

# Matematički modeli klavira i simulacije

---

Sokač, Iva

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:819401>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-30**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Iva Sokač

**MATEMATIČKI MODELI KLAVIRA I**  
**SIMULACIJE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Marko Erceg

Zagreb, veljača, 2020

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Posvećujem ovaj diplomski svojoj obitelji  
koja je uspjela preživjeti moje  
emocionalne roller coastere tokom studija  
te se zahvaljujem svom mentoru  
na strpljenju i pomoći koju mi je pružio.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 O klaviru i matematička podloga</b>	<b>2</b>
1.1 Glazbeni uvod u klavir . . . . .	2
1.2 Teorijski uvod u matematičke modele . . . . .	8
<b>2 Matematički modeli klavira</b>	<b>11</b>
2.1 Valna jednažba . . . . .	12
2.2 Euler-Bernoullijev model klavirske žice . . . . .	16
2.3 Timošenkov model klavirske žice . . . . .	21
2.4 Geometrijski egzaktan model klavirske žice . . . . .	33
<b>3 Simulacije</b>	<b>39</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>48</b>

# Uvod

Cilj ovog rada je prikazati različite modele klavirske žice te prikazati kako dodavanjem pretpostavki na žicu dobivamo sve kompliciranije, ali i vjerodostojnije modele.

U prvom poglavlju opisujemo povijesni razvoj klavira od njegovog najstarijeg prethodnika monokorda, preko prvog pravog klavira izumljenog 1720. godine pa sve do suvremenog klavira koji svoj konačni oblik poprima u 19. stoljeću. Zatim opisujemo mehanizam klavira kojim se proizvede ton, tj. mehanizam poluga i opruga koji se pokreće pritiskom klavirske tipke te uzrokuje da batić udari u žicu te proizvede vibracije koje se preko mosta prenose do rezonantne ploče. Također, u prvom poglavlju dajemo kratki pregled matematičke teorije koja se koristi u nastavku rada.

U drugom poglavlju predstavljamo četiri različita modela za klavirsku žicu. Prvi model je valna jednadžba te pokazujemo kako ovim modelom dobivamo harmoničan spektar. Drugi model je Euler-Bernoullijev model koji uzima u obzir krutost klavirske žice. Dokazujemo da ovim modelom dobivamo neharmoničan spektar, međutim u neograničenoj prostornoj domeni brzina širenja valova se beskonačno povećava. Iz tog razloga predstavljamo treći, tzv. Timošenkov, model klavirske žice koji je poopćenje Euler-Bernoullijevog modela te uključuje i smično naprezanje. Nalazimo svojstvene i kutne frekvencije te dobivamo konačnu brzinu širenja valova. Zadnji model je geometrijski egzaktni model. Pomoću njega osim transverzalnih valova modeliramo i longitudinalne valove. Uočavamo da se ovaj model može zapisati kao Hamiltonov sustav te dokazujemo jedinstvenost rješenja. Na kraju, u trećem poglavlju dajemo vizualnu usporedbu matematičkih simulacija i stvarnih mjerenja.

# Poglavlje 1

## O klaviru i matematička podloga

### 1.1 Glazbeni uvod u klavir

#### Povijest klavira

Klavir je instrument s tipkama koji proizvodi ton udarom batića u žicu. Opseg mu je od subkontra  $A_2$  do  $c^5$ . Zbog svojih velikih tehničkih i glazbenih mogućnosti jedan je od instrumenata s vrlo bogatom glazbenom literaturom.



Slika 1.1: Prikaz suvremenog klavira.



Slika 1.2: Prikaz građe klavira.  
Preuzeto iz [3].

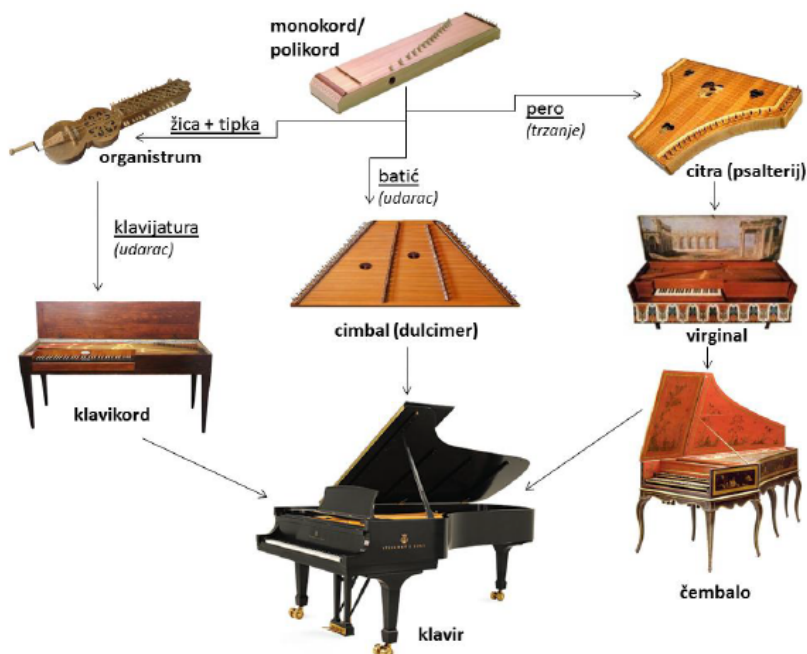
Najstarijim prethodnicima klavira smatraju se monokord i polikord. Monokord čini

jedna žica, rezonator nad kojim je ta žica razapeta i jedan ili više pokretnih mostića, koji se mogu postavljati na razne dijelove žice, uspostavljajući tako odnos dužine žice i visine tona. Pitagora je koristio monokord u svojim matematičko-akustičkim istraživanjima. Polikord nastaje nastaje iz monokorda dodavanjem više žica. Međutim, monokordu i polikordu nedostaju važni dijelovi klavira, kao što su klavijatura i unutarnja mehanika. S vremenom je došlo do razvoja instrumenata poput organistruma, cimbala, citre, psalterija i drugih koji su doveli do nastanka pravih prethodnika klavira: klavikorda i čembala. Klavikord je kombinacija latinskih riječi *clavis* (tipka) i *corda* (žica). Nastaje krajem 14. stoljeća dodavanjem klavijature na polikord. Unutarnja mehanika klavikorda se sastoji od tzv. tangenti koje svojim pritiskom na žicu određuju visinu tona skraćivanjem žice i istovremeno je dovode u stanje titranja, tj. stvaraju zvuk. Čembalo je skraćunica od talijanske riječi klavičembalo, što je u srednjovjekovnom latinskom bila riječ *clavicymbalum* od *clavis* (tipka) i *cymbalum* (psalterij). Dakle, čembalo se razvilo kombiniranjem klavijature s psalterijem te je bio najznačajniji žičani instrument s tipkama od 16. do 18. stoljeća. Važna razlika između čembala i klavira leži u samom načinu dobivanja tona, dakle trzanjem žica u odnosu na udaranje batića što donosi sa sobom oštiji i metalniji ton čembala, ali i s puno manje snage nego ton klavira. Također, snagom udara na tipku čembala se ne može utjecati na jačinu proizvedenog tona.

Tako se javlja potreba za izgradnjom instrumenta koji bi spojio osobine klavikorda (princip udara u žicu umjesto trzaja) i čembala (opći oblik instrumenta i pravac žica prema klavijaturi) u jedan instrument koji je kasnije nazvan klavir. Opće prihvaćeno mišljenje je da je klavir izumio Bartolomeo Cristofori 1720. godine. Danas postoje tri sačuvana primjerka Cristoforijevog klavira. Mehanika Cristoforijevog klavira je srodna kasnijoj engleskoj mehanici klavira jer tipka, batić i prijenosna poluga predstavljaju tri zasebna dijela koji su samo u međusobnom dodiru. Cristofori je izumio i mehanizam otpuštanja koji je sprječavao da se batić ponovno odbije na žicu poslije prvog udara, a batići su bili ovijeni papirom i prekriveni kožom. Zanimljivo jest da je Italija izumila klavir te ga potom i zaboravila. Iz tog razloga, prvim graditeljem klavira se smatra Gottfried Silbermann. On je bio njemački graditelj čembala i orgulja iz Freiberga, a pored orgulja i čembala posvetio se i gradnji klavira. Silbermannov učenik Johann Andreas Stein iz Augsburga je zaslužan za izum tzv. bečke odnosno njemačke mehanike, gdje je batić u fiksnoj vezi s tipkom.

U 19. stoljeću dolazi do velikog razvoja u mehanici klavira te potkraj 19. stoljeća klavir poprima svoj konačni oblik koji je definirao proizvođač Steinway&Sons i koji se do danas nije bitno mijenjao. Škotski graditelj John Broadwood je zaslužan za postavljanje nožnih pedala. Bio je vizionar i shvatio je da je određivanje optimalne točke u kojoj batić treba udariti žicu od najveće važnosti za određivanje kvalitete tona. Osim postavljanja pedala, Broadwood je postavio i posebni most na rezonantnoj ploči za duboke-bas žice i proširio je opseg instrumenta na gotovo 7 oktava. Talijanski graditelj klavira Muzio Clementi je bio pobornik engleske mehanike i uveo je mnoge novosti u gradnji koje su utjecale na daljnji





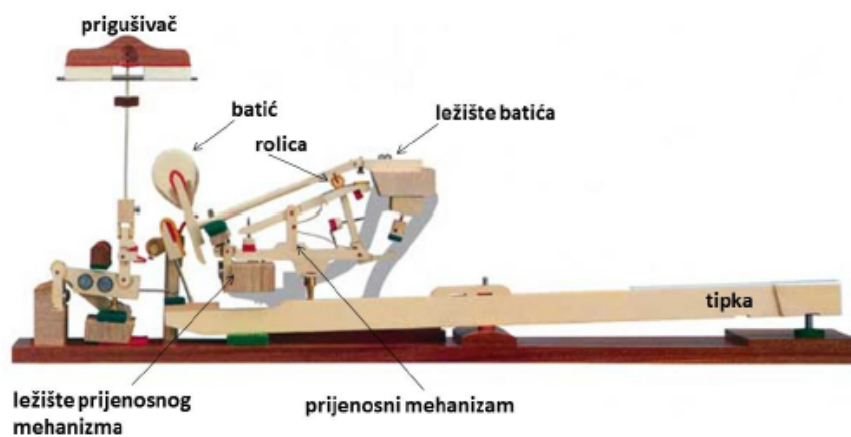
Slika 1.3: Prikaz razvojnog stabla klavira. Preuzeto iz [3].

tehnički razvoj klavira. S druge strane, pariški graditelj klavira Sebastien Erard i njegov kolega Ignazom Josephom Pleyelom usavršili englesku mehaniku u repeticioni oblik, kakvu je poznajemo i danas i koja se ugrađuje u suvremeni klavir. Pedesetih godina 19. stoljeća osniva se i tvrtka Steinway&Sons. Osnovao ju je graditelj Heinrich Steinweg koji je svoje ime amerikanizirao u Henry Steinway dolaskom u New York iz Njemačke. Firma Steinway&Sons patentirala je preko 200 vrlo važnih tehničkih unaprijeđenja klavira, te ga usavršila do njegovog konačnog oblika kakvog ga poznajemo i danas. Neki od Steinway patenata su ukrštene žice, treći sostenuto pedal, konačni oblik drvene kutije, ali i usavršeni model pianina. Pojavom suvremenog klavira kao što je Steinway&Sons D model, povijesni razvoj klavira se zaustavlja, jer se konačni oblik i princip klavira nisu bitnije mijenjali kroz čitavo 20. stoljeće, osim što su naravno unaprijeđene tehnologije izrade i kvalitete, a u novije vrijeme su ubačeni i novi izdržljiviji kompozitni materijali.

## Mehanizam klavira

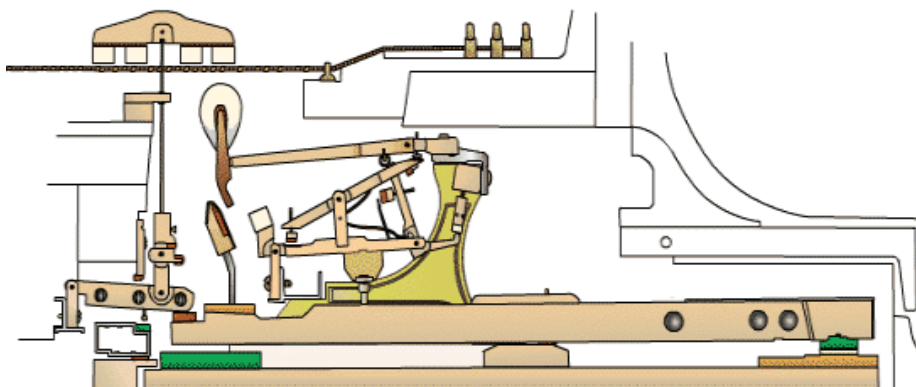
Na prednjoj strani klavira nalazi se klavijatura. To je niz drvenih tipki koje prenose snagu udara prstiju na unutarnju mehaniku. Suvremeni klavir ima 88 tipki, 36 crnih i 52 bijele

tipke koje obuhvaćaju tonski raspon od  $7 \frac{1}{4}$  oktava, od  $A_2$  do  $c^5$ . Kada pritisnemo klavirsku tipku, pokrenemo vrlo komplicirani mehanizam poluga i opruga kako bismo podigli batić koji zatim udara u jednu ili više klavirskih žica koje su vrlo napete. Žice zatim počnu vibrirati te se ta energija preko mosta prenosi do rezonantne ploče. Upravo su vibracije rezonantne ploče ono što ljudsko uho čuje kao ton. Sada ćemo pobliže opisati kako pritiskom klavirske tipke napravimo interakciju između batića i klavirske žice.



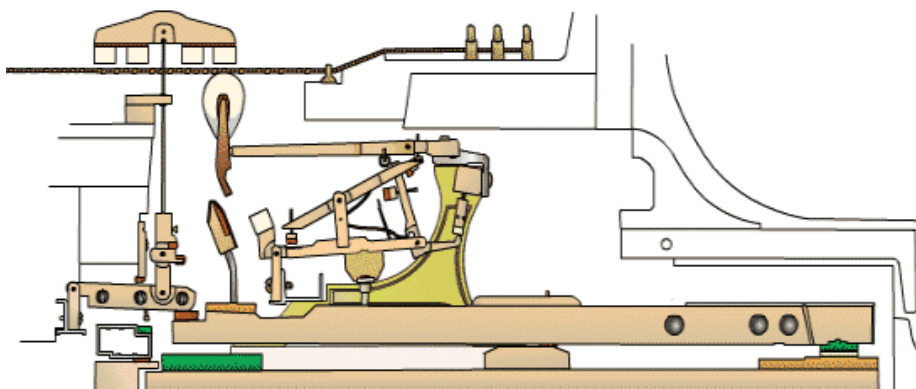
Slika 1.4: Prikaz unutarnjeg mehanizma klavira u opuštenom stanju. Preuzeto iz [3].

Kada pritisnemo klavirsku tipku prema dolje, podignemo drugi kraj tipke prema gore s jednakom silom te udarni klin pričvršćen za kraj tipke pritisne prijenosni mehanizam i podigne ga gore.



