Koopmanov operator i numerička spektralna analiza dinamičkih sustava

Vazdar, Vlatka

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Vlatka Vazdar

KOOPMANOV OPERATOR I NUMERIčKA SPEKTRALNA ANALIZA DINAMIčKIH SUSTAVA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Zlatko Drmač

Zagreb, veljača 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Sve sretne obitelji nalikuju jedna na drugu. Svaka nesretna obitelj nesretna je na svoj način.

Lav Nikolajevič Tolstoj, "Ana Karenjina"

Ovu poznatu misao možemo interpretirati i u kontekstu dinamičkih sustava: svi linearni dinamički sustavi nalikuju jedan drugome, a svaki nelinearni dinamički sustav nelinearan je na svoj način. Upravo je zbog toga prirodna težnja da nelinearne dinamičke sustave na neki način uspijemo prevesti u linearne, čime se interpretacija sustava iz podataka te predikcija ponašanja u budućnosti svode na poznate i rješive probleme. Jedan je od načina takvog prevođenja promatranje Koopmanovog operatora, koji opisuje ponašanje funkcija prostora stanja, te Perron-Frobeniusovog operatora, koji opisuje ponašanje vjerojatnosnih distribucija prostora stanja pri djelovanju danog dinamičkog sustava. Ovi su operatori linearni, ali i beskonačnodimenzionalni. Budući da su primjene dinamičkih sustava brojne, metode aproksimacije ovih operatora važan su alat u mnogim područjima, primjerice mehanici fluida, molekularnoj dinamici, meteorologiji i ekonomiji.

U ovom se radu bavimo različitim aspektima teorije Koopmanovih i Perron-Frobeniusovih operatora: operatorskim svojstvima, svojstvima spektra, metodama za njihovu numeričku aproksimaciju, konvergencijom tih metoda te primjenama metoda. Rad se sastoji od tri poglavlja.

Prvo poglavlje počinjemo definiranjem Perron-Frobeniusovog operatora $\mathcal{P}$ pridruženog preslikavanju Φ na prostoru $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Opravdavamo definiciju na $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ te komentiramo kada se može proširiti, odnosno restringirati na prostore $L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Dokazujemo vezu između ergodičnosti transformacije Φ i jedinstvenosti stacionarne gustoće operatora $\mathcal{P}$. Dokazujemo da je $\mathcal{P}$ parcijalna izometrija na $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ te komentiramo osnovna svojstva spektra. Nakon toga definiramo Koopmanov operator $\mathcal{K}$ pridružen preslikavanju Φ, koji je prirodno definiran na $L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Isto kao i za Perron-Frobeniusov operator, komentiramo definiranost i ograničenost na $L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ prostorima te dokazujemo da je parcijalna izometrija na $L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Komentiramo invertibilnost i svojstva točkovnog spektra.

Nadalje, dokazujemo dualnost Koopmanovog i Perron-Frobeniusovog operatora i posljedice. Za dinamičke sustave s neprekidnim vremenom, definiramo pridruženu Koopmanovu i Perron-Frobeniusovu familiju, odnosno polugrupu operatora. Uvodimo pojam generatora familije i komentiramo dovoljne uvjete pod kojima je Koopmanovu i Perron-Frobeniusovu familiju moguće opisati generatorom. U slučaju kada je sustav zadan običnim diferencijalnim jednadžbama, generatore izvodimo eksplicitno. Također, pokazujemo povezanost svojstvenih vrijednosti i funkcija Koopmanovog operatora i geometrijski bitnih podskupova prostora stanja.

U drugom poglavlju bavimo se numeričkom aproksimacijom Perron-Frobeniusovog i Koopmanovog operatora. Nakon definicije općenitih Galerkinovih metoda, opisujemo Ulamovu metodu, kojoj je ideja diskretizirati prostor stanja te ga promatrati kao Markovljev lanac s konačnim prostorom stanja. Zatim definiramo proširenu dinamičku modalnu dekompoziciju (engl. *Extended Dynamic Mode Decomposition*, EDMD), koja aproksimira Koopmanov operator na nekom konačnodimenzionalnom potprostoru funkcija, razapetom danim rječnikom. Definiramo i posebnu vrstu EDMD metode, gEDMD, kojom se, za dinamički sustav s neprekidnim vremenom, aproksimira generator pripadajuće Koopmanove polugrupe. Dokazujemo i konvergenciju Ulamove i EDMD metode uz neke dodatne pretpostavke te ističemo sličnosti i razlike među pristupima.

Treće poglavlje posvećeno je primjerima na kojima pokazujemo mogućnosti danih metoda. U prvom primjeru promatramo linearni sustav s diskretnim vremenom te na njemu testiramo aproksimacije (analitički poznatih) svojstvenih funkcija i invarijantne mjere sustava dobivene EDMD i Ulamovom metodom. Drugi je primjer sustav s neprekidnim vremenom, u kojem također možemo analitički odrediti svojstvene funkcije Koopmanove familije. Na njemu radimo aproksimacije svojstvenih funkcija i predikciju trajektorija pomoću EDMD i gEDMD metode. Treći je primjer kaotični Lorenzov sustav, čije ponašanje, invarijantne mjere i metastabilna stanja pokušavamo predvidjeti navedenim metodama. Četvrti je sustav visoke dimenzionalnosti u kojem nam pozadinski model nije poznat, čije ponašanje također pokušavamo rekonstruirati i predvidjeti EDMD i gEDMD metodom.

Htjela bih zahvaliti svojim roditeljima i sestri koji su podržavali moju ljubav prema matematici tijekom cijelog mog školovanja. Također, zahvaljujem mentoru profesoru Drmaču na vodstvu i savjetima prilikom izrade ovog rada. Naposlijetku, želim zahvaliti svim kolegama i prijateljima koji su mi uljepšali razdoblje studiranja.

Poglavlje 1

Perron-Frobeniusov i Koopmanov operator

1.1 Perron-Frobeniusov operator

Neka je $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ prostor s mjerom, pri čemu je μ σ-konačna mjera. U daljnjem tekstu podrazumijeva se da sve jednakosti i nejednakosti vezane uz funkcije definirane na prostoru s mjerom $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ vrijede μ-g.s. Sa $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ tada označavamo prostor klasa ekvivalencija (s obzirom na relaciju μ-g.s. jednakosti) svih izmjerivih funkcija koje su μ-integrabilne.

Također, kad govorimo o realnim (ili kompleksnim) funkcijama na $\mathcal{X}$, pojam **izmjeriva funkcija** odnosi se na Borel izmjerive funkcije, odnosno takve da je $f^{-1}(U) \in \Sigma$ za sve otvorene skupove $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, odnosno $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$.
Većina rezultata iz ovog poglavlja može se naći u [3].

1.1.1 Markovljevi operatori

Definicija 1.1.1. *Neka je $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi:*

$$f \in L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu), \;\; f \geq 0, \;\; \|f\| = 1$$

Tada f nazivamo gustoćom. Neka je $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ skup svih gustoća na prostoru s mjerom $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$.

Definicija 1.1.2. *Linearni operator $\mathcal{P} : L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \to L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ je Markovljev operator ako vrijedi $\mathcal{P}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$.*

U sljedećoj propoziciji dana su osnovna svojstva Markovljevih operatora. Uređaj $f \geq g$ označava $f(x) \geq g(x)$, $x \in \mathcal{X} \setminus E$, $\mu(E) = 0$.

Propozicija 1.1.3. *(Svojstva Markovljevih operatora) Neka je $\mathcal{P}$ Markovljev operator na $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, te neka su $f, g \in L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Tada vrijedi:*

1. *ako je $f \geq 0$, tada je $\mathcal{P}f \geq 0$*
2. *ako je $f \geq g$, tada je $\mathcal{P}f \geq \mathcal{P}g$*
3. $(\mathcal{P}f)^+ \leq \mathcal{P}(f^+)$
4. $(\mathcal{P}f)^- \leq \mathcal{P}(f^-)$
5. $|\mathcal{P}f| \leq \mathcal{P}|f|$
6. $\|\mathcal{P}f\| \leq \|f\|$

Zadnja tvrdnja prethodne propozicije dokazuje ograničenost, a time i neprekidnost Markovljevih operatora. Štoviše, svaki Markovljev operator je kontrakcija.

Sljedeće propozicije daju uvjete pod kojima je funkcija f stacionarna točka operatora $\mathcal{P}$.

Propozicija 1.1.4. *Neka je $f \in L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ i neka je $\mathcal{P} : L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \to L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ Markovljev operator. Tada je $\|\mathcal{P}f\| = \|f\|$ ako i samo ako $\mathcal{P}(f^+)$ i $\mathcal{P}(f^-)$ imaju g.s. disjunktne nosače.*

Propozicija 1.1.5. *Neka je $f \in L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ i neka je $\mathcal{P} : L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \to L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ Markovljev operator. Tada je $\mathcal{P}f = f$ ako i samo ako je $\mathcal{P}(f^+) = f^+$ i $\mathcal{P}(f^-) = f^-$.*

Prethodna je propozicija korisna jer govori da, ako postoji integrabilna funkcija f takva da je $\mathcal{P}f = f$, postoji i nenegativna integrabilna funkcija, a time i gustoća (dana formulom $\frac{f^+}{\|f^+\|}$), koja je također fiksna točka operatora $\mathcal{P}$.

Definicija 1.1.6. *Neka je $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ prostor mjere i neka je $\mathcal{P}$ Markovljev operator na $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. **Stacionarna gustoća** je bilo koja $f \in \mathcal{D}$ takva da vrijedi $\mathcal{P}f = f$.*

1.1.2 Definicija i osnovna svojstva Perron-Frobeniusovog operatora

Za prostor s mjerom $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ i na njemu definirano izmjerivo preslikavanje Φ željeli bismo definirati operator koji bi opisivao na koji se način vjerojatnosne gustoće definirane na $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ mijenjaju s obzirom na deterministički dinamički sustav zadan preslikavanjem Φ. Za to su nam potrebni neki dodatni uvjeti na preslikavanje Φ, primjerice *nesingularnost*.

Definicija 1.1.7. *Izmjerivo preslikavanje $\Phi : (\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \to (\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ je **nesingularno** ako je $\mu(\Phi^{-1}(A)) = 0$ za svaki $A \in \Sigma$ takav da je $\mu(A) = 0$.*

Drugim riječima, nesingularno preslikavanje ne može preslikati skup pozitivne mjere u zanemariv skup.

Važnu vrstu nesingularnih preslikavanja, čine preslikavanja koja čuvaju mjeru:

Definicija 1.1.8. *Neka je Φ izmjerivo preslikavanje na izmjerivom prostoru $(\mathcal{X}, \Sigma)$. Kažemo da Φ* ***čuva mjeru*** *μ, odnosno da je μ* ***invarijantna mjera za*** *Φ ako vrijedi*

$$\mu(\Phi^{-1}(A)) = \mu(A), \quad A \in \Sigma.$$

Napomena 1.1.9. *Zbog Dynkinovog teorema vrijedi da je dovoljno provjeriti da Φ čuva mjeru na nekom generirajućem π-sustavu za Σ. Dokaz Dynikovog teorema može se naći u skripti kolegija Mjera i integral.*

Ako je Φ nesingularno preslikavanje te ako definiramo $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}$ kao mjeru takvu da je $\nu(A) := \mu(\Phi^{-1}(A))$, tada je mjera ν apsolutno neprekidna u odnosu na μ. Ako je ν σ-konačna mjera, prema Radon-Nikodymovom teoremu, tada postoji jedinstvena funkcija $h : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ takva da je $\nu(A) = \int_A h \, d\mu$.

Od sada nadalje pretpostavljat ćemo da je Φ takva transformacija da je mjera ν σ-konačna.

Neka je sada Φ nesingularno preslikavanje i $f \in L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Za tu funkciju možemo definirati realnu mjeru μ_f:

$$\mu_f(A) := \int_{\Phi^{-1}(A)} f \, d\mu.$$

Ovako definirana mjera je apsolutno neprekidna u odnosu na gore definiranu mjeru ν, a time i apsolutno neprekidna u odnosu na μ. Slijedi da postoji jedinstvena funkcija $\hat{f} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi:

$$\mu_f(A) = \int_{\Phi^{-1}(A)} f \, d\mu = \int_A \hat{f} \, d\mu.$$

Na ovaj način možemo definirati **jedinstveno** preslikavanje $f \mapsto \hat{f}$ koje formaliziramo u sljedećoj definiciji:

Definicija 1.1.10. *Operator $\mathcal{P}_\Phi : L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \to L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ definiran relacijom*

$$\int_{\Phi^{-1}(A)} f \, d\mu = \int_A \mathcal{P}_\Phi f \, d\mu \tag{1.1}$$

nazivamo ***Perron-Frobeniusov operator*** *pridružen preslikavanju Φ.*

U sljedećoj nam je napomeni cilj provjeriti da su Perron-Frobeniusovi operatori posebna vrsta Markovljevih operatora. Prije napomene navest ćemo tehničku lemu iz koje će slijediti svojstva 1 i 4.

Lema 1.1.11. *Neka su $f, g \in L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ takve da vrijedi:*

$$\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu, \qquad A \in \Sigma.$$

Tada je $f = g$ μ-g.s.

Napomena 1.1.12. *Neka je $\mathcal{P}$ Perron-Frobeniusov operator pridružen nesingularnom preslikavanju Φ. Tada vrijedi:*

1. *$\mathcal{P}$ je linearan operator.*

$$\int_A \mathcal{P}(af_1 + bf_2) \, d\mu = \int\limits_{\Phi^{-1}(A)} (af_1 + bf_2) \, d\mu = a \int\limits_{\Phi^{-1}(A)} f_1 \, d\mu + b \int\limits_{\Phi^{-1}(A)} f_2 \, d\mu =$$
$$a \int_A \mathcal{P} f_1 \, d\mu + b \int_A \mathcal{P} f_2 \, d\mu = \int_A (a\mathcal{P} f_1 + b\mathcal{P} f_2) \, d\mu.$$

2. *$\mathcal{P}$ je pozitivan operator, tj. $f \geq 0$ (g.s.) povlači $\mathcal{P} f \geq 0$ (g.s.).*
   Pretpostavimo suprotno, i neka je $E := \{x \in \mathcal{X} : \mathcal{P} f(x) < 0\}$. Prema pretpostavci je $\mu(E) > 0$, a time i $\int_E \mathcal{P} f \, d\mu < 0$. Slijedi da je $\int_{\Phi^{-1}(E)} f \, d\mu < 0$. Kontradikcija.

3. *$\int_{\mathcal{X}} \mathcal{P} f \, d\mu = \int_{\mathcal{X}} f \, d\mu$ (trivijalno).*

4. *$\mathcal{P}_{\Phi_1 \circ \Phi_2} = \mathcal{P}_{\Phi_1} \mathcal{P}_{\Phi_2}$. Posebno, $\mathcal{P}_{\Phi^n} = (\mathcal{P}_\Phi)^n$.*

$$\int\limits_A \mathcal{P}_{\Phi_1 \circ \Phi_2} f \, d\mu = \int\limits_{\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}(A)} f \, d\mu = \int\limits_{\Phi_2^{-1}(\Phi_1^{-1}(A))} f \, d\mu = \int\limits_{\Phi_1^{-1}(A)} \mathcal{P}_{\Phi_2} f \, d\mu = \int\limits_A \mathcal{P}_{\Phi_1} \mathcal{P}_{\Phi_2} f \, d\mu.$$

Preostaje još komentirati kada Perron-Frobeniusov operator možemo promatrati na $\mathbb{B}(L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu))$ za $1 < p \leq \infty$. Ispostavlja se da na prostoru konačne mjere (gdje vrijedi $L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \subseteq L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \subseteq L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ za $1 < p < \infty$), za dovoljno dobra preslikavanja, Perron-Frobeniusov operator "čuva" p-integrabilnost.

Prvo dokazujemo općenitu tvrdnju za $p = \infty$:

Lema 1.1.13. *Neka je $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ prostor σ-konačne mjere, $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ izmjerivo preslikavanje za koje vrijedi $\mu(\Phi^{-1}(A)) \leq b\mu(A)$, $A \in \Sigma$ za neki $b > 0$ te neka je $\mathcal{P}$ Perron-Frobeniusov operator pridružen preslikavanju Φ. Tada vrijedi:*

$$\|\mathcal{P}f\|_\infty \leq b\,\|f\|_\infty\,.$$

Dokaz. Neka je $a \in \mathbb{R}$ te neka je $A = \{|\mathcal{P}f| \geq a\}$. Vrijedi (primijetimo $|\mathcal{P}f| \leq \mathcal{P}|f| \leq \mathcal{P}(\|f\|_\infty)\mathbf{1}$):

$$a\mu(A) \leq \int_A |\mathcal{P}f|\,d\mu \leq \|f\|_\infty \int_A \mathcal{P}\mathbf{1}\,d\mu = \|f\|_\infty \int_{\Phi^{-1}(A)} \mathbf{1}\,d\mu = \|f\|_\infty\,\mu(\Phi^{-1}(A)) \leq b\,\|f\|_\infty\,\mu(A).$$

Dakle, ako je $\infty > \mu(A) > 0$, slijedi $a \leq b\,\|f\|_\infty$.

Preostaje komentirati slučaj kada je $\mu(A) = \infty$. Budući da vrijedi $\mathcal{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, pri čemu je $\mu(B_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, tada za $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cap A)$ postoji k t.d. je $\mu(B_k \cap A) > 0$. Budući da sve nejednakosti u gornjoj jednadžbi vrijede za $B_k \cap A$, tvrdnja $a \leq b\,\|f\|_\infty$ i dalje vrijedi, pa iz definicije esencijalnog supremuma slijedi $\|\mathcal{P}f\|_\infty \leq b\,\|f\|_\infty$. □

Primijetimo da gornja tvrdnja povlači da je $\mathcal{P}$ kontrakcija na $L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ u slučaju kada μ čuva mjeru.

U dokazu za $1 < p < \infty$ koristit ćemo *Hölderovu nejednakost za pozitivne operatore* (dokaz se može pronaći u [5]):

Teorem 1.1.14. *Neka je $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ prostor s mjerom i neka je $\mathcal{T} : L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \to L^0(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ pozitivan linearan operator, pri čemu s $L^0(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ označavamo skup svih izmjerivih funkcija na $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Tada vrijedi:*

$$|\mathcal{T}(f\,g)| \leq (\mathcal{T}|f|^p)^{\frac{1}{p}}(\mathcal{T}|g|^q)^{\frac{1}{q}},$$

za sve $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ te $f \in L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, $g \in L^q(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$.

Teorem 1.1.15. *Neka je $\mathcal{P}$ Perron-Frobeniusov operator na $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ pridružen preslikavanju Φ za koje vrijedi $\mu(\Phi^{-1}(A)) \leq b\mu(A)$, $A \in \Sigma$ za neki $b > 0$. Tada vrijedi:*

$$\|\mathcal{P}f\|_p \leq C\,\|f\|_p \quad f \in L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \cap L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu),$$

za neki $C > 0$ te za svaki $1 \leq p \leq \infty$. Posebno, ako Φ čuva mjeru, tada je $C = 1$, odnosno $\mathcal{P}$ je kontrakcija na $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \cap L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, za sve $1 \leq p \leq \infty$.

Dokaz. Prema prethodno dokazanoj propoziciji vrijedi $\mathcal{P}\chi_A \leq \mathcal{P}\mathbf{1} \leq b$. Neka je $f \in L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \cap L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ takva da je skup $A := \{f \neq 0\}$ konačne mjere. Stoga po Hölderovoj nejednakosti vrijedi:

$$|\mathcal{P}f|^p = |\mathcal{P}f\chi_A|^p \leq \mathcal{P}|f|^p(\mathcal{P}|\chi_A|^q)^{\frac{p}{q}} = \mathcal{P}|f|^p(\mathcal{P}\chi_A)^{\frac{p}{q}} \leq b^{\frac{p}{q}}\mathcal{P}|f|^p.$$

Integriranjem slijedi:

$$\|\mathcal{P}f\|_p^p \leq b^{\frac{p}{q}} \,\|\mathcal{P}|f|^p\|_1 \leq b^{\frac{p}{q}} \,\||f|^p\|_1 \leq b^{\frac{p}{q}} \,\|f\|_p^p .$$

odnosno $\|\mathcal{P}f\|_p \leq b^{\frac{1}{q}} \|f\|_p$. Budući da se svaka funkcija iz $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \cap L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ može zapisati kao limes funkcija iz $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \cap L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ s nosačima konačne mjere, tvrdnja je dokazana. □

Sljedeći primjer pokazat će da u slučaju kad ne vrijedi svojstvo iz prethodnog teorema Perron-Frobeniusov operator doista ne preslikava p-integrabilne funkcije u p-integrabilne funkcije.

Primjer 1.1.16. Neka je $\mathcal{X} = \mathbb{R}^+$ sa standardnom Lebesgueovom mjerom i Borelovom σ-algebrom i neka je $\Phi(x) = \sqrt{x}$. Tada je pridruženi Perron-Frobeniusov operator zadan formulom $\mathcal{P}f(x) = 2xf(x^2)$. Provjerimo to (neka je $g(x) := 2xf(x^2)$):

$$\int_{\langle a,b\rangle} g \, d\mu = \int_a^b f(x^2)2x \, dx = \int_{a^2}^{b^2} f(y) \, dy = \int_{\Phi^{-1}(\langle a,b\rangle)} f \, d\mu = \int_{\langle a,b\rangle} \mathcal{P}f \, d\mu,$$

pri čemu smo koristili standardnu zamjenu varijabli za Riemannov integral.

Neka je sada $f(x) = x^a$ za neki $a \in \mathbb{R}$, tada je $\mathcal{P}f(x) = 2x^{2a+1}$. Poznato nam je da u ovom slučaju vrijedi $x^a \in L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \iff pa < -1$. Sada za npr. $p = 10, a = -0.2$, vrijedi $x^a \in L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, ali $x^{2a+1} \notin L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ (jer je $pa = -5$, ali $p(2a + 1) = 6$). Dakle, Perron-Frobeniusov operator u ovom slučaju ne čuva p-integrabilnost.

Naravno, $\mu(\Phi^{-1}(\langle a, b\rangle)) = \mu(\langle a^2, b^2\rangle) = b^2 - a^2$, a $\frac{b-a}{b^2-a^2} = \frac{1}{a+b}$, što nije ograničeno odozgo na $\mathbb{R}^+$; dakle, svojstvo iz prethodnog teorema ne vrijedi.

1.1.3 Ergodičnost i Perron-Frobeniusov operator

U ovom ćemo odjeljku dokazati teorem koji govori o ekvivalenciji ergodičnosti preslikavanja i jedinstvenosti stacionarne gustoće Perron-Frobeniusovog operatora pridruženog tom preslikavanju. Definirajmo najprije ergodsko preslikavanje:

Definicija 1.1.17. *Neka je Φ izmjerivo preslikavanje na $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ i neka je $A \in \Sigma$. Kažemo da je skup A Φ* ***-invarijantan*** *ako vrijedi $\Phi^{-1}(A) = A$.*
Kažemo da je preslikavanje Φ ***ergodsko*** *ako za svaki Φ-invarijantan skup A vrijedi $\mu(A) = 0$ ili $\mu(A^c) = 0$.*

Prije dokaza glavnog rezultata dokazat ćemo teorem o povezanosti Φ-invarijantnih mjera i fiksnih točaka pripadajućeg Perron-Frobeniusovog operatora za nesingularno preslikavanje Φ te propoziciju koja govori o povezanosti nosača funkcije $f \geq 0$ i nosača njezine slike $\mathcal{P}f$.

Teorem 1.1.18. *Neka je $\mathcal{P}$ Perron-Frobeniusov operator pridružen nesingularnom preslikavanju $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ i neka je $f \in L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ nenegativna funkcija. Konačna mjera μ_f definirana s $\mu_f(A) := \int_A f \, d\mu$ je invarijantna za Φ ako i samo ako je $\mathcal{P}f = f$.*

Dokaz.

$$\mu_f(A) = \int_A f \, d\mu.$$

$$\mu_f(\Phi^{-1}(A)) = \int_{\Phi^{-1}(A)} f \, d\mu = \int_A \mathcal{P}f \, d\mu.$$

Iz gornjih jednakosti trivijalno slijedi jedan smjer, a uz pomoć leme 1.1.11 i drugi. □

Propozicija 1.1.19. *Neka je $A \in \Sigma$ i $f \geq 0$. Tada vrijedi:*

$$f\chi_{\Phi^{-1}(A)} = 0 \iff \mathcal{P}f\chi_A = 0.$$

Posebno, vrijedi:

$$\Phi^{-1}(\operatorname{supp} \mathcal{P}f) \supset \operatorname{supp} f.$$

Dokaz. Zbog nenegativnosti funkcija $f\chi_{\Phi^{-1}(A)}$ i $\mathcal{P}f\chi_A$ vrijedi:

$$f\chi_{\Phi^{-1}(A)} = 0 \iff \int_X f\chi_{\Phi^{-1}(A)} \, d\mu = 0 \iff \int_{\Phi^{-1}(A)} f \, d\mu = 0$$
$$\iff \int_A \mathcal{P}f \, d\mu = 0 \iff \int_X \mathcal{P}f\chi_A \, d\mu = 0 \iff \mathcal{P}f\chi_A = 0.$$

Također, vrijedi:

$$\int_{\operatorname{supp} f} f \, d\mu = \int_X f \, d\mu = \int_X \mathcal{P}f \, d\mu = \int_{\operatorname{supp} \mathcal{P}f} \mathcal{P}f \, d\mu = \int_{\Phi^{-1}(\operatorname{supp} \mathcal{P}f)} f \, d\mu,$$

pa zbog $f \geq 0$ slijedi $\Phi^{-1}(\operatorname{supp} \mathcal{P}f) \supset \operatorname{supp} f$. □

Teorem 1.1.20. *Neka je $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ prostor s mjerom, $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ nesingularna transformacija i $\mathcal{P}$ Perron-Frobeniusov operator pridružen preslikavanju Φ. Ako je Φ ergodsko preslikavanje s obzirom na μ, tada $\mathcal{P}$ ima najviše jednu stacionarnu gustoću. Obratno, ako $\mathcal{P}$ ima jedinstvenu stacionarnu gustoću f^* i f^* je strogo pozitivna na $\mathcal{X}$, tada je Φ ergodska s obzirom na μ i s obzirom na invarijantnu mjeru μ_{f^*}.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\mathcal{P}$ ima dvije različite stacionarne gustoće $f_1 \geq 0$ i $f_2 \geq 0$ i pronađimo skupove koji su Φ invarijantni.
Neka je $A := \{x : f_1(x) > f_2(x)\}$ i $B := \{x : f_1(x) < f_2(x)\}$. Zbog $f_1 \neq f_2$ je $\mu(A \cup B) > 0$, a zbog nenegativnosti i normiranosti dobivamo $\mu(A) > 0$ te $\mu(B) > 0$. Također, ako je $g := f_1 - f_2$, tada vrijedi $\mathcal{P}g = g$, a zbog propozicije 1.1.5 za Markovljeve operatore vrijedi $\mathcal{P}g^+ = g^+$ i $\mathcal{P}g^- = g^-$, što u kombinaciji s prethodnom propozicijom daje $A \subset \Phi^{-1}(A)$, jer je $A = \operatorname{supp} g^+$ te $B \subset \Phi^{-1}(B)$, jer je $B = \operatorname{supp} g^-$.

