeri da vrijede sljedeće korisne nejednakosti:

$$\|u_{ij}\| \leq \|u\| \leq \sum_{k,l=1}^n \|u_{kl}\|,\ \ \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Teorem 4.4.3. *Neka je A C^*-algebra. Tada postoji jedinstvena norma na $M_n(A)$ uz koju je prostor $M_n(A)$ C^*-algebra.*

Dokaz. Neka je (H, φ) univerzalna reprezentacija od A, gdje je $\varphi : M_n(A) \to M_n(B(H))$ injektivan $*$-homomorfizam. Norma uz koju $M_n(A)$ postaje C^*-algebra je definirana s $\|a\| = \|\varphi(a)\|$, $a \in M_n(A)$. Potpunost se provjeri pomoću nejednakosti koje su prethodile ovom teoremu, a jedinstvenost proizlazi iz korolara 3.1.7. □

Za kraj pokazujemo rezultat gdje se vrlo prirodno primjenjuje Geljfand-Naimarkov teorem, iako postoje alternativni dokazi koji ga ne koriste.

Teorem 4.4.4. *Neka je A C^*-algebra i $a \in A_{sa}$. Tada je $a \in A^+$ ako i samo ako je $\tau(a) \geq 0$ za sve pozitivne linearne funkcionale τ na A.*

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $\tau(a) \geq 0$ za sve pozitivne funkcionale τ na A. Neka je (H, φ) univerzalna reprezentacija od A i $x \in H$. Tada je preslikavanje

$$\tau : A \to \mathbb{C}, \quad b \mapsto \langle \varphi(b)(x), x \rangle,$$

pozitivan linearan funkcional pa vrijedi $\tau(a) = \langle \varphi(a)(x), x \rangle \geq 0$. Kako ova nejednakost vrijedi za sve $x \in X$, a $\varphi(a)$ je hermitski, slijedi da je $\varphi(a)$ pozitivan operator na H. Dakle, $\varphi(a) \in \varphi(A)^+$. Odatle zaključujemo da je a pozitivan jer je preslikavanje $\varphi : A \to \varphi(A)$ $*$-izomorfizam. $\square$

Bibliografija

[1] Damir Bakić, *Normirani prostori*, https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/onp/predavanja/np-1819-v2.pdf, [pristupljeno 25. siječnja 2020.].

[2] Ronald G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Academic Press, 1972.

[3] Michael Müger, *Errata and addenda to G. Murphy's "C*-Algebras and Operator Theory"*, https://www.math.ru.nl/~mueger/Errata_Murphy.pdf, [pristupljeno 3. veljače 2020.].

[4] Gerald J. Murphy, *C*-algebras and Operator Theory*, Academic Press, 1990.

[5] Boris Širola, *Algebarske strukture*, https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/alg/predavanja/ASpred.pdf, [pristupljeno 25. siječnja 2020.].

[6] Šime Ungar, *Kompleksna analiza*, https://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/kompleksna.pdf, 2008, [pristupljeno 25. siječnja 2020.].

Sažetak

U ovom radu dan je kratki pregled teorije Banachovih i C^*-algebri. Banachove algebre su potpune normirane algebre, a C^*-algebre su Banachove algebre s involucijom $a \mapsto a^*$ koje imaju svojstvo da za svaki njihov element a vrijedi $\|a\|^2 = \|a^*a\|$.

Na Banachovim algebrama se promatraju multiplikativni linearni funkcionali te je pokazana veza između multiplikativnih linearnih funkcionala i maksimalnih ideala komutativne Banachove algebre. Također, iznešeni su rezultati o spektru elementa Banachove algebre. Definira se te se pokazuje egzistencija Geljfandove transformacije na komutativnim Banachovim algebrama. Pokazuje se da je to preslikavanje izometrički $*$-izomorfizam na komutativnim C^*-algebrama pa se koristi za identifikaciju komutativne C^*-algebre s algebrom neprekidnih funkcija koje iščezavaju u beskonačnosti.

Uvodi se pojam hereditarne C^*-algebre te je pokazana uska veza između te klase podalgebri i njenih zatvorenih lijevih ideala. Definiraju se pozitivni elementi C^*-algebre te se dokazuje egzistencija i jedinstvenost pozitivnog korijena. Pokazuju se osnovna svojstva pozitivnih funkcionala na C^*-algebrama. Konačno, dokazano je postojanje vjerne reprezentacije svake C^*-algebre u Geljfand-Naimarkovom teoremu.

Summary

This thesis gives an overview of Banach and C^*-algebras theory. Banach algebras are complete normed algebras, whereas C^*-algebras are Banach algebras with involution $a \mapsto a^*$ satisfying the condition $||a||^2 = ||a^*a||$ for every element a.

Multiplicative linear functionals on Banach algebras have interesting properties and an important relation with maximal ideals when the algebra is abelian. Additionaly, the thesis includes a brief study of spectral theory. Gelfand transformation is defined and its existence is shown on abelian Banach algebras. Moreover, on abelian C^*-algebras the Gelfand transformation is an isometric $*$-isomorphism. Hence, it gives a way to identify abelian C^*-algebras with algebras of continuous functions that vanish at infinity.

After introducing hereditary C^*-algebras, their relation with closed left ideals is shown. Positive elements of C^*-algebras are defined and the existence and uniqueness of positive root of a positive element is proven. Also, the properties of positive functionals on C^*-algebras are studied. Finally, the existence of a faithful representation for every C^*-algebras is proven in the Gelfand-Naimark theorem.

Životopis

Rođena sam 16.10.1995. u Rijeci. Završila sam Osnovnu školu "Petar Zrinski" i Srednju školu "Vladimir Nazor" u Čabru.

Godine 2014. upisala sam preddiplomski studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Tijekom ljeta 2014. godine, nakon završetka preddiplomskog studija, pohađala sam ljetnu školu matematike Scuola Matematica Interuniversitaria u Perugiji, Italija. Iste godine sam nastavila svoje obrazovanje na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu upisavši diplomski studij Primijenjena matematika.

Tijekom studija sam dvaput volontirala na Otvorenom danu Matematičkog odsjeka te sam držala demonstrature iz dva kolegija. 2019. godine bila sam jedan od mentora na Ljetnoj tvornici znanosti koja se održavala u Bjelovaru s radionicom na temu statistike i kriptografije. Na završnim godinama preddiplomskog i diplomskog studija dobila sam nagradu za najbolje studente završnih godina Matematičkog odsjeka, a na završnoj godini diplomskog studija i nagradu za najbolje studente završnih godina na PMF-u.