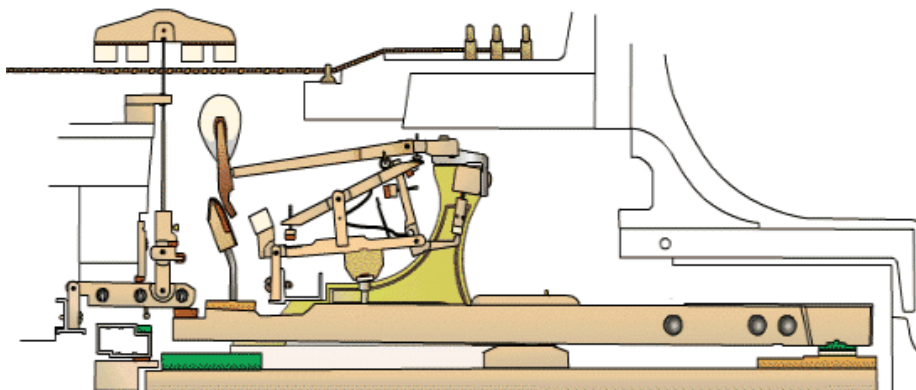
Slika 1.5: Prikaz kontakta udarnog klina i prijenosnog mehanizma.

Time uzrokuje da vrh udarne poluge udari u rolicu (koja je pričvršćena za dršku batića) te se batić odbacuje u vis i glava batića odozdo udara klavirsku žicu.



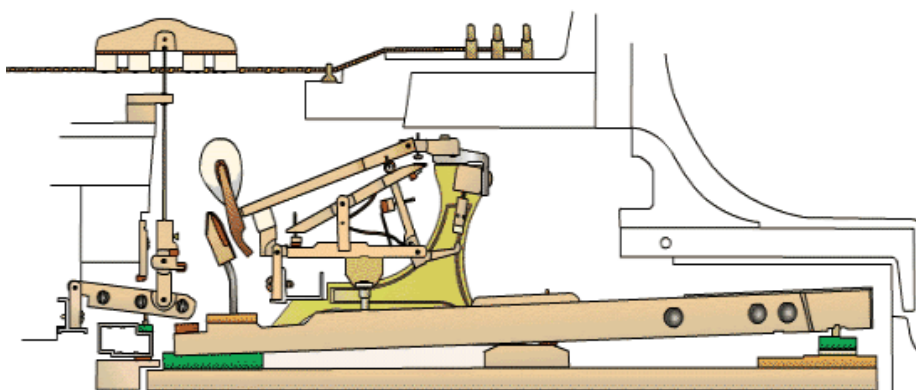
Slika 1.6: Prikaz kontakta batića i žice.

Istovremeno zub udarne poluge zakači zapinjač te zbog toga vrh poluge sklizne s rolice i omogućava odvajanje glave batića od žice neposredno nakon udara kako bi žica mogla vibrirati.



Slika 1.7: Prikaz kako udarna poluga sklizne s rolice.

Nakon što je batić udario u žicu dolazimo do engleske repeticione mehanike. Novi položaj udarne poluge zadržava batić u polupodignutom položaju iz kojeg se može ponoviti udar na tipku bez da se ona u potpunosti otpusti. Izumom engleske repeticione mehanike je došlo do značajnog unaprjeđenja klavirske mehanike i time je pijanistu omogućeno brzo i uzastopno ponavljanje istog tona. Nakon što se tipka sasvim otpusti, sve dolazi u prvobitni položaj.



Slika 1.8: Prikaz ponovnog povratka mehanizma u prvobitni položaj.

Također, istovremeno kada se tipka pritisne, kraj tipke podiže zasebnu polugu na kojoj leži prigušivač. Uloga prigušivača je da spriječi miješanje i slijevanje zvukova. Otpuštanjem tipke prigušivač se ponovno spušta na žicu i time sprječava njezino daljnje vibriranje.

## 1.2 Teorijski uvod u matematičke modele

U ovom poglavlju navodimo neke matematičke definicije i rezultate koji se koriste u nastavku rada.

**Definicija 1.2.1.** Matrica  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$  je regularna ako postoji matrica  $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$  za koju vrijedi

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

Matrica je singularna ako nije regularna.

**Napomena 1.2.2.** Neka je  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ , tada vrijede sljedeće tvrdnje.

Matrica  $\mathbf{A}$  je regularna ako i samo ako je  $\det \mathbf{A} \neq 0$ .

Sustav  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je  $\det \mathbf{A} \neq 0$ .

Homogeni sustav  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  (broj jednadžbi je jednak broju nepoznanica) ima netrivialna rješenja ako i samo ako je  $\det \mathbf{A} = 0$ .

**Definicija 1.2.3.** Neka je  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Ako za bilo koje dvije točke  $x_1, x_2 \in S$  vrijedi da je

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S \quad , \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad ,$$

tada kažemo da je  $S$  konveksni skup.

**Definicija 1.2.4.** Neka je  $S \subset \mathbb{R}^n$  neprazni konveksni skup te neka je  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Ako za bilo koje dvije točke  $x_1, x_2 \in S$  i za svaki  $\lambda \in [0, 1]$  vrijedi da je

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

tada za  $f$  kažemo da je konveksna funkcija na  $S$ .

**Teorem 1.2.5.** Neka je  $I$  otvoren interval,  $U \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$  te neka je  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  konstantna matrica te neka ima  $n$  različitih svojstvenih vrijednosti. Tada je svaka komponenta rješenja  $U$  sustava  $U' = \mathbf{A}U$  linearna kombinacija funkcija

$$e^{\lambda_i x} \quad i \quad e^{\alpha_i x} \cos(\beta_i x) \quad , \quad e^{\alpha_i x} \sin(\beta_i x) \quad ,$$

pri čemu je  $\lambda_i$  realna svojstvena vrijednost matrice  $\mathbf{A}$ , a  $\alpha_i + i\beta_i$  kompleksna svojstvena vrijednost.

**Teorem 1.2.6.** *Neka je  $I \subset \mathbb{R}$  interval, te neka su  $\mathbf{A} : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  i  $G : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  neprekidne funkcije. Tada za svaki  $t_0 \in I$  i za svaki  $U^0 \in \mathbb{R}^n$  postoji jedinstveno rješenje  $U \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$  Cauchyjeve zadaće*

$$\begin{aligned} U' + \mathbf{A}(t)U &= G(t), \quad t \in I, \\ U(t_0) &= U^0. \end{aligned}$$

**Teorem 1.2.7.** *Neka je  $y'' = f(x, y(x), y'(x))$  diferencijalna jednadžba drugog reda. Ako je  $f$  neprekidna funkcija na nekoj okolini točke  $M(x_0, y_0, y'_0)$ , tada postoji pozitivan broj  $h$  takav da na intervalu  $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$  postoji barem jedno rješenje  $y$  dane jednadžbe, koje zadovoljava početne uvjete  $y(x_0) = y_0$  i  $y'(x_0) = y'_0$ . Nadalje, ako funkcija  $f$  ima ograničene parcijalne derivacije po posljednje dvije varijable na okolini točke  $M(x_0, y_0, y'_0)$ , onda je takvo rješenje jedinstveno.*

**Napomena 1.2.8.** *Standardan način dokazivanja prethodnog teorema je svodenjem na sustav prvog reda. Naime, za  $z = y'$  i  $U = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$  slijedi*

$$U'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(x) \\ f(x, y(x), z(x)) \end{pmatrix}.$$

Sada tvrdnju prethodnog teorema dobivamo primjenom Peanovog i Picardovog teorema za sustave.

**Definicija 1.2.9.** *Neka je funkcija  $f$  definirana na intervalu  $\langle -L, L \rangle$ , a izvan tog intervala smatramo da je funkcija periodička s periodom  $2L$ , tj. da je  $f(x + 2L) = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Fourierov red funkcije  $f$  je razvoj*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

pri čemu su Fourierovi koeficijenti  $a_0, a_1, \dots$  i  $b_1, b_2, \dots$  dani s

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Navodimo idući rezultat preuzet iz [1].

**Teorem 1.2.10.** *Ako je funkcija  $f$   $2L$ -periodična, po dijelovima klase  $C^1$  i  $f(-L) = f(L)$ , njen Fourierov red konvergira apsolutno i uniformno te mu je suma jednaka  $f$ .*

**Napomena 1.2.11.** Ako je funkcija  $f$  zadana samo na intervalu  $\langle 0, L \rangle$ , onda je možemo po neparnosti proširiti do funkcije na intervalu  $\langle -L, L \rangle$ , a dalje je proširujemo po periodičnosti. Također, za neparnu funkciju  $f$  vrijedi  $a_n = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Definicija 1.2.12.** Definiramo Fourierovu transformaciju funkcije  $f \in L^1(\mathbb{R})$  s

$$\hat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t) dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Napomena 1.2.13.** Fourierova transformacija je definirana za  $L^1$  funkcije, međutim u ovom radu ćemo je koristiti samo za glatke funkcije.

Također, Fourierova transformacija ima mnogo korisnih svojstava, a jedno od značajnijih je

$$\widehat{\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right)} = (i\omega)^n \hat{f},$$

čime diferencijalnu jednadžbu po varijabli  $t$  prebacujemo u algebarsku jednadžbu s parametrom  $\omega$ .

## Poglavlje 2

# Matematički modeli klavira

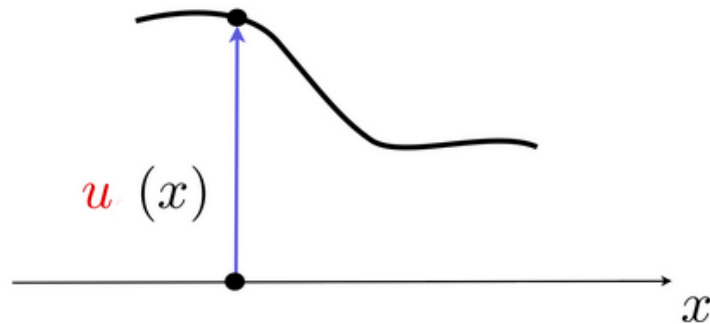
Gradnja svakog klavira počinje s unaprijed zadanim mjerama za klavirske žice, tj. zadana je duljina žica, njihovi promjeri te kutovi i razmaci između žica. Te mjere značajno variraju ovisno o klaviru.

U ovom poglavlju opisat ćemo 4 različita modela za klavirsku žicu. Klavirska žica je tro-dimenzionalna, međutim jedna dimenzija joj je znatno veća od preostale dvije. Modeli koje ćemo predstaviti će iskoristiti tu karakteristiku žice te će prostorna varijabla  $x$  koja označava položaj žice biti jednodimenzionalna. Također, to znači da poprečni presjek neće biti geometrijski egzaktni već će biti parametar zadan ovisno o modelu. Prvi model je jednodimenzionalna valna jednačina. U ovom modelu ćemo pretpostaviti da je žica infinitezimalno tanka i idealno fleksibilna, tj. da je bez krutosti. Time ćemo opisati transverzalno gibanje žice te ćemo dobiti savršeno harmoničan spektar. U stvarnosti spektar nije harmoničan već se pojavljuju tzv. parcijali. Zbog toga ćemo u idućem (Euler-Bernoullijevom) modelu uzeti u obzir i debljinu žice te će se kao posljedica pojaviti krutost žice. Iako ćemo time dobiti realističniji opis spektra i njegove neharmoničnosti, ipak će ovaj model dati neograničenu brzinu širenja vala kod visokih frekvencija. Treći model će biti Timošenkov model klavirske žice i u njemu će brzina širenja vala biti ograničena. To je linearni sustav s dvije nepoznanice: transverzalno titranje žice i kutna deformacija poprečnog presjeka. Zadnji model koji ćemo opisati će biti tzv. geometrijski egzaktni model klavirske žice. U ovom modelu će osim transverzalnog titranja žice biti uračunato i longitudinalno. Time ćemo dobiti nelinearan sustav. Za cjelokupni model klavira treba uzeti u obzir i ostale bitne dijelove poput batića, mosta i rezonantne ploče, međutim u ovom radu ćemo obraditi samo neke modele za žicu te se više o tome može pročitati u [2].



## 2.1 Valna jednažba

Pretpostavimo da su klavirske žice idealno fleksibilne te infinitezimalno male, tj. da imaju zanemarivu površinu poprečnog presjeka. Pomoću valne jednažbe napraviti ćemo model transversalnog pomaka klavirske žice, tj. pomaka u smjeru zadanim udarcem batića po žici. Uočimo da je žica pričvršćena na oba kraja pa ćemo uz valnu jednažbu imati Dirichletove rubne uvjete. Neka je  $u(x, t)$  transversalni pomak žice duljine  $L$  (u metrima), pri čemu je  $t \in \mathbb{R}^+$  vremenska varijabla i  $x \in [0, L]$  točka na žici.



Slika 2.1: Prikaz transversalnog pomaka  $u(x)$ .

Dakle, dobivamo

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - T_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) &= S(x, t) \quad , \quad \forall x \in [0, L] \quad , \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad , \\ u(x, 0) &= 0 \quad , \\ \partial_t u(x, 0) &= 0 \quad , \\ u(0, t) &= 0 \quad , \\ u(L, t) &= 0 \quad , \end{aligned} \tag{2.1}$$

pri čemu je  $\rho$  gustoća žice u  $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ,  $A = \frac{\pi d^2}{4}$  poprečni presjek žice promjera  $d$ ,  $T_0$  tenzija žice u mirovanju i  $S(x, t)$  sila koje djeluju na žicu.

Ova jednažba predstavlja širenje vala u jednoj dimenziji brzinom  $c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}$ . Sada dajemo osnovni teorem o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja za sustav (2.1).

**Teorem 2.1.1** (Egzistencija i jedinstvenost rješenja). *Neka je  $S \in C^1([0, L] \times \mathbb{R})$ . Tada postoji jedinstveno rješenje sustava (2.1)  $u \in C^2([0, L] \times \mathbb{R})$ .*

*Dokaz.* Dokažimo najprije jedinstvenost rješenja. Pretpostavimo da su  $u_1$  i  $u_2$  dva različita rješenja sustava (2.1). Definirajmo  $u := u_2 - u_1$  te uočimo da funkcija  $u$  zadovoljava sljedeći sustav

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - T_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) &= 0 \quad , \quad \forall x \in [0, L] \quad , \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad , \\ u(x, 0) &= 0 \quad , \\ \partial_t u(x, 0) &= 0 \quad , \\ u(0, t) &= 0 \quad , \\ u(L, t) &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Iz čega, koristeći energetske metode ili promatranjem jednadžbe po karakteristikama  $x \pm \frac{T_0}{\rho A} t$  (vidi [1]), dobivamo  $u \equiv 0$ . Dakle,  $u_1 = u_2$ , tj. ako rješenje postoji ono je jedinstveno.

Sada pomoću Fourierovih redova pokazujemo egzistenciju rješenja. Pogledajmo najprije pripadni homogeni sustav pridružen sustavu (2.1):

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - T_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) &= 0 \quad , \quad \forall x \in [0, L] \quad , \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad , \quad (2.2) \\ u(0, t) &= 0 \quad , \\ u(L, t) &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Uočimo da se uz oznaku  $c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}$ , jednadžba sustava (2.2) može zapisati kao

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = 0 \quad . \quad (2.3)$$

Sada rješenje tražimo u separiranom obliku

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Uvrštavanjem u jednadžbu slijedi

$$X(x)T''(t) - c^2 X''(x)T(t) = 0 \quad ,$$

pa dijeljenjem s  $X(x)T(t)$  dobivamo

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad ,$$

za neku konstantu  $\lambda \in \mathbb{R}$ , jer je lijeva strana neovisna o  $x$ , a desna je neovisna o  $t$ . Dakle, dobili smo dvije obične diferencijalne jednačbe

$$X''(x) + \frac{\lambda}{c^2}X(x) = 0 \quad \text{i} \quad T''(t) + \lambda T(t) = 0.$$

Neka je  $x_r \in \{0, L\}$ , tada vrijedi

$$0 = u(x_r, t) = X(x_r)T(t) \quad , \quad \forall t \in [0, \infty) ,$$

iz čega slijedi  $X(0) = X(L) = 0$ .