Dakle, vrijedi:

$$A \subset \Phi^{-1}(A) \subset \Phi^{-2}(A) \subset \cdots \subset \Phi^{-n}(A) \subset \ldots$$
$$B \subset \Phi^{-1}(B) \subset \Phi^{-2}(B) \subset \cdots \subset \Phi^{-n}(B) \subset \ldots$$

Budući da je $A \cap B = \emptyset$, vrijedi i $\Phi^{-n}(A) \cap \Phi^{-n}(B) = \emptyset$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ako definiramo $\overline{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Phi^{-n}(A)$, $\overline{B} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Phi^{-n}(B)$, tada vrijedi i $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. Također je $\mu(\overline{A}) \geq \mu(A) > 0$ i $\mu(\overline{B}) \geq \mu(B) > 0$.

Također, vrijedi:

$$\Phi^{-1}(\overline{A}) = \Phi^{-1}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \Phi^{-n}(A)\right) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Phi^{-n-1}(A) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Phi^{-n}(A) = \overline{A},$$

te analogna tvrdnja vrijedi za $\overline{B}$. Dakle, konstruirali smo dva disjunktna Φ-invarijantna skupa pozitivne mjere, što znači da im komplementi ne mogu biti zanemarivi skupovi. Dakle Φ nije ergodsko.

Pretpostavimo sada da je $f^* > 0$ jedinstvena stacionarna gustoća operatora $\mathcal{P}$ i pretpostavimo da Φ nije ergodsko preslikavanje. Tada postoji Φ-invarijantan skup $A \in \Sigma$ takav da je $\mu(A) > 0$ i $\mu(A^c) > 0$ (a zbog stroge pozitivnosti funkcije f^* vrijedi $\mu_{f^*}(A) = 0 \iff \mu(A) = 0$). Tada f^* možemo zapisati kao $f^* = f^*\chi_A + f^*\chi_{A^c}$.

Vrijedi:

$$f^*\chi_A + f^*\chi_{A^c} = f^* = \mathcal{P}f^* = \mathcal{P}(f^*\chi_A) + \mathcal{P}(f^*\chi_{A^c}).$$

Funkcija s lijeve strane je strogo pozitivna, pa je i funkcija s desne strane strogo pozitivna. Iz prethodne propozicije znamo $f\chi_{\Phi^{-1}(A)} = 0 \iff \mathcal{P}(f\chi_A) = 0$, odnosno u ovom slučaju $f^* \chi_{(A)} = 0 \iff \mathcal{P}(f^* \chi_A) = 0$, pa zbog stroge pozitivnosti od f^* vrijedi $A = \operatorname{supp} f^* \chi_A = \operatorname{supp} \mathcal{P}(f^* \chi_A)$ i analogno $A^c = \operatorname{supp} f^* \chi_{A^c} = \operatorname{supp} \mathcal{P}(f^* \chi_{A^c})$. To u kombinaciji s prethodnom jednadžbom daje $\mathcal{P}(f^* \chi_A) = f^* \chi_A$ i $\mathcal{P}(f^* \chi_{A^c}) = f^* \chi_{A^c}$. Budući da su $f^* \chi_A$ i $f^* \chi_{A^c}$ nenegativne integrabilne funkcije, množenjem s prikladnom konstantom možemo ih normirati i dobiti dvije različite stacionarne gustoće od $\mathcal{P}$, što je u kontradikciji s pretpostavkom.

□

1.1.4 Teorem o dekompoziciji

U ovom odjeljku dokazat ćemo da je Perron-Frobeniusov operator parcijalna izometrija na $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, odnosno izometrija na $L^1(\mathcal{X}, \Phi^{-1}\Sigma, \mu)$.

Kako bismo to pokazali, bit će nam potrebno *uvjetno očekivanje*:

Definicija 1.1.21. *Neka je $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ prostor s mjerom, $\mathcal{G} \subset \Sigma$ σ-algebra, te neka je $f \in L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$.* ***Uvjetno očekivanje*** *funkcije f s obzirom na $\mathcal{G}$ je jedinstvena funkcija $\tilde{f} \in L^1(\mathcal{X}, \mathcal{G}, \mu)$ za koju vrijedi:*

$$\int_A \tilde{f}\, d\mu = \int_A f\, d\mu, \quad A \in \mathcal{G}$$

Preslikavanje $\mathcal{E}_{\mathcal{G}} : L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \to L^1(\mathcal{X}, \mathcal{G}, \mu)$ definirano kao $\mathcal{E} f = \tilde{f}$ je linearni operator koji zovemo ***operator uvjetnog očekivanja s obzirom na $\mathcal{G}$****.*

Iz svojstava uvjetnog očekivanja znamo da je $\mathcal{E} f \geq 0$ za $f \geq 0$ te da je $\|\mathcal{E} f\| = \|f\|$, iz čega zaključujemo da je operator uvjetnog očekivanja Markovljev operator. Iz toga slijedi $\|\mathcal{E} f\| \leq \|f\|$. Također, iz svojstava uvjetnog očekivanja znamo da vrijedi $E f = f$ ako i samo ako je $f \in L^1(\mathcal{X}, \mathcal{G}, \mu)$. Dakle, E je zapravo projektor s $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ na $L^1(\mathcal{X}, \mathcal{G}, \mu)$ te je $\|\mathcal{E}\| = 1$. Zbog toga vrijedi: $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) = \operatorname{Im}(\mathcal{E}) \oplus \operatorname{Ker}(\mathcal{E})$

Za dokaz teorema o dekompoziciji, promatrat ćemo operator uvjetnog očekivanja s obzirom na σ-algebru $\Phi^{-1}\Sigma$. Prvo navodimo lemu koja karakterizira $\Phi^{-1}\Sigma$-izmjerive funkcije.

Sjetimo se da smo za nesingularno preslikavanje Φ definirali mjeru $\nu = \mu \circ \Phi^{-1}$. Ta je mjera apsolutno neprekidna u odnosu na μ, te postoji jedinstvena funkcija $h : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ takva da je $\nu(A) = \int_A h\, d\mu$.

Lema 1.1.22. *Vrijedi da je $f \in L^1(\mathcal{X}, \Phi^{-1}\Sigma, \mu)$ ako i samo ako je $f = g \circ \Phi$ za neki $g \in L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \nu)$. Nadalje, ako je $f = g \circ \Phi$, tada vrijedi $\|f\|_\mu = \|g\|_\nu$, odnosno preslikavanje $f \mapsto g$ je izometrički izomorfizam prostora $L^1(\mathcal{X}, \Phi^{-1}\Sigma, \mu)$ i $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \nu)$.*

Dokaz. Ako je $f = g \circ \Phi$ za neki $g \in L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \nu)$, tada je $f^{-1}(A) = \Phi^{-1}(g^{-1}(A)) \in \Phi^{-1}\Sigma, \quad A \in \Sigma$, dakle f je $\Phi^{-1}\Sigma$-izmjeriva. Također, vrijedi:

$$\|f\|_\mu = \int_{\mathcal{X}} |f| \, d\mu = \int_{\mathcal{X}} |g| \circ \Phi \, d\mu = \int_{\mathcal{X}} |g| \, d\nu = \|g\|_\nu$$

iz čega slijedi da je tada $f \in L^1(\mathcal{X}, \Phi^{-1}\Sigma, \mu)$.
Neka je sad $f \in L^1(\mathcal{X}, \Phi^{-1}\Sigma, \mu)$. Treba pokazati da tada postoji $g \in L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \nu)$ takva da je $f = g \circ \Phi$. Ako je $f = \chi_A$ za neki $A \in \Phi^{-1}\Sigma$, tada je $g = \chi_B$, gdje je $B \in \Sigma$ takav da vrijedi $\Phi^{-1}(B) = A$. Primjenom Lebesgueove indukcije, tvrdnja vrijedi za sve $f \in L^1(\mathcal{X}, \Phi^{-1}\Sigma, \mu)$. □

Sada smo spremni dokazati Ding-Honorov teorem o dekompoziciji.

Teorem 1.1.23. *Neka je $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ prostor s mjerom te neka je $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ nesingularna transformacija takva da je prostor $(\mathcal{X}, \Phi^{-1}\Sigma, \mu)$ σ-konačan i neka je $\mathcal{P} : L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \to L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ Perron-Frobeniusov operator pridružen preslikavanju Φ. Tada vrijedi:*

$$L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) = \mathrm{Ker}(\mathcal{P}) \oplus L^1(\mathcal{X}, \Phi^{-1}\Sigma, \mu)$$

te je $\mathcal{P}$ izometrija na $L^1(\mathcal{X}, \Phi^{-1}\Sigma, \mu)$, odnosno $\mathcal{P}$ je parcijalna izometrija.

Dokaz. Dokažimo prvo $\mathrm{Ker}(\mathcal{E}) \subset \mathrm{Ker}(\mathcal{P})$.
Neka je $f \in L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Prema definiciji operatora $\mathcal{E}$, za svaki $A \in \Sigma$ vrijedi:

$$\int_A \mathcal{P}(f - \mathcal{E}f) \, d\mu = \int_{\Phi^{-1}(A)} f \, d\mu - \int_{\Phi^{-1}(A)} \mathcal{E}f \, d\mu = 0$$

Dakle, $\mathcal{P}f = \mathcal{P}\mathcal{E}f$, pa vrijedi $\mathrm{Ker}(\mathcal{E}) \subset \mathrm{Ker}(\mathcal{P})$.

Dokazat ćemo da vrijedi $\|\mathcal{P}f\|_\mu = \|f\|_\mu$ za sve $f \in L^1(\mathcal{X}, \Phi^{-1}\Sigma, \mu)$, iz čega slijedi $\mathrm{Ker}(\mathcal{P}) \cap L^1(\mathcal{X}, \Phi^{-1}\Sigma, \mu) = \mathrm{Ker}(\mathcal{P}) \cap \mathrm{Im}(\mathcal{E}) = \{0\}$. Iz toga će, zbog $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) = \mathrm{Ker}(\mathcal{E}) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{E})$ slijediti $\mathrm{Ker}(\mathcal{P}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{E})$ i $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) = \mathrm{Ker}(\mathcal{P}) \oplus L^1(\mathcal{X}, \Phi^{-1}\Sigma, \mu)$ te da je $\mathcal{P}$ parcijalna izometrija.

Neka je $f \in L^1(\mathcal{X}, \Phi^{-1}\Sigma, \mu)$. Iz prethodne leme znamo da je $f = g \circ \Phi$ za neki $g \in L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \nu)$. Sada vrijedi:

$$\int_A \mathcal{P}f \, d\mu = \int_{\Phi^{-1}(A)} f \, d\mu = \int_{\Phi^{-1}(A)} g \circ \Phi \, d\mu = \int_A g \, d\nu = \int_A gh \, d\mu \quad A \in \Sigma$$

iz čega možemo zaključiti:

$$\mathcal{P}f = gh \tag{1.2}$$

pri čemu je h gore definirana Radon-Nikodymova derivacija mjere ν u odnosu na μ.

Sada je $\|\mathcal{P}f\|_\mu = \|gh\|_\mu = \|g\|_\nu = \|f\|_\mu$, kako smo dokazali u prethodnoj lemi, čime je tvrdnja dokazana.

□

Korolar 1.1.24. *Slika Perron-Frobeniusovog operatora $\mathcal{P}$ je zatvorena.*

Promotrimo jednakost 1.2 u slučaju kada je Φ invertibilno preslikavanje. Jednostavno se pokazuje da je tada $\Phi^{-1}(\Sigma) = \Sigma$ te očito za $g := f \circ \Phi^{-1}$ vrijedi $f = g \circ \Phi$. Time gornja formula postaje:

$$\mathcal{P}f(x) = f(\Phi^{-1}(x))h(x) \tag{1.3}$$

Posebno, za $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ vrijedi poznata formula zamjene varijabli:

$$\mathcal{P}f(x) = f(\Phi^{-1}(x))|\det \nabla\Phi^{-1}(x)| \tag{1.4}$$

1.1.5 Spektar Perron-Frobeniusovog operatora

Iako smo do sada Perron-Frobeniusov operator definirali samo za realne funkcije, jednostavnim se rastavom po linearnosti proširuje na kompleksne funkcije te sva gore navedena svojstva i dalje vrijede.

Za ograničen operator A na Banachovom prostoru *spektar* $\sigma(A)$ definiramo kao skup svih kompleksnih brojeva λ za koje ne postoji ograničen operator inverzan operatoru $A - \lambda I$.

Oznakom $\sigma_p(A)$ označavat ćemo *točkovni spektar*, oznakom $\sigma_r(A)$ *rezidualni spektar*, oznakom $\sigma_c(A)$ *kontinuirani spektar* te oznakom $\sigma_a(A)$ *aproksimativni točkovni spektar*.

Brojeve $\lambda \in \sigma_p(A)$ zvat ćemo *svojstvene vrijednosti*, a pripadne funkcije *svojstvene funkcije*.

Prvo navodimo dvije jednostavne propozicije vezane uz svojstvene vrijednosti, odnosno svojstvene funkcije Perron-Frobeniusovog operatora:

Propozicija 1.1.25. *Neka je f takva da vrijedi $\mathcal{P}f = \lambda f$. Ako je $\lambda \neq 1$, onda je $\int_\mathcal{X} f \, d\mu = 0$.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi trivijalno iz $\int_\mathcal{X} \mathcal{P}f \, d\mu = \int_\mathcal{X} f \, d\mu$.

□

Propozicija 1.1.26. *Ako je $\mathcal{P}$ injekcija i f takva da je $\mathcal{P}f = \lambda f$, tada je $|\lambda| = 1$.*

Dokaz. Iz teorema o dekompoziciji znamo da je $\mathcal{P}$ injekcija ako i samo ako je izometrija. Dakle $\|f\|_1 = \|\mathcal{P}f\|_1 = |\lambda|\,\|f\|_1$, iz čega slijedi tvrdnja. □

Navedimo i dodatnu tvrdnju koja vrijedi za izometrije na Banachovim prostorima:

Teorem 1.1.27. *Neka je $\mathcal{B}$ Banachov prostor i neka je $\mathcal{T} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ izometrija. Tada $0 \in \sigma(\mathcal{T})$ povlači $\sigma(\mathcal{T}) = \mathbb{D}$, a $0 \notin \sigma(\mathcal{T})$ povlači $\sigma(\mathcal{T}) \subset \partial\mathbb{D}$, pri čemu je $\mathbb{D}$ jedinična kugla u $\mathbb{C}$.*

Dakle, za injektivni Perron-Frobeniusov operator znamo opisati spektar.

Spomenimo još tvrdnju koja vrijedi za točkovni spektar Perron-Frobeniusovih operatora. Dokaz se može naći u [8].

Propozicija 1.1.28. *Neka je Φ nesingularno preslikavanje na $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Definirajmo niz σ-algebri $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na sljedeći način $\Sigma_1 := \Sigma$, $\Sigma_{k+1} = \Phi^{-1}\Sigma_k$ i neka je $\Sigma_\infty := \cap_{k=1}^{\infty}\Sigma_k$. Ako je $(\mathcal{X}, \Sigma_\infty)$ prostor σ-konačne mjere, tada je za svaki $k \in \mathbb{N}$ dobro definiran $\mathcal{E}_k$, operator uvjetnog očekivanja s obzirom na Σ_k, te je dobro definiran i $\mathcal{E}_\infty$ operator uvjetnog očekivanja pridružen Σ_∞. Ako niz $\mathcal{E}_k$ jako konvergira prema $\mathcal{E}_\infty$, tada je $\sigma_p(\mathcal{P}) \subset \partial\mathbb{D} \cup \{0\}$.*

1.2 Koopmanov operator

U ovom poglavlju definirat ćemo Koopmanov operator i pokazati na koji je način povezan s prethodno definiranim Perron-Frobeniusovim operatorom te analizirati njegov spektar te povezanost s bitnim elementima u analizi dinamičkih sustava.

1.2.1 Definicija i osnovna svojstva

Definicija 1.2.1. *Neka je $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ prostor mjere te neka je $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ nesingularno preslikavanje. Operator $\mathcal{K}_\Phi : L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \to L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ definiran s:*

$$\mathcal{K}_\Phi f(x) = f(\Phi(x)), \quad x \in \mathcal{X}, f \in L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu), \tag{1.5}$$

nazivamo ***Koopmanov operator*** *pridružen preslikavanju Φ.*

U daljnjem tekstu, ako je preslikavanje Φ jedinstveno određeno kontekstom, koristit ćemo samo oznaku $\mathcal{K}$.

Napomena 1.2.2. *Bitno je naglasiti da je u ovoj definiciji nesingularnost vrlo važna. Naime, iako je djelovanje operatora $\mathcal{K}$ dobro definirano na funkcijama $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, nije a priori jasno da za $f_1 = f_2 \ \mu - g.s.$ nužno vrijedi $\mathcal{K} f_1 = \mathcal{K} f_2 \ \mu - g.s.$. Međutim, vrijedi:*

$$\mu(\{\mathcal{K} f_1 \neq \mathcal{K} f_2\}) = \mu(\{x : f_1(\Phi(x)) \neq f_2(\Phi(x))\}) = \mu(\Phi^{-1}(\{f_1 \neq f_2\})) = 0,$$

pri čemu smo u zadnjoj jednakosti koristili nesingularnost preslikavanja Φ i činjenicu da je $\mu(\{f_1 \neq f_2\}) = 0$.

Napomena 1.2.3. *Koopmanov operator je trivijalno lineran, a zbog*

$$\|\mathcal{K} f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathcal{X}} |\mathcal{K} f(x)| = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathcal{X}} |f(S(x))| \leq \|f\|_\infty$$

je, kao i Perron-Frobeniusov operator, kontrakcija. Također, $\mathcal{K}_{\Phi_1 \circ \Phi_2} = \mathcal{K}_{\Phi_1} \mathcal{K}_{\Phi_2}$, te $\mathcal{K}_{\Phi^n} = (\mathcal{K}_\Phi)^n$. Koopmanov operator je pozitivan u smislu da za $f \geq 0 \ \mu - (g.s.)$ vrijedi $\mathcal{K} f \geq 0 \ \mu - (g.s.)$. U istom je smislu i monoton: za $f \geq g \ \mu - (g.s.)$ vrijedi $\mathcal{K} f \geq \mathcal{K} g \ \mu - (g.s.)$.

Napomena 1.2.4. *Neka je $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ izmjeriv podskup te neka je $\tilde{\Phi} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ nesingularno preslikavanje. Tada možemo definirati* ***generalizirani Koopmanov operator*** *formulom:*

$$\mathcal{K} f(x) = \begin{cases} f(\tilde{\Phi}(x)), & x \in \mathcal{Y} \\ 0, & x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y} \end{cases}.$$

Bitno svojstvo Koopmanovog operatora, koje ćemo često koristiti u dokazima, dano je u sljedećoj lemi:

Lema 1.2.5. *Neka je $\mathcal{K}$ Koopmanov operator pridružen nesingularnom preslikavanju Φ. Tada vrijedi:*

$$\mathcal{K}\chi_A = \chi_{\Phi^{-1}(A)} \quad A \in \Sigma.$$

Dokaz.

$$\mathcal{K}\chi_A(x) = \chi_A(\Phi(x)) = \begin{cases} 1, & \Phi(x) \in A \\ 0, & \Phi(x) \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \in \Phi^{-1}(A) \\ 0, & x \in \Phi^{-1}(A) \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(A)}.$$

□

Dakle, jedno od svojstava Koopmanovog operatora je da karakteristične funkcije skupova preslikava u karakteristične funkcije skupova. Pokazuje se da je, za dovoljno lijepe prostore $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, upravo to svojstvo koje karakterizira Koopmanove operatore među ograničenim operatorima na prostorima $L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$. Kažemo da je $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ **standardni Borelov prostor** ako je $\mathcal{X}$ podskup potpunog separabilnog metričkog prostora, a Σ Borelova σ-algebra. Dokaz ovog teorema može se pronaći u [13].

Teorem 1.2.6. *Neka je $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ standardni Borelov prostor i neka je C skup svih karakterističnih funkcija skupova iz Σ. Neka je $\mathcal{K} \in L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Tada je $\mathcal{K}$ generalizirani Koopmanov operator na $L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ ako i samo ako vrijedi:*

$$\mathcal{K}C^p \subset C^p,$$

pri čemu je $C^p := C \cap L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$.

Korolar 1.2.7. *Neka je $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ standardni Borelov prostor i neka je $\mathcal{K} \in L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Tada je $\mathcal{K}$ generalizirani Koopmanov operator na $L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ ako i samo ako vrijedi $\mathcal{K}(f\,g) = \mathcal{K}f\,\mathcal{K}g$, $f, g \in L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$.*

1.2.2 Teorem o dekompoziciji

U ovom odjeljku iskazat ćemo teorem o dekompoziciji, koji govori da je Koopmanov operator parcijalna izometrija na $L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$.

Uz već korištene oznake $\nu = \mu \circ \Phi^{-1}$, $h := \frac{d\nu}{d\mu}$, prvo navodimo karakterizaciju za $\operatorname{Ker}\mathcal{K}$:

Lema 1.2.8.

$$\operatorname{Ker}\mathcal{K} = \{g \in L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) : \nu(\operatorname{supp} g) = 0\} = \{g \in L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) : \mu(\operatorname{supp} g \cap \operatorname{supp} h) = 0\}.$$

Dokaz. Neka je $\mathcal{K}g = 0$. Po definiciji je tada $\mu(\operatorname{supp} g \circ \Phi) = 0$, odnosno $\mu(\Phi^{-1}(\operatorname{supp} g)) = \nu(\operatorname{supp} g) = \int_{\operatorname{supp} g} h\, d\mu = 0$, što povlači sve tvrdnje.

□

Za $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$, označit ćemo $L^\infty(\mathcal{A}) := L^\infty(\mathcal{A}, \Sigma_{|\mathcal{A}}, \mu)$. Primijetimo da gornja lema povlači $\operatorname{Ker} \mathcal{K} \cong L^\infty((\operatorname{supp} h)^c)$.

Teorem 1.2.9. *Neka je $\mathcal{K} : L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \to L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ Koopmanov operator pridružen nesingularnom preslikavanju Φ. Tada vrijedi:*

$$L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) = \operatorname{Ker} \mathcal{K} \oplus L^\infty(\operatorname{supp} h), \tag{1.6}$$

te je $\mathcal{K}$ izometrija na $L^\infty(\operatorname{supp} h)$.

Dokaz. Za svaki $M \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\mathcal{K} f^{-1}(\langle M, +\infty\rangle) = \{x : (f \circ \Phi)(x) > M\} = \Phi^{-1}(\{x : f(x) > M\}) = \Phi^{-1}(f^{-1}(\langle M, +\infty\rangle)).$$

Slijedi:

$$\mu(\mathcal{K} f^{-1}(\langle M, +\infty\rangle)) = \mu(\Phi^{-1}(f^{-1}(\langle M, +\infty\rangle))) = \nu(f^{-1}(\langle M, +\infty\rangle)) = \int_{f^{-1}(\langle M, +\infty\rangle)} h \, d\mu.$$

Ako bi h bila strogo pozitivna, tada bi gornja jednakost povlačila:

$$\mu(\mathcal{K} f^{-1}(\langle M, +\infty\rangle)) > 0 \iff \mu(f^{-1}(\langle M, +\infty\rangle)) > 0$$

pa bi po definiciji esencijalnog supremuma vrijedilo $\|\mathcal{K} f\|_\infty = \|f\|_\infty$. Odmah zaključujemo da je $\mathcal{K}_{|\operatorname{supp} h}$ izometrija, a zbog prethodne leme je $\mathcal{K}_{|(\operatorname{supp} h)^c} = 0$.

Tvrdnja slijedi jer svaku funkciju f možemo zapisati kao $f = f\chi_{\operatorname{supp} h} + f\chi_{(\operatorname{supp} h)^c}$. □

Korolar 1.2.10. $\operatorname{Im} \mathcal{K}$ *je zatvoren potprostor od $L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$.*

1.2.3 Spektar Koopmanovog operatora

U ovom odjeljku navest ćemo najvažnija svojstva spektra Koopmanovog operatora.

Za svojstvene vrijednosti i funkcije Koopmanovog operatora, vrijedi sljedeća jednostavna propozicija:

Propozicija 1.2.11. *Neka je $\mathcal{K} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ Koopmanov operator pridužen preslikavanju Φ na prostoru $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, pri čemu je $\mathcal{F}$ bilo koji potprostor skupa $\{f : f : \mathcal{X} \to \mathbb{C}\}$ koji sadrži konstantne funkcije i zatvoren je na množenje (po točkama). Tada je skup svih svojstvenih funkcija operatora $\mathcal{K}$, s operacijom množenja po točkama, Abelov monoid. Točnije, ako su $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ svojstvene funkcije operatora $\mathcal{K}$ sa svojstvenim vrijednostima λ_1 i λ_2, tada je $f_1 f_2$ svojstvena funkcija operatora $\mathcal{K}$ sa svojstvenom vrijednosti $\lambda_1 \lambda_2$.*

Dokaz.

$$\mathcal{K}(f_1 f_2)(x) = f_1(\Phi(x)) f_2(\Phi(x)) = \mathcal{K} f_1(x) \mathcal{K} f_2(x), \quad x \in \mathcal{X}.$$

Dakle, $\mathcal{K}(f_1 f_2) = \mathcal{K} f_1 \mathcal{K} f_2$. Ako su f_1 i f_2 svojstvene funkcije sa svojstvenim vrijednostima λ_1 i λ_2, vrijedi:

$$K(f_1 f_2) = \mathcal{K} f_1 \mathcal{K} f_2 = \lambda_1 f_1 \lambda_2 f_2 = \lambda_1 \lambda_2 (f_1 f_2),$$

čime je tvrdnja dokazana.

