Izračunljive strukture

Vreš, Maja

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Maja Vreš

IZRAčUNLJIVE STRUKTURE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, veljača, 2020

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se svojim roditeljima na velikoj podršci tijekom studiranja i mentoru na trudu i vremenu koje je uložio kako bih dovršila ovaj rad.

Sadržaj

Uvod

U ovom radu razmatramo pojam izračunljivosti. Pojam izračunljivosti najčešće je u literaturi povezan sa Turingovim strojevima ili RAM strojevima.
Na početku definiramo pojam programa te skup naredbi od kojih se naš program može sastojati. Zatim navodimo nekoliko primjera programa uz pomoć zapisa stanja u registrima prije i nakon izvršavanja programa.
Idući pojam koji uvodimo je pojam izračunljive funkcije, povezan uz pojam programa. Uz definiciju navodimo nekoliko osnovnih primjera izračunljivih funkcija i programa koji ih računaju.
Idući veći pojam koji uvodimo je pojam rekurzivnih funkcija. Za samu definiciju rekurzivih funkcija uvodimo i pojam inicijalnih funkcija $z,\ s,\ I_j^n\ (n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ j \in \{1,\ldots,n\}$.
Kroz iduće poglavlje promatramo svojstva rekurzivnih funkcija pa tako primjećujemo da su funkcije dobivene kompozicijom rekurzivnih funkcija također rekurzivne. Isto tako, funkcije dobivene primitivnom rekurzijom i primjenom μ operatora su također rekurzivne. Navodimo nekoliko primjera rekurzivnih funkcija. Do kraja tog poglavlja dolazimo do ekvivalencije rekurzivnih i izračunljivih funkcija, odnosno dokazujemo da je svaka rekurzivna funkcija izračunljiva, i obratno.
U idućem poglavlju promatramo parcijalno izračunljive funkcije i primjere istih. Povezujemo svojstva parcijalno izračunljivih funkcija s dokazanim svojstvima izračunljivih funkcija.
U posljednjem poglavlju uvodimo pojam parcijalno rekurzivnih funkcija, ponovno dajemo primjere i svojstva istih. Nadalje, pojam parcijalno rekurzivnih funkcija povezujemo s ranije dokazanim svojstvima rekurzivnih funkcija.
Konačno, dokazujemo ekvivalenciju parcijalno rekurzivnih funkcija i parcijalno izračunljivih funkcija. Na kraju dobivamo važan rezultat, da postoji rekurzivno prebrojiv skup koji nije rekurzivan.

Poglavlje 1

Definiranje pojma programa

1.1 Definiranje osnovnih naredbi

Algoritmom smatramo konačan slijed dobro definiranih naredbi za ostvarenje zadatka, koji će za dano početno stanje terminirati u definiranom konančnom stanju

Računalni program je skup uputa računalu što treba učiniti i kako to izvesti.

Pri tome memoriju računala, u kojoj se odvija izvršavanje programa, zamišljamo kao niz registara:

R_0	R_1	R_2	...	R_i	...

U svaki od registara se može spremiti element od $\mathbb{N}$, pri tome smatramo $0 \in \mathbb{N}$.

Promatramo sljedeće naredbe:

1) INC R_i koja povećava sadržaj registra R_i za 1.

...	x_i	x_{i+1}	...	$\rightarrow$	...	$x_i + 1$	x_{i+1}	...

2) DEC R_i, k koja smanjuje sadržaj registra R_i ukoliko je on veći od 0, te prelazi na naredbu s oznakom k ukoliko je on jednak 0.

3) GOTO k prelazi na naredbu s oznakom k.

Programom smatramo konačan niz prethodno nabrojanih naredbi, $p_0, \dots, p_n$, pri čemu za najveću oznaku naredbe, k, vrijedi $k \leqslant n$.

1.2 Primjeri programa

Primjer 1.1. *Promotrimo sljedeći niz naredbi.*

0. $INC\ R_3$
1. $INC\ R_3$
2. $INC\ R_3$
3. $INC\ R_3$

Niz naredbi čini sljedeće:

$x_3 \to x_3 + 1$
$x_3 + 1 \to x_3 + 1 + 1 = x_3 + 2$
$x_3 + 2 \to x_3 + 2 + 1 = x_3 + 3$
$x_3 + 3 \to x_3 + 3 + 1 = x_3 + 4$

Odnosno:

x_0	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	$\to$	x_0	x_1	x_2	$x_3 + 3$	$\ldots$

Primjer 1.2. *Promotrimo sljedeći niz naredbi.*

0. $INC\ R_3$
1. $DEC\ R_3, 0$
2. $INC\ R_3$

Niz naredbi čini sljedeće:

$x_3 \to x_3 + 1$
$x_3 + 1 \to x_3 + 1 - 1 = x_3$
$x_3 \to x_3 + 1$

Odnosno:

x_0	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	$\to$	x_0	x_1	x_2	$x_3 + 1$	$\ldots$

Primjer 1.3. *Promotrimo sljedeći niz naredbi.*

0. *DEC* R_3,0
1. *INC* R_3

1. *slučaj,* $x_3 \neq 0$.