Dakle, dobivamo zadaću

$$\begin{aligned} X''(x) + \frac{\lambda}{c^2}X(x) &= 0 \quad , \\ X(0) = X(L) &= 0 \quad , \end{aligned} \tag{2.4}$$

koja ima netrivialno rješenje samo za  $\lambda > 0$ , te je dano s

$$X(x) = A \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x\right) + B \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x\right) ,$$

za neke konstante  $A$  i  $B$ . Iskoristimo li sada uvjete  $X(0) = X(L) = 0$ , dobivamo  $B = 0$  i  $\lambda = (c\frac{k\pi}{L})^2$ , za  $k \in \mathbb{N}$ . Konačno, rješenje zadaće (2.4) za  $\lambda_k = (c\frac{k\pi}{L})^2$  je dano s

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad , \quad k \in \mathbb{N} ,$$

dok za sve preostale vrijednosti  $\lambda$  dobivamo trivijalno rješenje, pa nas ti slučajevi ne zanimaju.

Analogno, dobivamo da je rješenje jednačbe  $T''(t) + (c\frac{k\pi}{L})^2T(t) = 0$  dano s

$$T_k(t) = a_k \cos\left(c\frac{k\pi}{L}t\right) + b_k \sin\left(c\frac{k\pi}{L}t\right) \quad , \quad a_k, b_k \in \mathbb{R} .$$

Primijetimo da je period funkcije  $T_k$  dan s  $\frac{2\pi}{c\frac{k\pi}{L}}$ , iz čega slijedi da je frekvencija jednaka  $\frac{c\frac{k\pi}{L}}{2\pi} = \frac{ck}{2L} = \frac{k}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}$ . Skup svih frekvencija ćemo zvati spektrom (vidi idući teorem). Dakle, uvrštavanjem u pretpostavljeni oblik te korištenjem načela superpozicije dobivamo rješenje homogenog sustava

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos\left(c\frac{k\pi}{L}t\right) + b_k \sin\left(c\frac{k\pi}{L}t\right) \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) .$$

Sada rješenje sustava (2.1) tražimo u obliku

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right). \quad (2.5)$$

Uvrštavanjem u jednadžbu sustava (2.1) dobivamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_k''(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + \sum_{k=1}^{\infty} c^2 \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 G_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = S(x, t).$$

Proširimo li funkciju  $S(x, t)$  po neparnosti do intervala  $[-L, L]$  možemo je razviti u (sinusni) Fourierov red

$$S(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right),$$

pri čemu je

$$A_k(t) = \frac{2}{L} \int_0^L S(x, t) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx.$$

Iz toga slijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( G_k''(t) + c^2 \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 G_k(t) \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right),$$

što nas dovodi do obične diferencijalne jednadžbe za  $G_k(t)$ :

$$G_k''(t) + c^2 \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 G_k(t) = A_k(t), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Uočimo da iz početnih uvjeta i Fourierove transformacije slijedi

$$\begin{aligned} G_k(0) &= \frac{2}{L} \int_0^L u(x, 0) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = 0, \\ G_k'(0) &= \frac{2}{L} \int_0^L \partial_t u(x, 0) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = 0. \end{aligned}$$

Time smo dobili Cauchyjevu zadaću

$$\begin{aligned} G_k''(t) + c^2 \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 G_k(t) &= A_k(t), \\ G_k(0) &= 0, \\ G_k'(0) &= 0, \end{aligned}$$

koja, po Teoremu 1.2.6 (nakon svodenja na sustav prvog reda), ima jedinstveno rješenje. Dakle, rješenje početnog sustava (2.1) je dano s (2.5).

Preostalo je još pokazati da je  $u$  zaista dobro definiran s (2.5), odnosno da red funkcija konvergira, u što nećemo ulaziti u ovoj analizi (vidi [1]).  $\square$

Idući teorem nam govori kako ovako postavljen model klavirske žice daje harmoničan spektar, pri čemu je spektar definiran kao skup  $\left\{ \frac{k}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}} : k \in \mathbb{N} \right\}$ . To je i najveća mana ovog modela jer je poznato da je neharmoničnost spektra upravo ono što tonovima daje topao i bogat zvuk.

**Teorem 2.1.2** (Svojstvene frekvencije valne jednačbe žice). *Svojstvene frekvencije jednačbe (2.1) su cjelobrojni višekratnici osnovne frekvencije:*

$$f_n = n f_0, \quad f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}. \quad (2.6)$$

*U tom slučaju kažemo da je spektar harmoničan.*

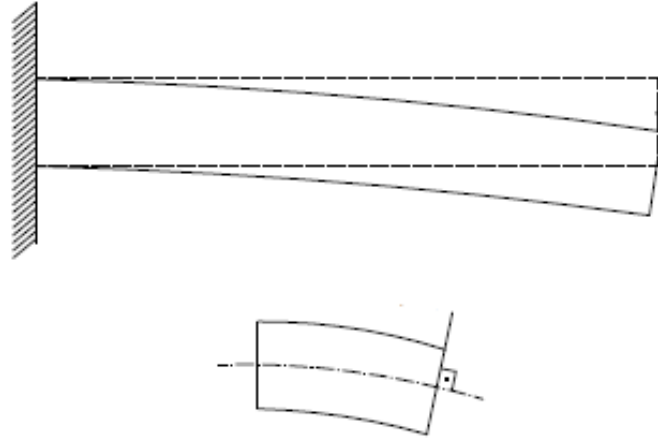
*Dokaz.* Pokazano u dokazu Teorema 2.1.1, a također slijedi i kao poseban slučaj Teorema 2.2.1 za  $E = 0$ . □

## 2.2 Euler-Bernoullijev model klavirske žice

U Euler-Bernoullijevom modelu promatramo i poprečni presjek klavirske žice. Zbog toga žica više nije idealno fleksibilna već ima svoj koeficijent krutosti, a kao posljedica krutosti javlja se sila koja žicu vraća u stanje mirovanja nakon što smo je udarili batićem. Također u nastavku ćemo vidjeti da, kao posljedicu krutosti, u ovom modelu dobivamo spektralnu neharmoničnost. Krutost žice u Euler-Bernoullijevom modelu je dobivena dodavanjem derivacije četvrtog reda transversalnog pomaka  $u$  po prostornoj varijabli, te se radi toga pojavljuju dodatni rubni uvjeti, tj. imamo uklještenne rubne uvjete (eng. *simply supported*).

Neka je  $I$  moment inercije u  $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ . Klavirska žica ima kružni poprečni presjek pa vrijedi  $I = \frac{\pi d^4}{64}$ , pri čemu je  $d$  promjer žice. Neka je  $E$  Youngov modul elastičnosti. Dakle, imamo

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, t) - T_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) &= S(x, t) \quad , \quad (x, t) \in [0, L] \times \mathbb{R}^+ \quad , \\ u(x, 0) &= 0 \quad , \\ \partial_t u(x, 0) &= 0 \quad , \\ u(0, t) = \partial_x^2 u(0, t) &= 0 \quad , \\ u(L, t) = \partial_x^2 u(L, t) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.7)$$



Slika 2.2: Prikaz deformiranog oblika žice u Euler-Bernoullijevom modelu.

Primijetimo da za  $E = 0$ , sustav (2.7) prelazi u sustav (2.1) s dodatnim rubnim uvjetima. Pokazali smo da sustav (2.1) ima jedinstveno rješenje što znači da uz dodatne rubne uvjete ili nema rješenje ili i dalje ima jedinstveno rješenje, te se lako pokaže kako je prvi slučaj nemoguć, odnosno za  $E = 0$  imamo jedinstveno rješenje sustava (2.7).

U nastavku rada nećemo ispitivati postojanje i jedinstvenost rješenja sustava (2.7), već nas zanimaju samo svojstvene frekvencije o kojima govori idući teorem.

**Teorem 2.2.1** (Svojstvene frekvencije Euler-Bernoullijeve jednadžbe). *Svojstvene frekvencije jednadžbe Euler-Bernoullijevog sustava (2.7) su*

$$f_n = n f_0 \sqrt{1 + B n^2}, \quad f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}, \quad \text{pri čemu je } B = \frac{\pi^2 EI}{T_0 L^2}. \quad (2.8)$$

*Dokaz.* Napravimo Fourierovu transformaciju po vremenskoj varijabli  $t$ . Neka je  $\omega$  Fourierova vremenska varijabla. Dobivamo

$$-\omega^2 \rho A \hat{u}(x, \omega) + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} \hat{u}(x, \omega) - T_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{u}(x, \omega) = \hat{S}(x, \omega). \quad (2.9)$$

Sada ćemo ovu diferencijalnu jednadžbu svesti na diferencijalnu jednadžbu prvog reda. Neka su vektori  $Y$  i  $F$  te matrica  $\mathbf{A}$  dani s

$$Y = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \partial_x \hat{u} \\ \partial_x^2 \hat{u} \\ \partial_x^3 \hat{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{\rho A \omega^2}{EI} & 0 & -\frac{T_0}{EI} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\hat{S}(x, \omega)}{EI} \end{pmatrix}.$$

Sada je jednađba (2.9) ekvivalentna s

$$Y' + \mathbf{A}Y = F,$$

a rješenja su, prema Teoremu 1.2.5, linearna kombinacija eksponencijalnih funkcija i ovise o svojstvenim vrijednostima matrice  $\mathbf{A}$ .

Dakle, izračunajmo najprije determinantu matrice  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_4$ :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_4) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \\ -\frac{\rho A \omega^2}{EI} & 0 & -\frac{T_0}{EI} & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -\frac{T_0}{EI} & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ -\frac{\rho A \omega^2}{EI} & -\frac{T_0}{EI} & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \left( -\lambda^3 + \frac{\lambda T_0}{EI} \right) + \left( -\frac{\rho A \omega^2}{EI} \right) \\ &= \lambda^4 - \frac{T_0}{EI} \lambda^2 - \frac{\rho A \omega^2}{EI}, \end{aligned}$$

pri čemu smo u drugoj jednakosti koristili Laplaceov razvoj po prvom retku.

Sada su svojstvene vrijednosti matrice  $\mathbf{A}$  rješenja jednađbe  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_4) = 0$ , tj. jednađbe

$$EI\lambda^4 - T_0\lambda^2 - \rho A\omega^2 = 0.$$

Za fiksni  $\omega$ , ova jednađba ima 4 rješenja:

$$\{i\lambda^-, -i\lambda^-, \lambda^+, -\lambda^+\} \quad , \quad \text{za} \quad \lambda^- = \sqrt{|r^-|}, \lambda^+ = \sqrt{r^+},$$

pri čemu su  $r^+$  i  $r^-$  nultočke parabole  $EIl^2 - T_0l - \rho A\omega^2$ , tj.

$$r^\pm = \frac{T_0 \pm \sqrt{T_0^2 + 4\rho AEI\omega^2}}{2EI}.$$

Dakle, svako rješenje je linearna kombinacija sinusa, kosinusa, hiperboličkog sinusa i hiperboličkog kosinusa:

postoji  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  t.d.

$$\hat{u}(x, \omega) = a \cosh(\lambda^+ x) + b \sinh(\lambda^+ x) + c \cos(\lambda^- x) + d \sin(\lambda^- x).$$

Iskoristimo li rubne uvjete u točki  $x = 0$ , dobivamo  $a = c = 0$ . Analogno, rubni uvjeti u točki  $x = L$  daju

$$\begin{aligned}(r^+ + r^-)b \sinh(\lambda^+ L) &= 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \\ (r^+ + r^-)d \sin(\lambda^- L) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ t.d. } \lambda^- L = n\pi\end{aligned}$$

Znači, postoji  $n \in \mathbb{N}^*$  takav da  $\omega = \omega_n$ , pri čemu je

$$\begin{aligned}\sqrt{|r^-|}L = n\pi &\Rightarrow -r^- = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \\ \Rightarrow T_0 - \sqrt{T_0^2 + 4\rho AEI\omega_n^2} &= -2n^2\pi^2 \frac{EI}{L^2} \\ \Rightarrow T_0^2 + 4T_0n^2\pi^2 \frac{EI}{L^2} + 4n^4\pi^4 \frac{E^2I^2}{L^4} &= T_0^2 + 4\rho AEI\omega_n^2 \\ \Rightarrow \frac{T_0n^2\pi^2}{L^2} + n^4\pi^4 \frac{EI}{L^4} &= \rho A\omega_n^2 \\ \Rightarrow \omega_n^2 = n^2\pi^2 \frac{T_0}{\rho AL^2} \left(1 + \frac{n^2\pi^2 EI}{T_0L^2}\right)\end{aligned}$$

Konačno, korjenovanjem te dijeljenjem s  $2\pi$  dobivamo frekvencije žice u Euler-Bernoullijevom sustavu

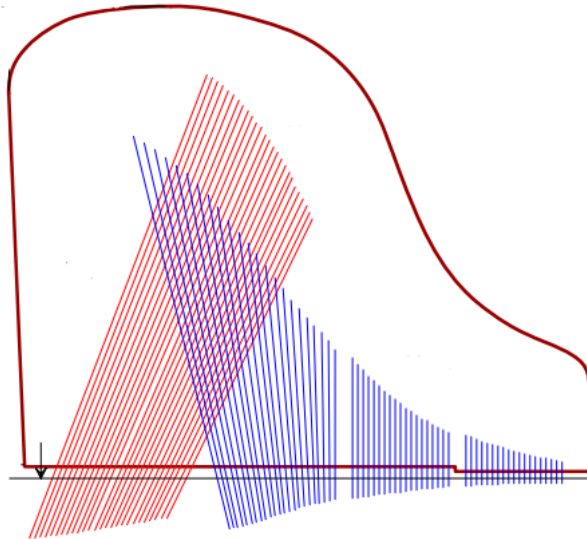
$$f_n = nf_0 \sqrt{1 + Bn^2} \quad , \text{ pri čemu } \quad f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}} \quad \text{ i } \quad B = \frac{\pi^2 EI}{T_0 L^2} .$$

□

Iz ovog teorema jasno se vidi da svojstvene frekvencije Euler-Bernoullijeve žice nisu harmonične već se odmiču od spektralnih harmonika preko koeficijenta neharmoničnosti  $B$  te ih zato zovemo parcijali.

Nadalje, kako A. Stulov navodi u [4], iz tehničkih razloga i zbog preporuka iskusnih graditelja klavira napetost žice  $T_0$  mora biti konstantna ili barem približno konstantna duž diskanta, tj. u smjeru viših tonova, vidi sliku (2.3). Uočimo da u smjeru diskanta žice postaju sve kraće, odnosno koeficijent  $L$  postaje sve manji te koeficijent neharmoničnosti  $B$  raste u smjeru diskanta pa je neharmoničnost značajnija kod viših tonova nego kod dubljih. Međutim, ljudsko uho neharmoničnost čuje više kod dubljih tonova. To je zato što kod dubokih tonova čujemo i do 300 parcijala dok kod viših tonova već nakon prvih nekoliko parcijala frekvencije pređu prag od 20kHz preko kojeg ljudsko uho više ne može čuti.





Slika 2.3: Prikaz položaja klavirskih žica. Crvenom bojom su označene bas žice, a plavom žice diskanta te je strelicom označena linija koja siječe žice na točki udara batića. Preuzeto iz [4].