□

Gornja propozicija govori nam da je točkovni spektar Koopmanovog operatora zatvoren na množenje. Također, primijetimo da su konstantne funkcije uvijek svojstvene funkcije Koopmanovog operatora sa svojstvenom vrijednosti 1.

Primjer 1.2.12. (Koopmanov operator za linearni dinamički sustav u diskretnom vremenu) Promotrimo linearni dinamički sustav $x_{k+1} = M x_k$, $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $x \in \mathbb{R}^d$ i neka matrica M ima d lijevih svojstvenih vektora $w_1, \dots, w_d \in \mathbb{R}^d$ s pripadajućim svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \dots, \lambda_d$. Tada je za sve $i = 1, \dots, d$ funkcija $f_i(x) = w_i^t x$ svojstvena funkcija operatora $\mathcal{K}$ s pridruženom svojstvenom vrijednosti λ_i

$$\mathcal{K} f_i(x) = f_i(Mx) = w_i^t M x = \lambda_i w_i^t x = \lambda_i f_i(x).$$

Prema gornjoj propoziciji, sada su sve funkcije oblika:

$$f_l(x) = \prod_{i=1}^{n} (w_i^t x)^{l_i}$$

svojstvene funkcije s pripadajućom svojstvenom vrijednosti $\lambda_l = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{l_i}$, pri čemu je $l \in \mathbb{N}^d$ multiindeks.

1.2.4 Koopmanov operator za preslikavanja koja čuvaju mjeru

U ovom odjeljku dokazujemo važnu propoziciju o izometričnosti Koopmanovog operatora pridruženog preslikavanju koje čuva mjeru. Ta će nam propozicija dati dovoljne uvjete pod kojima Koopmanov operator možemo promatrati kao $\mathcal{K} \in \mathbb{B}(L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu))$, za $1 \leq p \leq +\infty$:

Propozicija 1.2.13. *Neka je $\Phi : (\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \to (\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ preslikavanje koje čuva mjeru i $\mathcal{K} : L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \to L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ pridružen Koopmanov operator. Tada je $\mathcal{K} : L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \to L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ dobro definirana izometrija, za sve $1 \leq p \leq +\infty$.*

Dokaz. Potrebno je dokazati $\|\mathcal{K}f\|_p = \|f\|_p$, za $1 \leq p \leq +\infty$.

Za $p = \infty$, to je direktna posljedica teorema o dekompoziciji, jer je u slučaju preslikavanja koja čuvaju mjeru, pridružena Radon-Nikodymova derivacija h strogo pozitivna, odnosno $\operatorname{supp} h = \mathcal{X}$.

Neka je sad $1 \leq p < +\infty$ i neka je $f = \chi_A$ za neki $A \in \Sigma$. Prisjetimo se, tada je $\mathcal{K}f = \chi_{\Phi^{-1}(A)}$.

$$\|\mathcal{K}f\|_p^p = \int_{\mathcal{X}} |\mathcal{K}f|^p \, d\mu = \mu(\Phi^{-1}(A)) = \mu(A) = \|f\|_p^p .$$

Neka je sad f nenegativna jednostavna izmjeriva funkcija $f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$, gdje je $f_i = \chi_{A_i}$, $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ particija skupa $\mathcal{X}$, te $a_i \geq 0$ $i = 1, \ldots, n$. Napomenimo da je tada i $(\Phi^{-1}(A_i))_{i=1,\ldots,n}$ također particija skupa $\mathcal{X}$.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}f\|_p^p &= \int_{\mathcal{X}} |\mathcal{K}f|^p \, d\mu = \int_{\mathcal{X}} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{K} f_i \right|^p d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Phi^{-1}(A_i)} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{K} f_j \right|^p d\mu = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\Phi^{-1}(A_i)} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{\Phi^{-1}(A_j)} \right|^p d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Phi^{-1}(A_i)} \left| a_i \chi_{\Phi^{-1}(A_i)} \right|^p d\mu = \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i^p \mu(\Phi^{-1}(A_i)) = \sum_{i=1}^{n} a_i^p \mu(A_i) = \ldots = \|f\|_p^p . \end{aligned}$$

Neka je sada f limes rastućeg niza nenegativnih jednostavnih izmjerivih funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ za koje znamo da vrijedi $\|\mathcal{K}f_n\|_p = \|f_n\|_p$. Koopmanov operator je monoton, pa je $(\mathcal{K}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ također rastući niz nenegativnih izmjerivih funkcija. Također, $\forall x \in \mathcal{X}$, vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{K}f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\Phi(x)) = f(\Phi(x)) = \mathcal{K}f(x)$. Dakle, niz $(\mathcal{K}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotono raste prema $\mathcal{K}f$ pa primjenom Lebesgueovog teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo $\|f\|_p = \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \lim\limits_{n\to\infty} \|\mathcal{K}f_n\|_p = \left\| \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{K}f_n \right\|_p = \|\mathcal{K}f\|_p$.

Sada, zbog $\|f\|_p = \||f|\|_p$ te $\mathcal{K}|f| = |\mathcal{K}f|$ tvrdnja vrijedi za sve $f \in L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$.

□

Zanimljivo je navesti i nužne i dovoljne uvjete pod kojima se Koopmanov operator može promatrati kao $\mathcal{K} : L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \to L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Primijetimo da se dovoljnost može dokazati na isti način kao i gornji teorem, a cijeli se dokaz može naći u [13].

Teorem 1.2.14. *Neka je $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ prostor σ-konačne mjere i neka je Φ izmjerivo preslikavanje. Tada je pridruženi Koopmanov operator $\mathcal{K}_\Phi \in \mathbb{B}(L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu))$ ako i samo ako postoji $b > 0$ takav da vrijedi:*

$$\mu(\Phi^{-1}(A)) \leq b\mu(A), \quad A \in \Sigma.$$

U tom je slučaju $\|\mathcal{K}f\|_p \leq b^{\frac{1}{p}} \|f\|_p$.

Napomena 1.2.15. *Bitna razlika između teorema 1.2.14 i 1.2.6 je u tome što teorem 1.2.6 daje nužne i dovoljne uvjete pod kojima Koopmanov operator prevodi funkcije iz $L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ u funkcije iz $L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, a teorem 1.2.14 daje dodatni uvjet na to kada je on ograničen u nekoj (a time i svakoj) p-normi za $1 \leq p < \infty$.*

Primijetimo da nam izometričnost operatora $\mathcal{K}$ garantira njegovu injektivnost te da je $\operatorname{Im} \mathcal{K}$ zatvoren potprostor od $L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Ako bi $\operatorname{Im} \mathcal{K}$ bila gust potprostor od $L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, tada bi $\mathcal{K}$ bio bijektivan i, prema teoremu o inverznom preslikavanju, imao ograničeni inverz $\mathcal{K}^{-1}$. Logično bi bilo povezati invertibilnost funkcije Φ, invertibilnost danog dinamičkog sustava te invertibilnost pripadajućeg Koopmanovog operatora, što je upravo tema sljedećeg razmatranja.

Invertibilnost Koopmanovog operatora za preslikavanja koja čuvaju mjeru

Izmjerivo preslikavanje $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ inducira transformaciju $\Phi^* : \Sigma \to \Sigma$ formulom $\Phi^*(A) = \Phi^{-1}(A)$, Ako Φ čuva mjeru, tada Φ^* možemo promatrati kao izometriju na Σ s obzirom na metriku $d(A, B) := \mu(A \triangle B)$. Tada je posebno Φ^* injekcija.

Prvo ćemo navesti dvije različite definicije invertibilnosti dinamičkog sustava $(\mathcal{X}, \Phi)$ te diskutirati u kojim su slučajevima ekvivalentne, a tada ćemo dokazati da je jedna od njih ekvivalentna invertibilnosti Koopmanovog operatora.

Definicija 1.2.16. *Neka je $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ prostor s mjerom i neka je Φ preslikavanje koje čuva mjeru μ. Kažemo da je sustav $(\mathcal{X}, \Phi)$ **invertibilan** ako je preslikavanje Φ^* bijekcija.*

Druga definicija zapravo proširuje inverz na klase funkcija koje su μ-g.s. jednake.

Definicija 1.2.17. *Neka je $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ prostor s mjerom i Φ preslikavanje koje čuva mjeru. Za izmjerivo preslikavanje Ψ kažemo da je **esencijalni inverz** preslikavanja Φ ako vrijedi:*

$$\Phi \circ \Psi = \mathcal{I} \ \ \mu - g.s., \ \Psi \circ \Phi = \mathcal{I} \ \ \mu - g.s.$$

*Ako preslikavanje ima esencijalni inverz, kažemo da je **esencijalno invertibilno**.*

Jednostavno se pokazuje da je esencijalni inverz jedinstven te sljedeći rezultat:

Lema 1.2.18. *Neka je* $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ *prostor s mjerom i* Φ *preslikavanje koje čuva mjeru. Ako je* Φ *esencijalno invertibilno, tada je* Φ^* *bijekcija.*

Za "dovoljno dobre" prostore vrijedi i obrat:

Lema 1.2.19. *Neka je* $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ *prostor s mjerom te* Φ *i* Ψ *preslikavanja koja čuvaju mjeru takva da je* $\Phi^* = \Psi^*$*. Ako postoji prebrojiv skup* $\mathcal{E} \subset \Sigma$ *takav da skup karakterističnih funkcija* $\{\chi_A, A \in \mathcal{E}\}$ *razlikuje točke od* $\mathcal{X}$*, tada je* $\Phi = \Psi$ μ*-g.s.*

Dokažimo sada da je bijektivnost preslikavanja Φ^* ekvivalentna invertibilnosti pridruženog Koopmanovog operatora:

Propozicija 1.2.20. *Neka je* $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ *prostor s mjerom te* Φ *preslikavanje koje čuva mjeru* μ*. Sustav* $(\mathcal{X}, \Phi)$ *je invertibilan ako i samo ako je pripadni Koopmanov operator* $\mathcal{K}$ *invertibilan na* $L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ *za jedan, odnosno sve* $1 \leq p \leq \infty$.

Dokaz. Neka je $(\mathcal{X}, \Phi)$ invertibilan, odnosno neka je Φ^* bijekcija. Tada je posebno Φ^* surjekcija, odnosno $\forall B \in \Sigma, \exists A \in \Sigma$ t.d. $\Phi(A)^{-1} = B$. Promatramo $\mathcal{K} : L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \to L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ (1.2.13). Prema poznatom je svojstvu Koopmanovog operatora tada $\mathcal{K}\chi_A = \chi_B$, dakle skup $\operatorname{Im} \mathcal{K}$ sadrži sve karakteristične funkcije skupova iz Σ koje su u $L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Budući da je $C \cap L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ (C je skup karakterističnih funkcija) gust u $L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, a $\operatorname{Im} K$ zatvorena, slijedi da je $\operatorname{Im} \mathcal{K} = L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, odnosno $\mathcal{K}$ je surjekcija, a zbog izometričnosti je i injekcija te po teoremu o inverznom preslikavanju ima ograničen inverz $\mathcal{K}^{-1}$.

Neka je sada $\mathcal{K}$ invertibilan operator na $L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Posebno je surjektivan, te za $B \in \Sigma$ postoji funkcija $f \in L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ takva da je $\mathcal{K}f = \chi_B$. Tada je $\mathcal{K}f^2 = (\mathcal{K}f)^2 = (\chi_B)^2 = \chi_B = \mathcal{K}f$, pa zbog injektivnosti operatora $\mathcal{K}$ vrijedi $f^2 = f$ μ-g.s., zbog čega je $f = \chi_{\{f \neq 0\}}$ μ-g.s. te je stoga $\Phi^*(\{f \neq 0\}) = B$. Dakle Φ^* je surjekcija, a zbog toga što Φ čuva mjeru je i injekcija. $\square$

1.3 Dualnost

U ovom odjeljku dokazat ćemo da su Koopmanov i Perron-Frobeniusov operator pridruženi istom nesingularnom preslikavanju Φ na izvjestan način dualni.

Na $L^1(\mathcal{X},\Sigma,\mu)\times L^\infty(\mathcal{X},\Sigma,\mu)$ dobro je definirano bilinearno preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle : L^1(\mathcal{X},\Sigma,\mu)\times L^\infty(\mathcal{X},\Sigma,\mu) \to \mathbb{R}$ formulom $\langle f,g\rangle = \int_X fgd\mu$. To preslikavanje istovremeno možemo promatrati kao izometrički izomorfizam prostora $L^\infty(\mathcal{X},\Sigma,\mu)$ i $(L^1(\mathcal{X},\Sigma,\mu))$', te izometrički izomorfizam prostora $L^1(\mathcal{X},\Sigma,\mu)$ i $(L^\infty(\mathcal{X},\Sigma,\mu))$'.

Propozicija 1.3.1. *Neka su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{K}$ redom Perron-Frobeniusov i Koopmanov operator pridruženi nesingularnom preslikavanju Φ . Tada vrijedi:*

$$\langle\mathcal{P}f,g\rangle = \langle f,\mathcal{K}g\rangle \qquad f\in L^1(\mathcal{X},\Sigma,\mu),\;\; g\in L^\infty(\mathcal{X},\Sigma,\mu) \tag{1.7}$$

Dokaz. Dokaz provodimo Lebesgueovom indukcijom.

1. Neka je $g\equiv\chi_A$ za neki $A\in\Sigma$. Tada za svaki $f\in L^1(\mathcal{X},\Sigma,\mu)$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{P}f,g\rangle = \int_X \mathcal{P}f\,\chi_A\,d\mu = \int_A \mathcal{P}f\,d\mu = \int_{\Phi^{-1}(A)} f\,d\mu = \int_X f\chi_{\Phi^{-1}(A)}\,d\mu = \\ \int_X f(\chi_A\circ\Phi)\,d\mu = \int_X f\,\mathcal{K}\chi_A\,d\mu = \int_X f\,\mathcal{K}g\,d\mu = \langle f,\mathcal{K}g\rangle.\end{aligned}$$

2. Neka je g nenegativna jednostavna izmjeriva funkcija. Tada za sve $f\in L^1(\mathcal{X},\Sigma,\mu)$ zbog linearnosti Koopmanovog operatora te linearnosti integrala vrijedi $\langle\mathcal{P}f,g\rangle = \langle f,\mathcal{K}g\rangle$.

3. Neka je $g=\lim\limits_{n\to\infty} g_n$, gdje je $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz nenegativnih jednostavnih izmjerivih funkcija. Tada za sve $f\in L^1(\mathcal{X},\Sigma,\mu), f\geq 0$ vrijedi:

$$\langle\mathcal{P}f,g\rangle = \langle\mathcal{P}f,\lim_{n\to\infty} g_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle\mathcal{P}f,g_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f,\mathcal{K}g_n\rangle = \langle f,\lim_{n\to\infty}\mathcal{K}g_n\rangle = \langle f,\mathcal{K}g\rangle,$$

   pri čemu su druga i četvrta jednakost posljedica Lebesgueovog teorema o monotonoj konvergenciji, dok posljednja jednakost slijedi iz neprekidnosti Koopmanovog operatora.

4. Rastavom $f=f^+-f^-$, $g=g^+-g^-$ zbog linearnosti operatora $\mathcal{P}$ i $\mathcal{K}$ te linearnosti integrala, dobivamo tvrdnju za sve $f\in L^1(\mathcal{X},\Sigma,\mu)$, $g\in L^\infty(\mathcal{X},\Sigma,\mu)$.

$\square$

Napomena 1.3.2. *Prisjetimo se da smo u teoremima 1.1.15 i 1.2.14 dokazali da se za Φ takvo da vrijedi $\mu(\Phi^{-1}(A)) \leq b\mu(A), \quad A \in \Sigma$ Koopmanov i Perron-Frobeniusov operator dobro definirani i ograničeni operatori na svakom $L^p(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ za $1 \leq p \leq \infty$. Gornji se dokaz tada može proširiti da dokažemo kako je za $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ operator $\mathcal{P}_{|L^p(\mathcal{X},\Sigma,\mu)}$ dualan operatoru $\mathcal{K}_{|L^q(\mathcal{X},\Sigma,\mu)}$.*

Neka je $b_0 := \inf\{b \in \mathbb{R}^+ : \mu(\Phi^{-1}(A)) \leq b\mu(A), \ A \in \Sigma\}$. U teoremima 1.1.15 i 1.2.14 dokazali smo $\|\mathcal{P}\|_p \leq b^{\frac{1}{q}}$ te $\|\mathcal{K}\|_q \leq b^{\frac{1}{q}}$, pa slijedi i $\|\mathcal{P}\|_p \leq b_0^{\frac{1}{q}}$ te $\|\mathcal{K}\|_q \leq b_0^{\frac{1}{q}}$. Dodatno, za svaki $\epsilon > 0$ postoji $A_\epsilon \in \Sigma$ takav da je $\mu(\Phi^{-1}(A_\epsilon)) > (b_0 - \epsilon)\mu(A_\epsilon)$. Međutim, tada je $\left\|\mathcal{K}\chi_{A_\epsilon}\right\|_q^q = \mu(\Phi^{-1}(A_\epsilon)) > (b_0 - \epsilon)\mu(A_\epsilon) = (b_0 - \epsilon)\left\|\chi_{A_\epsilon}\right\|_q^q$, odnosno $\|\mathcal{K}\|_q > (b_0 - \epsilon)^{\frac{1}{q}}$.

Iz gornjih razmatranja zaključujemo da je $\|\mathcal{K}\|_q = \|\mathcal{P}\|_p = b_0^{\frac{1}{q}}$.

1.3.1 Posljedice dualnosti

U ovom odjeljku komentirat ćemo važne posljedice dualnosti Koopmanovog i Perron-Frobeniusovog operatora za njihovu injektivnost i spektar.

Teorem 1.3.3. *Neka je $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ prostor sa σ-konačnom mjerom, Φ nesingularno preslikavanje te $\mathcal{P} : L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \to L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ te $\mathcal{K} : L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \to L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ pridruženi Perron-Frobeniusov i Koopmanov operator. Ekvivalentno je:*

1. *$\mathcal{P}$ je injekcija*
2. *$\mathcal{K}$ je surjekcija*
3. *$\Phi^{-1}\Sigma = \Sigma$*
4. *$\mathcal{E} : L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \to L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ (operator uvjetnog očekivanja s obzirom na $\Phi^{-1}\Sigma$) je operator identiteta*

Dokaz. Prisjetimo se, u teoremu 1.1.23 dokazali smo $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) = \mathrm{Ker}(\mathcal{P}) \oplus L^1(\mathcal{X}, \Phi^{-1}\Sigma, \mu)$ te $\mathrm{Ker}\,\mathcal{P} = \mathrm{Ker}\,\mathcal{E}$. To dokazuje (1) $\iff$ (3)
(3) $\iff$ (4) vrijedi iz svojstava uvjetnog očekivanja.
(3) $\implies$ (2) dokazujemo slično kao u dokazu propozicije 1.2.20: ako je $\Phi^{-1}\Sigma = \Sigma$, tada $\mathrm{Im}\,\mathcal{K}$ sadrži sve karakteristične funkcije skupova iz Σ. Zbog zatvorenosti prostora $\mathrm{Im}\,\mathcal{K}$ te gustoće karakterističnih funkcija u $L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, slijedi da je $\mathcal{K}$ surjekcija.
(2) $\implies$ 1) Neka je $\mathcal{K}$ surjekcija i pretpostavimo da $\mathcal{P}f = 0$. Tada je $0 = \langle \mathcal{P}f, g\rangle = \langle f, \mathcal{K}g\rangle$ za sve $g \in L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, odnosno zbog surjektivnosti $\langle f, g\rangle = 0$ za sve $g \in L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Posebno, za $g = \chi_{\{f>0\}}$ dobivamo da mora vrijediti $f \leq 0$ μ-g.s., a za $g = \chi_{\{f<0\}}$, dobivamo $f \geq 0$ μ-g.s., dakle $f = 0$ μ-g.s., odnosno $\mathcal{P}$ je injekcija.

□

Teorem 1.3.4. *Neka je $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ prostor sa σ-konačnom mjerom, Φ nesingularno preslikavanje te $\mathcal{P} : L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \to L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ te $\mathcal{K} : L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \to L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ pridruženi Perron-Frobeniusov i Koopmanov operator. Ekvivalentno je:*

1. *$\mathcal{P}$ je surjekcija*
2. *$\mathcal{K}$ je injekcija*
3. *$\nu := \mu \circ \Phi^{-1} \cong \mu$*
4. *$\operatorname{supp} h = \mathcal{X}$, pri čemu je $h = \frac{d\nu}{d\mu}$*

Dokaz. Prema lemi 1.2.8, vrijedi (2) $\iff$ (3) $\iff$ (4) (pri čemu je (3) $\iff$ (4) općenita tvrdnja.
(1) $\implies$ (2) dokazujemo isto kao u prethodnom teoremu, odnosno možemo dokazati da za $\mathcal{K}g = 0$ zbog surjektivnosti $\mathcal{P}$ na $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ mora vrijediti $g_{|A} = 0$ za svaki skup A konačne mjere. Zbog σ-konačnosti mjere μ slijedi tvrdnja.
(2) $\implies$ (1) Otprije znamo da je slika operatora $\mathcal{P}$ zatvorena. Pretpostavimo da $\mathcal{P}$ nije surjekcija i neka je $y \in \mathcal{X} \setminus \operatorname{Im} \mathcal{P}$. Prema Hahn-Banachovom teoremu, tada postoji $g \in L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ takav da vrijedi $\langle y, g \rangle = 1$ te $\langle \mathcal{P}f, g \rangle = 0$, $f \in L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Međutim, zadnja jednakost povlači $\langle f, \mathcal{K}g \rangle = 0\, f \in L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, što bi značilo $\mathcal{K}g = 0$. Međutim, $\mathcal{K}$ je injekcija pa dolazimo u kontradikciju. Dakle, $\mathcal{P}$ je surjekcija. □

Napomena 1.3.5. *Iako smo u teoremu 1.3.4 dijelove dokaza navodili specifično za Perron-Frobeniusov i Koopmanov operator, ekvivalencija tvrdnji 1. i 2. iz svakog od gornjih teorema su općeniti rezultati za dualne operatore iz funkcionalne analize, te se dokazuju jednako kao u teoremu 1.3.1.*
Posebno, vrijedi:

Teorem 1.3.6. *Neka je $\mathcal{T}$ ograničen operator na Banachovom prostoru $\mathcal{X}$ i $\mathcal{T}^*$ njemu dualni operator na $\mathcal{X}'$, odnosno operator za koji vrijedi $\mathcal{T}^*g(x) = g(\mathcal{T}x)$. Tada je $\mathcal{T}$ bijekcija ako i samo ako je $\mathcal{T}^*$ bijekcija.*

Zbog gornje napomene i činjenice da je operator $\mathcal{K} - \lambda\mathcal{I}$ na isti način dualan operatoru $\mathcal{P} - \lambda\mathcal{I}$, imamo sljedeći rezultat:

Teorem 1.3.7. *Neka su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{K}$ Perron-Frobeniusov i Koopmanov operator pridruženi nesingularnom preslikavanju Φ. Tada vrijedi:*

$$\sigma(\mathcal{P}) = \sigma(\mathcal{K}).$$

Dodatno, vrijedi:

$$\sigma(\mathcal{P}) = \sigma_{ap}(\mathcal{P}) \cup \sigma_p(\mathcal{K}),$$
$$\sigma(\mathcal{K}) = \sigma_{ap}(\mathcal{K}) \cup \sigma_p(\mathcal{P}).$$

Napomena 1.3.8. *Promotrimo još što dobivamo formalnim komponiranjem operatora $\mathcal{P}$ i $\mathcal{K}$ (prisjetimo se $\mathcal{P}\mathbf{1} = h$, odnosno $\mathcal{P}\chi_{\Phi^{-1}(A)} = h\chi_A$):*

$$\langle \mathcal{P}\mathcal{K}f, g\rangle = \langle \mathcal{K}f, \mathcal{K}g\rangle = \langle \mathbf{1}, \mathcal{K}fg\rangle = \langle h, fg\rangle = \langle hf, g\rangle,$$

odnosno $\mathcal{P}\mathcal{K}$ je operator množenja funkcijom h. Za $\mathcal{K}\mathcal{P}$ vrijedi:

$$\langle \chi_{\Phi^{-1}(A)}, \mathcal{K}\mathcal{P}f\rangle = \langle h\chi_A, \mathcal{P}f\rangle = \langle \mathcal{K}h\chi_{\Phi^{-1}(A)}, f\rangle = \langle \chi_{\Phi^{-1}(A)}, (h \circ \Phi)f\rangle,$$

odnosno $\mathcal{K}\mathcal{P}$ je operator množenja funkcijom $h \circ \Phi$.

1.4 Dinamički sustavi s neprekidnim vremenom

Do sada obrađena teorija Koopmanovih i Perron-Frobeniusovih operatora dovoljna je za opisivanje dinamičkih sustava s neprekidnim vremenom, koje možemo modelirati jednadžbom $x_{n+1} = \Phi(x_n)$. Međutim, mnogi fizikalni primjeri u pozadini imaju neprekidno vrijeme, odnosno za svaki $t \geq 0$ sustav možemo opisati kao $x_{\tau+t} = \Phi_t(x_\tau)$. Prirodno bi bilo svakom Φ_t pridužiti Koopmanov operator $\mathcal{K}_t$. Pokazuje se da je familija $(\mathcal{K}_t)_{t\geq 0}$ **polugrupa operatora** te da je, uz neke dodatne uvjete, možemo opisati njenim **generatorom** $\mathcal{A}$ na način $\mathcal{K}_t = e^{\mathcal{A}t}$. Analogna tvrdnja vrijedi za Perron-Frobeniusovu familiju, odnosno polugrupu.

Za dinamičke sustave zadane kao rješenje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi $\dot{x} = F(x)$ generatore Koopmanove polugrupe i Perron-Frobeniusove operatore za "dovoljno lijepe" funkcije f možemo izraziti i eksplicitno.

Za takve se sustave također pokazuje da postoji povezanost svojstvenih funkcija Koopmanovog operatora i nekih geometrijski bitnih skupova za dani dinamički sustav.

Iako se u praksi dinamički sustavi s neprekidnim vremenom diskretizacijom prevode u dinamičke sustave s diskretnim vremenom, neke od novijih numeričkih metoda bave se upravo aproksimacijama generatora Koopmanove polugrupe, umjesto aproksimacijom Koopmanovog operatora za neki diskretni vremenski korak.

1.4.1 Polugrupe operatora i generatori

U ovom ćemo odjeljku navesti definicije i glavne rezultate vezane uz jednoparametarske polugrupe i grupe operatora. Rezultate navodimo bez dokaza, a svi se dokazi mogu pronaći u [6].