Niz naredbi čini sljedeće:

$x_3 \to x_3 - 1$
$x_3 - 1 \to x_3 - 1 + 1 = x_3$

Odnosno:

x_0	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	$\to$	x_0	x_1	x_2	x_3	$\ldots$

Ukoliko je $x_3 = 0$ *ovaj program nikad ne staje (tzv. beskonačna petlja).*

Primjer 1.4. *Promotrimo sljedeći niz naredbi.*

0. *DEC* R_3,2
1. *GOTO* 0
2. *INC* R_3

Niz naredbi čini sljedeće:

$x_3 \to x_3 - 1$
$x_3 - 1 \to x_3 - 1 - 1 = x_3 - 2$
$x_3 - 2 \to x_3 - 2 - 1 = x_3 - 3$
$\ldots$
$x_3 = 2 \to x_3 = 2 - 1 = 1$
$x_3 = 1 \to x_3 = 1 - 1 = 0$
$x_3 = 0 \to x_3 = 0 + 1 = 1$
Ovaj program sadržaj registra R_3 *zamijenjuje za* 1. *Odnosno:*

x_0	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	$\to$	x_0	x_1	x_2	1	$\ldots$

Primjer 1.5. *Promotrimo sljedeći niz naredbi.*

0. *DEC* R_3,2
1. *GOTO* 0
2. *INC* R_3
3. *DEC* R_3, 3

Niz naredbi čini sljedeće:

$x_3 \to x_3 - 1$
$x_3 - 1 \to x_3 - 1 - 1 = x_3 - 2$
$x_3 - 2 \to x_3 - 2 - 1 = x_3 - 3$
$\ldots$
$x_3 = 2 \to x_3 = 2 - 1 = 1$
$x_3 = 1 \to x_3 = 1 - 1 = 0$
$x_3 = 0 \to x_3 = 0 + 1 = 1$
$x_3 = 1 \to x_3 = 1 - 1 = 0$
Ovaj program sadržaj registra R_3 *zamijenjuje za* 0*. Odnosno:*

x_0	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	$\to$	x_0	x_1	x_2	0	$\ldots$

Poglavlje 2

Izračunljive funkcije

Definicija 2.0.1. *Neka je $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija.*
Za f kažemo da je izračunljiva funkcija ako postoji program P koji ima sljedeće svojstvo: ako su $x_1 \ldots x_k \in \mathbb{N}$, onda program P staje za ulazne podatke :

0	x_1	...	x_k	0	...	0	...

i daje rezultat:

$f(x_0, \ldots, x_k)$	?	?	...	?	...

Za takav program P kažemo da računa funkciju f.

Primjer 2.1. *Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$ je izračunljiva.*

Promotrimo sljedeći primjer.
0. *DEC* R_1,3
1. *INC* R_0
2. *GOTO* 0
3. *INC* R_0

Pretpostavimo da je stanje registara na početku jednako:

0	x	0	0	...

Niz naredbi čini sljedeće:
$x_1 = x \to x_1 - 1 = x - 1, \quad x_0 = 0 \to x_0 + 1 = 0 + 1 = 1$
...
$x_1 = 2 \to x_1 = 2 - 1 = 1, \quad x_0 = (x - 2) \to x_0 = (x - 2) + 1 = x - 1$
$x_1 = 1 \to x_1 = 1 - 1 = 0, \quad x_0 = x - 1 \to x_0 = (x - 1) + 1 = x$
$x_0 = x \to x_0 = x + 1$

Ovaj program u registar R_0 upisuje $x+1$, a u registar R_1 upisuje 0. Odnosno:

0	x	0	...	$\rightarrow$	$x+1$	0	0	...

Dakle, program računa funkciju f.

Primjer 2.2. *Funkcija $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(x,y) = x+y$ je izračunljiva.*
Pretpostavimo da je stanje registara na početku jednako:

0	x	y	0	...

Koristimo prvo program iz Primjera 1.7 kako bismo u R_0 upisali x:

0. *DEC* R_1,3
1. *INC* R_0
2. *GOTO* 0

Niz naredbi čini sljedeće:

$x_1 = x \to x_1 = x - 1, \quad x_0 = 0 \to x_0 + 1 = 0 + 1 = 1$
...
$x_1 = 1 \to x_1 = 1 - 1 = 0, \quad x_0 = (x-1) \to x_0 = x$

Odnosno:

0	x	y	0	...	$\rightarrow$	x	0	y	0	...