Razvijmo funkciju  $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$  u Taylorov red oko 0:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \left(x\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_{x=0} + \left(\sqrt{1+x^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\Big|_{x=0} \cdot x \\
 &+ \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{2x\sqrt{1+x^2} - x^2\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\right)\Big|_{x=0} \cdot x^2 \\
 &+ \frac{1}{6}\left(3(1+x^2)^{-1/2} - 6x^2(1+x^2)^{-3/2} - x^4(1+x^2)^{-5/2}\right)\Big|_{x=0} \cdot x^3 \\
 &+ \frac{1}{24}\left(-15x(1+x^2)^{-3/2} + 14x^3(1+x^2)^{-5/2} + 5x^5(1+x^2)^{-7/2}\right)\Big|_{x=0} \cdot x^4 \\
 &+ O(x^5) \\
 &= x + \frac{1}{2}x^3 + O(x^5).
 \end{aligned}$$

Uočimo da možemo pisati  $f_n = \frac{f_0}{\sqrt{B}}(\sqrt{B}n)\sqrt{1+(\sqrt{B}n)^2}$  pa uzimanjem  $x = \sqrt{B}n$  pomoću

Taylorovog razvoja dobivamo aproksimacijske formule za parcijale takve da  $Bn^2 \ll 1$ :

$$\begin{aligned} f_n^{EB} &\approx \frac{f_0}{\sqrt{B}}(\sqrt{Bn}) + \frac{1}{2} \frac{f_0}{\sqrt{B}}(\sqrt{Bn})^3 \\ &= nf_0 + \epsilon^{EB} n^3, \end{aligned} \quad (2.10)$$

gdje je  $f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}$  i  $\epsilon^{EB} = \frac{1}{2} f_0 B = \frac{\pi^2}{4L^3} \sqrt{\frac{T_0 EI}{\rho A T_0}}$ .

Dok za dovoljno velike  $n$  koristimo da je  $\sqrt{1 + Bn^2} \approx \sqrt{Bn^2}$  pa vrijedi

$$f_n \approx nf_0 \sqrt{Bn^2} = n^2 f_0 \sqrt{B}.$$

Dakle, za parcijale kada  $n \rightarrow \infty$  imamo formule

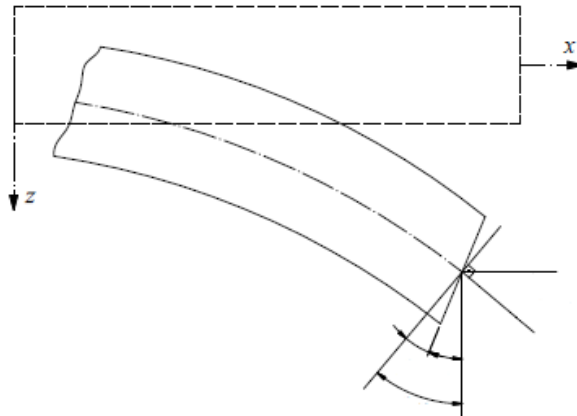
$$f_n^{EB} \sim n^2 f_\infty^{EB}, \text{ gdje je } f_\infty^{EB} = \sqrt{B} f_0 = \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}. \quad (2.11)$$

Uočimo da je disperzija, tj. ovisnost brzine o broju valova, željena posljedica krutosti žice te da se niske frekvencije dane sa (2.10) ponašaju onako kako očekujemo (linearno po  $n$ ). Međutim, visoke frekvencije dane sa (2.11) nisu u skladu s fizikalnim opažanjima već smo dobili da se u neograničenoj prostornoj domeni brzina širenja beskonačno povećava s brojem valova (frekvencije su reda  $n^2$ ). To nas motivira da pokušamo poboljšati ovaj model.

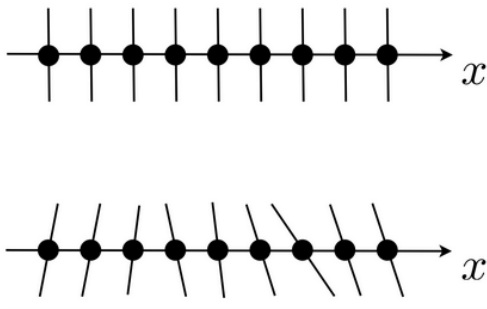
### 2.3 Timošenkov model klavirske žice

U prvoj polovici 20. stoljeća Stjepan Timošenko je napravio je proširenje Euler-Bernoullijeve teorije tako da je uveo utjecaj smičnog naprezanja pri poprečnom savijanju te rotacijsku inerciju. U Timošenkovoj teoriji poprečni presjeci, koji su prije deformiranja bili okomiti na uzdužnu os, rotiraju se oko točaka na neutralnoj liniji i ostaju ravni, ali nakon deformiranja više nisu okomiti na elastičnu liniju, upravo zbog toga što je u ovu teoriju uključena kutna deformacija koja nastaje zbog djelovanja smičnog naprezanja pri poprečnom savijanju.

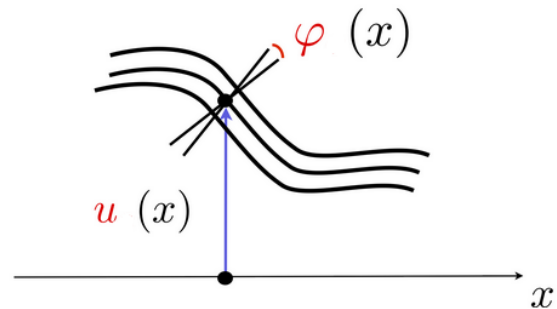
Dakle, uvodimo novu nepoznanicu  $\varphi$  koja predstavlja kutnu deformaciju. Također se uz već poznati moment inercije  $I$  i Youngov modul  $E$  javljaju i novi koeficijenti: smični modul  $G$  i parametar  $\kappa$ . Parametar  $\kappa$  je efektivni parametar uveden kako bi kompenzirao aproksimaciju smicanja na sredini poprečnog presjeka žice te su mu vrijednosti između 0 i 1. Uočimo da i dalje imamo uklještene (eng. *simply supported*) rubne uvjete.



Slika 2.4: Prikaz deformiranog oblika žice u Timošenkovom modelu.



Slika 2.5: Rotacije unutar ravnog poprečnog presjeka. Preuzeto iz [2].



Slika 2.6: Prikaz nepoznanica  $u(x)$  i  $\varphi(x)$  u Timošenkovom modelu.

Dakle, dobivamo sljedeći sustav

$$\begin{aligned}
 \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - (AG\kappa + T_0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + AG\kappa \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, t) &= S(x, t) \quad , \\
 \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(x, t) - EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x, t) - AG\kappa \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + AG\kappa \varphi(x, t) &= 0 \quad , \\
 u(x, 0) = \partial_t u(x, 0) &= 0 \quad , \\
 u(0, t) = u(L, t) &= 0 \quad , \\
 \varphi(x, 0) = \partial_t \varphi(x, 0) &= 0 \quad , \\
 \partial_x \varphi(0, t) = \partial_x \varphi(L, t) &= 0 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Sada ćemo pokazati da su rubni uvjeti u Timošenkovom modelu u skladu s rubnim uvjetima kod Euler-Bernoullijevog klavirske žice.

Neka je  $x_r \in \{0, L\}$ . Uočimo da je iz rubnih uvjeta  $u(x_r, t) = 0$  konstantna funkcija po varijabli  $t$  pa slijedi  $\partial_t u(x_r, t) = 0$ . Uvrstimo li  $x_r$  u prvu jednadžbu sustava (2.12) iz rubnih uvjeta slijedi

$$\rho A \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_r, t)}_{=0} - (AG\kappa + T_0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_r, t) + AG \kappa \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x_r, t)}_{=0} = S(x_r, t) .$$

Dakle, ako sile ne djeluju na žicu ili djeluju na nju daleko od njenih rubova, tj.  $S(x_r) = 0$ , dobivamo

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_r, t) = 0 , \quad (2.13)$$

što su rubni uvjeti sustava (2.7).

Pretpostavimo da je  $G = 0$  ili  $\kappa = 0$ . Tada sustav (2.12) prelazi u sljedeća dva nezavisna sustava:

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - T_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) &= S(x, t) \\ u(x, 0) = \partial_t u(x, 0) &= 0 \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0 , \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(x, t) - EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x, t) &= 0 \\ \varphi(x, 0) = \partial_t \varphi(x, 0) &= 0 \\ \partial_x \varphi(0, t) = \partial_x \varphi(L, t) &= 0 . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Uočimo da je rješenje sustava (2.15)  $\varphi \equiv 0$ , pa dobivamo da je Timošenkov model (2.12) poopćenje modela (2.1). S druge strane, iz druge jednadžbe sustava (2.12) uz odgovarajuće pretpostavke (npr.  $AG\kappa \gg 1$ ) se može dobiti

$$AG\kappa(\partial_x \varphi - \partial_{xx} u) = EI \partial_{xxxx} u ,$$

pa uvrštavanjem u prvu jednadžbu sustava (2.12) upravo dobivamo Euler-Bernoullijevu jednadžnu. Dakle, Timošenkov model (2.12) je poopćenje Euler-Bernoullijevog modela (2.7).

Idući teorem govori o svojstvenim frekvencijama jednadžbi Timošenkovog modela, te o kutnim frekvencijama koje se javljaju kao posljedica kutne deformacije te izražavaju brzinu promjene faznog kuta izraženog u radianima.

**Teorem 2.3.1** (Svojstvene frekvencije Timošenkovog modela). *Pretpostavimo da je  $EA > T_0$  i neka su*

$$\alpha = \frac{\rho A}{T_0 + AG\kappa} \quad , \quad \beta = \frac{\rho I}{EI} \quad , \quad \gamma = \frac{AG\kappa}{EI} \quad i \quad \delta = \frac{AG\kappa}{T_0 + AG\kappa} . \quad (2.16)$$

*Tada su kutne frekvencije i svojstvene frekvencije pridružene Timošenkovom sustavu redom dane s*

$$\omega_n^\pm = \sqrt{\Omega_n^\pm} \quad , \quad f_n^\pm = \frac{\omega_n^\pm}{2\pi} , \quad (2.17)$$

*pri čemu*

$$\Omega_n^- = \frac{\frac{n^2\pi^2}{L^2}(\alpha + \beta) + \alpha\gamma - \sqrt{\Delta_n}}{2\alpha\beta} < \Omega_n^+ = \frac{\frac{n^2\pi^2}{L^2}(\alpha + \beta) + \alpha\gamma + \sqrt{\Delta_n}}{2\alpha\beta} , \quad (2.18)$$

$$\Delta_n = \left( \frac{n^2\pi^2}{L^2}(\alpha + \beta) + \alpha\gamma \right)^2 - 4\alpha\beta \left( \gamma(1 - \delta) \frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{n^4\pi^4}{L^4} \right) . \quad (2.19)$$

*Dokaz.* Napraviti ćemo Fourierovu transformaciju po vremenskoj varijabli. Označimo s  $\omega$  Fourierovu vremensku varijablu. Sada imamo

$$\begin{aligned} -\rho A \omega^2 \hat{u}(x, \omega) - (AG\kappa + T_0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{u}(x, \omega) + AG\kappa \frac{\partial}{\partial x} \hat{\varphi}(x, \omega) &= \hat{S}(x, \omega) \\ -\rho I \omega^2 \hat{\varphi}(x, \omega) - EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{\varphi}(x, \omega) - AG\kappa \frac{\partial}{\partial x} \hat{u}(x, \omega) + AG\kappa \hat{\varphi}(x, \omega) &= 0 \end{aligned}$$

Označimo matrice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{pmatrix} , \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} T_0 + AG\kappa & 0 \\ 0 & EI \end{pmatrix} , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -AG\kappa \\ AG\kappa & 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -AG\kappa \end{pmatrix}$$

i vektore

$$X = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} , \quad F = \begin{pmatrix} \hat{S} \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

koji ovise o varijabli  $x$  te o parametru  $\omega$ .

Sada sustav možemo zapisati kao

$$-\omega^2 \mathbf{M}X = \mathbf{A}X'' + \mathbf{B}X' + \mathbf{C}X + F ,$$

pri čemu je  $X'$  derivacija po varijabli  $x$ .

Uočimo da se ovaj sustav može svesti na sustav prvog reda. Neka je  $Y = \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}$ . Tada gornji sustav, odnosno početni sustav (2.12) možemo ekvivalentno zapisati kao sljedeći sustav s 4 nepoznanice

$$Y' + \mathbf{D}Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{A}^{-1}F \end{pmatrix}, \quad \text{pri čemu } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{C} + \omega^2\mathbf{M}) & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Primijetimo da je sustav (2.20) dobro definiran jer je matrica  $\mathbf{A}$  regularna osim kada je  $EI = 0$ . Međutim, kad bi bilo  $EI = 0$  onda bi se model (2.12) sveo na prvi model valne jednadžbe drugog reda (2.1).

Kako bismo riješili sustav (2.20), najprije moramo naći svojstvene vrijednosti matrice  $\mathbf{D}$  (prema Teoremu 1.2.5). Računamo matrice  $\mathbf{A}^{-1}$  i  $\mathbf{C} + \omega^2\mathbf{M}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{T_0 + AG\kappa} & 0 \\ 0 & \frac{1}{EI} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} + \omega^2\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \rho A \omega^2 & 0 \\ 0 & \rho I \omega^2 - AG\kappa \end{pmatrix},$$

pa dobivamo

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{C} + \omega^2\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} \frac{\rho A \omega^2}{T_0 + AG\kappa} & 0 \\ 0 & \frac{\rho I \omega^2 - AG\kappa}{EI} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-AG\kappa}{T_0 + AG\kappa} \\ \frac{AG\kappa}{EI} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dakle, matricu  $\mathbf{D}$  možemo zapisati kao

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ a(\omega) & 0 & 0 & d(\omega) \\ 0 & b(\omega) & c(\omega) & 0 \end{pmatrix},$$

pri čemu su

$$a(\omega) = \underbrace{\frac{\rho A}{T_0 + AG\kappa}}_{\alpha} \omega^2, \quad b(\omega) = \underbrace{\frac{\rho I}{EI}}_{\beta} \omega^2 - \underbrace{\frac{AG\kappa}{EI}}_{\gamma},$$

$$c(\omega) = \underbrace{\frac{AG\kappa}{EI}}_{\gamma}, \quad d(\omega) = -\underbrace{\frac{AG\kappa}{T_0 + AG\kappa}}_{\delta},$$

gdje su  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  zadani s (2.16).