Definicija 1.4.1. *Familiju ograničenih linearnih operatora $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ na Banachovom prostoru $\mathcal{X}$ zovemo **jednoparametarska polugrupa operatora** ako zadovoljava:*

$$\mathcal{T}_0 = I, \quad \mathcal{T}_{t+s} = \mathcal{T}_t \mathcal{T}_s,\ t, s \geq 0. \tag{1.8}$$

*Ako je gornja jednadžba zadovoljena za sve $t, s \in \mathbb{R}$, onda $(\mathcal{T}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ zovemo **jednoparametarska grupa operatora***

Definicija 1.4.2. *Kažemo da je polugrupa operatora:*

- ***uniformno neprekidna** ako je preslikavanje $t \mapsto \mathcal{T}_t$ neprekidno s obzirom na operatorsku normu*

- ***jako neprekidna*** *ako je preslikavanje* $t \mapsto \mathcal{T}_t x$ *neprekidno (s obzirom na normu u prostoru* $\mathcal{X}$*) za svaki* $x \in \mathcal{X}$

Navedimo propoziciju koja govori da je za jaku neprekidnost polugrupe dovoljno promatrati jaku neprekidnost u 0:

Propozicija 1.4.3. *Neka je* $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ *polugrupa operatora na Banachovom prostoru* $\mathcal{X}$*. Tada je* $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ *jako neprekidna ako i samo ako za svaki* $x \in X$ *vrijedi:*

$$\lim_{t\to 0^+} \mathcal{T}_t x = x.$$

Sljedeći teorem govori kako uniformno neprekidne polugrupe možemo karakterizirati samo jednim ograničenim operatorom:

Teorem 1.4.4. *Svaka uniformno neprekidna polugrupa operatora* $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ *na Banachovom prostoru* $\mathcal{X}$ *je oblika:*

$$\mathcal{T}_t = e^{t\mathcal{A}}, \quad t \geq 0,$$

za neki ograničeni operator $\mathcal{A}$*. Operator* $\mathcal{A}$ *je jedinstveno određen kao derivacija preslikavanja* $t \mapsto \mathcal{T}_t$ *u točki 0 i zovemo ga* ***generator*** *familije* $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$.

Primijetimo da se u slučaju uniformne neprekidnosti familiju $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ možemo proširiti do grupe operatora.

Za jako neprekidne familije $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ vrijedi nešto slabiji rezultat, koji je svejedno dovoljan za opisivanje familije:

Definicija 1.4.5. ***Generator*** $\mathcal{A} : D(\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X} \to \mathcal{X})$ *jako neprekidne polugrupe* $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ *na Banachovom prostoru* $\mathcal{X}$ *je operator definiran kao:*

$$\mathcal{A}x := \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{T}_t x - x}{h}, \tag{1.9}$$

na domeni $D(\mathcal{A})$*:*

$$D(\mathcal{A}) := \{x \in \mathcal{X} : t \to \mathcal{T}_t x \text{ je diferencijabilno}\}.$$

Nije teško vidjeti da je $\mathcal{A}$ linearan operator, međutim, u općenitom slučaju on ne mora biti ograničen. Štoviše, $\mathcal{A}$ je ograničen ako i samo ako je $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ uniformno neprekidna.

Teorem 1.4.6. *Generator jako neprekidne polugrupe* $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ *ima zatvorenu sliku,* $D(\mathcal{A})$ *je gust podskup od* $\mathcal{X}$ *i* $\mathcal{A}$ *jedinstveno određuje polugrupu* $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$.

Spomenimo još i glavne rezultate o preslikavanju spektra, odnosno poveznici spektra generatora i spektra familije:

Teorem 1.4.7. *1. Ako je $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ uniformno neprekidna, tada je:*

$$\sigma(\mathcal{T}_t) = e^{t\sigma(\mathcal{A})}$$

i analogne tvrdnje vrijede za $\sigma_p(\mathcal{T}_t)$, $\sigma_r(\mathcal{T}_t)$, $\sigma_c(\mathcal{T}_t)$.

2. Ako je $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ jako neprekidna, tada vrijedi:

$$\sigma_p(\mathcal{T}_t) \setminus \{0\} = e^{t\sigma_p(\mathcal{A})}.$$

$$\sigma_r(\mathcal{T}_t) \setminus \{0\} = e^{t\sigma_c(\mathcal{A})}.$$

1.4.2 Polugrupe Koopmanovih i Perron-Frobeniusovih operatora

U napomenama 1.1.12 i 1.2.3 pokazali smo da Perron-Frobeniusov i Koopmanov operator zadovoljavaju $\mathcal{P}_{\Phi_1 \circ \Phi_2} = \mathcal{P}_{\Phi_1}\mathcal{P}_{\Phi_2}$ i $\mathcal{K}_{\Phi_1 \circ \Phi_2} = \mathcal{K}_{\Phi_1}\mathcal{K}_{\Phi_2}$, što za $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}_0^+}$ koja definira dinamički sustav (odnosno vrijedi $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$, $\Phi_0 = \mathcal{I}$) povlači (trivijalno je $\mathcal{P}_\mathcal{I} = \mathcal{I}$ te $\mathcal{K}_\mathcal{I} = \mathcal{I}$) da su $(\mathcal{P}_{\Phi_t})_{t\geq 0}$ i $(\mathcal{K}_{\Phi_t})_{t\geq 0}$ jednoparametarske polugrupe operatora, koje ćemo označavati s $(\mathcal{P}_t)_{t\geq 0}$ i $(\mathcal{K}_t)_{t\geq 0}$ ako je jasno o kojoj se familiji transformacija $(\Phi_t)_{t\geq 0}$ radi.

U daljnjim razmatranjima pretpostavljamo $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ uz Lebesgueovu mjeru.
Prvo navedimo rezultat za familiju Koopmanovih operatora. Za dinamički sustav s neprekidnim vremenom zadan familijom $(\Phi_t)_{t\geq 0}$ promatramo preslikavanje $\Psi : \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ zadano formulom $\Psi(t, \mathbf{x}) := \Phi_t(\mathbf{x})$).

Propozicija 1.4.8. *Neka je $\mathcal{X}$ kompaktan i neka je $(\mathcal{K}_t^C)_{t\geq 0}$ polugrupa Koopmanovih operatora restringiranih na $C(\mathcal{X})$ pridružena familiji preslikavanja $(\Phi_t)_{t\geq 0}$. Tada je $(\mathcal{K}_t)_{t\geq 0}$ jako neprekidna ako i samo ako je Ψ neprekidno.*

Dokaz. Primijetimo da je $\lim\limits_{t\to 0^+} \mathcal{K}_t f = f$ u $L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ ako i samo ako vrijedi:

$$\lim_{t\to 0^+} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathcal{X}} |f(\Psi(t, x)) - f(\Psi(0, x))| = 0.$$

Ako je Ψ neprekidna, tada je i $f \circ \Psi$ neprekidna, a zbog kompaktnosti skupa $\mathcal{X}$ je i uniformno neprekidna na $[0, 1] \times \mathcal{X}$, što posebno znači $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ t.d. $\sup\limits_{x\in\mathcal{X}} |f(\Psi(t, x)) - f(\Psi(0, x))| < \epsilon$ za sve $t < \delta$. Dakle $\lim\limits_{t\to 0^+} \mathcal{K}_t f = f$.
Obrat analogno. □

Primijetimo da je za neprekidno preslikavanje Ψ svako preslikavanje Φ_t neprekidno, a time je i $f \circ \Phi_t$ neprekidno za sve $t \in \mathbb{R}$. Dakle $\mathcal{K}C(\mathcal{X}) \subset C(\mathcal{X})$ pa ima smisla gledati tu restrikciju.

1.4.3 Dinamički sustavi zadani sustavom ODJ

U ovom odjeljku, u kojem rezultati uglavnom prate [7], eksplicitno ćemo izvesti generatore Perron-Frobeniusove i Koopmanove polugrupe za dinamički sustav zadan sustavom običnih diferencijalnih jednadžbi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_t(\mathbf{x}) = F(\Phi_t(\mathbf{x})),\ \mathbf{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

Primijetimo da ovdje podrazumijevamo definiranost na $\mathbb{R}$, a time i definiranost grupa operatora $(\mathcal{P}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ i $(\mathcal{K}_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Pretpostavit ćemo dodatno da je $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Znamo da je tada Ψ neprekidno preslikavanje, te da je $\Phi_t \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ za sve $t \in \mathbb{R}$, posebno je $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$ i funkcija $\Psi : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ je neprekidna.

Lema 1.4.9. *Neka je $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ neprekidno diferencijabilna realna funkcija na $\mathbb{R}^n$ s kompaktnim nosačem i neka je $(\mathcal{K}_t)_{t\geq 0}$ polugrupa Koopmanovih operatora pridružena sustavu 1.10. Tada vrijedi:*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{K}_t f - f}{t} = F \cdot \nabla f.$$

Dokaz. Prema teoremu srednje vrijednosti, za sve $x \in \mathcal{X}$ vrijedi:

$$\frac{\mathcal{K}_t f(x) - f(x)}{t} = \frac{f(\Psi(t,x)) - f(\Psi(0,x))}{t} = \nabla f(\Psi(ct,x))\frac{\partial}{\partial t}\Psi(ct,x) = F(\Psi(ct,x))\cdot\nabla f(\Psi(ct,x)),$$

za neki $0 \leq c \leq 1$. Dakle, vrijedi:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{K}_t f(x) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0^+} F(\Psi(ct,x)) \cdot \nabla f(\Psi(ct,x)) = F(x) \cdot (\nabla f(x))\ \ x \in \mathcal{X}.$$

Preostaje pokazati da je konvergencija uniformna po x, odnosno da konvergencija vrijedi u $L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Neka je $A := \operatorname{supp} f$, po pretpostavci kompaktan skup. Dokazujemo da je $h : [0,1] \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $h(t,x) = F(\Psi(t,x)) \cdot \nabla f(\Psi(t,x))$, neprekidna funkcija s ograničenim nosačem. To vrijedi zbog neprekidnosti funkcija F, Ψ i ∇f (f je klase C^1). Također je $\operatorname{supp} \nabla f \subseteq \operatorname{supp} f$ ograničen. Dakle h je uniformno neprekidna funkcija na $[0,1] \times A$, i posebno tada $h(t,\cdot)$ uniformno konvergira prema $h(0,\cdot)$. □

Primijetimo da smo u prethodnoj lemi dokazali egzistenciju generatora" Koopmanove familije za $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Dakle $C_c^1(\mathbb{R}^n) \subset D(\mathcal{A}_{\mathcal{K}})$. Posebno smo dokazali da $\mathcal{K}_t f \to f$ za sve $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, što po Banach-Steinhausovom teoremu (jer je $\|\mathcal{K}_t\|_\infty = 1$) dokazuje da $\mathcal{K}_t f \to f$ za sve $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, pri čemu je $C_0(\mathbb{R}^n)$ zatvarač u ∞-normi skupa $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ u $L^\infty(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, skup svih funkcija koje iščezavaju za $\|x\| \to \infty$.

Analogno kao i gore, možemo dokazati da je polugrupa Perron-Frobeniusovih operatora $(\mathcal{P}_t)_{t\geq 0}$ jako neprekidna. Prisjetimo se da je u slučaju kao gore (na $\mathbb{R}^n$ gdje je Φ_t invertibilna za svaki $t \geq 0$) Perron-Frobeniusov operator dan eksplicitno formulom zamjene varijabli:

$$\mathcal{P}_t f(x) = f(\Phi_{-t}(x))|\det \nabla \Phi_t^{-1}(x)|.$$

Propozicija 1.4.10. *$(\mathcal{P}_t)_{t\geq 0}$ je jako neprekidna polugrupa operatora.*

Dokaz. Neka je $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ i neka je $A_0 := \operatorname{supp} f$ njen kompaktni nosač. Tada je posebno $A_t := \operatorname{supp} f \circ \Phi_{-t} = \Phi_t(A_0)$ kompaktan za svaki $1 \geq t \geq 0$. Budući da je $|\det \nabla \Phi_t^{-1}(x)| \neq 0$, tada je $\operatorname{supp} \mathcal{P}_t f = A_t$ kompaktan za svaki $1 \geq t \geq 0$, odnosno preslikavanje $h : [0,1] \times A$, $h(t,x) = \mathcal{P}_t f(x)$ je uniformno neprekidno za $A := \bigcup_{t\in[0,1]} A_t$, jer je A kompaktan. Dakle, $\lim_{t\to 0^+} \mathcal{P}_t f = \lim_{t\to 0^+} f \circ \Phi_{-t} |\det \nabla \Phi_t^{-1}| = f$ uniformno, pa i u $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ za $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Budući da je $\|\mathcal{P}\|_1 = 1$, $(P_t)_{t\geq 0}$ je uniformno ograničena, pa po Banach-Steinhausovom teoremu konvergencija vrijedi na cijelom $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, koji je zatvarač od $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ s obzirom na 1-normu.

□

Dakle, $(\mathcal{K}_t)_{t\geq 0}$ je jako neprekidna ako ju restringiramo na $C_0(\mathbb{R}^n)$, te u tom slučaju ima generator koji je definiran barem na $C_c^1(\mathbb{R}^n)$, a $(\mathcal{P}_t)_{t\geq 0}$ je jako neprekidna bez restrikcija, dakle ima generator definiran na nekom gustom podskupu od $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$.

Zbog restrikcije Koopmanovih operatora i nerefleksivnosti prostora $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, ne možemo iskoristiti rezultate o dualnosti generatora. Ipak, možemo iskoristiti dualnost za izvod formule generatora Perron-Frobeniusove familije u nekim slučajevima.

Neka je $g \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ i neka je $f \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{P}}) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$. Tada vrijedi:

$$\langle \mathcal{P}_t f, g \rangle = \langle f, \mathcal{K}_t g \rangle,$$
$$\langle \mathcal{P}_t f - f, g \rangle = \langle f, \mathcal{K}_t g - g \rangle,$$
$$\left\langle \frac{\mathcal{P}_t f - f}{t}, g \right\rangle = \left\langle f, \frac{\mathcal{K}_t g - g}{t} \right\rangle,$$

$$\lim_{t\to 0^+}\left\langle \frac{\mathcal{P}_t f - f}{t}, g\right\rangle = \lim_{t\to 0^+}\left\langle f, \frac{\mathcal{K}_t g - g}{t}\right\rangle,$$
$$\left\langle \lim_{t\to 0^+}\frac{\mathcal{P}_t f - f}{t}, g\right\rangle = \left\langle f, \lim_{t\to 0^+}\frac{\mathcal{K}_t g - g}{t}\right\rangle.$$

Iz neprekidnosti preslikavanja $\langle\cdot,\cdot\rangle$ i zbog postojanja oba limesa:

$$\langle \mathcal{A}_{\mathcal{P}} f, g\rangle = \langle f, \mathcal{A}_{\mathcal{K}} g\rangle.$$

Parcijalnom integracijom dobivamo:

$$\langle \mathcal{A}_{\mathcal{P}} f, g\rangle = \langle f, F\cdot\nabla g\rangle = \int f[F\cdot\nabla g] = \sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} fF_i\frac{\partial g}{\partial x_i} = -\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial(F_i f)}{\partial x_i}g = \left\langle -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(F_i f)}{\partial x_i}, g\right\rangle,$$

čime smo, za $f \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{P}}) \cap C^1(\mathbb{R})$, dobili eksplicitnu formulu za $\mathcal{A}_{\mathcal{P}} f$.

1.4.4 Spektar familije Koopmanovih operatora

U ovom ćemo odjeljku pobliže opisati spektar familije Koopmanovih operatora za dinamički sustav s neprekidnim vremenom zadan sustavom ODJ-ova. Rezultati iz ovog odjeljka mogu se naći u [12] i [11].

Iz gore navedenih razmatranja o spektru generatora, ima smisla definirati:

Definicija 1.4.11. *Neka je $(\mathcal{K}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ grupa Koopmanovih operatora pridružena sustavu 1.10. Kažemo da je $\lambda \in \mathbb{C}$* ***svojstvena vrijednost*** *familije $(\mathcal{K}_t)_{t\in\mathbb{R}}$, a f pripadajuća* ***svojstvena funkcija*** *ako vrijedi:*

$$\mathcal{K}_t f = e^{\lambda t} f, \quad t \in \mathbb{R}$$

Propoziciju 1.2.11 sada možemo preformulirati te zaključiti:

Propozicija 1.4.12. *Skup svojstvenih vrijednosti familije Koopmanovih operatora je zatvoren na zbrajanje, a skup svojstvenih funkcija na množenje po točkama.*

Napomena 1.4.13. *Neka je f diferencijabilna svojstvena funkcija Koopmanove familije za koju vrijedi $f \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{K}})$. Tada vrijedi:*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{K}} f = \lim_{t\to 0^+}\frac{\mathcal{K}_t f - f}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{e^{\lambda t} - 1}{t} f = \lambda f$$

Dakle f je svojstvena funkcija generatora u ”prirodnom smislu”. Međutim, mogu postojati svojstvene funkcije Koopmanove familije koje nisu u domeni generatora, niti u skupu na kojem je Koopmanova familija jako neprekidna, čak ni ako je F proizvoljno glatka, što se vidi iz sljedećeg primjera:

Primjer 1.4.14. Neka je dinamički sustav na $[0, 2\pi]$ zadan jednadžbom:

$$\dot{x} = \sin(x)$$

Tada za $x \in \langle 0, \pi\rangle$, x raste prema π, za $x \in \langle \pi, 2\pi\rangle$ pada prema π, a $x = 0, \pi, 2\pi$ su stacionarna stanja. Iz ovoga nije teško zaključiti da je $\chi_{[0,\pi\rangle}$ svojstvena funkcija familije $(\mathcal{K}_t)_{t\geq 0}$ pridružena svojstvenoj vrijednosti 0. Međutim, za nju ne postoji limes koji bi definirao $\mathcal{A}_{\mathcal{K}} f$.

Međutim, ako za funkciju f vrijedi $\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{K}_t f = \lambda \mathcal{K}_t f$, tada je $\mathcal{K}_t f = e^{\lambda t}\mathcal{K}_0 f = e^{\lambda t} f$, odnosno f je svojstvena funkcija familije $(\mathcal{K}_t)_{t\geq 0}$ s pripadajućom svojstvenom vrijednosti λ.

U sljedećem primjeru promatramo linearne sustave ODJ, za koje ćemo eksplicitno odrediti svojstvene funkcije Koopmanove familije:

Primjer 1.4.15. Neka je sustav zadan jednadžbom:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_t(\mathbf{x}) = A\Phi_t(\mathbf{x}), \quad A \in M_n(\mathbb{R})$$

Neka je λ svojstvena vrijednost matrice A te neka je $\mathbf{w}$ svojstveni vektor matrice A^* pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Tvrdimo da je funkcija oblika $f(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}\rangle$ svojstvena funkcija Koopmanove familije.

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{K}_t f = \frac{\partial}{\partial t}\langle \Phi_t(\mathbf{x}), \mathbf{w}\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\Phi_t(\mathbf{x}), \mathbf{w}\right\rangle = \langle A\Phi_t(\mathbf{x}), \mathbf{w}\rangle =$$

$$\langle \Phi_t(\mathbf{x}), A^*\mathbf{w}\rangle = \langle \Phi_t(\mathbf{x}), \overline{\lambda}\mathbf{w}\rangle = \lambda\langle \Phi_t(\mathbf{x}), \mathbf{w}\rangle = \lambda\mathcal{K}_t f$$

Pretpostavimo da A ima sve različite svojstvene vrijednosti $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Tada vektori $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ razapinju prostor $\mathbb{R}^n$, odnosno za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ možemo pisati $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i\rangle \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(\mathbf{x})\mathbf{v}_i$, pri čemu su $\psi_1, ...\psi_n$ svojstvene funkcije familije $(\mathcal{K}_t)_{t\geq 0}$.

Posebno vrijedi: $\mathcal{K}_t f_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t}\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i\rangle (\mathbf{v}_i)_j$, pri čemu je $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija koja vektoru pridružuje njegovu j-tu komponentu. Na taj način direktno, samo preko svojstvenih funkcija Koopmanovog operatora, možemo dobiti ponašanje cijelog sustava.

Na isti način možemo promatrati ponašanje neke druge funkcije $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, ako se ona može prikazati kao linearna kombinacija nekih svojstvenih funkcija familije $(\mathcal{K}_t)_{t\geq 0}$. Primijetimo da su i umnošci funkcija oblika $\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i\rangle$ također svojstvene funkcije Koopmanovog operatora, pa je taj skup bogatiji nego što se na prvu čini. Dakle, ako je $f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \psi_k$, slijedi $\mathcal{K}_t f = \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda_k t}\alpha_k\psi_k$. Koeficijente α_k, koji ovise o promatranoj funkciji, zovemo **Koopmanovi modovi**.

U primjenama se često Koopmanov operator generalizira na proizvoljne funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, pri čemu se podrazumijeva da djeluje zasebno na svakoj komponenti.

Posebno, ako $\mathbf{x}$ identificiramo s funkcijom identiteta na $\mathbb{R}^n$ možemo pisati (uz pretpostavku različitih svojstvenih vrijednosti kao i gore):

$$\Phi_t(\mathbf{x}) = \mathcal{K}_t\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t}\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i\rangle \mathbf{v}_i \tag{1.11}$$

Napomena 1.4.16. *U prethodnom smo primjeru pretpostavili da matrica A ima jednostruke svojstvene vrijednosti, a time se može i dijagonalizirati, odnosno njeni svojstveni vektori razapinju $\mathbb{R}^n$. Znamo da, u općenitom slučaju, to nije nužno istina. U tom slučaju možemo definirati generalizirane svojstvene vektore $\mathbf{v}_k^1, ..., \mathbf{v}_k^{m_k}$ pridružene svojstvenoj vrijednosti λ_k (u općenitom slučaju, jednoj svojstvenoj vrijednosti može biti pridruženo više ovakvih skupova) za koje vrijedi: $A\mathbf{v}_k^1 = \lambda_k\mathbf{v}_k^1$, $A\mathbf{v}_k^i = \lambda_k\mathbf{v}_k^i + \mathbf{v}_k^{i-1}$. Za pripadnu dualnu bazu $\mathbf{w}_k^1, ..., \mathbf{w}_k^{m_k}$ vrijedi:*

$$A^*\mathbf{w}_k^i = \begin{cases} \overline{\lambda_k}\mathbf{w}_k^i + \mathbf{w}_k^{i+1}, & i < m_k \\ \overline{\lambda_k}\mathbf{w}_k^i, & i = m_k \end{cases}$$

Slično kao i u prethodnom primjeru, za funkcije $\psi_k^i(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_k^i\rangle$ vrijedi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{K}_t\psi_k^i = \begin{cases} \lambda_k\mathcal{K}_t\psi_k^i + \mathcal{K}_t\psi_k^{i+1}, & i < m_k \\ \lambda_k\mathcal{K}_t\psi_k^i, & i = m_k \end{cases}$$

*i njih zovemo **generalizirane svojstvene funkcije** Koopmanove familije. Primijetimo da one općenito nisu zatvorene na množenje.*

Vezano uz prethodnu napomenu, može se izvesti sljedeći rezultat [11]:

Propozicija 1.4.17. *Ako skup funkcija Ψ zadovoljava:*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{K}_t\Psi) = J(\mathcal{K}_t\Psi)$$

pri čemu je J (kompleksna) Jordanova normalna forma matrice A, tada je Ψ skup generaliziranih svojstvenih funkcija Koopmanove familije pridružene sustavu 1.10.

1.4.5 Geometrijska svojstva svojstvenih funkcija Koopmanovog operatora

Preostalo nam je ilustrirati kako su svojstvene funkcije Koopmanovog operatora povezane s potprostorima prostora stanja koji su bitni u analizi dinamičkih sustava.

Rezultat koji ćemo iskazati za općenite linearne sustave, a dokazati samo za one s različitim svojstvenim vrijednostima, može se proširiti i na nelinearne sustave, kao u [12].

Definicija 1.4.18. *Neka je zadan linearni dinamički sustav jednadžbom 1.4.15.*

- ***Stabilni potprostor*** *E^s fiksne točke 0 je skup svih $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ za koje je $\lim_{t\to\infty} \Phi_t(\mathbf{x}) = 0$.*
- ***Nestabilni potprostor*** *E^u fiksne točke 0 je skup svih $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ za koje je $\lim_{t\to-\infty} \Phi_t(\mathbf{x}) = 0$.*
- ***Centralni potprostor*** *E^c fiksne točke 0 je linearna ljuska (generaliziranih) svojstvenih vektora matrice A pridruženih svojstvenim vrijednostima λ takvim da je $\Re\lambda = 0$.*

Prethodna definicija može se generalizirati na nelinearne sustave za koje, u točki ekvilibrija p možemo definirati **stabilnu, nestabilnu i centralnu mogostrukost**.

Dokaz sljedeće propozicije navest ćemo za slučaj kada su sve svojstvene vrijednosti matrice A jednostruke te imamo rastav 1.11. U općenitom se slučaju pomoću Katove dekompozicije može dobiti nešto kompliciraniji rastav, ali svi argumenti korišteni u dokazu su jednaki (više u [11]).