Izračunajmo determinantu matrice  $\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}_4$  pomoću Laplaceovog razvoja po prvom retku:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}_4) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -1 \\ a & 0 & -\lambda & d \\ 0 & b & c & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & d \\ b & c & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & -1 \\ a & 0 & d \\ 0 & b & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(-\lambda^3 - b\lambda + cd\lambda) - (-ab - a\lambda^2) \\ &= \lambda^4 + \lambda^2(a + b - cd) + ab. \end{aligned}$$

Znamo da su svojstvene vrijednosti matrice  $\mathbf{D}$  kompleksni brojevi  $\lambda$  takvi da  $\det(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}_4) = 0$ , pa tražimo  $\lambda$  takav da vrijedi

$$\lambda^4 + \lambda^2(a + b - cd) + ab = 0.$$

Sada dobivamo jednadžbu 4. stupnja koja povezuje svojstvene vrijednosti  $\lambda$  s Fourierovom vremenskom varijablom  $\omega$

$$\lambda^4 + ((\alpha + \beta)\omega^2 - \gamma(1 - \delta))\lambda^2 + \alpha\beta\omega^4 - \alpha\gamma\omega^2 = 0.$$

Kako se pojavljuju samo parne potencije, možemo staviti  $\Lambda = \lambda^2$  i  $\Omega = \omega^2$  pa dobivamo jednadžbu drugog reda po  $\Lambda$

$$\Lambda^2 + ((\alpha + \beta)\Omega - \gamma(1 - \delta))\Lambda + \alpha\beta\Omega^2 - \alpha\gamma\Omega = 0, \quad (2.21)$$

pri čemu je  $\Omega$  parametar koji zadovoljava  $\Omega = \omega^2 \geq 0$ . Diskriminanta je dana s

$$\begin{aligned} \Delta(\Omega) &= ((\alpha + \beta)\Omega - \gamma(1 - \delta))^2 - 4\alpha\Omega(\beta\Omega - \gamma) \\ &= (\alpha - \beta)^2\Omega^2 + (4\alpha\gamma - 2\gamma(\alpha + \beta)(1 - \delta))\Omega + \gamma^2(1 - \delta)^2. \end{aligned}$$

Pokažimo da (2.21) ima uvijek dva različita realna rješenja za sve vrijednosti parametra  $\Omega \geq 0$ , odnosno dovoljno je pokazati

$$(\forall \Omega \geq 0) \quad \Delta(\Omega) > 0. \quad (2.22)$$

Analizirajmo funkciju  $\Omega \mapsto \Delta(\Omega)$ . Za  $\alpha \neq \beta$  riječ je o paraboli koja je okrenuta prema gore (jer je vodeći koeficijent  $(\alpha - \beta)^2$  pozitivan). Dakle, ako joj je diskriminanta  $\tilde{\Delta}$  negativna,

za svaki  $\Omega \in \mathbb{R}$  ćemo imati  $\Delta(\Omega) > 0$ . Pokažimo da to ipak nije slučaj. Naime,

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta} &= \left(4\alpha\gamma - 2\gamma(\alpha + \beta)(1 - \delta)\right)^2 - 4(\alpha - \beta)^2\gamma^2(1 - \delta)^2 \\ &= 16\alpha^2\gamma^2 - 16\alpha\gamma^2(\alpha + \beta)(1 - \delta) + 4\gamma^2(\alpha + \beta)^2(1 - \delta)^2 - 4(\alpha - \beta)^2\gamma^2(1 - \delta)^2 \\ &= 16\alpha^2\gamma^2 - 16\alpha\gamma^2(\alpha + \beta)(1 - \delta) + 16\alpha\beta\gamma^2(1 - \delta)^2 \\ &= 16\gamma^2\alpha\left(\alpha - (\alpha + \beta)(1 - \delta) + \beta(1 - \delta)^2\right) \\ &= 16\gamma^2\alpha\left(\alpha\delta + \beta\delta - 2\beta\delta + \beta\delta^2\right) \\ &= 16\gamma^2\delta\alpha\left(\alpha + \beta(\delta - 1)\right).\end{aligned}$$

Pokažimo da vrijedi

$$EA > T_0 \Rightarrow \tilde{\Delta} > 0.$$

Neka je  $EA > T_0$ . Uočimo

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta} &= 16\gamma^2\delta\alpha\left(\alpha + \beta(\delta - 1)\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha + \beta(\delta - 1) \geq 0.\end{aligned}$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}\alpha + \beta(\delta - 1) &= \frac{\rho A}{T_0 + AG_K} + \frac{\rho I}{EI}\left(\frac{AG_K}{T_0 + AG_K} - 1\right) \\ &= \frac{\rho}{E}\left(\frac{EA + AG_K - T_0 - AG_K}{T_0 + AG_K}\right) \\ &= \frac{\rho}{E}\frac{EA - T_0}{T_0 + AG_K} > 0.\end{aligned}$$

Dakle, kako je  $EA > T_0$  za klavirske žice (prema [2]), imamo  $\tilde{\Delta} > 0$ .

Time smo dobili da  $\Delta(\Omega)$  mijenja predznak ovisno o  $\Omega$ , ali pokažimo da se joj sve nultočke negativne. Zaista, kako je  $\delta < 1$  dobivamo sljedeću strogu nejednakost

$$\Delta(0) = \gamma^2(1 - \delta)^2 > 0,$$

pa imamo

$$\begin{aligned}\Delta'(0) = 4\alpha\gamma - 2\gamma(\alpha + \beta)(1 - \delta) \geq 0 &\Leftrightarrow 4\alpha\gamma \geq 2\gamma(\alpha + \beta)(1 - \delta) \\ &\Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta - 2(\alpha + \beta)\delta \leq 4\alpha \\ &\Leftrightarrow 2(\beta - \alpha) \leq 2(\alpha + \beta)\delta \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{EA - T_0}{AG_K} \leq 1 + \frac{EA}{T_0 + AG_K},\end{aligned}$$



što vrijedi jer je  $EA - T_0 > 0$ .

Dakle, parabola  $\Delta(\Omega)$  je okrenuta prema gore (jer je vodeći koeficijent pozitivan), vrijednost u 0 joj je pozitivna i vrijednost njene derivacije u 0 je pozitivna što znači da su joj nultočke negativne pa za  $\alpha \neq \beta$  vrijedi  $\Delta(\Omega) \geq 0, \forall \Omega \geq 0$ . Analogno se pokaže i slučaj kada  $\alpha = \beta$  ( $\Delta$  je rastući pravac s pozitivnom vrijednošću u točki  $\Omega = 0$ ) te je time tvrdnja (2.22) pokazana.

Slijedi da za  $\Omega \geq 0$  jednadžba (2.21) ima 2 različita realna rješenja  $\Lambda^- \equiv \Lambda^-(\Omega)$  i  $\Lambda^+ \equiv \Lambda^+(\Omega)$  takva da

$$\begin{aligned}\Lambda^-(\Omega) &= \frac{\gamma(1-\delta) - (\alpha + \beta)\Omega - \sqrt{\Delta(\Omega)}}{2}, \\ \Lambda^+(\Omega) &= \frac{\gamma(1-\delta) - (\alpha + \beta)\Omega + \sqrt{\Delta(\Omega)}}{2}.\end{aligned}$$

Pokažimo da ova rješenja zadovoljavaju

$$\begin{cases} (\forall \Omega \geq 0) & \Lambda^-(\Omega) \leq 0 \\ \Lambda^+(\Omega) \leq 0 & \Leftrightarrow \Omega \geq \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}$$

- Ako je  $\gamma(1-\delta) - (\alpha + \beta)\Omega \leq 0$ , tada trivijalno vrijedi

$$\sqrt{\Delta(\Omega)} \geq \gamma(1-\delta) - (\alpha + \beta)\Omega,$$

tj.  $\Lambda^-(\Omega) \leq 0$ .

Ako je  $\gamma(1-\delta) - (\alpha + \beta)\Omega > 0$ , tada je  $\Omega < \frac{\gamma(1-\delta)}{\alpha + \beta}$  pa vrijedi  $\Omega < \frac{\gamma}{\beta}$ . Sada imamo

$$\begin{aligned}\sqrt{\Delta(\Omega)} &\geq \gamma(1-\delta) - (\alpha + \beta)\Omega \\ \Leftrightarrow -4\alpha\Omega(\beta\Omega - \gamma) &\geq 0,\end{aligned}$$

pri čemu zadnja nejednakost vrijedi jer  $\Omega < \frac{\gamma}{\beta}$ . Dakle,  $\Lambda^-(\Omega) \leq 0$ .

- Neka je  $\Lambda^+(\Omega) \leq 0$ . Tada vrijedi

$$\sqrt{\Delta(\Omega)} \leq (\alpha + \beta)\Omega - \gamma(1-\delta),$$

pa kvadriranjem dobivamo

$$-4\alpha\Omega(\beta\Omega - \gamma) \leq 0.$$

Što znači da je  $\Omega \geq \frac{\gamma}{\beta}$ .

Obratno, neka je  $\Omega \geq \frac{\gamma}{\beta}$ . Tada vrijedi

$$\begin{aligned}-\gamma(1-\delta) + (\alpha + \beta)\Omega &\geq -\gamma(1-\delta) + (\alpha + \beta)\frac{\gamma}{\beta} \\ &= \gamma\delta + \frac{\alpha\gamma}{\beta} \geq 0.\end{aligned}$$

Kako je  $(\alpha + \beta)\Omega - \gamma(1 - \delta) \geq 0$ , nejednakost  $\sqrt{\Delta(\Omega)} \leq (\alpha + \beta)\Omega - \gamma(1 - \delta)$  je ekvivalentna nejednakosti  $\Delta(\Omega) \leq ((\alpha + \beta)\Omega - \gamma(1 - \delta))^2$ , što je dalje ekvivalentno s  $-4\alpha\Omega(\beta\Omega - \gamma) \leq 0$ . Zadnja nejednakost vrijedi jer je  $\Omega \geq \frac{\gamma}{\beta}$ . Dakle,  $\Lambda^+(\Omega) \leq 0$ .

Sada dobivamo 4 različite (kompleksne) svojstvene vrijednosti matrice **D**:

$$(\lambda_{\pm}^-)^2 = \Lambda^- \text{ i } (\lambda_{\pm}^+)^2 = \Lambda^+$$

Ovisno o vrijednosti varijable  $\Omega$  dobivamo:

$\Omega$	0	$\gamma/\beta$	$\infty$
$\lambda_{\pm}^-$	$\pm i \sqrt{ \Lambda^-(\Omega) }$	$\pm i \sqrt{ \Lambda^-(\Omega) }$	
$\lambda_{\pm}^+$	$\pm \sqrt{\Lambda^+(\Omega)}$	$\pm i \sqrt{ \Lambda^+(\Omega) }$	

Dakle, rješenja sustava (2.20) možemo zapisati u bazi  $\{e^{\lambda_{\pm}^-x}, e^{\lambda_{\pm}^+x}, e^{\lambda_{\pm}^-x}, e^{\lambda_{\pm}^+x}\}$ :  
postoje konstante  $P, Q, R, S$  ovisne o parametru  $\omega$  takve da

$$\hat{u}(x, \omega) = P(\omega)e^{\lambda_{\pm}^-x} + Q(\omega)e^{\lambda_{\pm}^+x} + R(\omega)e^{\lambda_{\pm}^-x} + S(\omega)e^{\lambda_{\pm}^+x}.$$

Sada koristimo (2.13) i rubne uvjete za  $\hat{u}(x, \omega)$  koji su isti kao i rubni uvjeti za  $u(x, t)$ , pa dobivamo

$$\hat{u}(0, \omega) = \hat{u}''(0, \omega) = \hat{u}(L, \omega) = \hat{u}''(L, \omega) = 0,$$

pri čemu nam ' predstavlja derivacije po  $x$ .

Slijede jednadžbe kompatibilnosti

$$\begin{aligned} (L1) \quad & P + Q + R + S = 0 \\ (L2) \quad & P(\lambda_{\pm}^-)^2 + Q(\lambda_{\pm}^+)^2 + R(\lambda_{\pm}^-)^2 + S(\lambda_{\pm}^+)^2 = 0 \\ (L3) \quad & Pe^{\lambda_{\pm}^-L} + Qe^{\lambda_{\pm}^+L} + Re^{\lambda_{\pm}^-L} + Se^{\lambda_{\pm}^+L} = 0 \\ (L4) \quad & P(\lambda_{\pm}^-)^2 e^{\lambda_{\pm}^-L} + Q(\lambda_{\pm}^+)^2 e^{\lambda_{\pm}^+L} + R(\lambda_{\pm}^-)^2 e^{\lambda_{\pm}^-L} + S(\lambda_{\pm}^+)^2 e^{\lambda_{\pm}^+L} = 0 \end{aligned}$$

Izvršimo li sada operacije  $(L2) - (\Lambda^-)(L1)$  i  $(L2) - (\Lambda^+)(L1)$  dobivamo

$$\begin{aligned} (P + Q)(\Lambda^- - \Lambda^-) + (R + S)(\Lambda^- - \Lambda^+) &= 0 \quad \Rightarrow \quad R + S = 0 \\ (P + Q)(\Lambda^+ - \Lambda^-) + (R + S)(\Lambda^+ - \Lambda^+) &= 0 \quad \Rightarrow \quad P + Q = 0 \end{aligned}$$

Dakle, prve dvije jednadžbe su trivijalne te nam preostaje

$$\begin{aligned} P(e^{\lambda_{\pm}^-L} - e^{\lambda_{\pm}^+L}) + R(e^{\lambda_{\pm}^-L} - e^{\lambda_{\pm}^+L}) &= 0, \\ P(\Lambda^-)(e^{\lambda_{\pm}^-L} - e^{\lambda_{\pm}^+L}) + R(\Lambda^+)(e^{\lambda_{\pm}^-L} - e^{\lambda_{\pm}^+L}) &= 0. \end{aligned}$$

Uočimo, da rješenje  $\hat{u}$  ne bi bilo nula nužno je da ovaj sustav ima barem jedno rješenje različito od nula. Dakle, pripadna matrica sustava treba biti singularna, odnosno dolazimo do idućih uvjeta na svojstvene vrijednosti

$$\det \begin{pmatrix} e^{\lambda^- L} - e^{\lambda_+^- L} & e^{\lambda^+ L} - e^{\lambda_+^+ L} \\ (\Lambda^-)(e^{\lambda^- L} - e^{\lambda_+^- L}) & (\Lambda^+)(e^{\lambda^+ L} - e^{\lambda_+^+ L}) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^{\lambda^- L} - e^{\lambda_+^- L})(\Lambda^+ - \Lambda^-)(e^{\lambda^+ L} - e^{\lambda_+^+ L}) = 0 \quad .$$

Kako su  $\Lambda^+$  i  $\Lambda^-$  različite, imamo dvije mogućnosti

$$e^{\lambda^- L} - e^{\lambda_+^- L} = 0 \quad \text{ili} \quad e^{\lambda^+ L} - e^{\lambda_+^+ L} = 0 ,$$

pa iz relacija  $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ ,  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  i prethodne tablice slijedi

$$\sin(\sqrt{|\Lambda^-|}L) = 0 \quad \text{ili} \quad \begin{cases} \sinh(\sqrt{\Lambda^+}L) = 0, \text{ za } \Omega < \gamma/\beta \\ \sin(\sqrt{\Lambda^+}L) = 0, \text{ za } \Omega \geq \gamma/\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \exists n \in \mathbb{Z}^* \text{ t.d. } \sqrt{|\Lambda^-|}L = n\pi & \text{ili} & \sqrt{\Lambda^+} = 0 & , \text{ za } \Omega < \gamma/\beta \\ \exists n \in \mathbb{Z}^* \text{ t.d. } \sqrt{|\Lambda^-|}L = n\pi & \text{ili} & \exists m \in \mathbb{Z}^* \text{ t.d. } \sqrt{\Lambda^+}L = m\pi & , \text{ za } \Omega \geq \gamma/\beta \end{cases} \quad (2.23)$$

Kako bismo našli svojstvene frekvencije žice pridružene kružnim frekvencijama koje zadovoljavaju (2.23), moramo riješiti iduće jednadžbe

$$\Lambda^-(\Omega) = \frac{\gamma(1-\delta) - (\alpha + \beta)\Omega - \sqrt{\Delta(\Omega)}}{2} = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad (2.24)$$

$$\Lambda^+(\Omega) = \frac{\gamma(1-\delta) - (\alpha + \beta)\Omega + \sqrt{\Delta(\Omega)}}{2} = -\frac{m^2\pi^2}{L^2} \quad , \quad \Omega \geq \gamma/\beta \quad . \quad (2.25)$$

Lako se pokaže da postoje jedinstveni  $\Omega_n^-$  i  $\Omega_m^+$  takvi da

$$\Lambda^-(\Omega_n^-) = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad \text{i} \quad \Lambda^+(\Omega_m^+) = -\frac{m^2\pi^2}{L^2} .$$

Obzirom na dane rubne uvjete možemo eksplicitno izračunati vrijednosti  $\Omega_n^-$  i  $\Omega_m^+$ . Zaista, po definiciji  $\Lambda^-(\Omega_n^-)$  je jedno od dva rješenja jednadžbe (2.21) parametrizirane s  $\Omega_n^-$  pa slijedi

$$\left(\Lambda^-(\Omega_n^-)\right)^2 + \left((\alpha + \beta)\Omega_n^- - \gamma(1 - \delta)\right)\Lambda^-(\Omega_n^-) + \alpha\beta(\Omega_n^-)^2 - \alpha\gamma\Omega_n^- = 0 .$$

Sada možemo zamijeniti  $\Lambda^-(\Omega_n^-)$  s vrijednostima  $-\frac{n^2\pi^2}{L^2}$  pa dobivamo

$$\alpha\beta(\Omega_n^-)^2 - \left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}(\alpha + \beta) + \alpha\gamma\right)\Omega_n^- + \gamma(1 - \delta)\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{n^4\pi^4}{L^4} = 0 .$$

Dobili smo jednadžbu drugog stupnja koju ćemo riješiti pomoću njene diskriminante

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \left( \frac{n^2\pi^2}{L^2}(\alpha + \beta) + \alpha\gamma \right)^2 - 4\alpha\beta \left( \gamma(1 - \delta) \frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{n^4\pi^4}{L^4} \right) \\ &= \alpha^2\gamma^2 + 2\alpha\gamma \frac{n^2\pi^2}{L^2} (\alpha + \beta - 2\beta(1 - \delta)) + (\alpha - \beta)^2 \frac{n^4\pi^4}{L^4} \geq 0 \quad .\end{aligned}$$

Ova jednadžba ima 2 rješenja (koja su zapravo dobivena invertiranjem  $\Lambda^-$  i  $\Lambda^+$  u jednadžbama (2.24)). Ova rješenja su pozitivna (korijeni parabole okrenute prema gore, pozitivne u 0 i negativne derivacije u 0) i za fiksni  $n \in \mathbb{N}^*$  je

$$\Omega_n^- = \frac{\frac{n^2\pi^2}{L^2}(\alpha + \beta) + \alpha\gamma - \sqrt{\Delta_n}}{2\alpha\beta} < \Omega_n^+ = \frac{\frac{n^2\pi^2}{L^2}(\alpha + \beta) + \alpha\gamma + \sqrt{\Delta_n}}{2\alpha\beta} .$$

Konačno, pridružene kutne i svojstvene frekvencije su redom dane s

$$\omega_n^\pm = \sqrt{\Omega_n^\pm}, f_n^\pm = \frac{\omega_n^\pm}{2\pi} .$$

□

Dakle, uočimo da smo dobili 2 tipa frekvencija. Jedne pridružene transverzalnemu pomaku  $u$  i druge pridružene smicanju, tj. kutnoj deformaciji  $\varphi$ .

Sada možemo naći aproksimacijske formule za parcijale transverzalnih vibracija žice. Pomoću Taylorovog razvoja za male  $n$  dobivamo

$$f_n^T = nf_0 + \epsilon^T n^3 + O(n^5) \quad , \text{ za male } n , \quad (2.26)$$

pri čemu  $f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}$ ,  $\epsilon^T = \frac{\pi^2}{4L^3} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A} \frac{EI}{T_0}} \left( 1 - \frac{T_0}{EA} \right)$ .

Uočimo da smo dobili formulu sličnu kao i (2.10), tj. razvojem smo dobili sličan koeficijent. Također, izraz  $\frac{T_0}{EA}$  je manji od 1. Nadalje vidimo da Timošenskov model daje slične svojstvene frekvencije za mali  $n$  kao i Euler-Bernoulli.

Sada na ekvivalentan način dobijemo aproksimacijske formule za frekvencije s velikim  $n$ . Primjetimo da je  $\beta < \alpha$  zbog  $EA > T_0$ . Dakle, za  $n \rightarrow \infty$  imamo

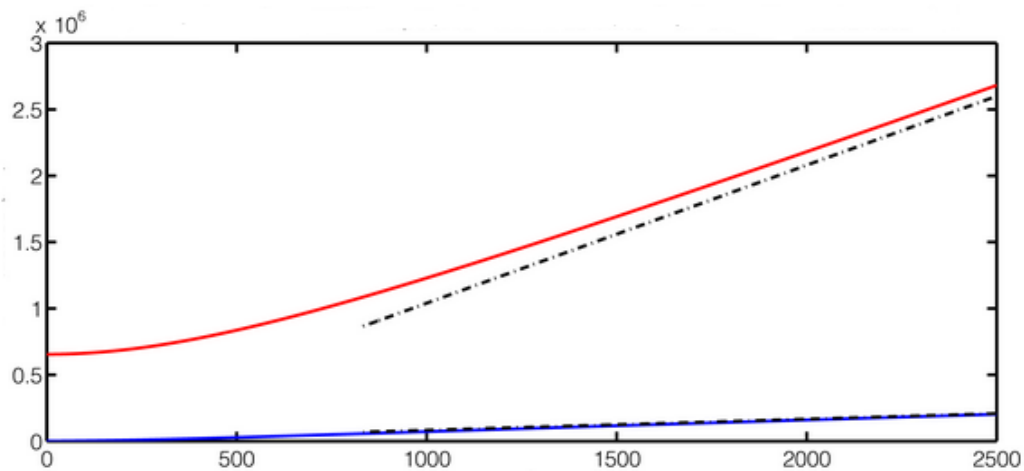
$$f_n^T \sim nf_\infty^T \quad , \text{ pri čemu } f_\infty^T = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0 + AGK}{AGK}} , n \rightarrow \infty . \quad (2.27)$$

Iz jednadžbe je vidljivo da parcijali dobiveni pomoću Timošenkovog modela teže prema parcijalima harmonične žice, što znači da imamo konačnu brzinu širenja u neograničenoj domeni (za razliku od Euler-Bernoullijevog modela).

S druge strane, Taylorov razvoj za parcijale pridružene smicanju daje sljedeće formule

$$\tilde{f}_n^T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{AG\kappa}{\rho I}} + \frac{\pi(E + G\kappa)}{4L^2} \sqrt{\frac{I}{\rho AG\kappa}} n^2 + O(n^4) \quad , \text{ za male } n, \quad (2.28)$$

$$\tilde{f}_n^T \sim n\tilde{f}_\infty^T \quad , \text{ pri čemu } \tilde{f}_\infty^T = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad , n \rightarrow \infty. \quad (2.29)$$



Slika 2.7: Prikaz dva tipa svojstvenih frekvencija Timošenkovog sustava (2.12), za notu D1. Plava predstavlja frekvencije pomaka, a crvena frekvencije smicanja.

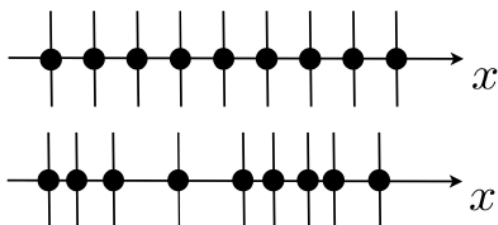
Asimptote svake krivulje predstavljene su točkicama. Preuzeto iz [2].

Dakle, krutost klavirske žice se manifestirala i u spektralnoj i u vremenskoj domeni. Njezin najveći efekt je neharmoničnost parcijala koja je jedna od najvećih značajki svakog instrumenta te utječe na percepciju tona. U vremenskoj domeni, krutost žice uzrokuje disperziju valova koja se manifestira kao pomak u frekvenciji i tzv. prekursorima vidljivima na mostu klavira.

U ovom radu smo vidjeli dva modela krute žice dobivena prilagođavanjem Euler-Bernoullijevog i Timošenkovog modela grede. Ta dva modela su davali slične rezultate za prvih nekoliko parcijala, međutim kod visokih frekvencija Timošenkov model daje konačnu brzinu širenja vala. Dakle, preferiramo Timošenkov model jer bolje opisuje stvarnu situaciju.

## 2.4 Geometrijski egzaktan model klavirske žice

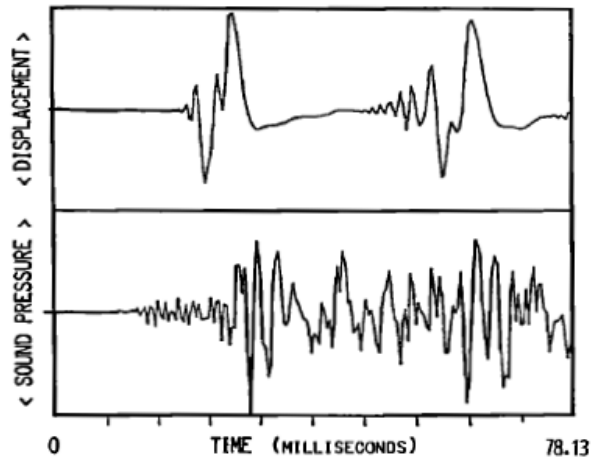
Eksperimentalno je pokazano da udarac batića po klavirskoj žici ne proizvede samo transverzalni val već i longitudinalni. Te kao posljedicu longitudinalnog vala imamo tzv.



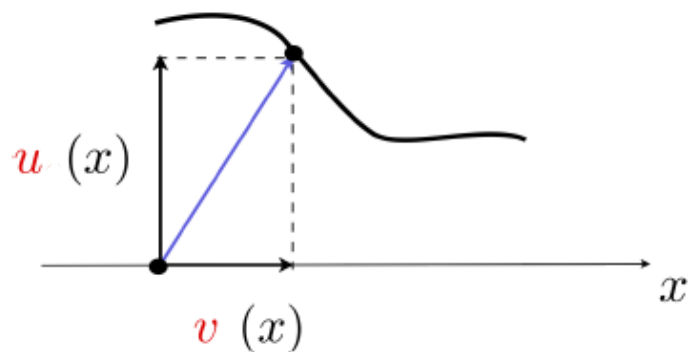
Slika 2.8: Prikaz longitudinalnog vala žice. Preuzeto iz [2].

„wolfon”. Također zbog longitudinalnog vala ton bolje zvuči kada je uštiman na krivu frekvenciju (u transverzalnom smislu) i potrebno je uskladiti frekvencije i transverznog i longitudinalnog vala. Osim toga, longitudinalni valovi se prenose preko mosta do rezonantne ploče i dalje na klavirsku strukturu, a pojavljuju se i prekurzije na mostu, tj. čuje se zvuk prije nego što transverzalni val dospije do mosta. To se događa zato što je longitudinalni val brži od transverznog. Dakle, longitudinalni valovi jako pridonose boji i kvaliteti tona te uvelike pridonose prijenosu vibracija sa žica na ostatak klavirske strukture te ćemo u ovom odjeljku napraviti model klavirske žice koji opisuje i njeno transverzalno i longitudinalno gibanje te omogućava daljnje modeliranje spoja žica s mostom iako se u ovom radom time nećemo baviti.

Želja nam je opisati geometriju klavirske žice bez aproksimacija i bez lineariziranja tenzora deformacije. Po Hookovom zakonu, naprezanje i deformacija ostaju afine. Zato ćemo razmatrati napetost žice koja varira obzirom na vrijeme i položaj na žici zbog lokalnih varijacija longitudinalne vibracije. Dakle, model koji se dobije ovim pristupom se naziva geometrijski egzaktan model, a naziv je dobio zbog nelinearnosti koje dolaze iz vjerodostojnog opisa geometrije a ne zbog nelinearnosti odnosa naprezanja i deformacije. Također ćemo pretpostaviti da se gibanje žice događa unutar jedne ravnine.



Slika 2.9: Prikaz postojanja prekurzija u zvuku. Transverzalni pomak žice (gore) i pojava zvuka (dolje) u vremenu. Preuzeto iz [2].



Slika 2.10: Prikaz nepoznanica  $u$  i  $v$  u geometrijski egzaktnom modelu.

Neka je  $u$  transverzalni pomak klavirske žice (kao i ranije) te neka je  $v$  longitudinalni pomak. Tada dobivamo sljedeći sustav

$$\begin{aligned}
\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \frac{\partial}{\partial x} \left( EA \frac{\partial}{\partial x} u - (EA - T_0) \frac{\frac{\partial}{\partial x} u}{\sqrt{(\frac{\partial}{\partial x} u)^2 + (1 + \frac{\partial}{\partial x} v)^2}} \right) &= S(x, t) \quad , \\
\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} v - \frac{\partial}{\partial x} \left( EA \frac{\partial}{\partial x} v - (EA - T_0) \frac{1 + \frac{\partial}{\partial x} v}{\sqrt{(\frac{\partial}{\partial x} u)^2 + (1 + \frac{\partial}{\partial x} v)^2}} \right) &= 0 \quad , \\
u(0, t) = u(L, t) = v(0, t) = v(L, t) &= 0 \quad , \\
u(x, 0) = \partial_t u(x, 0) = v(x, 0) = \partial_t v(x, 0) &= 0 \quad .
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Sustav (2.30) možemo zapisati i u apstraktnoj formi kao

$$\begin{aligned}
\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{q} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \nabla H_{eg} \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{q} \right) \right) &= F \quad , \\
\mathbf{q}(0, t) = \mathbf{q}(L, t) &= 0 \quad , \\
\mathbf{q}(x, 0) = \partial_t \mathbf{q}(x, 0) &= 0 \quad ,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} &= (u, v) \quad , \\
F &= (S, 0) \quad ,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

$$H_{eg} \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{q} \right) = \frac{EA}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} u \right)^2 + \frac{EA}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} v \right)^2 - (EA - T_0) \left( \sqrt{\left( \frac{\partial}{\partial x} u \right)^2 + \left( 1 + \frac{\partial}{\partial x} v \right)^2} - \left( 1 + \frac{\partial}{\partial x} v \right) \right) .$$

Pokaže se da funkcional  $H_{eg}$  predstavlja potencijalnu energiju deformacije (vidi [2]), te je iz tog razloga dodan član  $1 + \frac{\partial}{\partial x} v$  kako bi jednadžba ostala invarijantna i kako bi se osigurala pozitivnost potencijalne energije.

Osim geometrijski egzaktnog modela, postoje i neki aproksimacijski modeli (vidi [2]). Jedan od najčešćih je model koji koristi Taylorov razvoj korijena koji se pojavljuje zbog deformacije tenzora. Tada funkcional iz sustava (2.31) ima oblik

$$H_{ap}(u, v) = \frac{T_0}{2} u^2 + \frac{EA}{2} v^2 + \frac{EA - T_0}{2} u^2 v + \frac{EA - T_0}{8} u^4 - \frac{EA - T_0}{2} u^2 v^2 . \tag{2.33}$$



Pokažimo da rješenje geometrijski egzaktnog modela postoji. Općenito, u teoriji hiperboličkih sustava čak i ako su inicijalni uvjeti regularni, kod rješenja ta regularnost se može izgubiti nakon određenog vremenskog intervala. Pokazat ćemo da geometrijski egzaktan model zadovoljava uvjete sljedećeg *Ta-Tsien teorema* što garantira postojanje rješenja.