Propozicija 1.4.19. *Neka je zadan linearni dinamički sustav 1.4.15 i neka su $\lambda_1, ..., \lambda_u$ svojstvene vrijednosti matrice A s pozitivnim realnim dijelom, $\lambda_{u+1}, ..., \lambda_{u+c}$ svojstvene vrijednosti matrice A s realnim dijelom jednakim 0, te neka su $\lambda_{u+c+1}, ..., \lambda_{u+c+s}$ svojstvene vrijednosti matrice A s negativnim realnim dijelom. Neka su $\psi_1, ..., \psi_{u+c+s}$ generalizirane svojstvene funkcije pridružene Koopmanove familije. Tada je:*

$$L_s := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \psi_1(\mathbf{x}) = 0, ..., \psi_{u+c}(\mathbf{x}) = 0\} = E^s,$$

$$L_c := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \psi_1(\mathbf{x}) = 0, ..., \psi_u(\mathbf{x}) = 0, \psi_{u+c+1}(\mathbf{x}) = 0, ..., \psi_{u+c+s}(\mathbf{x})\} = E^c,$$

$$L_u := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \psi_{u+1}(\mathbf{x}) = 0, ..., \psi_{u+c+s}(\mathbf{x}) = 0\} = E^u.$$

Dokaz. Znamo da vrijedi:

$$\Phi_t(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t}\psi_i(\mathbf{x})\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{u} e^{\lambda_i t}\psi_i(\mathbf{x})\mathbf{v}_i + \sum_{i=u+1}^{u+c} e^{\lambda_i t}\psi_i(\mathbf{x})\mathbf{v}_i + \sum_{i=u+c+1}^{u+c+s} e^{\lambda_i t}\psi_i(\mathbf{x})\mathbf{v}_i,$$

pri čemu prva suma u gornjem rastavu iščezava za $t \to -\infty$, a zadnja za $t \to \infty$.
Ako je $\mathbf{x} \in L_s$, tada su prve dvije sume u gornjem rastavu jednake 0, pa je $\lim_{t\to\infty} \Phi_t(\mathbf{x}) = 0$, odnosno $\mathbf{x} \in E^s$. Potpuno analogno dokazuje se i $L_u \subseteq E^u$.
Obratno, ako je $\psi_i(\mathbf{x}) \neq 0$ za neki $i = 1, ..., u + c$, tada je $e^{\lambda_i t}\psi_i(\mathbf{x})\mathbf{v}_i \neq 0$ i puštanjem $t \to \infty$ ne iščezava, pa je $\mathbf{x} \notin E^s$. Analogno dokazujemo $E^u \subseteq L_u$.
Centralni potprostor je linerna ljuska vektora $\mathbf{v}_{u+1}, ..., \mathbf{v}_{u+c}$ koji su svi okomiti na svojstvene vektore matrice A^* $\mathbf{w}_1, ...\mathbf{w}_u, \mathbf{w}_{u+c+1}, ..., \mathbf{w}_{u+c+s}$, takle $E^c \subset L_c$. Obratno, ako je $\mathbf{x} \in L_c$, tada je u gornjem raspisu samo srednja suma različita od 0, odnosno $\mathbf{x} \in \text{span}\, \mathbf{v}_{u+1}, ...\mathbf{v}_{u+c}$.

□

Poglavlje 2

Numerička aproksimacija

2.1 Motivacija

U prethodnim poglavljima razmatrali smo svojstva Perron-Frobeniusovog i Koopmanovog operatora pridruženih poznatom nesingularnom preslikavanju Φ. Međutim, u praksi često analiziramo sustave u kojima nam takvo preslikavanje nije poznato, već ponašanje sustava možemo promatrati kroz različita mjerenja.

Ideja korištenja Koopmanovog operatora za tu svrhu može se sažeti u nekoliko koraka:

1. Definirati *rječnik*, odnosno skup *baznih funkcija* ili *opservabli* (funkcije iz $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}$).

2. Pomoću podataka (vrijednosti funkcija iz rječnika u danim točkama) aproksimirati Koopmanov operator u smislu najbolje projekcije na potprostor razapet funkcijama iz rječnika. Također, u tom potprostoru naći aproksimacije svojstvenih funkcija te pripadajuće svojstvene vrijednosti.

3. Ako je rječnik dovoljno bogat, pomoću njega se mogu reprezentirati komponentne funkcije originalnog sustava te se one mogu prikazati kao linearna kombinacija svojstvenih funkcija Koopmanovog operatora, čime možemo odrediti proizvoljnu evoluciju.

Poglavlje počinjemo definicijom općenitih Galerkinovih metoda te kasnije obrađujemo Ulamovu metodu za diskretizaciju Perron-Frobeniusovog operatora te EDMD za diskretizaciju Koopmanovog operatora. U dokazima konvergencije tih dviju metoda pokazat ćemo da su one zapravo i Galerkinove metode. Ove metode te još neki rezultati o sličnostima i razlikama metoda mogu se pronaći u [14].

2.2 Osnovne metode

2.2.1 Galerkinove metode

U ovom odjeljku definirat ćemo Galerkinovu projekciju na potprostor Hilbertovog prostora te generalizaciju na Banachove prostore, Petrov-Galerkinovu projekciju.

Definicija 2.2.1. *Neka je $\mathbb{H}$ Hilbertov prostor i $\mathbb{V} \leq \mathbb{H}$ konačnodimenzionalni potprostor s bazom $(\psi_1, ..., \psi_k)$.* ***Galerkinova projekcija*** *operatora $\mathcal{A}$ na $\mathbb{V}$ je jedinstveni linearni operator $A : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ koji zadovoljava:*

$$\langle \psi_j, \mathcal{A}\psi_i \rangle = \langle \psi_j, A\psi_i \rangle \quad \forall i, j = 1, \dots, k. \tag{2.1}$$

Definicija 2.2.2. *Neka je $\mathbb{B}$ Banachov prostor i $\mathbb{V} \leq \mathbb{B}$ konačnodimenzionalni potprostor s bazom $(\psi_1, ..., \psi_k)$ ($\psi_1, ..., \psi_k$ nazivamo bazne funkcije) te neka je $\mathbb{W} \leq \mathbb{B}^*$ potprostor dualnog prostora prostoru $\mathbb{B}$ s bazom $(\psi_1^*, ..., \psi_l^*)$.*
Ako je $k = l$, tada je ***Petrov-Galerkinova projekcija*** *operatora $\mathcal{A}$ na $\mathbb{V}$ jedinstveni linearni operator $A : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ koji zadovoljava:*

$$\langle \psi_j^*, \mathcal{A}\psi_i \rangle = \langle \psi_j^*, A\psi_i \rangle \quad \forall i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, l. \tag{2.2}$$

Ako je $l > k$, tada Petrov-Galerkinovu projekciju definiramo kao rješenje problema najmanjih kvadrata:

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} \langle \psi_j^*, \mathcal{A}\psi_i - A\psi_i \rangle^2 \to min!.$$

2.2.2 Ulamova metoda

Ideja Ulamove metode relativno je jednostavna, ali je ona i dalje najpopularnija metoda za diskretizaciju Perron-Frobeniusovog operatora. Osnovna je zamisao diskretizacija prostora stanja odabirom pogodne izmjerive particije $(\mathbb{B}_i)_{i=1,\dots,k}$. Nakon takve diskretizacije dani dinamički sustav možemo promatrati kao Markovljev lanac s konačnim prostorom stanja.

Formalnije, neka je $(\mathbb{B}_i)_{i=1,\dots,N}$ konačna particija skupa $\mathcal{X}$ i neka je $g_i := \frac{1}{\mu(\mathbb{B}_i)} \chi_{\mathbb{B}_i}$. Označimo sa $\Delta_N := \text{span}\{g_1, ..., g_N\}$ i definirajmo operator $\mathcal{P}_N : \Delta_N \to \Delta_N$ na bazi $\{g_1, ..., g_N\}$ formulom:

$$\mathcal{P}_N g_i := \sum_{j=1}^{N} p_{ij} g_j,$$

pri čemu je:

$$p_{ij} = \frac{\mu(\Phi^{-1}(\mathbb{B}_j) \cap \mathbb{B}_i)}{\mu(\mathbb{B}_i)}.$$

Ako je $\mathbb{P}$ vjerojatnosna mjera dobivena skaliranjem konačne mjere μ, tada je $p_{ij} = \mathbb{P}(\Phi^{-1}(\mathbb{B}_j)|\mathbb{B}_i) = \mathbb{P}\{\mathbf{x} \in \mathcal{X}, \Phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{B}_i\}$.

Ako promotrimo matricu $P_{N,M} = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{N\times\mathbb{N}}$, tada djelovanje operatora $\mathcal{P}_N$ na g_i možemo promatrati kao množenje zdesna matricom $P_{N,M}$. Gore definirana $P_{N,M}$ je stohastička matrica, dakle ima svojstvenu vrijednost 1 i pripadajući lijevi svojstveni potprostor koji ako je jednodimenzionalan, sadrži strogo pozitivan vektor, a ako je višedimenzionalan ima bazu nenegativnih vektora. Pokazat ćemo, barem za jednodimenzionalna preslikavanja u posebnim slučajevima, da ako $\mathcal{P}$ ima jedinstvenu stacionarnu gustoću, kako profinjujemo particiju, lijevi svojstveni vektori matrice $P_{N,M}$ konvergiraju prema toj stacionarnoj gustoći.

Preostaje pitanje kako iz podataka procijeniti koeficijente p_{ij}. Neka su $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_M$ dane testne točke, odnosno, ako ih podijelimo prema pripadnosti skupu $\mathbb{B}_k$, neka su za svaki $1 \leq k \leq N$ dane točke $\mathbf{x}^k_1, ..., \mathbf{x}^k_{n_k}$. Tada je:

$$p_{ij} \approx \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \chi_{\mathbb{B}_j}(\Phi(\mathbf{x}^i_k)).$$

Konvergenciju ovako procijenjenih matrica $P_{N,M}$ prema $\mathcal{P}_N$ dokazat ćemo u općenitijem slučaju, kao posljedicu konvergencije EDMD metode.

2.2.3 EDMD

Za aproksimaciju Koopmanovog operatora, njegovih svojstvenih vrijednosti i funkcija i Koopmanovih modova, često se koristi proširena dinamička modalna dekompozicija (EDMD). Neka je $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$, neka su dani podaci $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_M$ i $y_1, ..., y_M$, pri čemu je $y_i = \Phi(\mathbf{x}_i)$ te neka je dan $\mathbb{D} = \{\psi_1, ..., \psi_N\}$, rječnik funkcija, pri čemu je $\psi_i : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. Uvedimo oznake:

$$\begin{aligned} X, Y \in \mathbb{R}^{d\times M} :& \quad X = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_M], \quad Y = [\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_M], \\ \Psi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^N :& \quad \Psi(x) = [\psi_1(\mathbf{x}) \dots \psi_N(\mathbf{x})]^\top, \\ \Psi_X, \Psi_Y \in \mathbb{R}^{N\times M} :& \quad \Psi_X = [\Psi(\mathbf{x}_1) \dots \Psi(\mathbf{x}_M)] \quad \Psi_Y = [\Psi(\mathbf{y}_1) \dots \Psi(\mathbf{y}_M)]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Neka je $\mathcal{F}_N = \mathrm{span}\{\psi_1, ..., \psi_N\}$. Iz danih podataka pokušavamo odrediti $\mathcal{K}_N : \mathcal{F}_N \to \mathcal{F}_N$, najbolju aproksimaciju Koopmanovog operatora na $\mathcal{F}_N$, koju ćemo označiti s $\mathcal{K}_{N,M}$. Nju definiramo na sljedeći način:

$$K_{N,M} := \underset{A\in\mathbb{R}^{N\times N}}{\arg\min} \|A\Psi_X - \Psi_Y\|_F \,.$$

$$\text{Ako} \quad f = c_f^\top \Psi, \quad \text{tada definiramo} \quad \mathcal{K}_{N,M} f := c_f^\top K_{N,M} \Psi$$

Znamo da je $K_{N,M} = \Psi_Y \Psi_X^\dagger$, gdje je $\Psi_X^\dagger$ Moore-Penroseov pseudoinverz od Ψ_X, rješenje problema minimizacije 2.2.3.

Alternativno, definiramo matrice:

$$A_{N,M} := \frac{1}{M}\Psi_Y\Psi_X^\top = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\Psi(\mathbf{y}_i)\Psi(\mathbf{x}_i)^\top,$$

$$G_{N,M} := \frac{1}{M}\Psi_X\Psi_X^\top = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\Psi(\mathbf{x}_i)\Psi(\mathbf{x}_i)^\top.$$

Tada iz relacije $B^\dagger = B^\top(BB^\top)^\dagger$ dobivamo $K_{N,M} = A_{N,M}G_{N,M}^\dagger = A_{N,M}G_{N,M}^{-1}$. Ovakva će definicija biti korisna u dokazu konvergencije te za neke ideje ubrzanja.

Aproksimacije svojstvenih vrijednosti Koopmanovog operatora su svojstvene vrijednosti matrice $K_{N,M}$, a aproksimacije svojstvenih funkcija dobivamo kao:

$$\phi_i = \xi_i \Psi,$$

pri čemu je ξ_i i-ti lijevi svojstveni vektor matrice $K_{M,N}$.

Ako sa $\hat{\mu}_M$ označimo normiranu brojeću mjeru na skupu $\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_M\}$, odnosno $\hat{\mu}_M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\delta_{\mathbf{x}_i}$, tada možemo dokazati da je gore opisan $\mathcal{K}_{N,M}$ zapravo ortogonalna projekcija operatora $\mathcal{K}$ na $\mathcal{F}_N$ u $L^2(\mathcal{X}, \Sigma, \hat{\mu}_M)$.

Definicija 2.2.3. *Za danu nenegativnu mjeru μ na $\mathcal{X}$, definiramo* ***ortogonalnu projekciju*** *funkcije ϕ na potprostor $\mathcal{F}_N$ kao:*

$$P_N^\mu \phi = \underset{f\in\mathcal{F}_N}{\arg\min} \|f - \phi\|_{L^2(\mu)} = \underset{c\in\mathbb{R}^N}{\arg\min} \int_{\mathcal{X}} (c^\top\Psi - \phi)^2 \, d\mu.$$

Primijetimo da za gore definiranu matricu $G_{N,M}$ vrijedi:

$$G_{N,M} = \int_{\mathcal{X}} \Psi\Psi^\top d\hat{\mu}_M.$$

Teorem 2.2.4. *Ako je matrica $G_{N,M}$ invertibilna, tada vrijedi:*

$$\mathcal{K}_{N,M} = P_N^{\hat{\mu}_M} \mathcal{K}_{|\mathcal{F}_N}.$$

Dokaz. Neka je $\phi \in \mathcal{F}_N$ i neka je $c_\phi \in \mathbb{R}^N$ takav da je $\phi = c_\phi^\top \Psi$. Tada vrijedi:

$$\underset{f \in \mathcal{F}_N}{\arg\min} \|f - \mathcal{K}\phi\|_{L^2(\hat{\mu}_M)} = \underset{c \in \mathbb{R}^N}{\arg\min} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} (c^\top \Psi(x_i) - c_\phi^\top \Psi(y_i))^2 = \underset{c \in \mathbb{R}^N}{\arg\min} \left\| \Psi_X^\top c - \Psi_Y^\top c_\phi \right\|_2^2.$$

Rješenje gornjeg problema je, zbog invertibilnosti matrice $G_{N,M} = \Psi_X \Psi_X^\top$, dano s $c = (\Psi_X \Psi_X^\top)^{-1} \Psi_X \Psi_Y^\top c_\phi = K_{N,M}^\top c_\phi$, odnosno $\underset{f \in \mathcal{F}_N}{\arg\min} \|f - \mathcal{K}\phi\|_{L^2(\hat{\mu}_M)} = c^\top \Psi = c_\phi^\top K_{N,M} \Psi = \mathcal{K}_{N,M}\phi$, čime je tvrdnja dokazana. □

Predikcija pomoću svojstvenih funkcija

Opišimo kako se buduća stanja dinamičkog sustava mogu brzo predvidjeti pomoću svojstvenih funkcija dobivenih EDMD metodom. Pretpostavimo da je $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ po komponentama sadržana u potprostoru razapetom rječnikom $\mathbb{D}$, odnosno da postoji $B \in \mathbb{R}^{d \times N}$ takva da je $g(\mathbf{x}) = B\Psi(\mathbf{x})$. Ako takav B ne postoji, možemo analitički naći najbolju aproksimaciju funkcije g. Znamo da za vektor ϕ svojstvenih funkcija Koopmanovog operatora vrijedi $\phi = \Xi\Psi$, gdje je Ξ matrica lijevih svojstvenih vektora matrice $K_{N,M}$. Slijedi da je $g = B\Xi^{-1}\phi$, odnosno:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \phi_i(\mathbf{x}),$$

pri čemu su $\mathbf{v}_i$, stupci matrice $V = B\Xi^{-1}$, dani Koopmanovi modovi. Dakle, predikcija nakon n koraka može se dobiti kao:

$$\mathcal{K}^n \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^n \mathbf{v}_i \phi_i(\mathbf{x}).$$

DMD

Preostaje opravdati naziv "proširena dinamička modalna dekompozicija" definiranjem "obične" DMD metode i objašnjenjem na koji je način EDMD proširenje DMD metode [1].

Definicija 2.2.5. *Pretpostavimo da su nam dana dva skupa podataka X i Y (kao u 2.3) takvih da vrijedi $y_k = \Phi(x_k)$.* ***Dinamička modalna dekompozicija*** *(DMD) računa svojstvenu dekompoziciju matrice B dane s:*

$$B = YX^{\dagger}.$$

Ovakva definicija zapravo odmah objašnjava naziv EDMD: naime, u posebnom slučaju kada se u rječniku nalaze samo komponentne funkcije $\psi_i = x_i$, $i = 1, ..., d$, matrice Ψ_X i Ψ_Y zapravo su jednake matricama X i Y, a time je i matrica B iz gornje definicije jednaka matrici $K_{N,M}$ u definiciji EDMD metode.

2.2.4 gEDMD

U ovom odjeljku predstavljamo metodu kojom se, za dinamički sustav s neprekidnim vremenom, direktno procjenjuje generator Koopmanove familije, umjesto Koopmanovog operatora za neki diskretni dinamički pomak. Ova metoda predstavljena je u [9].

U odjeljku 1.4.3 eksplicitno smo izveli da je generator Koopmanove familije pridružen sustavu običnih diferencijalnih jednadžbi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_t(\mathbf{x}) = F(\Phi_t(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d,\ t \in \mathbb{R}$$

dan formulom:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{K}} f = F \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^{d} F_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Sada primjenjujemo ideju EDMD-a kako bismo riješili ovaj problem. Kao i prije, imamo rječnik funkcija $\mathbb{D} = \{\psi_1, ..., \psi_N\}$, ali sada pretpostavljamo da nam je poznat i rječnik njihovih gradijenata $\{\nabla\psi_1, ..., \nabla\psi_N\}$. Neka su $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_M$ dani podaci, definiramo Ψ_X kao u 2.2.3 te definiramo:

$$\dot{\Psi}_X \in \mathbb{R}^{N\times M} \qquad \dot{\Psi}_X = \begin{pmatrix} \dot{\psi}_1(\mathbf{x}_1) & ... & \dot{\psi}_1(\mathbf{x}_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{\psi}_N(\mathbf{x}_1) & ... & \dot{\psi}_N(\mathbf{x}_M) \end{pmatrix},$$

gdje je

$$\dot{\psi}_k(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) \cdot \nabla\psi_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{d} F_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Ako nam je F poznat, matricu $\dot{\Psi}_X$ možemo izračunati eksplicitno, a ako nije, možemo procijeniti iz podataka, na primjer metodom konačnih razlika.

Sada postupamo jednako kao i u običnom EDMD-u, pri čemu matrica $\dot{\Psi}_X$ preuzima ulogu matrice Ψ_Y. Ako sa Ξ označimo matricu lijevih svojstvenih vektora matrice $A_{N,M} = \dot{\Psi}_X \Psi_X^{\dagger}$, te pripadajuće svojstvene vrijednosti s $\lambda_1^g, ..., \lambda_N^g$, tada za funkciju g iz potprostora rječnika zadanu kao $g = B\Psi$ djelovanje operatora $\mathcal{A}_K$ dobivamo na sljedeći način:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{K}} g = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbf{v}_i \phi_i,$$

gdje su $\mathbf{v}_i$ stupci matrice $B\Xi^{-1}$. Djelovanje Koompanovog operatora za trenutak t dobivamo kao:

$$\mathcal{K}_t g = \sum_{i=1}^{N} e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i \phi_i.$$

Posebno, za funkciju $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ možemo dobiti predikciju trajektorije.

2.3 Konvergencija metoda

U ovom odjeljku dokazat ćemo (bez svih detalja) konvergenciju EDMD-a i Ulamove metode i komentirati sličnosti i razlike među dokazima konvergencije. Detalji za Ulamovu metodu mogu se naći u [3], a za EDMD u [10].

Ulamovu metodu zapravo možemo promatrati kao EDMD, pri čemu su funkcije u bazi karakteristične funkcije skupova koji čine particiju prostora stanja, što dokazujemo u odjeljku (2.4.2). Ipak, postojeći rezultati o konvergenciji Ulamove metode dokazuju konvergenciju prema invarijatnoj mjeri u $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, dok ćemo za EDMD dokazati samo slabu konvergenciju svojstvenih funkcija.

Kad govorimo o aproksimaciji Perron-Frobeniusovog i Koopmanovog operatora danim metodama, svaka aproksimacija ovisi o broju funkcija u rječniku N te o broju testnih točaka M, pomoću kojih procjenjujemo dane matrice. Dakle, ako sa $\mathcal{A}$ označimo beskonačnodimenzionalni operator koji želimo aproksimirati, s $\mathcal{A}_N$ najbolju aproksimaciju operatora u danom konačnodimenzionalnom prostoru funkcija te s $A_{M,N}$ njegovu realizaciju dobivenu koristeći M testnih točaka, postoje dva glavna pitanja:

1. Ako $M \to \infty$ konvergira li (i kako) $A_{M,N}$ prema $\mathcal{A}_N$?
2. Ako $N \to \infty$, konvergira li (i kako) $\mathcal{A}_N$ prema $\mathcal{A}$? Konvergiraju li tada (i kako) svojstvene funkcije i svojstvene vrijednosti?

Za dokazivanje, odnosno odgovaranje na prvo pitanje obično se koristi zakon velikih brojeva (ako su točke izabrane nezavisno iz fiksne distribucije). Odgovor na drugo pitanje u općenitom slučaju nije toliko jednostavan, ali može se dokazati u određenim slučajevima, odnosno za određene familije funkcija. Skica dokaza obično izgleda ovako:

1. karakterizirati operatore $\mathcal{A}_N$ na način koji će osigurati jaku konvergenciju prema $\mathcal{A}$
2. dokazati da je niz svojstvenih funkcija operatora $\mathcal{A}_N$ ograničen niz u kompaktnom skupu
3. dokazati da je limes konvergentnog podniza iz niza svojstvenih funkcija svojstvena funkcija operatora $\mathcal{A}$.

Drugi korak u gornjem dokazu obično je najizazovniji i glavni razlog zašto se teoremi konvergencije dokazuju samo za posebne klase funkcija. Ovdje ćemo prezentirati dva primjera (bez svih detalja), jedan za Ulamovu metodu za jednodimenzionalna preslikavanja i jedan za EDMD i Koopmanov operator na prostoru $L^2(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$.

2.3.1 Konvergencija Ulamove metode

Kad govorimo o dokazima konvergencije Ulamove metode, obično dokazujemo samo konvergenciju dominantnog lijevog svojstvenog vektora matrice P_N prema stacionarnoj gustoći operatora $\mathcal{P}$.

Definiranje niza operatora

Neka je $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ prostor konačne mjere i neka je $\{\mathbb{B}_1, ..., \mathbb{B}_N\}$ particija skupa $\mathcal{X}$.

Definirajmo $Q_N : L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) \to L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ formulom:

$$Q_N f := \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\mu(\mathbb{B}_i)} \left(\int_{\mathbb{B}_i} f \, d\mu \right) \chi_{\mathbb{B}_i} = \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{B}_i} f \, d\mu \right) g_i,$$

pri čemu je $g_i := \frac{1}{\mu(\mathbb{B}_i)} \chi_{\mathbb{B}_i}$. Primijetimo da je za svaki $i \le N$, g_i funkcija gustoće.

Propozicija 2.3.1. *Za svaki $N \in \mathbb{N}$, Q_N je Markovljev operator i Galerkinova projekcija na Δ_N. Također $Q_N \mathcal{P}$ je Markovljev operator i $Q_N \mathcal{P}_{|\Delta_N} = \mathcal{P}_N$.*

Dokaz. Zbog toga što su sve funkcije g_i gustoće i aditivnosti po području integracije, vrijedi:

$$\int_X Q_N f \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{B}_i} f \, d\mu \right) \left(\int_X g_i \, d\mu \right) = \int_X f \, d\mu.$$

Dakle, Q_N čuva integral funkcije te je posebno Markovljev operator. $Q_N \mathcal{P}$ je sada Markovljev operator kao kompozicija dvaju Markovljevih operatora. Također vrijedi:

$$\langle Q_N f - f, \chi_{\mathbb{B}_i} \rangle = \left(\int_{\mathbb{B}_i} f \, d\mu \right) \left(\int_{\mathbb{B}_i} g_i \, d\mu \right) - \int_{\mathbb{B}_i} f \, d\mu = 0;$$

dakle, Q_N je Galerkinova projekcija na Δ_N.

Još preostaje dokazati da je $Q_N \mathcal{P}_{|\Delta_N} = \mathcal{P}_N$.

$$Q_N \mathcal{P} g_i = \sum_{j=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{B}_j} \mathcal{P} g_i \, d\mu \right) g_j = \sum_{j=1}^{N} \left(\int_{\Phi^{-1}(\mathbb{B}_j)} g_i \, d\mu \right) g_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{\mu(\Phi^{-1}(\mathbb{B}_j) \cap \mathbb{B}_i)}{\mu(\mathbb{B}_i)} g_j = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} g_j = \mathcal{P}_N g_i.$$

□

Prethodna propozicija govori nam da se operator $\mathcal{P}_N$ definiran na Δ_N može proširiti na cijeli $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ kao $\mathcal{P}_N := Q_N \mathcal{P}$. Od sada nadalje oznaka $\mathcal{P}_N$ podrazumijeva takvu definiciju.

Pretpostavimo da nam je za svaki $N \in \mathbb{N}$ dana particija skupa $\mathcal{X}$, $\{\mathbb{B}_1^N, ..., \mathbb{B}_N^N\}$ te da vrijedi:

$$\lim_{N\to\infty} \max_{1\le k\le N} \mu(\mathbb{B}_k^N) = 0. \tag{2.4}$$

Preostaje ispitati konvergenciju niza operatora $(Q_N)_{N\in\mathbb{N}}$ (po mogućnosti u $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$). Iz gornje je propozicije jasno da priželjkujemo jaku konvergenciju prema operatoru identiteta (jer tada $Q_N\mathcal{P}$ jako konvergira prema $\mathcal{P}$). Primijetimo da Q_N aproksimira $f_{|\mathbb{B}_i}$ konstantnom funkcijom (jednakom integralu funkcije f po $\mathbb{B}_i$). Iz sljedećeg primjera jasno je da takva konvergencija ne mora vrijediti, ako particije nisu "dovoljno dobre":

Primjer 2.3.2. Neka je $\mathcal{X} = \overline{K}(0,1) \subset \mathbb{R}^2$, neka su za svaki $N \in \mathbb{N}$ dani brojevi $0 = a_0^N < a_2^N ... < a_N^N = 1$ te neka je $\mathbb{B}_i^N$ kružni vijenac između krugova radijusa a_{i-1} i a_i. Ako promotrimo $f(x,y) = x$, jasno je da je $\int_{\mathbb{B}_i} f\, d\mu = 0$ za sve $i = 1, ..., N$ te je zato $Q_N f = 0$ za sve $N \in \mathbb{N}$, pa u ovom slučaju niz $(Q_N)_{N\in\mathbb{N}}$ ne konvergira jako.