**Teorem 2.4.1** (Teorem o postojanju jedinstvenog rješenja za Hamiltonov sustav valnih jednadžbi). *Neka je  $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija klase  $C^4$  te neka je strogo konveksna u okolini točke 0. Neka su  $(\lambda_i(\mathbf{q}), \mathbf{v}_i(\mathbf{q}))_{1 \leq i \leq N}$  strogo pozitivne i različite svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori Hessianove matrice  $D^2H(\mathbf{q})$ . Pretpostavimo da postoji okolina točke 0  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$  takva da*

$$\nabla \lambda_i(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}_i(\mathbf{q}) = 0, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{D}.$$

*Nadalje, pretpostavimo da  $\mathbf{q}_0 \in C^2$ ,  $\mathbf{q}_1 \in C^1$  i da oba imaju kompaktan nosač sadržan u  $[\alpha_0, \beta_0]$ . Tada postoji  $\theta_0 > 0$  takva da ako vrijedi*

$$\theta := (\beta_0 - \alpha_0) \sup_{x \in \mathbb{R}} \{|\mathbf{q}_0''(x)|, |\mathbf{q}_1''(x)|\} < \theta_0,$$

*onda Cauchyjev problem*

*nađi  $\mathbf{q}_c : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N$  t.d.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{q}_c - \frac{\partial}{\partial x} \left( \nabla H \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{q}_c \right) \right) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{q}_c(x, 0) &= \mathbf{q}_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q}_c(x, 0) = \mathbf{q}_1(x) \end{aligned}$$

*ima jedinstveno globalno rješenje  $\mathbf{q}_c(x, t) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ .*

*Dokaz.* Vidi [2]. □

**Teorem 2.4.2** (Teorem o geometrijski egzaktnom modelu). *Geometrijski egzaktan model (2.30) zadovoljava pretpostavke teorema (2.4.1).*

*Dokaz.* Neka je, kao ranije,  $H_{\text{eg}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiran s

$$\begin{aligned} H_{\text{eg}} \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{q}_c \right) &= \frac{EA}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_c \right)^2 + \frac{EA}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} v_c \right)^2 - (EA - T_0) \left( \sqrt{\left( \frac{\partial}{\partial x} u_c \right)^2 + \left( 1 + \frac{\partial}{\partial x} v_c \right)^2} - \left( 1 + \frac{\partial}{\partial x} v_c \right) \right) \\ &= EA \tilde{H}_{\text{eg}} \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{q}_c \right). \end{aligned}$$

Neka je  $\alpha = \frac{EA-T_0}{EA}$ , tada

$$\tilde{H}_{\text{eg}}\left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{q}_c\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} u_c\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} v_c\right)^2 - \alpha \left( \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x} u_c\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial}{\partial x} v_c\right)^2} - \left(1 + \frac{\partial}{\partial x} v_c\right) \right).$$

Uočimo da vrijedi

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\text{eg}}(-\alpha, -1) &= \frac{1 - \alpha^2}{2} \\ \tilde{H}_{\text{eg}}(0, -1) &= \frac{1}{2} \\ \tilde{H}_{\text{eg}}(+\alpha, -1) &= \frac{1 - \alpha^2}{2}. \end{aligned}$$

Dakle,  $\tilde{H}_{\text{eg}}$  nije konveksna funkcija (jer je slika točke  $(0, -1)$  veća od slike drugih dviju). Nadalje, uočimo da funkcija  $\tilde{H}_{\text{eg}}$  nije regularna, čak nije ni klase  $C^1$  oko točke  $(0, -1)$ . Međutim, pokazat ćemo da je  $\tilde{H}_{\text{eg}}$  lokalno klase  $C^\infty$  i konveksna u okolini točke  $(0, 0)$ . Pogledajmo svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore od  $D^2\tilde{H}_{\text{eg}}(\mathbf{U}_x)$ . Imamo

$$\begin{aligned} \nabla\tilde{H}_{\text{eg}}(\mathbf{U}_x) &= \nabla\tilde{H}_{\text{eg}}(u_x, v_x) \\ &= \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} - \alpha \left( \frac{1}{\sqrt{u_x^2 + (1 + v_x)^2}} \begin{pmatrix} u_x \\ 1 + v_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Pa slijedi

$$D^2\tilde{H}_{\text{eg}}(u_x, v_x) = \text{Id}_{\mathbb{R}^2} - \frac{\alpha}{(\sqrt{u_x^2 + (1 + v_x)^2})^3} \begin{pmatrix} (1 + v_x)^2 & -u_x(1 + v_x) \\ -u_x(1 + v_x) & u_x^2 \end{pmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti ove matrice su

$$\lambda_1(u_x, v_x) = 1 \quad \text{i} \quad \lambda_2(u_x, v_x) = 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{u_x^2 + (1 + v_x)^2}}$$

s pripadnim svojstvenim vektorima

$$\mathbf{v}_1(u_x, v_x) = \begin{pmatrix} u_x \\ 1 + v_x \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{v}_2(u_x, v_x) = \begin{pmatrix} -(1 + v_x) \\ u_x \end{pmatrix}.$$

Dakle, svojstvena vrijednost  $\lambda_1$  je konstantna u ravnini  $(u_x, v_x)$  dok druga čini koncentrične kružnice sa središtem u točki  $(0, -1)$ . Također, sustav je strogo hiperboličan, odnosno  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , dokle god vrijedi

$$\sqrt{u_x^2 + (1 + v_x)^2} > \alpha.$$

Uočimo da to svojstvo vrijedi oko točke  $(0, 0)$  jer je  $0 < \alpha < 1$ . Naime, iz  $EA > T_0$  slijedi  $\alpha > 0$ , te je  $\alpha < 1$  jer je  $T_0 > 0$  i  $EA > 0$ .

Pogledajmo još svojstvena polja. Kako je prva svojstvena vrijednost konstantna, njezino svojstveno polje je trivijalno. Dok za drugu svojstvenu vrijednost imamo

$$\nabla \lambda_2(u_x, v_x) = \frac{\alpha}{(\sqrt{u_x^2 + (1 + v_x)^2})^3} \begin{pmatrix} u_x \\ 1 + v_x \end{pmatrix}$$

pa slijedi

$$\nabla \lambda_2(u_x, v_x) \cdot \mathbf{v}_2(u_x, v_x) = \frac{\alpha}{(\sqrt{u_x^2 + (1 + v_x)^2})^3} \begin{pmatrix} u_x \\ 1 + v_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(1 + v_x) \\ u_x \end{pmatrix} = 0.$$

Dakle i svojstveno polje druge svojstvene vrijednosti je trivijalno. Dodamo li još pretpostavke na početne uvjete problema možemo primijeniti teorem (2.4.1) i time je tvrdnja dokazana.  $\square$

## Poglavlje 3

### Simulacije

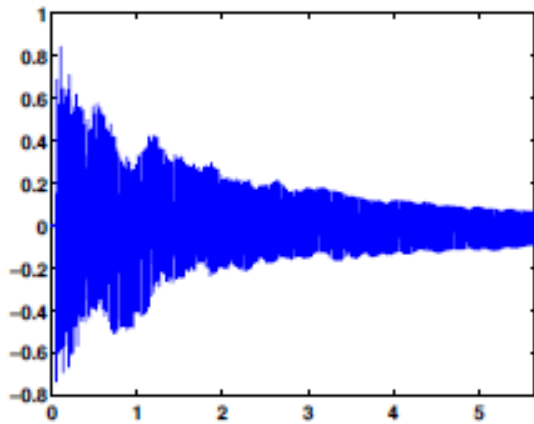
U ovom poglavlju ćemo prikazati mogućnosti matematičkih simulacija modela predstavljenih u prošlom poglavlju. Matematičke simulacije su izvedene iz diskretizacije varijante geometrijski egzaktnog modela zapisane u varijacijskoj formulaciji. Cilj nam je prikazati kako predstavljeni modeli klavirske žice dobro opisuju ponašanje klavirske žice i zvuka u svakom registru, od niskog preko srednjeg pa sve do visokog registra. Također, u simulacijama će se vidjeti manifestacija krutosti žice kao unutrašnje prigušivanje titranja žice. Napraviti ćemo i usporedbu sa stvarnim mjerenjima tamo gdje je to moguće. Sve slike su preuzete iz [2].

Spektrogram je trodimenzionalna reprezentacija zvuka koja prikazuje ovisnost frekvencije o vremenu. Tri dimenzije spektrograma su vrijeme na x-osi izraženo u sekundama, frekvencije na y-osi izražene u Hz-ima te intenzitet zvuka u decibelima prikazanog pomoću boja na grafu. Prikazat ćemo spektrogram za svaki ton te ćemo uočiti prisutnost harmonika po ravnim linijama koje su u periodičnom razmaku. Dakako, kao što smo i pokazali, spektar nije harmoničan, ali su odstupanja dovoljno mala da se to na grafovima neće toliko očitavati. Također ćemo uočiti da te linije nisu jednake duljine, međutim, to je u skladu s fizikalnim opažanjima jer ne traju sve frekvencije jednako dugo.

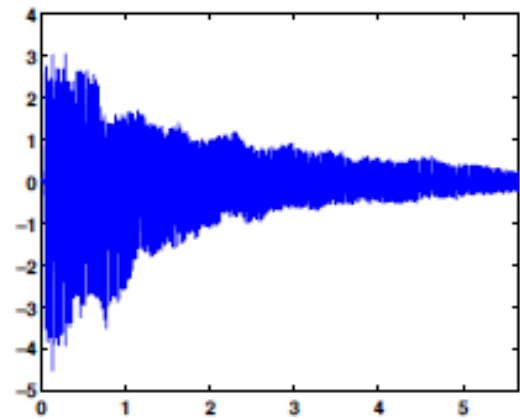
Titranje klavirske žice u neposrednoj okolini mijenja tlak zraka, te se taj poremećaj tlaka prenosi na susjedne čestice te tako zvuk nastaje i širi se kroz prostor. Iz tog razloga, za svaki ton ćemo prikazati i tlak u ovisnosti o vremenu te ćemo, tamo gdje je moguće, napraviti usporedbu sa stvarnim mjerenjima.

## Ton Dis1

Ton Dis1 je vrlo dubok ton na samom dnu donjeg registra. Osnovna frekvencija mu je 39 Hz, a dobiva se udarom batića po jednoj namotanoj žici. Kod dubokih tonova žica se omota fleksibilnijom bakrenom žicom kako bi joj se povećao promjer u svrhu povećanja gustoće linearne mase, a bez da se smanji napetost žice.

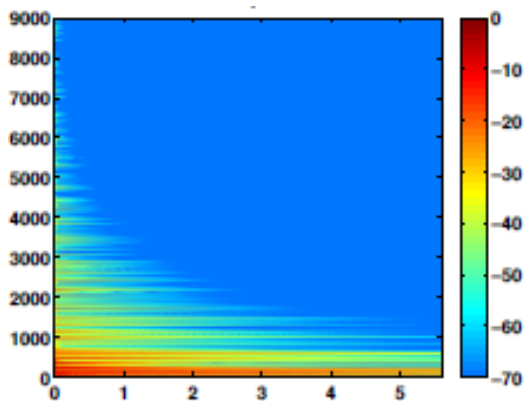


Slika 3.1: Prikaz ovisnosti tlaka (Pa) o vremenu (s) za ton Dis1.

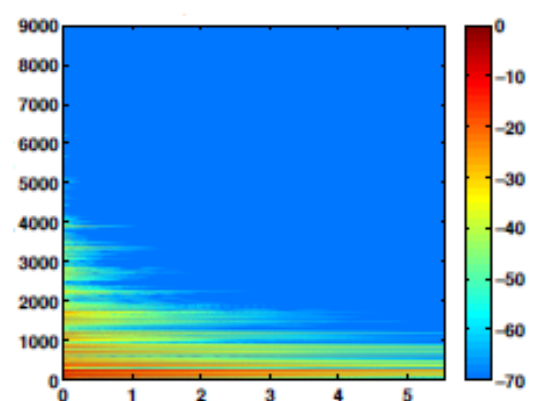


Slika 3.2: Egzaktni prikaz ovisnosti tlaka (Pa) o vremenu (s) za ton Dis1.

Uočimo da su grafovi jako slični osim što je amplituda simulacija četiri puta manja. Međutim, kako navode u [2], to vjerojatno proizlazi iz pozicije na kojoj je smješten mikrofon.



Slika 3.3: Spektrogram - simulacija  
Frekvencije (Hz) kroz vrijeme (s).

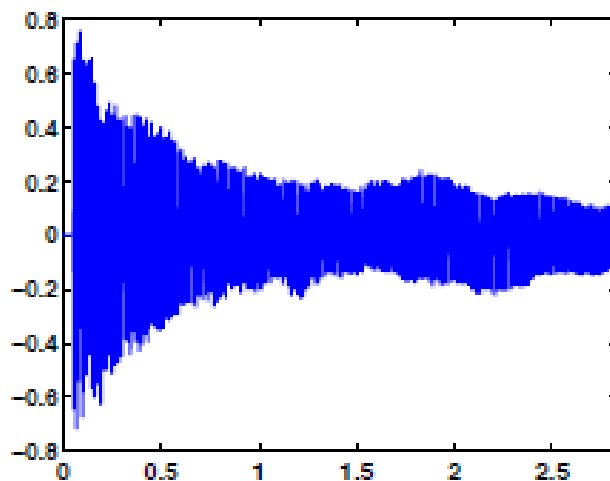


Slika 3.4: Spektrogram - egzaktno  
Frekvencije (Hz) kroz vrijeme (s).

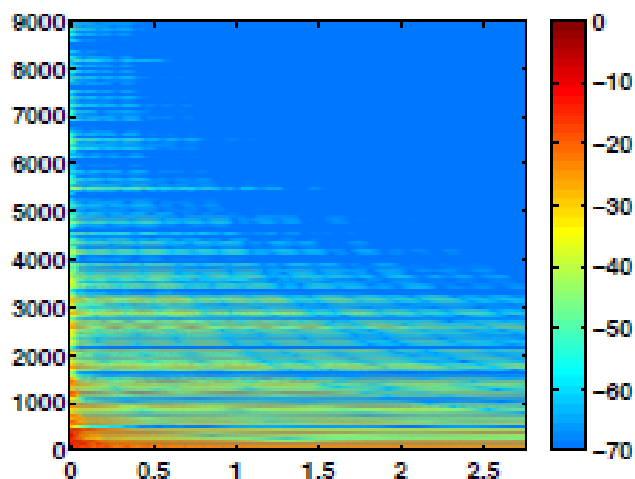
Na oba spektrograma vidimo prisutnost harmonika transverzalnih vibracija, ali i longitudinalnih. Intenzitet zvuka ima negativne vrijednosti, te 0 decibela označava najjači intenzitet i na grafu je označen crvenom bojom, a -70 predstavlja najslabiji intenzitet zvuka i označen je plavom bojom. Skala je negativna jer je intenzitet zvuka relativna veličina te ovisi o tome što se uzima za referentnu veličinu.

## Ton C2

Ton C2 se nalazi u donjem registru klavira. Osnovna frekvencija mu je 65 Hz i dobiva se udarom batića po dvije namotane žice. Egzaktna mjerenja za ovaj ton nisu dostupna, međutim svejedno ćemo prikazati rezultate simulacija.



Slika 3.5: Prikaz ovisnosti tlaka (Pa) o vremenu (s) za ton C2.

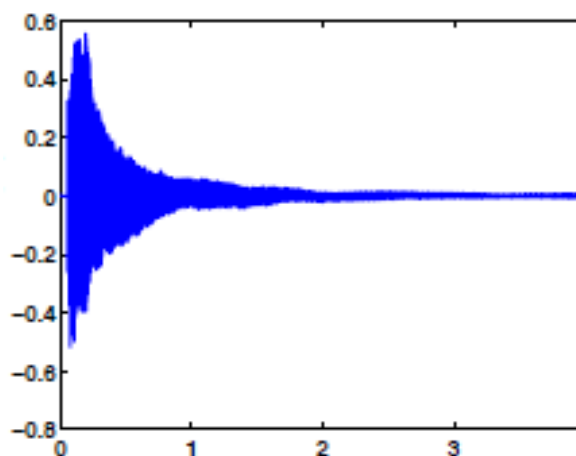


Slika 3.6: Spektrogram - simulacija  
Frekvencije (Hz) kroz vrijeme (s).

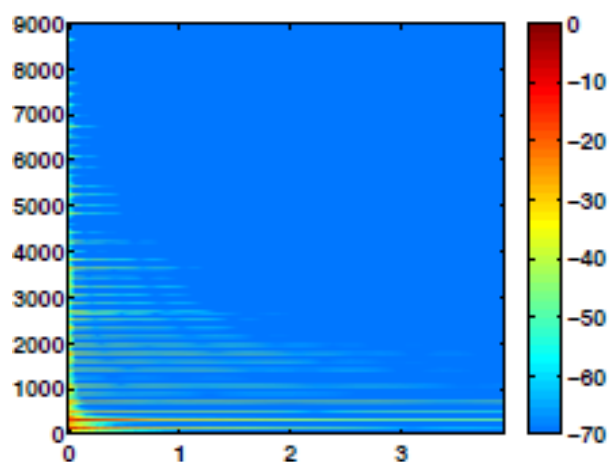
Na grafovima se jasno vide harmonici, međutim uočavamo da su grafovi tona C2 "točkastiji" u usporedbi s grafovima tona Dis1.