Pretpostavimo sada da je $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan, μ standardna Lebesgueova mjera i d metrika inducirana nekom od (ekvivaletnih) normi na $\mathbb{R}^n$. Neka je $r(A) := \sup\limits_{x,y\in A} d(x,y)$ i pretpostavimo da vrijedi:

$$\lim_{N\to\infty} \max_{1\le k\le N} r(\mathbb{B}_k^N) = 0. \tag{2.5}$$

Tada možemo dokazati:

Propozicija 2.3.3. *Za svaki $f \in L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ vrijedi $\lim\limits_{N\to\infty} Q_N f = f$, odnosno niz $(Q_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergira jako prema jediničnom operatoru u prostoru $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$.*

Dokaz. Neka je $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je, zbog kompaktnosti prostora $\mathcal{X}$ ona i uniformno neprekidna. Želimo dokazati:

$$\lim_{N\to\infty} \|Q_N f - f\|_1 = 0.$$

Ako sa $\tilde{f}_i = \frac{1}{\mu(\mathbb{B}_i)} \int_{\mathbb{B}_i} f\, d\mu$ označimo srednju vrijednost funkcije f na $\mathbb{B}_i$, vrijedi $\inf\limits_{x\in\mathbb{B}_i} f(x) \le \tilde{f}_i \le \sup\limits_{x\in\mathbb{B}_i} f(x)$. Posebno, vrijedi: $\int_{\mathbb{B}_i} |f - \tilde{f}_i|\, d\mu \le \mu(\mathbb{B}_i)(\sup\limits_{x\in\mathbb{B}_i} f(x) - \inf\limits_{x\in\mathbb{B}_i} f(x))$.

$$\|Q_N f - f\|_1 = \sum_{i=1}^{N} \left\| \tilde{f}_i \chi_{\mathbb{B}_i} - f \chi_{\mathbb{B}_i} \right\|_1 = \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{B}_i} |f - \tilde{f}_i| \, d\mu \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(\mathbb{B}_i)(\sup_{x \in \mathbb{B}_i} f(x) - \inf_{x \in \mathbb{B}_i} f(x)).$$

Neka je sada $\epsilon > 0$ i neka je $\delta > 0$ takav da za $d(x, y) < \delta$ vrijedi $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ (takav δ postoji zbog uniformne neprekidnosti funkcije f). Sada zbog 2.5 postoji $N_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $N \geq N_0$ vrijedi $\max_{1 \leq k \leq N} r(\mathbb{B}_k^N) < \delta$, odnosno za sve $x \in \mathbb{B}_i$, $y \in \mathbb{B}_j$ vrijedi $i = j \implies d(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$. Posebno je $(\sup_{x \in \mathbb{B}_i} f(x) - \inf_{x \in \mathbb{B}_i} f(x)) \leq \epsilon$. Dakle, za $N \geq N_0$ vrijedi:

$$\|Q_N f - f\|_1 \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(\mathbb{B}_i)(\sup_{x \in \mathbb{B}_i} f(x) - \inf_{x \in \mathbb{B}_i} f(x)) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(\mathbb{B}_i)\epsilon = \mu(\mathcal{X})\epsilon;$$

dakle, $Q_N f$ konvergira prema f u $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Kako je $C(\mathcal{X})$ gust u $L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, slijedi da tvrdnja vrijedi za sve $f \in L^1(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$.

□

Iz jake konvergencije operatora Q_N operatoru identiteta slijedi jaka konvergencija operatora $\mathcal{P}_N = Q_N \mathcal{P}$ prema Perron-Frobeniusovom operatoru $\mathcal{P}$.

Budući da je matrica P_N operatora $\mathcal{P}_N$ stohastička, prema Perron-Frobeniusovom teoremu P_N ima nenegativni lijevi svojstveni vektor, odnosno operator $\mathcal{P}_N$ ima stacionarnu gustoću u skupu $\Delta'_N := \left\{ \sum_{i=1}^{N} a_i g_i, \sum_{i=1}^{N} a_i = 1, a_i \geq 0 \, \forall i = 1, ..., N \right\}$. To se može dokazati i pomoću Brouwerovog teorema o fiksnoj točki, jer je Δ'_N zatvoren, ograničen i konveksan podskup skupa Δ_N te je $Q_N(\Delta'_N) \subset \Delta'_N$.

Iako $\mathcal{P}_N$ ima stacionarnu gustoću za sve $N \in \mathbb{N}$, egzistencija stacionarne gustoće Perron-Frobeniusovog operatora dokazana je samo za neke vrste transformacija Φ. Prezentirat ćemo neke od tih rezultata.

Kompaktnost

U sljedećim razmatranjima podrazumijevamo da je $\mathcal{X} = [0, 1]$ te da je za svaki $N \in \mathbb{N}$ particija $\{\mathbb{B}_1^N, ..., \mathbb{B}_N^N\}$ particija intervala $[0, 1]$ na podintervale (primijetimo da su tada uvjeti 2.5 i 2.4 zapravo isti uvjet).

Za dokazivanje egzistencije konvergentnog podniza niza stacionarnih gustoća $(f_N)_{N \in \mathbb{N}}$ koristit ćemo **Hellyjevu lemu**, za koju nam je potrebna i definicija **varijacije**.

Definicija 2.3.4. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. **Varijaciju** funkcije f na intervalu $[a, b]$ definiramo kao:*

$$\bigvee_a^b f := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|, a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b \right\}.$$

Ako je $f \in L^1([a, b], \Sigma, \mu)$, definiramo:

$$\bigvee_{[a,b]} f = \inf \left\{ \bigvee_a^b g,\ g = f\ (\mu - g.s.) \right\}.$$

*Ako vrijedi $\bigvee_{[a,b]} f < \infty$ kažemo da je f **funkcija ograničene varijacije**. Skup svih funkcija ograničene varijacije na $[a, b]$ označavamo s $BV([a, b])$.*

Teorem 2.3.5. *(Hellyjeva lema) Ako je niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcija definiranih na $[a, b]$ uniformno ograničen po normi i varijaciji, odnosno ako postoji K takav da vrijedi:*

$$\|f_n\|_1 \le K, \quad \bigvee_{[a,b]} f_n \le K, \quad n \in \mathbb{N},$$

tada postoji podniz $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ niza $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da vrijedi:

$$\lim_{k\to\infty} \left\| f_{n_k} - f \right\|_1 = 0,$$

pri čemu f također zadovoljava $\|f\|_1 \le K$ i $\bigvee\limits_{[a,b]} f \le K$.

Završetak dokaza

Propozicija 2.3.6. *Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz stacionarnih gustoća operatora $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji zadovoljava uvjete Hellyjeve leme. Tada je f definirana kao limes konvergentnog podniza od $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stacionarna gustoća Perron-Frobeniusovog operatora $\mathcal{P}$.*

Dokaz. Prema Hellyjevoj lemi, podniz $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira prema f u $L^1([0, 1])$, iz čega slijedi da je f gustoća. Također vrijedi (prisjetimo se $\|\mathcal{P}\|_1 = 1$):

$$\|\mathcal{P}f - f\|_1 \le \left\|\mathcal{P}f - \mathcal{P}f_{n_k}\right\|_1 + \left\|\mathcal{P}f_{n_k} - P_{n_k}f_{n_k}\right\|_1 + \left\|P_{n_k}f_{n_k} - f_{n_k}\right\|_1 + \left\|f_{n_k} - f\right\|_1 \le$$

$$\le 2\left\|f - f_{n_k}\right\|_1 + \left\|\mathcal{P}f_{n_k} - P_{n_k}f_{n_k}\right\|_1.$$

Prvi član u gornjoj sumi konvergira u 0 prema Hellyjevoj lemi, a drugi zbog jake konvergencije niza $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operatoru $\mathcal{P}$.

□

Dokazi konvergencije Ulamove metode uglavnom se, dakle, baziraju na Hellyjevoj lemi. Preostalo nam je komentirati do sada dokazane rezultate o uniformnoj ograničenosti varijacije za niz stacionarnih gustoća $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operatora $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sljedeća jednostavna propozicija daje korisne rezultate o povezanosti operatora $(Q_N)_{N\in\mathbb{N}}$ i varijacije funkcije:

Propozicija 2.3.7. *1.*

$$\bigvee_0^1 Q_N f \leq \bigvee_0^1 f \ \forall f \in BV([0,1]).$$

2. Podskup rastućih funkcija i podskup padajućih funkcija prostora $L^1([0,1])$ su Q_N-invarijantni.

Preostalo nam je ukratko objasniti dokaze uniformne ograničenosti varijacije niza $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ za preslikavanja Φ s određenim svojstvima:

Napomena 2.3.8. *(Lasota-Yorke, Li) Za preslikavanja $\Phi : [0,1] \to [0,1]$ koja zadovoljavaju sljedeće uvjete:*

1. *Postoji particija $0 = a_0 < a_1 < ... < a_r = 1$ intervala $[0,1]$ takva da se $\Phi|_{\langle a_{i-1}, a_i\rangle}$ može proširiti na C^2-funkciju na $[a_{i-1}, a_i]$.*
2. *Postoji konstanta $\lambda > 2$ takva da vrijedi:*
$$\inf\{|\Phi'(x)| : x \in [0,1] \setminus \{a_1, a_2, ..., a_{r-1}\}\} \geq \lambda.$$
3. *Postoji konstanta s takva da vrijedi:*
$$\sup\left\{\frac{\Phi''(x)}{[\Phi'(x)]^2} : x \in [0,1] \setminus \{a_1, a_2, ..., a_{r-1}\}\right\} \leq s.$$

Može se pokazati da vrijedi $\bigvee_0^1 \mathcal{P} f \leq \alpha \bigvee_0^1 f + \beta$ za sve $f \in \mathcal{D} \cap BV([0,1])$, pri čemu je $\alpha = \frac{2}{\lambda}$. Iz prethodne propozicije tada vrijedi:

$$\bigvee_0^1 f_n = \bigvee_0^1 Q_n \mathcal{P} f_n \leq \bigvee_0^1 \mathcal{P} f_n \leq \alpha \bigvee_0^1 f_n + \beta.$$

Budući da je $\alpha < 1$, vrijedi $\bigvee_0^1 f_n \leq \frac{\beta}{1-\alpha}$, te niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadovoljava uvjete Hellyjeve leme.

Napomenimo da se ovaj rezultat može dokazati i za $\lambda > 1$.

Napomena 2.3.9. *(Lasota-Yorke, Miller)*
Neka je $\Phi : [0,1] \to [0,1]$ *preslikavanje koje zadovoljava sljedeće uvjete:*

1. *Postoji particija* $0 = a_0 < a_1 < ... < a_r = 1$ *intervala* $[0,1]$ *takva da je* $\Phi_{|[a_{i-1},a_i\rangle}$ *klase* C^2 *za sve* $i = 1, ...r$.
2. $\Phi'(x) > 0$, $\Phi''(x) \geq 0$ *za sve* $x \in [0,1\rangle$, *pri čemu su* Φ' *i* Φ'' *desne derivacije.*
3. $\Phi(a_i) = 0$ *za sve* $i = 0, ..., r-1$.
4. $\lambda \equiv \Phi'(0) > 1$.

Tada se može dokazati da pripadajući Perron-Frobeniusov operator ima stacionarnu gustoću f *te da je* f *padajuća funkcija. Štoviše, za svaku padajuću funkciju gustoće* f *je* $\mathcal{P}f$ *također padajuća funkcija gustoće te vrijedi ograda:*

$$\mathcal{P}f(x) \leq \alpha f(0) + K,$$

pri čemu je $\alpha = \frac{1}{\Phi'(0)} < 1$. *Definiramo:*

$$\mathcal{D}_n = \{f \in \mathcal{D} \cap \Delta_n : f \text{ je padajuća}\}.$$

Prema propoziciji 2.3.7 je $\mathcal{P}_n(\mathcal{D}_n) = Q_n(\mathcal{P}(\mathcal{D}_n)) \subset \mathcal{D}_n$, *a* $\mathcal{D}_n$ *je kompaktan i konveksan skup, pa* $\mathcal{P}_n$ *ima gustoću* $f_n \in \mathcal{D}_n$. *Sada vrijedi (očito je* $\|Q_n\|_\infty$*):*

$$f_n(0) = Q_n\mathcal{P}f_n(0) \leq \|\mathcal{P}f_n\|_\infty \leq \alpha f_n(0) + K.$$

Zbog $\alpha < 1$ *sada je* $f_n(0) \leq \frac{K}{1-\alpha}$ *iz čega slijedi:*

$$\bigvee_0^1 f_n = f_n(0) - f_n(1) \leq \frac{K}{1-\alpha},$$

pa su ispunjeni uvjeti Hellyjeve leme.

2.3.2 Konvergencija $\mathcal{K}_{N,M}$ prema $\mathcal{K}_M$

U ovom odjeljku dokazujemo, uz relativno slabe uvjete na rječnik funkcija, konvergenciju niza $\mathcal{K}_{N,M}$ prema $\mathcal{K}_N$ kada $M \to \infty$, pri čemu operator $\mathcal{K}_N$ definiramo kao:

$$\mathcal{K}_N := P_N^\mu \mathcal{K}_{|\mathcal{F}_N},$$

gdje je μ vjerojatnosna mjera na prostoru $\mathcal{X}$ te podrazumijevamo da su $x_1, ..., x_M$ izabrani nezavisno na vjerojatnosnom prostoru $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$.

Pretpostavimo da su funkcije $\psi_1, ..., \psi_N$ μ- **nezavisne**, odnosno da vrijedi:

$$\forall c \in \mathbb{R}^N \quad \mu\{x \in \mathcal{X} : c^\top \Psi = 0\} = 0.$$

Karakteristične funkcije disjunktnih skupova (korištene u Ulamovoj metodi kao posebnom slučaju EDMD-a) su μ-nezavisne. Također, funkcije u svakoj ortonormiranoj bazi prostora $L^2(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ su μ-nezavisne. Pretpostavka μ-nezavisnosti povlači invertibilnost matrice $G_{N,M}$ s vjerojatnošću 1.

Lema 2.3.10. *Ako su funkcije $\psi_1, ..., \psi_N$ μ-nezavisne, tada za sve $\phi \in \mathcal{F}$ vrijedi:*

$$\lim_{M\to\infty} \left\| P_N^{\hat{\mu}_M} \phi - P_N^{\mu} \phi \right\| = 0,$$

pri čemu je $\|\cdot\|$ bilo koja norma na konačnodimenzionalnom prostoru $\mathcal{F}_N$.

Dokaz.

$$P_N^\mu \phi = \arg\min_{f\in\mathcal{F}_N} \int_{\mathcal{X}} (f-\phi)^2 \, d\mu = \Psi^\top \arg\min_{c\in\mathbb{R}^N} \int_{\mathcal{X}} (c^\top \Psi - \phi)^2 \, d\mu = \Psi^\top \arg\min_{c\in\mathbb{R}^N} c^\top G_N c - 2c^\top b_\phi,$$

gdje je $G_N = \int_{\mathcal{X}} \Psi\Psi^\top \, d\mu \in \mathbb{R}^{N\times N}$, a $b_\phi = \int_{\mathcal{X}} \Psi\phi \, d\mu \in \mathbb{R}^{N\times 1}$. Budući da je G_N, zbog pretpostavke nezavisnosti, invertibilna simetrična pozitivno definitna matrica, minimum se postiže za $c = G_N^{-1} b_\phi$. Analognim zaključivanjem dobivamo da je $P_N^{\hat{\mu}_M} \phi = \Psi^\top c_M$, gdje je $c_M = G_{N,M}^{-1} b_{\phi,M}$, gdje smo $G_{N,M}$ već definirali, a $b_{\phi,M} = \sum_{i=1}^{M} \Psi(x_i)\phi(x_i)$. Prema jakom zakonu velikih brojeva vrijedi $\lim_{M\to\infty} G_{N,M} = G_N$ te $\lim_{M\to\infty} b_{\phi,M} = b_\phi$, pa tvrdnja slijedi zbog neprekidnosti matričnog množenja i invertiranja. □

Iz prethodne leme, definicije operatora $\mathcal{K}_N$ i teorema 2.2.4 jednostavno slijedi:

Teorem 2.3.11. *Za svaki $\phi \in \mathcal{F}_N$ vrijedi:*

$$\lim_{M\to\infty} \left\| \mathcal{K}_{N,M} \phi - \mathcal{K}_N \phi \right\| = 0.$$

2.3.3 Konvergencija $\mathcal{K}_N$ prema $\mathcal{K}$

U ovom odjeljku dokazat ćemo, na sličan način kao i za Ulamovu metodu, konvergenciju EDMD metode uz određene pretpostavke.

2.3.4 Definiranje niza operatora

Pretpostavke pod kojima radimo su:

- $\mathcal{K}$ je dobro definiran ograničen operator na $L^2(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$
- rječnik funkcija $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ čini ortonormiranu bazu za $L^2(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$.

Uz pretpostavku (2), niz $(P_N^\mu)_N$ ortogonalnih projektora na potprostore $\mathcal{F}_N$ jako konvergira prema operatoru identiteta na $L^2(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Sada nije teško dokazati sljedeću tvrdnju:

Teorem 2.3.12. *Niz $\mathcal{K}_N P_N^\mu = P_N^\mu \mathcal{K} P_N^\mu$ konvergira jako prema operatoru $\mathcal{K}$ za $N \to \infty$.*

Dokaz. Neka je $\phi \in L^2(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ i $N \in \mathbb{N}$. Tada možemo pisati $\phi = P_N^\mu \phi + (I - P_N^\mu)\phi$, iz čega slijedi:

$$\left\|P_N^\mu \mathcal{K} P_N^\mu \phi - \mathcal{K}\phi\right\| = \left\|(P_N^\mu - I)\mathcal{K} P_N^\mu \phi - \mathcal{K}(I - P_N^\mu)\phi\right\| \leq \left\|(P_N^\mu - I)\mathcal{K} P_N^\mu \phi\right\| + \|\mathcal{K}\| \left\|(I - P_N^\mu)\phi\right\|.$$

Sada zbog jake konvergencije niza P_N^μ prema I slijedi tvrdnja.

□

Primijetimo da nam je u prethodnom dokazu bila potrebna ograničenost, odnosno neprekidnost operatora $\mathcal{K}$. Gornja razmatranja i pretpostavke mogu se oslabiti tako da umjesto $L^2(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ uzmemo neki $\mathcal{K}$-invarijantan potprostor $\mathcal{F}$ prostora $L^2(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Ako je $\mathcal{K}$ neprekidan na $\mathcal{F}$ te ako je $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza za $\mathcal{F}$, tada niz operatora $\mathcal{K}_N$ konvergira prema $\mathcal{K}_{|\mathcal{F}}$. Također treba komentirati da pretpostavka da je $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza za $\mathcal{F}$ nije pretjerano jaka pretpostavka, jer je dovoljno uzeti prebrojiv gust skup funkcija i ortonormirati ga.

Slaba konvergencija svojstvenih funkcija

Jaka konvergencija operatora općenito ne povlači konvergenciju spektra i svojstvenih funkcija. Međutim, možemo dokazati postojanje slabo konvergentnog podniza svojstvenih funkcija operatora $\mathcal{K}_N$ prema svojstvenoj funkciji operatora $\mathcal{K}$ te konvergenciju pripadajućih svojstvenih vrijednosti.

Za dokaz te konvergencije bit će nam potreban sljedeći teorem ([2], teorem 5.3.10):

Teorem 2.3.13. *Svaki ograničen niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u Hilbertovom prostoru H ima slabo konvergentan podniz, odnosno postoji podniz $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ i $x \in H$ za koji vrijedi:*

$$\forall y \in H \quad \lim_{k\to\infty} \langle x_{n_k}, y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Slabu konvergenciju niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prema x označavamo s $x_n \xrightarrow{w} x$.

Sada smo spremni dokazati slabu konvergenciju niza svojstvenih funkcija:

Teorem 2.3.14. *Neka je $\mathcal{K}$ ograničen operator na $L^2(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ te neka je $(\lambda_N, \phi_N)_{n\in\mathbb{N}}$ niz parova svojstvenih vrijednosti i funkcija operatora $\mathcal{K}_N$, pri čemu je $\|\phi_N\|_2 = 1$, $N \in \mathbb{N}$. Tada postoji podniz $(\lambda_{N_i}, \phi_{N_i})_{i\in\mathbb{N}}$, te $\lambda \in \mathbb{C}$, $\phi \in L^2(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ takvi da vrijedi:*

$$\lim_{i\to\infty} \lambda_{N_i} = \lambda, \quad \phi_{N_i} \xrightarrow{w} \phi,$$

te vrijedi $\mathcal{K}\phi = \lambda\phi$. Posebno, ako je $\|\phi\|_2 > 0$, tada je λ svojstvena vrijednost operatora $\mathcal{K}$ s pripadajućom svojstvenom funkcijom ϕ.

Dokaz. Niz $(\phi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ je ograničen niz na Hilbertovom prostoru, pa prema prethodnom teoremu postoji njegov slabo konvergentan podniz $(\phi_{M_k})_{k\in\mathbb{N}}$) s limesom ϕ.
Zbog relacije $\mathcal{K}_N P_N^\mu = P_N^\mu \mathcal{K} P_N^\mu$ te $\mathcal{K}_N\phi_N = \lambda_N\phi_N$ slijedi:

$$\|\lambda_N\phi_N\|_2 = \left\|P_N^\mu \mathcal{K} P_N^\mu \phi_N\right\|_2 \leq \left\|P_N^\mu\right\|_2 \|\mathcal{K}\|_2 \left\|P_N^\mu\right\|_2 \|\phi\|_2 = \|\mathcal{K}\|_2 \|\phi\|_2 \implies |\lambda_N| \leq \|\mathcal{K}\|_2 .$$

Dakle, niz $(\lambda_N)_{N\in\mathbb{N}}$ je ograničen u $\mathbb{C}$. Stoga postoji konvergentan podniz $(\lambda_{N_i})_{i\in\mathbb{N}}$ niza $(\lambda_{M_k})_{k\in\mathbb{N}}$ s limesom λ.

Neka je sada $f \in L^2(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$. Vrijedi:

$$\langle \mathcal{K}\phi - \lambda\phi, f\rangle = \langle \mathcal{K}\phi - \mathcal{K}_{N_i} P_{N_i}^\mu \phi + \mathcal{K}_{N_i} P_{N_i}^\mu \phi - \mathcal{K}_{N_i}\phi_{N_i} + \mathcal{K}_{N_i}\phi_{N_i} - \lambda_{N_i}\phi_{N_i} + \lambda_{N_i}\phi_{N_i} - \lambda\phi_{N_i} + \lambda\phi_{N_i} - \lambda\phi, f\rangle =$$

$$\langle \mathcal{K}\phi - \mathcal{K}_{N_i} P_{N_i}^\mu \phi, f\rangle + \langle \mathcal{K}_{N_i} P_{N_i}^\mu \phi - \mathcal{K}_{N_i}\phi_{N_i}, f\rangle + \langle \lambda_{N_i}\phi_{N_i} - \lambda\phi_{N_i}, f\rangle + \langle \lambda\phi_{N_i} - \lambda\phi, f\rangle. \tag{2.6}$$

Dokažimo sada da svaki od članova gornje sume konvergira u 0 za $i \to \infty$. Prema Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti te zbog ograničenosti operatora $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}_N$ vrijedi:

$$|\langle \mathcal{K}\phi - \mathcal{K}_{N_i} P_{N_i}^\mu \phi, f\rangle| \leq \left\|\mathcal{K}\phi - \mathcal{K}_{N_i} P_{N_i}^\mu \phi\right\|_2 \|f\|_2 \leq \left\|\mathcal{K} - \mathcal{K}_{N_i} P_{N_i}^\mu\right\|_2 \|\phi\|_2 \|f\|_2 ,$$

te desna strana konvergira u 0 zbog jake konvergencije niza operatora $(\mathcal{K}_N)_{N\in\mathbb{N}}$.

$$|\langle \mathcal{K}_{N_i} P_{N_i}^\mu \phi - \mathcal{K}_{N_i}\phi_{N_i}, f\rangle| = |\langle P_{N_i}^\mu \mathcal{K} P_{N_i}^\mu \phi - P_{N_i}^\mu \mathcal{K}\phi_{N_i}, f\rangle| = |\langle \mathcal{K}(P_{N_i}^\mu \phi - \phi_{N_i}), P_{N_i}^\mu f\rangle|,$$

Označimo $h_i = \mathcal{K}(P_{N_i}^\mu \phi - \phi_{N_i})$ i dokažimo da $h_i \xrightarrow{w} 0$. Prisjetimo se da je $\mathcal{K}$ ograničen operator te da je zato dobro definiran njemu adjungirani operator $\mathcal{K}^*$ (štoviše, zapravo se radi o Perron-Frobeniusovom operatoru za isto preslikavanje). Neka je $g \in L^2(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$:

$$\langle h_i, g\rangle = \langle P_{N_i}^\mu \phi - \phi_{N_i}, \mathcal{K}^* g\rangle = \langle P_{N_i}^\mu \phi - \phi, \mathcal{K}^* g\rangle + \langle \phi - \phi_{N_i}, \mathcal{K}^* g\rangle.$$

Prvi član ove sume, analogno kao i prvi član sume 2.6, konvergira u 0 zbog jake konvergencije operatora $P^{\mu}_{N_i}$ operatoru identiteta. Drugi član konvergira zbog slabe konvergencije niza $(\phi_{N_i})_{i\in\mathbb{N}}$. Dakle $h_i \xrightarrow{w} 0$. Sada vrijedi:

$$\langle h_i, P^{\mu}_{N_i} f\rangle = \langle h_i, P^{\mu}_{N_i} f - f\rangle + \langle h_i, f\rangle.$$

Sada opet zbog jake konvergencije operatora $P^{\mu}_{N_i}$ i slabe konvergencije niza $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$, desna strana konvergira u 0.

Četvrti član u 2.6 konvergira u 0 zbog slabe konvergencije niza $(\phi_{N_i})_{i\in\mathbb{N}}$.
Napokon, imamo, opet po Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti:

$$|\langle \lambda_{N_i}\phi_{N_i} - \lambda\phi_{N_i}, f\rangle| = |\lambda_{N_i} - \lambda||\langle \phi_{N_i}, f\rangle| \leq |\lambda_{N_i} - \lambda| \, \|f\|_2 \,,$$

te desna strana konvergira u 0 zbog konvergencije niza $(\lambda_{N_i})_{i\in\mathbb{N}}$. Time je tvrdnja dokazana.

□

2.4 Dodatna razmatranja o metodama

2.4.1 EDMD za Perron - Frobeniusov operator

Iz dualnosti Koopmanovog i Perron-Frobeniusovog operatora možemo izvesti najbolju aproksimaciju Perron-Frobeniusovog operatora $\mathcal{P}_{N,M}$ na N-dimenzionalnom potprostoru funkcija iz rječnika $\mathbb{D}$. Htjeli bismo operator definirati jednako kao i Koopmanov : $\mathcal{P}_{N,M}f := c_f^\top P_{N,M}\Psi$ za $f = c_f^\top\Psi$, gdje je Ψ već uveden vektor funkcija iz rječnika. Zbog dualnosti tada vrijedi, za $f = c_f^\top\Psi$ i $g = c_g^\top\Psi$:

$$\langle \mathcal{P}_{N,M}f, g\rangle_{\hat{\mu}_M} = \sum_{i=1}^{M} c_f^\top P_{N,M}\Psi(\mathbf{x}_i)c_g^\top\Psi(\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^{M} c_f^\top P_{N,M}\Psi(\mathbf{x}_i)\Psi(\mathbf{x}_i)^\top c_g = Mc_f^\top P_{N,M}G_{N,M}c_g.$$

S druge strane, vrijedi:

$$\langle f, \mathcal{K}_{N,M}g\rangle_{\hat{\mu}_M} = \sum_{i=1}^{M} c_f^\top\Psi(\mathbf{x}_i)c_g^\top K_{M,N}\Psi(\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^{M} c_f^\top\Psi(\mathbf{x}_i)\Psi(\mathbf{x}_i)^\top K_{N,M}^\top c_g = Mc_f^\top G_{N,M}K_{N,M}^\top c_g.$$

Gornje jednakosti vrijede za sve vektore c_f i c_g pa možemo zaključiti:

$$P_{N,M}G_{N,M} = G_{N,M}K_{N,M}^\top = G_{N,M}G_{N,M}^{-1}A_{N,M}^\top = A_{N,M}^\top,$$

odnosno $P_{N,M} = A_{N,M}^\top G_{N,M}^{-1}$. Sada invarijantne mjere Perron-Frobeniusovog operatora možemo aproksimirati u proizvoljnom rječniku funkcija.

2.4.2 Ulamova metoda kao EDMD

Nastavno na gornja razmatranja, promatramo rječnik funkcija $\mathbb{D} = \{\psi_1, ..., \psi_N\}$ zadan kao $\psi_k = \chi_{\mathbb{B}_k}$, pri čemu je $\{\mathbb{B}_1, ..., \mathbb{B}_N\}$ particija skupa $\mathcal{X}$ i neka su dane točke $\mathbf{x}_1^k, ..., \mathbf{x}_{n_k}^k$ za sve $1 \le k \le N$, te $n_1 + ... + n_N = M$. Tada vrijedi:

$$\Psi_X = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_1}^\top & & & \\ & \mathbf{1}_{n_2}^\top & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{1}_{n_N}^\top \end{pmatrix},$$

pri čemu s $\mathbf{1}_n$ označavamo $n \times 1$ vektor jedinica. Tada vrijedi:

$$\Psi_X^\dagger = \Psi_X^\top \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1} & & & \\ & \frac{1}{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{n_N} \end{pmatrix}.$$

Nije teško provjeriti da tada vrijedi:

$$(\Psi_Y \Psi_X^\dagger)_{ij} = \sum_{k=1}^{M} (\Psi_Y)_{ik} (\Psi_X^\dagger)_{kj} = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{M} (\Psi_Y)_{ik} (\Psi_X)_{jk} = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{M} \chi_{\mathbb{B}_i}(\mathbf{y}_k) \chi_{\mathbb{B}_j}(\mathbf{x}_k) =$$

$$\frac{1}{n_j} \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{B}_j} \chi_{\mathbb{B}_i}(\Phi(\mathbf{x}) = p_{ji},$$

odnosno $K_{N,M} = P_{N,M}^\top$. Dakle, Ulamovu metodu za particiju $\{\mathbb{B}_1, ..., \mathbb{B}_N\}$ zapravo možemo promatrati kao EDMD s rječnikom koji čine karakteristične funkcije skupova iz te particije.

2.4.3 DMD i EDMD za sustave s velikom dimenzijom

U praksi se često pojavljuju problemi u kojima je dimenzija prostora $\mathcal{X}$ znatno veća od broja dostupnih mjerenja. Za do sada definirane DMD i EDMD metode to predstavlja problem, jer je pretpostavka da ćemo u rječniku imati manje funkcija nego što imamo podataka (u suprotnom matrica $G_{N,M}$ ne može biti invertibilna).
Međutim, problemi velike dimenzionalnosti obično u sebi sadržavaju visoko korelirane komponente, te im se na taj način dimenzionalnost može smanjiti, primjerice korištenjem dekompozicije matrice na singularne vrijednosti (SVD). Teorem o singularnoj dekompoziciji matrice govori da se svaka matrica $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ može rastaviti na sljedeći način:

$$A = U \Sigma V^\top, \; U \in \mathbb{R}^{m \times m}, \; \Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}, \; V \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

pri čemu su U i V ortogonalne matrice, a Σ dijagonalna matrica s padajućom nenegativnom dijagonalom.
Smanjenje dimenzije matrice podataka X na ovaj način možemo postići tako da za neki $k < m, n$ uzmemo aproksimaciju:

$$X_k = U_k \Sigma_k V_k^\top = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^\top, \; U \in \mathbb{R}^{m \times k}, \; \Sigma \in \mathbb{R}^{k \times k}, \; V \in \mathbb{R}^{n \times k},$$

gdje U_k i V_k čine prvih k stupaca matrica U i V. Sukladno s time, imamo sljedeći DMD algoritam (uz prije uvedene oznake X, Y):

1. Odredimo k takav da su σ_l "dovoljno male" za $l > k$.

2. Odredimo U_k, Σ_k, V_k kao gore.

3. Izračunamo $B_k = U_k^\top Y V_k \Sigma_k^{-1}$.

4. Izračunamo svojstvenu dekompoziciju Γ_k, Λ_k matrice B_k, pri čemu su Γ_k desni svojstveni vektori matrice B_k.

5. $U_k\Gamma_k$ su traženi DMD modovi.

Pokazat ćemo da ovakvu dinamičku modalnu dekompoziciju možemo interpretirati kao EDMD za rječnik funkcija $\psi_i(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, u_i \rangle, i = 1, ..., k$. Takva interpretacija ima smisla, jer ako $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_M$ promatramo kao točke u prostoru, $u_1, ..., u_k$ predstavljaju k dominantnih smjerova za skup podataka $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_M$, što je ideja analize glavnih komponenti (PCA). Ovu interpretaciju možemo koristiti za uvođenje nelinearnosti, u smislu da nelinearne funkcije (polinome, trigonometrijske funkcije) uvodimo u varijablama $\langle x, u_i \rangle$.
Uz ovakvu pretpostavku na rječnik funkcija, imamo:

$$\Psi_X = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_1, u_1 \rangle & ... & \langle \mathbf{x}_M, u_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{x}_1, u_k \rangle & ... & \langle \mathbf{x}_M, u_k \rangle \end{pmatrix} = U_k^\top X = \Sigma_k V_k^\top, \quad \Psi_Y = U_k^\top Y.$$

Sada imamo:

$$K_{k,M} = \Psi_Y \Psi_X^\dagger = U_k^\top Y (\Sigma_k V_k^\top)^\dagger = U_k^\top Y V_k \Sigma_k^{-1}.$$

Dakle, dobivena matrica $K_{k,M}$ je jednaka matrici B_k iz gornjeg algoritma.

Poglavlje 3

Primjeri

U ovom poglavlju analizirat ćemo nekoliko sintetičkih (u smislu da mjerenja simuliramo iz poznatog sustava) i nesintetičkih primjera (gdje su mjerenja dobivena bez znanja o pozadinskom dinamičkom sustavu). Na primjerima u kojima nam je dinamički sustav poznat, osvrnut ćemo se na svojstva o kojima smo govorili u prethodnim poglavljima, izvesti (gdje je moguće) eksplicitno svojstvene vrijednosti i svojstvene funkcije te provjeriti efikasnost Ulamove metode, EDMD-a te gEDMD-a za dane sustave. U takvim sustavima možemo imati metriku udaljenosti od teorijske vrijednosti.

U danim ćemo primjerima s neprekidnim vremenom, radi jednostavnosti, dinamički sustav 1.10 zapisivati kao:

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) \text{ , odnosno } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ F_d(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Napomena 3.0.1. *(O prikazu svojstvenih vrijednosti na slikama) U primjerima s neprekidnim vremenom, Koopmanov operator koji aproksimiramo EDMD metodom zapravo je operator $\mathcal{K}_t$ iz neprekidne familije $(\mathcal{K}_t)_{t\geq 0}$, pri čemu je t vrijeme između dva uzastopna mjerenja. Dakle, očekujemo da će za svojstvene vrijednosti λ_i, koje dobijemo EDMD metodom, te svojstvene vrijednosti generatora λ_i^g, dobivene gEDMD metodom, vrijediti $\lambda_i = e^{\lambda_i^g t}$. Zato ćemo, kad god budemo koristili obje metode na istim podacima, crtati svojstvene vrijednosti na dva načina: svojstvene vrijednosti dobivene EDMD-om i eksponente svojstvenih vrijednosti dobivenih gEDMD-om (lijevo) te logaritmirane svojstvene vrijednosti uz svojstvene vrijednosti dobivene gEDMD-om (desno). Za međusobnu usporedbu više vrsta iste metode, prikazujemo svojstvene vrijednosti prirodne za tu metodu.*

3.1 Linearni dinamički sustav u diskretnom vremenu

Prvo promatramo dvodimenzionalni dinamički sustav s diskretnim vremenom [14]:

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n, \; A = \begin{bmatrix} 0.48 & -0.06 \\ -0.16 & 0.52 \end{bmatrix}$$

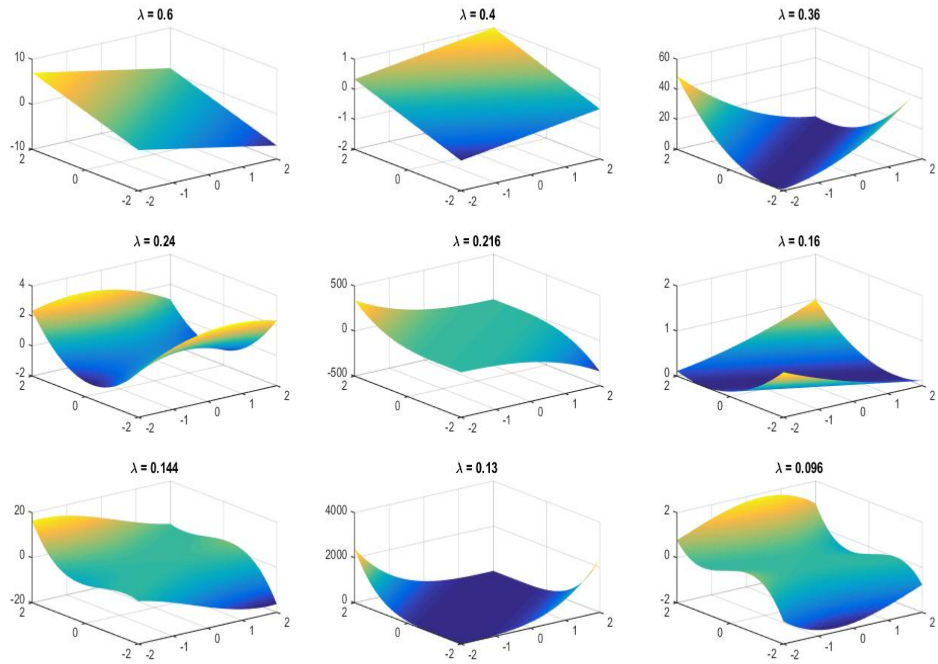
Kao što smo komentirali u primjeru 1.2.12, svojstvene vrijednosti Koopmanovog operatora su svojstvene vrijednosti matrice A, a svojstvene funkcije ϕ_1, ϕ_2 dane s $\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_1 \rangle, \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_2 \rangle$, gdje su $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ lijevi svojstveni vektori matrice A. Još svojstvenih vrijednosti i funkcija Koopmanovog operatora može se dobiti množenjem. Za gore danu matricu A svojstvene su vrijednosti $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = 0.4$, s pripadajućim lijevim svojstvenim vektorima $\mathbf{w}_1 = [0.8, -0.6]^\top$ i $\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}[2, 1]^\top$.

Rekonstrukcija svojstvenih funkcija pomoću EDMD-a

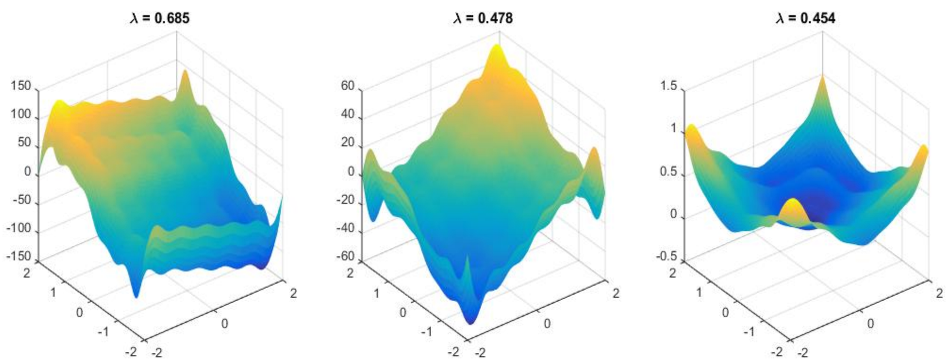
Budući da su nam u ovom slučaju svojstvene funkcije poznate, možemo "varati" te odabrati pogodan rječnik funkcija $\mathbb{D}$. Označimo sa $\mathbb{D}^k_{poly}$ skup monoma u dvije varijable stupnja manjeg ili jednakog k ($\mathbb{D}^k_{poly}$ sadrži $\binom{n+2}{2}$ monoma). Na slici 3.1 može se vidjeti rekonstrukcija svojstvenih funkcija pomoću polinoma stupnja manjeg ili jednakog 5. Na slici 3.2 prikazana je lošija rekonstrukcija dobivena pomoću Fourierovih polinoma u dvije varijable.

Aproksimacija invarijantne mjere

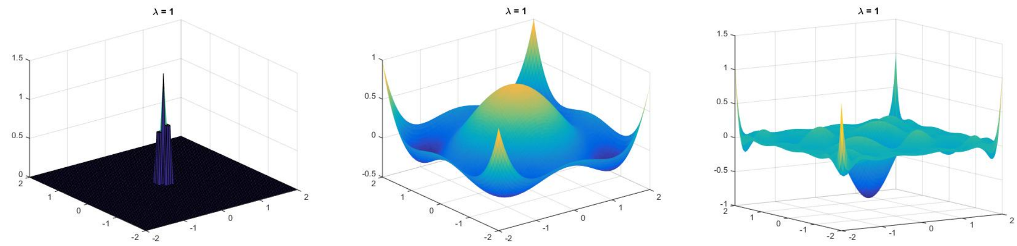
Invarijantna mjera ovog sustava zapravo je mjera koncentrirana u točki $[0, 0]$. Invarijantnu mjeru pokušali smo aproksimirati Ulamovom metodom te EDMD metodom s rječnicima polinoma različitih stupnjeva, a rezultati se mogu vidjeti na slici 3.3. Primjećujemo da Ulamova metoda dobro aproksimira danu distribuciju, dok skupovi polinoma ni s povećanjem stupnja ne mogu dobro aproksimirati takvu distribuciju.



Slika 3.1: Prvih devet svojstvenih vrijednosti (osim trivijalne 1) i pripadajuće svojstvene funkcije Koopmanovog operatora dobivene aproksimacijom polinomima stupnja manjeg ili jednakog 5.



Slika 3.2: Prve tri netrivijalne svojstvene vrijednosti i pripadajuće svojstvene funkcije Koopmanovog operatora dobivene aproksimacijom Fourierovim polinomima.



Slika 3.3: Invarijantna mjera izračunata Ulamovom metodom (lijevo), EDMD metodom s rječnikom polinoma $\mathbb{D}^5_{poly}$ (srednje) i $\mathbb{D}^{10}_{poly}$ (desno).

3.2 Dinamički sustav s neprekidnim vremenom

Promatramo dvodimenzionalni dinamički sustav s neprekidnim vremenom:

$$\dot{x_1} = \gamma x_1,$$

$$\dot{x_2} = \delta(x_2 - x_1^2).$$

Podatke za ovaj sustav simuliramo pomoću funkcije ode45 u programskom jeziku MATLAB, za intervale od 0.01 sekunde.

Svojstvene vrijednosti i funkcije sustava

Primijetimo prvo da je $\phi_1(\mathbf{x}) = 1$ svojstvena funkcija Koopmanove familije pridružena svojstvenoj vrijednosti 0. Također, jednostavno je provjeriti da su $\phi_2(\mathbf{x}) = \gamma x_1$ te $\phi_3(\mathbf{x}) = \frac{2\gamma-\delta}{\delta}x_2 + x_1^2$ svojstvene funkcije generatora $\mathcal{A}_\mathcal{K}$ pripadajuće Koopmanove familije pridružene svojstvenim vrijednostima γ i δ redom:

$$\mathcal{A}_\mathcal{K}\phi_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma x_1 \\ \delta(x_2 - x_1^2) \end{bmatrix} = \gamma x_1 = \gamma\phi_2(\mathbf{x}),$$

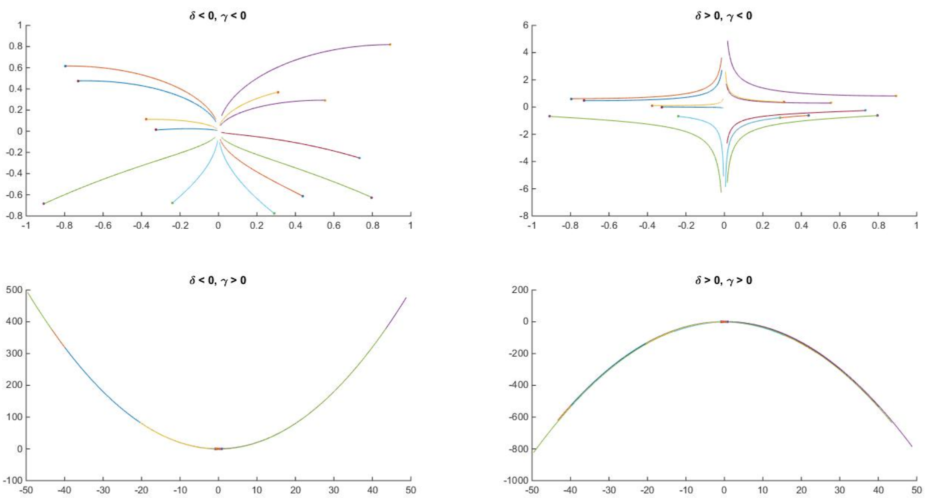
$$\mathcal{A}_\mathcal{K}\phi_3(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 & \frac{2\gamma-\delta}{\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma x_1 \\ \delta(x_2 - x_1^2) \end{bmatrix} = (2\gamma - \delta)x_2 + \delta x_1^2 = \delta\phi_3(\mathbf{x}).$$

Prema napomeni 1.4.12, svi brojevi oblika $a\gamma + b\delta$ za $a, b \in \mathbb{N}_0$ svojstvene su vrijednosti Koopmanove familije, s pripadajućim svojstvenim funkcijama $\phi_{a,b} = \phi_2^a\phi_3^b$.

Sustav za različite predznake γ, δ

Jedina fiksna točka gornjeg sustava je $[0, 0]$, pa stabilnu, nestabilnu i centralnu mnogostrukost promatramo s obzirom na nju. Pretpostavimo da su sve svojstvene funkcije oblika $\phi_2^a \phi_3^b$, te promotrimo analogon propozicije 1.4.19 za nelinearne sustave. Za različite predznake γ i δ dobivamo:

γ	δ	E^s	E^u
< 0	< 0	$\mathbb{R}^2$	$\emptyset$
< 0	> 0	$\{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \frac{\delta}{\delta - 2\gamma} x_1^2\}$	$\{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$
> 0	< 0	$\{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$	$\{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \frac{\delta}{\delta - 2\gamma} x_1^2\}$
> 0	> 0	$\emptyset$	$\mathbb{R}^2$

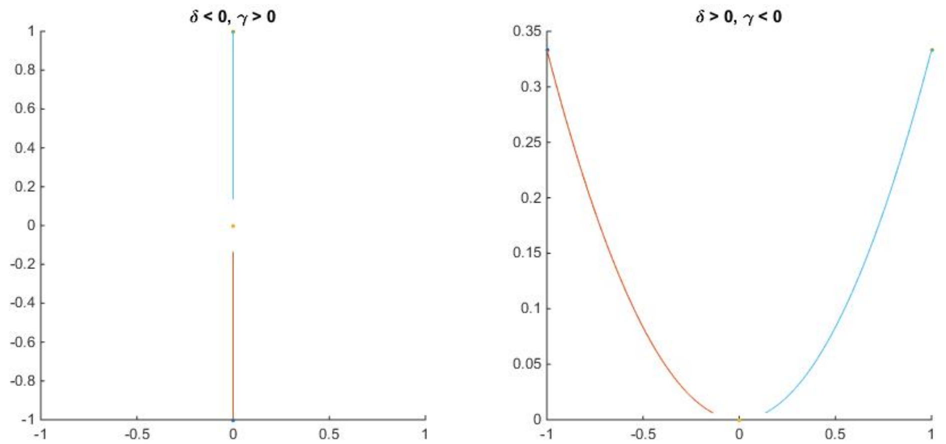


Slika 3.4: Trajektorije skupa 13 nasumično odabranih točaka za različite predznake γ, δ, gdje je $|\gamma| = 0.4$, $|\delta| = 0.2$ tijekom 10 sekundi. Početak trajektorija naznačen je točkom.

Trajektorije sustava prikazane su slici 3.4. Za $\delta, \gamma < 0$, trajektorije konvergiraju prema fiksnoj točki 0, a u ostalim slučajevima divergiraju. Ako za $\delta > 0, \gamma < 0$, odnosno $\delta < 0, \gamma > 0$ simuliramo podatke za E^s iz tablice, dobivamo stabilne trajektorije, kao što se može vidjeti na slici 3.5. Ovakav rezultat odgovara našim zaključcima o stabilnim mnogostrukostima, a možemo ga dobiti i analizom pripadajućeg sustava ODJ.

Aproksimacije dobivene EDMD i gEDMD metodama

Promatramo sustav za parametre $\gamma = -0.7$, $\delta = -0.8$ te simuliramo po 100 podataka (prvu sekundu) iz 100 trajektorija. Početne točke trajektorija odabrali smo iz jedinične dvodimenzionalne normalne razdiobe.



Slika 3.5: Trajektorije točaka iz teorijski stabilnih mnogostrukosti.

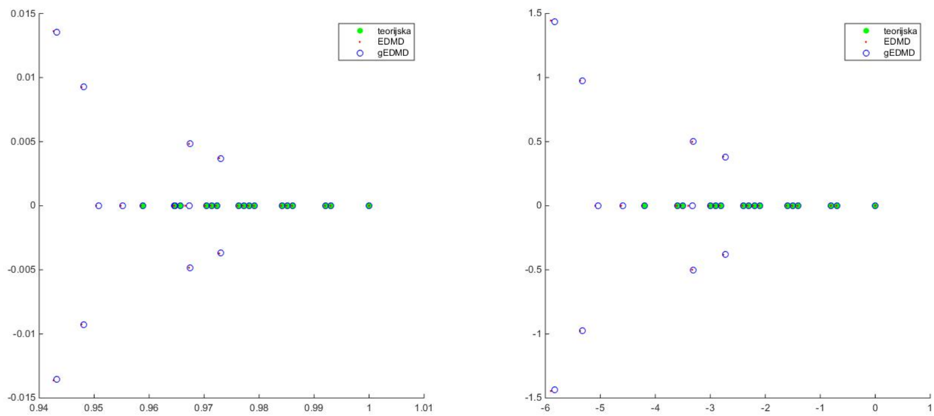
U ovom smo sustavu već analitički odredili (neke) svojstvene funkcije pripadajuće Koopmanove familije, koje su polinomnog oblika. Stoga ćemo opet koristiti rječnike $\mathbb{D}^k_{poly}$ za EDMD metodu te za gEDMD metodu.

Ako se u rječniku nalaze polinomi stupnja manjeg ili jednakog k, tada se u potprostoru rječnika nalazi točno $\lfloor \frac{k+2}{2} \rfloor \lceil \frac{k+2}{2} \rceil$ svojstvenih funkcija Koopmanove polugrupe. Za rječnik polinoma stupnja manjeg ili jednakog 6, dobivene svojstvene vrijednosti prikazane su na slici 3.6. Primijetimo da su svojstvene vrijednosti dobivene gEDMD metodom nešto bliže teorijskim svojstvenim vrijednostima. Također, na grafu postoji nekoliko parova svojstvenih vrijednosti s izraženom kompleksnom komponentom. Međutim, za različite skupove simuliranih podataka te su vrijednosti znatno različite, što je prikazano na slici 3.7. Zanimljivo je da se zavisnost o podacima jednako prenosi na gEDMD i EDMD metodu.

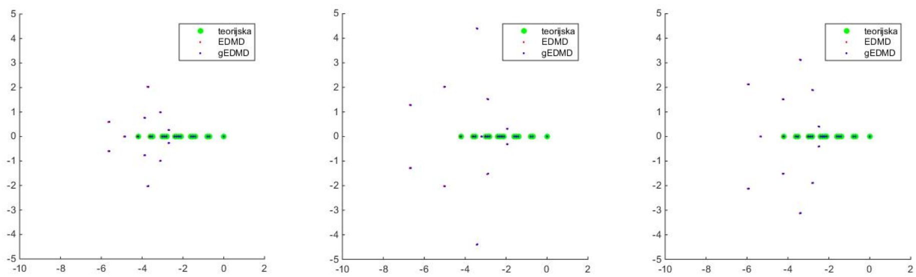
Predikcija trajektorija

Pomoću svojstvenih vrijednosti i funkcija pokušali smo predvidjeti trajektoriju nasumično odabrane točke i dobili rezultate prikazane na slici 3.8.