### Ton F3

Ton F3 se nalazi između donjeg i srednjeg registra, osnovna frekvencija mu je 174 Hz, a dobiva se udarom batića po tri (nenamotane) žice. Što su tonovi viši, žice postaju sve tanje i kraće, a napetost je i dalje velika što rezultira slabim zvukom. Iz tog razloga se za isti ton stavljaju 3 žice. Za ton F3 također nemamo eksperimentalna mjerenja.



Slika 3.7: Prikaz ovisnosti tlaka (Pa) o vremenu (s) za ton F3.



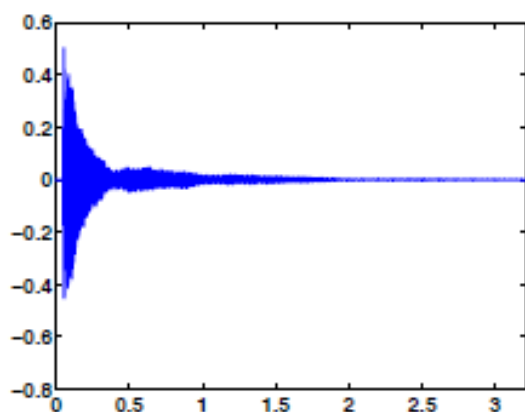
Slika 3.8: Spektrogram - simulacija

Na grafu tlaka uočavamo tzv. dvostruko odumiranje zvuka, što je u skladu s fizikalnim zapažanjima. Također, vidimo da je poremećaj tlaka znatno manji nego kod tonova Dis1 i C2 što je i za očekivati jer tonovi srednjeg registra traju znatno kraće nego tonovi donjeg registra (pod uvjetom da tipka nije otpuštena). Na spektrogramu se jasno vide harmonici.

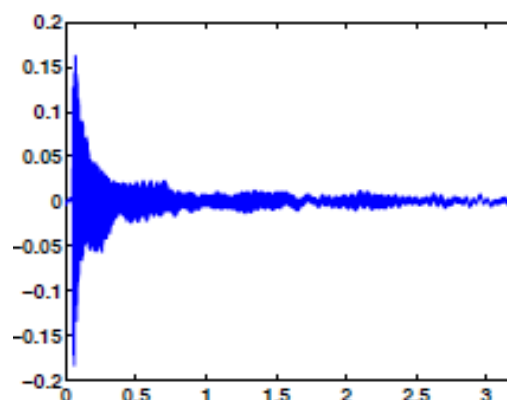


## Ton Cis5

U srednjem registru se nalazi ton Cis5 kojeg čine tri žice, a osnovna frekvencija mu je 555 Hz.

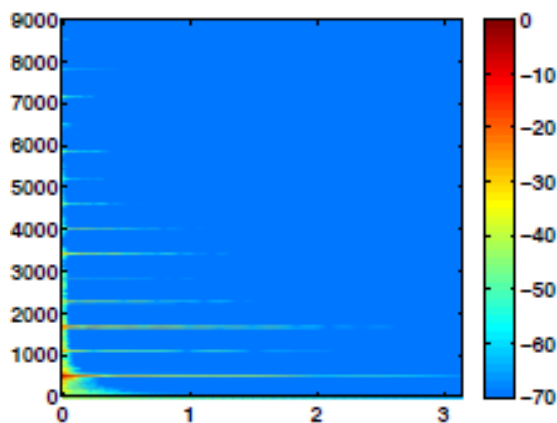


Slika 3.9: Prikaz ovisnosti tlaka (Pa) o vremenu (s) za ton Cis5.

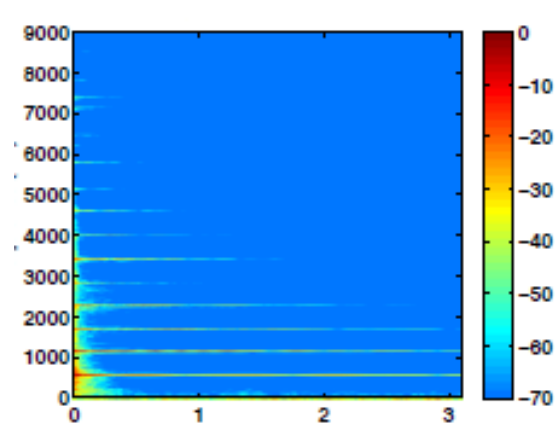


Slika 3.10: Egzaktni prikaz ovisnosti tlaka (Pa) o vremenu (s) za ton Cis5.

Vidimo da graf dobiven pomoću simulacija daje rezultat vrlo sličan grafu dobivenom egzaktnim mjerenjima.



Slika 3.11: Spektrogram - simulacija

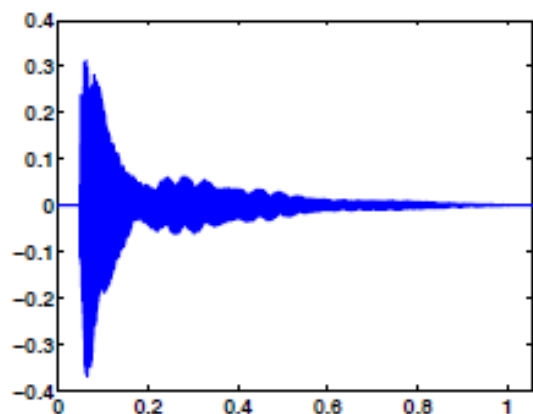


Slika 3.12: Spektrogram - egzaktno

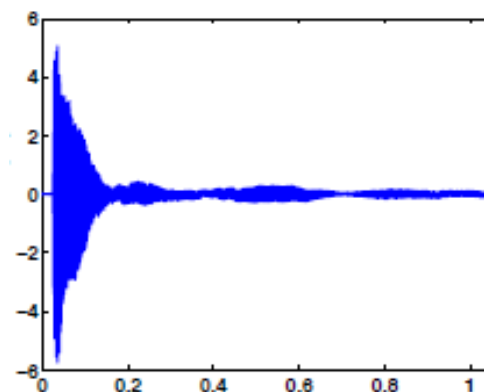
Simulirani i egzaktni spektrogram su također vrlo slični.

## Ton G6

Ton G6 je u visokom registru i čine ga tri žice te mu je osnovna frekvencija 1571 Hz.

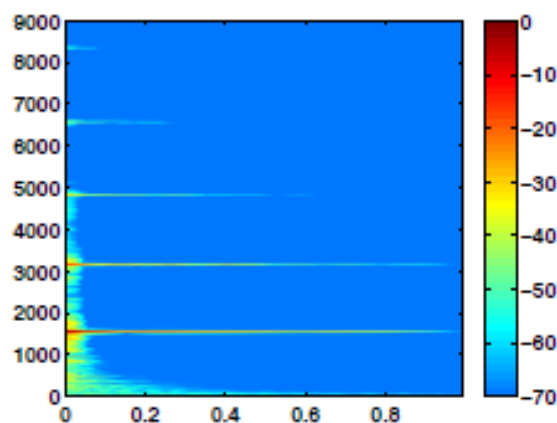


Slika 3.13: Prikaz ovisnosti tlaka (Pa) o vremenu (s) za ton G6.

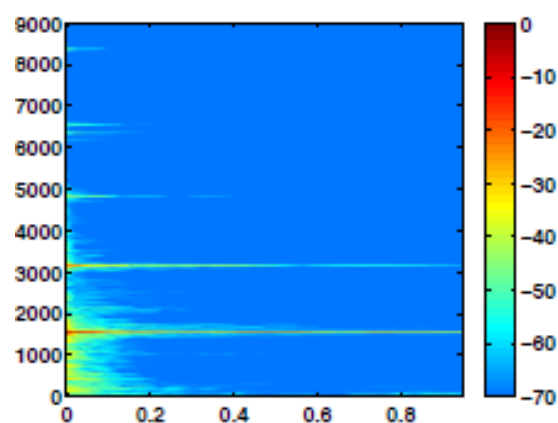


Slika 3.14: Egzaktni prikaz ovisnosti tlaka (Pa) o vremenu (s) za ton G6.

Uočavamo da se grafovi podudaraju, te se na simulacijama dobro može vidjeti dvostruko odumiranje zvuka. Također uočavamo da poremećaj tlaka nakon jedne sekunde gotovo da i nestaje kod tonova visokog registra, tj. da je trajanje zvuka visokih tonova znatno kraće nego trajanje zvuka niskih što je u skladu s fizikalnim opažanjima.



Slika 3.15: Spektrogram - simulacija

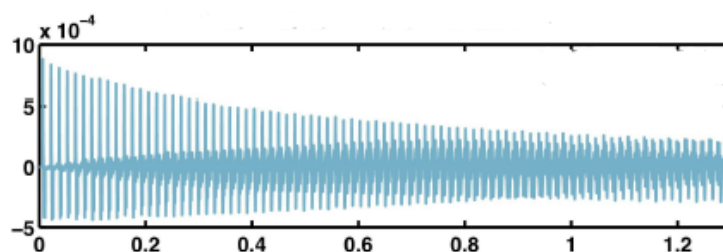


Slika 3.16: Spektrogram - egzaktno

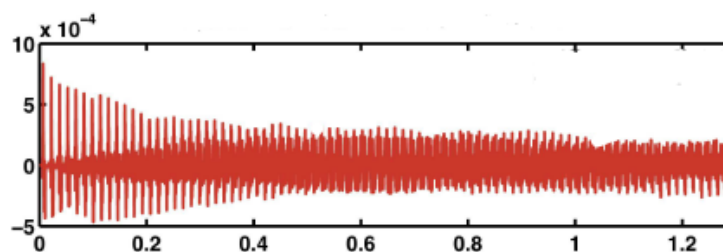
Simulirani spektrogram nema tako bogat spektar kao egzaktni spektrogram, što je prema [2] najvjerojatnije uzrokovano premalom brzinom kojom batić udari žicu. Također, uočavamo da se na spektrogramu ne mogu vidjeti longitudinalni harmonici, ali to je očekivano obzirom na to da je osnovna longitudinalna frekvencija iznad 20 000 Hz.

## Pomaci žice

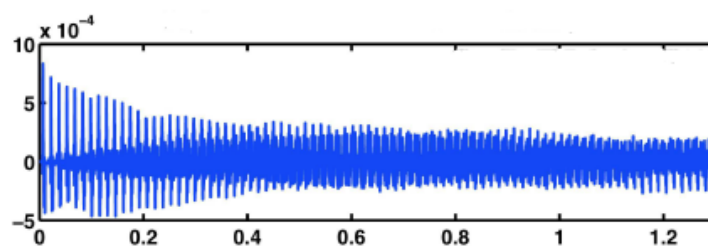
Sada ćemo grafički prikazati koliko krutost žice utječe na njezine pomake. Slika (3.17) prikazuje pomak linearne žice bez krutosti koja odgovara modelu valne jednačbe (2.1) opisanog u (2.1), slika (3.18) pokazuje pomak krute žice koju predstavljaju Euler-Bernoullijev model (2.7) iz (2.2) te Timošenkov model (2.12) iz (2.3), dok slika (3.19) prikazuje pomak krute i nelinearne žice koja je opisana pomoću geometrijski egzaktnog modela (2.30) iz poglavlja (2.4).



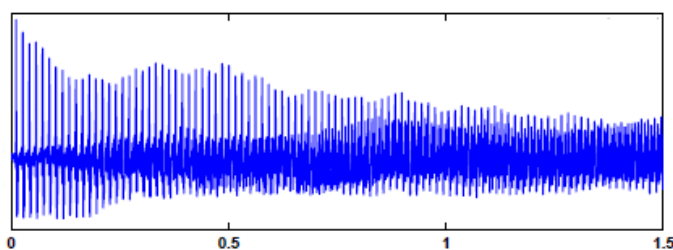
Slika 3.17: Prikaz pomaka linearne žice bez krutosti (u metrima) kroz vrijeme (u sekundama).



Slika 3.18: Prikaz pomaka krute linearne žice (u metrima) kroz vrijeme (u sekundama).



Slika 3.19: Prikaz pomaka krute i nelinearne žice (u metrima) kroz vrijeme (u sekundama).



Slika 3.20: Prikaz egzaktnog pomaka žice (u metrima) kroz vrijeme (u sekundama).

Dakle, iz ovih grafova uočavamo koliko uzimanje krutosti u obzir doprinosi realističnijem prikazu pomaka žice. Iz slike (3.18) uočavamo da čak i kada su zanemareni longitudinalni valovi, ali žica je kruta, već dobivamo pomak žice jako sličan egzaktnom pomaku.

# Bibliografija

- [1] I. Aganović i K. Veselić, *Linearne diferencijalne jednačbe*, Element, 1997.
- [2] J. Chabassier, *Modelisation et simulation numerique d'un piano par modeled physiques*, *Ecole doctorale de l'Ecole Polytechnique*, (2012).
- [3] B. Stanković, *Projekt klavir - kroz povijest i građu*, (2011), <https://apps.unizg.hr/rektorova-nagrada/javno/stari-radovi/1182/preuzmi>, (pristupljeno 6. veljače 2020.).
- [4] A. Stulov, *Physical modelling of the piano string scale*, (2007).

# Sažetak

Klavir je instrument s vrlo bogatom glazbenom literaturom, a sama konstrukcija i izrada klavira je vrlo zahtjevna i skupa. Razvojem računala započeo je i razvoj softverskih alata za simuliranje glazbenih instrumenata koji su cjenovno pristupačniji. Svi softverski alati za podlogu imaju određeni matematički model.

U ovom radu predstavljena su 4 različita modela klavirske žice, to su redom valna jednažba, Euler-Bernoullijev model, Timošenkov model i geometrijski egzaktan model. Modeli prikazuju kako uzimanjem različitih pretpostavki za klavirsku žicu dobivamo različite rezultate, te kako ključnu ulogu ima pretpostavka krutosti žice kojom postizemo neharmoničan spektar koji rezultira realističnijim (nesintetičkim) zvukom. Analizom nekih softverskih alata uočavamo da je simulacija glazbenih instrumenata značajno napredovala, međutim idealno rješenje još uvijek nije postignuto tako da je istraživanje i dalje otvoreno.

# Summary

The piano is an instrument with a vast musical literature, but the construction and production of the piano is very demanding and expensive. With the development of computers, the development of software tools for simulating musical instruments, that are more affordable, has begun. All software tools are based on a specific mathematical model.

This paper presents 4 different models of piano strings, namely the wave equation, the Euler-Bernoulli model, the Tymoshenko model and the geometrically exact model. The models show that by taking different assumptions for the piano string, we get different results, also they show how crucial is the assumption of the stiffness of the string which produces a non-harmonic spectrum that results in a more realistic (non-synthetic) sound. Analyzing some software tools, we can see that the simulation of musical instruments has progressed significantly, however, the ideal solution has not yet been reached, so the research is still open.

# Životopis

Iva Sokač, rođena je 5. rujna 1994. godine u Zagrebu. Osnovnu školu je pohađala u Velikoj Gorici te svoje srednjoškolsko obrazovanje nastavlja u Zagrebu. Također, završava osnovnu i srednju glazbenu školu u Velikoj Gorici, smjer klavir. U ljetu 2014. upisuje preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija, u ljetu 2017. godine upisuje diplomski studij Primijenjene matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Tokom studija osvaja 3. nagradu na Case Study Competition-u 2019. godine.