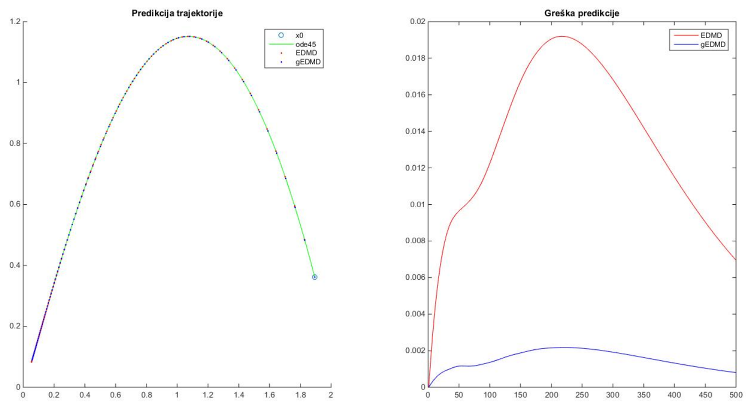
Primjećujemo da, iako obje metode predviđaju točnu trajektoriju, EDMD metoda lošije predviđa točnu poziciju u vremenu. Greške su prilično male te na ovom primjeru dajemo prednost metodi za generatore. Pokus je ponovljen više puta s više nasumičnih točaka i uvijek daje ovakve rezultate.



Slika 3.6: Svojstvene vrijednosti dobivene EDMD i gEDMD metodom i teorijske svojstvene vrijednosti čije se pripadne svojstvene funkcije nalaze u potprostoru razapetom rječnikom (3.0.1).



Slika 3.7: Svojstvene vrijednosti dobivene s istim rječnikom na različitim podacima.



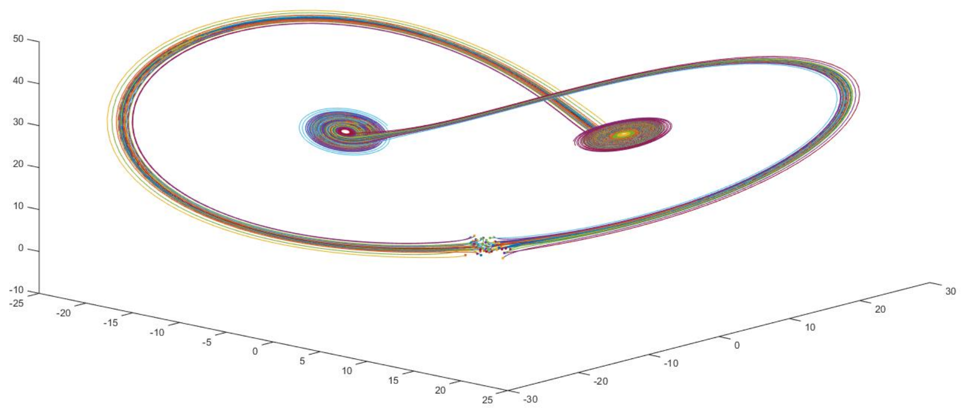
Slika 3.8: Predikcija trajektorije nasumično odabrane točke kroz 5 sekundi i greške u predikciji.

3.3 Lorenzov sustav

U ovom primjeru testirat ćemo performanse metoda na Lorenzovom sustavu. Radi se o sustavu s neprekidnim vremenom u 3 dimenzije, zadanom jednadžbama:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1),\\ \dot{x}_2 &= x_1(\rho - x_3) - x_2,\\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \beta x_3.\end{aligned}$$

Fiksne točke Lorenzovog sustava dane su s $p = [0, 0, 0], q_+ = [\beta(\rho - 1), \beta(\rho - 1), \rho - 1)], q_- = [-\beta(\rho-1), -\beta(\rho-1), \rho-1)]$. Za vrijednosti parametara $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = \frac{8}{3}$, ovaj se sustav ponaša kaotično, kao što možemo vidjeti na slici trajektorija 3.9. Generirali smo podatke trajektorija za 100 nasumičnih početnih točaka tijekom 6.25 sekundi s razmakom 0.01 sekunde.



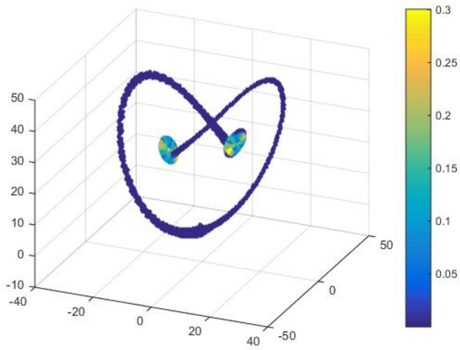
Slika 3.9: Simulirane trajektorije Lorenzovog sustava.

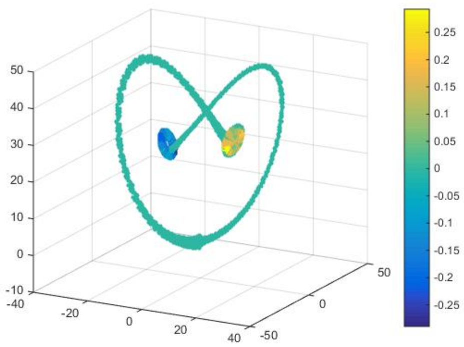
Ulamova metoda

Općenito je velik problem Ulamove metode činjenica da s povećanjem dimenzije prostora broj "prirodnih" skupova $\mathbb{B}_i$ raste eksponencijalno. Štoviše, na slici trajektorija Lorenzovog sustava primjećujemo da one ne pokrivaju trodimenzionalan prostor te će u diskretizaciji pravokutnicima puno pravokutnika ostati prazno.

Jedna ideja diskretizacije prostora stanja je sljedeća: podijelimo prostor na dva poluprostora ravninom $x+y=0$. To je ravnina koja je okomita na spojnicu dviju fiksnih točaka. Nakon toga, svaki od poluprostora podijelimo na skupove koji odgovaraju pravokutnicima u sfernim koordinatama s obzirom na fiksnu točku sustava iz tog poluprostora.

Takvom Ulamovom metodom procijenili smo prvi i drugi svojstveni vektor matrice P, kao što se može vidjeti na slici 3.10. Poznato je da nam predznaci drugog svojstvenog vektora matrice Markovljevog lanca otkrivaju metastabilna stanja - skupine stanja takve da je prelazak iz jedne u drugu skupinu vrlo malo vjerojatan. Dobiveni rezultati podržavaju takvo razmišljanje - prvi svojstveni vektor je pozitivan blizu obje fiksne točke, dok je drugi svojstveni vektor pozitivan oko jedne, a negativan oko druge fiksne točke sustava.



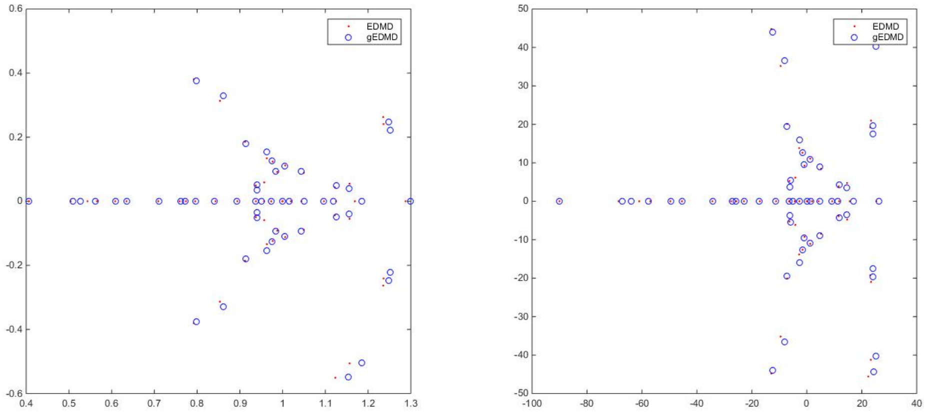


Slika 3.10: Prvi i drugi svojstveni vektor matrice P predstavljaju invarijantnu mjeru i metastabilna stanja sustava.

Predikcija pomoću EDMD-a i gEDMD-a

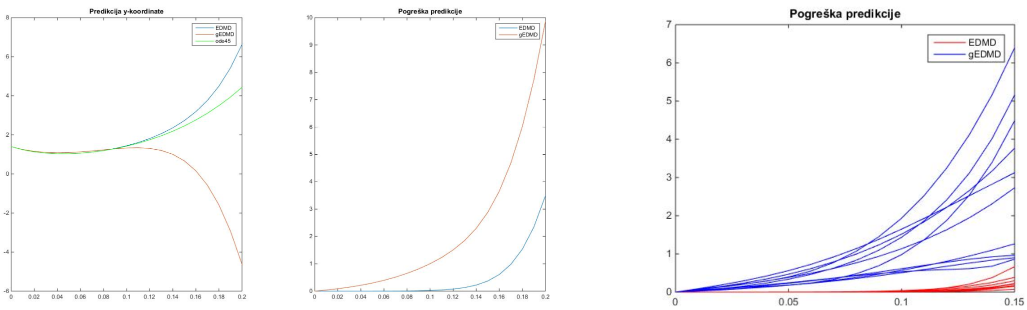
Za rječnik polinoma stupnja manjeg ili jednakog 5 pokušali smo rekonstruirati svojstvene vrijednosti i funkcije Koopmanove polugrupe odnosno diskretnog Koopmanovog operatora, te pomoću njih pokušali predvidjeti ponašanje sustava u sljedećih nekoliko koraka. Slika 3.11 prikazuje dobivene svojstvene vrijednosti Koopmanovog operatora EDMD i gEDMD metodom. Primjećujemo da je njihovo poklapanje dosta lošije nego za sustav iz prethodnog primjera.

Na slici 3.12 prikazana je evolucija i predikcija jedne od koordinata kroz vrijeme te greška predikcije (u smislu udaljenosti u $\mathbb{R}^3$) za nasumično odabranu točku iz trodimenzionalne jedinične normalne distribucije, iz koje smo birali i početne točke trajektorija. Čini se da EDMD metodom možemo dobiti točnu predikciju kroz otprilike sljedećih 10 koraka,



Slika 3.11: Svojstvene vrijednosti Koopmanovog operatora dobivene EDMD i gEDMD metodom (3.0.1)

odnosno 0.1 sekundu, što je prilično dobro s obzirom na kaotičnost sustava. Također, simuliranjem mnogo takvih primjera primjećuje se da gEDMD metoda doista radi lošije u ovom slučaju, unatoč egzaktnom poznavanju funkcije sustava.



Slika 3.12: Predikcija trajektorije i greška za nasumično odabranu točku (lijevo) te rezultat takve simulacije za više nasumičnih točaka (desno).

3.4 Vrtložnost fluida

Opis podataka

U ovom primjeru promatramo dinamički sustav čije nam jednadžbe nisu poznate. Isti je sustav analiziran u radu [4]. Podaci predstavljaju mjerenja vrtložnosti fluida na diskretnoj mreži sastavljenoj od 128×128 točaka s razmakom od $\delta t = 0.0313s$. Dostupna su nam mjerenja tijekom 1200 vremenskih intervala, ali u dijelu metoda koristit ćemo manji podskup od 200 uzastopnih mjerenja.

U ovom primjeru koristimo EDMD opisan u odjeljku 2.4.3 te gEDMD za isti rječnik funkcija. Primijetimo da su gradijenti funkcija $\langle \mathbf{x}, u_i \rangle$ zapravo jednaki $u_i^\top$. Rekonstrukcija tada, naravno, ovisi i o broju k singularnih vektora u_i. Na slici 3.13 možemo vidjeti kako se procijenjene svojstvene vrijednosti mijenjaju povećanjem broja singularnih vektora, iz čega možemo zaključiti da se stvarne vrijednosti Koopmanovog operatora nalaze na jediničnoj kružnici u $\mathbb{C}$. Pridruženi je Koopmanov operator tada izometričan, odnosno možemo zaključiti da je u pozadini ovih podataka dinamički sustav zadan preslikavanjem koje čuva mjeru.

Procjena derivacije metodom podijeljenih razlika

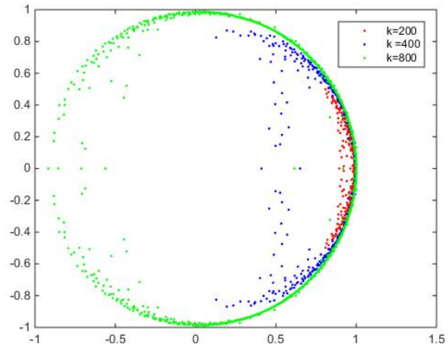
Budući da nam u ovom slučaju nisu poznate vremenske derivacije komponenti $\mathbf{x}$, možemo ih procijeniti metodom podijeljenih razlika. Neki od načina su:

- razlike unatrag : $\dot{\mathbf{x}}_i = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}}{h}$
- razlike unaprijed: $\dot{\mathbf{x}}_i = \frac{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i}{h}$
- centralne razlike: $\dot{\mathbf{x}}_i = \frac{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_{i-1}}{2h}$
- centralna metoda drugog stupnja: $\dot{\mathbf{x}}_i = \frac{-\mathbf{x}_{i+2} + 8\mathbf{x}_{i+1} - 8\mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{x}_{i-2}}{12h}$
- ostale metode drugog ili višeg stupnja.

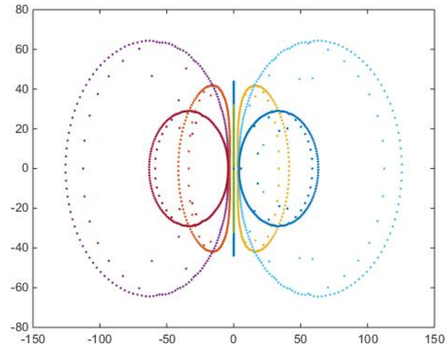
Na slici 3.14 prikazano je kako izbor aproksimacije derivacije utječe na dobivene svojstvene vrijednosti Koopmanovog generatora. Teorijski, svojstvene bi vrijednosti trebale ležati na imaginarnoj osi, što zadovoljavaju samo simetrične metode.

Svojstvene vrijednosti dobivene EDMD i gEDMD metodom

Za dane skupove podataka procijenili smo svojstvene vrijednosti Koopmanovog operatora i generatora Koopmanove polugrupe te su rezultati prikazani na slici 3.16. Odmah primjećujemo zanimljiv fenomen: iako svojstvene vrijednosti dobivene gEDMD metodom

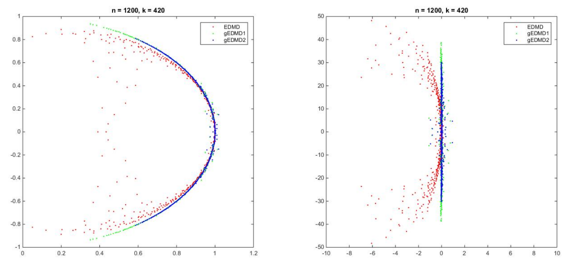


Slika 3.13: Svojstvene vrijednosti dobivene EDMD metodom za različiti broj singularnih vektora.

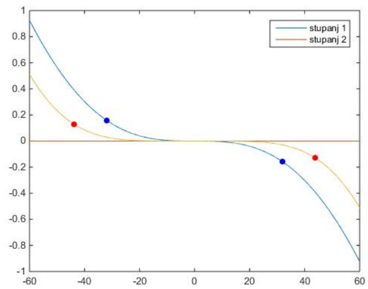


Slika 3.14: Svojstvene vrijednosti dobivene gEDMD metodom za različite procjene derivacije.

čak i za relativno male k leže bliže jediničnoj kružnici, ovom metodom dobivamo samo podskup svojstvenih vrijednosti. Podskup dobiven gEDMD metodom s procjenom derivacije metodom drugog stupnja nešto je bolji, odnosno širi.



Slika 3.15: Usporedba svojstvenih vrijednosti dobivenih različitim metodama (3.0.1).

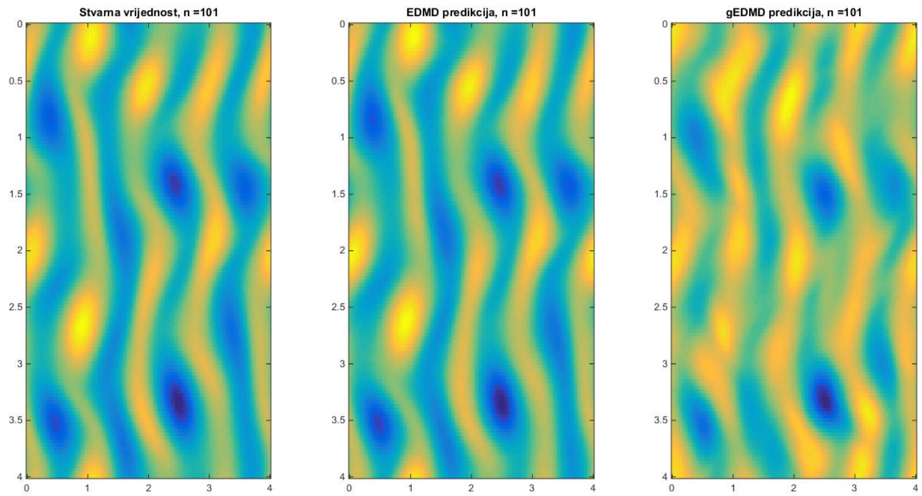


Slika 3.16: Odstupanje λh od $\mathrm{sh}(\lambda h)$ i analogne funkcije za drugi stupanj.

Pokušajmo intuitivno objasniti ovaj fenomen. Pretpostavimo da smo $\dot{\mathbf{x}}_i$ procijenili centralnim razlikama. Ako su podaci dobiveni s vremenskim razmakom h, tada u smislu Koopmanove familije pridružene danom sustavu možemo promatrati $\mathbf{x}_{i+1}$ i $\mathbf{x}_{i-1}$ kao $\mathcal{K}_h\mathbf{x}_i$ i $\mathcal{K}_h^{-1}\mathbf{x}_i$. U tom smislu generator $\mathcal{A}_\mathcal{K}$ zapravo aproksimiramo operatorom $\frac{\mathcal{K}_h-\mathcal{K}_h^{-1}}{2h}$, te bi za svojstvene vrijednosti trebalo vrijediti $\lambda \approx \frac{e^{\lambda h}-e^{-\lambda h}}{2h} = \frac{\mathrm{sh}(\lambda h)}{h}$, odnosno $\lambda h \approx \mathrm{sh}(\lambda h)$. Analogno, za metodu drugog stupnja dobivamo da mora vrijediti $\lambda h \approx \frac{8\,\mathrm{sh}(\lambda h)-\mathrm{sh}(2\lambda h)}{6}$. Dakle, ako se za teorijsku svojstvenu vrijednost λ, λh značajno razlikuje od $\text{sh}(\lambda h)$, gEDMD metoda neće je identificirati kao svojstvenu vrijednost. Na slici 3.16 možemo vidjeti graf funkcije odstupanja za λ na imaginarnoj osi kompleksne ravnine te označene krajeve raspona svojstvenih vrijednosti dobivenih gEDMD metodom s pripadajućom vrstom diskretizacije. Formalizacija gore navedenih razmatranja, kao i eventualni rezultati o ovisnosti mogućeg raspona identificiranog spektra o metodi diskretizacije, mogu biti predmet daljnjeg istraživanja.

Rekonstrukcija i predikcija

Kao i u prethodnim primjerima, svojstvene vrijednosti i funkcije Koopmanovog operatora koristimo za rekonstrukciju stanja i predikciju u budućnosti. Rezultate možemo vidjeti na slici 3.17. Predikcija dobivena gEDMD metodom znatno je lošija, no to je i očekivano s obzirom na to da nam nedostaje znatan dio spektra.



Slika 3.17: Predviđanje stanja fluida nakon 100 vremenskih intervala koristeći 50 singularnih vektora.

Bibliografija

[1] *Chapter 1: Dynamic Mode Decomposition: An Introduction*, str. 1–24, `https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611974508.ch1`.

[2] Damir Bakić, *Normirani prostori*, Matematički odsjek, PMF, 2012.

[3] Jiu Ding i Aihui Zhou, *Statistical Properties of deterministic systems*, Tsinghua University Texts), 2009.

[4] Zlatko Drmač, Igor Mezić i Ryan Mohr, *Data driven Koopman spectral analysis in Vandermonde-Cauchy form via the DFT: numerical method and theoretical insights*, 2018.

[5] Tanja Eisner, Bálint Farkas, Markus Haase i Rainer Nagel, *Operator Theoretic Aspects of Ergodic Theory*, Springer, Cham, 2015.

[6] Klaus Jochen Engel i Rainer Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer-Verlag New York, 2000.

[7] Blane Jackson Hollingsworth, *Stochastic Differential Equations: A Dynamical Systems Approach*, Disertacija, Auburn University, Alabama, 2008.

[8] J.Ding, *The point spectrum of Frobenius-Perron and Koopman operators*, Proceedings of the American Mathematical Society **126** (1998), br. 5, 1355–1361.

[9] Stefan Klus, Feliks Nüske, Sebastian Peitz, Jan Hendrik Niemann, Cecilia Clementi i Christof Schütte, *Data-driven approximation of the Koopman generator: Model reduction, system identification, and control*, 2019.

[10] Milan Korda i Igor Mezic, *On Convergence of Extended Dynamic Mode Decomposition to the Koopman Operator*, Journal of Nonlinear Science (2017).

[11] Igor Mezic, *Spectrum of the Koopman Operator, Spectral Expansions in Functional Spaces, and State Space Geometry*, 2017.

[12] Igor Mezić, *Spectral Operator Methods in Dynamical Systems: Theory and Applications*, 2016.

[13] R.K.Singh i J.S. Manhas, *Composition operators on function spaces*, Elsevier Science Publishers, 1993.

[14] Christof Schütte, Péter Koltai i Stefan Klus, *On the numerical approximation of the Perron-Frobenius and Koopman operator*, Journal of Computational Dynamics **3** (2016), br. 1, 1–12, ISSN 2158-2491, `http://dx.doi.org/10.3934/jcd.2016003`.

Sažetak

U ovom radu promatramo različite aspekte teorije Koopmanovih i Perron-Frobeniusovih operatora pridruženih dinamičkom sustavu u diskretnom ili neprekidnom vremenu. Za dani dinamički sustav Perron-Frobeniusov operator opisuje evolucije vjerojatnosnih gustoća pod djelovanjem sustava, dok Koopmanov operator opisuje evolucije funkcija prostora stanja. Navedeni su operatori linearni za sve dinamičke sustave, što nam omogućuje opis nelinearnih dinamičkih sustava linearnim, ali beskonačnodimenzionalnim operatorom.

Perron-Frobeniusov i Koopmanov operator imaju lijepa svojstva: oba su parcijalne izometrije na svojim prirodnim domenama. Također, Koopmanov operator pridružen preslikavanju Φ dualan je Perron-Frobeniusovom operatoru pridruženom istom preslikavanju, iz čega slijede bitna svojstva spektra jednog i drugog operatora.

Za dinamičke sustave s neprekidnim vremenom promatraju se familije, odnosno polugrupe, Perron-Frobeniusovih i Koopmanovih operatora. Ako je sustav zadan običnim diferencijalnim jednadžbama, za određene se klase funkcija djelovanje svake od tih familija može opisati jednim operatorom - generatorom polugrupe.

Najpopularnija metoda za aproksimaciju Perron-Frobeniusovog operatora je Ulamova metoda, kojoj je ideja podijeliti prostor stanja na konačno mnogo disjunktnih skupova i promatrati danu transformaciju kao Markovljev lanac s konačnim prostorom stanja. Stacionarne distribucije tog Markovljevog lanca aproksimiraju stacionarne gustoće Perron-Frobeniusovog operatora.

Za aproksimaciju Koopmanovog operatora koristi se proširena dinamička modalna dekompozicija (EDMD), koja za dani rječnik funkcija aproksimira projekciju Koopmanovog operatora na potprostor razapet funkcijama iz rječnika. Slična se metoda, poznata kao gEDMD, može iskoristiti za aproksimaciju generatora Koopmanove familije.

Efikasnost ovih metoda provjeravamo na nekoliko primjera diskretnih i neprekidnih dinamičkih sustava.

Summary

In this thesis we have studied several aspects of the theory of Koopman and Perron-Frobenius operators associated with both discrete-time and continuous-time dynamical systems. The Perron-Frobenius operator describes the evolution of probability density governed by the underlying dynamical system, whereas the Koopman operator describes the evolution of *observables*, functions of the state space. Those operators are linear for any dynamical system, which allows us to describe nonlinear dynamical systems using a linear, yet infinite dimensional operator.
The Perron-Frobenius operator and the Koopman operator have nice operator-theoretic properties: they are both partially isometric on their respective natural domains. Additionally, the Koopman operator associated with a transformation Φ is the dual of the Perron-Frobenius operator associated with Φ, from which some spectral properties of the operators can be derived.

For continuous-time dynamical systems we have the corresponding families, more specifically semigroups, of Koopman and Perron-Frobenius operators. If the dynamical system can be modeled by ordinary differential equations, the action of each family to certain classes of functions can be modeled using a single operator - the semigroup generator.

The most popular method for approximating the Perron-Frobenius operator is Ulam's method. The idea behind Ulam's method is to split the state space into a finite number of disjoint sets (boxes) and model the system as a finite state Markov chain. Stationary distributions of that Markov chain approximate stationary densities of the Perron-Frobenius operator. The most widely used method for approximating the Koopman operator is Extended Dynamic Mode Decomposition (EDMD), which, given a dictionary of observables, approximates the projection of the Koopman operator onto the subspace spanned by those observables. A similar method, known as generator EDMD (gEDMD), can be employed to approximate the generator of the Koopman family.

We have tested the efficiency of these methods on several examples of discrete-time and continuous-time dynamical systems.

Životopis

Rođena sam u Zagrebu, 3. srpnja 1996. godine. Pohađala sam Osnovnu školu Malešnica, a 2010. upisala sam matematičko-informatički progam u XV. gimnaziji u Zagrebu. Tijekom osnovne i srednje škole interes za matematiku razvijala sam sudjelovanjem na raznim matematičkim natjecanjima, a najzapaženiji su mi uspjesi nekoliko prvih mjesta na državnom natjecanju te srebrna i brončana medalja te počasna pohvala s Međunarodnih matematičkih olimpijada 2012., 2013. i 2014. godine.

Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu upisala sam 2014., a završila 2017. godine. Iste sam godine upisala diplomski studij *Matematička statistika*, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. Tijekom studija aktivno sam sudjelovala u radu udruge *Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"*, čija sam predsjednica bila od 2016. do 2018. godine. Za izniman uspjeh u studiju dodijeljene su mi dvije nagrade Matematičkog odsjeka, dvije nagrade Prirodoslovno-matematičkog fakulteta (obje 2017. i 2019.) te Stipendija Grada Zagreba za izvrsnost.