Zatim dodajemo y:

3. *DEC* R_2,6
4. *INC* R_0
5. *GOTO* 3
6. *INC* R_3

Niz naredbi čini sljedeće

$x_2 = y \to x_2 = y - 1, \quad x_0 = x \to x_0 = x + 1$
...
$x_2 = y - (y-1) \to x_2 = y - y = 0, \quad x_0 = x + (y-1) \to x_0 = x + y$
$x_3 = 0 \to x_3 = 0 + 1 = 1$

Odnosno:

x	0	y	0	$\dots$	$\rightarrow$	$x+y$	0	0	1	$\dots$

Program čini sljedeće:

0	x	y	0	$\dots$	$\rightarrow$	$x+y$	0	0	1	$\dots$

Dakle, program računa funkciju f.

Definicija 2.0.2. *Za $x, y \in \mathbb{N}$ definiramo:*

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & x \geqslant y \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Za $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto x \dot{-} y$ kažemo da je modificirano oduzimanje.

Primjer 2.3. *Modificirano oduzimanje je izračunljiva funkcija.*
Sljedeći program je računa.

0. *DEC* R_1, 3
1. *INC* R_0
2. *GOTO* 0
3. *DEC* R_2, 6
4. *DEC* R_0, 6
5. *GOTO* 3
6. *INC* R_3

Propozicija 2.0.1. *Neka je $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ izračunljiva funkcija. Neka su $i_0, i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ međusobno različiti brojevi, te neka je $N \in \mathbb{N}$. Tada postoji program Q sa sljedećim svojstvom:*
ako su u registrima $R_{i_1}, \dots, R_{i_k}$ brojevi $x_1, \dots, x_k$, onda program Q staje i u registar R_{i_0} zapisuje $f(x_1, \dots, x_k)$.
Pri tome, za svaki $j \neq i_0$, $j \leqslant N$ sadržaj registra R_j ostaje nepromijenjen.

Dokaz. Budući da je funkcija f izračunljiva, postoji program P koji je računa.
Definirajmo:

$$I := \{i \in \mathbb{N} |\ \text{u programu P se javljaju instrukcije INC } R_i \text{ ili DEC } R_i, k \ \text{ za neki } k \in \mathbb{N}\}$$

Očito je I konačan podskup od $\mathbb{N}$.
Odaberimo $M \in \mathbb{N}$ tako da je $i < M, \forall i \in I$.
Uočimo da na izvršavanje programa P ne utječu sadržaji registara R_j za $j \geqslant M$, te također izvršavanje programa P ne mijenja sadržaj tih registara.
Možemo pretpostaviti da je $M > i_0, i_1, \ldots, i_k, N$.
Ideja kako dobiti program Q s traženim svojstvom sastoji se od sljedećeg: Prvo kopiramo saržaje registara $R_0, \ldots, R_{M-1}$ u registre $R_M, \ldots R_{M+(M-1)}$ i pri tome postavimo sadržaje registara $R_0, \ldots, R_{M-1}$ na 0. Zatim kopiramo sadržaje registara $R_{M+i_1}, \ldots, R_{M+i_k}$ u registre $R_1, \ldots, R_k$, pri tome ne mijenjajući sadržaje registara $R_{M+i_1}, \ldots, R_{M+i_k}$. Zatim, primjenimo program P i nakon njegovog izvršavanja u registru R_0 je zapisano$f(x_1, \ldots, x_k)$ (pri čemu je $x_1, \ldots, x_k$ polazno stanje registara $R_{i_1}, \ldots, R_{i_k}$).
Zatim kopiramo R_0 u R_{i_0}. Na kraju sadržaje registara $R_M, \ldots, R_{M+(M-1)}$ kopiramo u registre $R_0, \ldots, R_{M-1}$ (osim registra R_{M+i_0}).
Neka su $i, j \in \{0, 1, \ldots, M + (M-1)\}, i \neq j$.
Sljedeći program kopira R_i u R_j i pri tome sadržaj registra R_i postavlja na 0.
Također, sadržaji svih ostalih registara ostaju nepromijenjeni, osim registra R_{2M}.

0. DEC R_j,2
1. GOTO 0
2. DEC R_i, 5
3. INC R_j
4. GOTO 2
5. INC R_{2M}

Nadalje, sljedeći program kopira R_i u R_j, pri tome sadržaj registra R_i ostaje nepromijenjen kao i sadržaj svih ostalih registara, osim registra R_{2M}.

0. DEC R_j, 2
1. GOTO 0
2. DEC R_{2M}, 4
3. GOTO 2
4. DEC R_i, 8
5. INC R_j
6. INC R_{2M}
7. GOTO 4
8. DEC R_{2M}, 11
9. INC R_i
10. GOTO 8
11. INC R_{2M}

Zaključujemo da koristeći navedene programe i opisanu ideju konstrukcije programa Q, tvrdnja propozicije vrijedi.

$\square$

Neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ izračunljiva funkcija. Neka su $i_0, i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$ međusobno različiti brojevi, te neka je $N \in \mathbb{N}$.
Program Q koji ima svojstvo opisano u iskazu prethodne propozicije (a koji prema toj propoziciji postoji) označavamo sa $f(R_{i_1}, \ldots, R_{i_k}) \xrightarrow{\mathrm{N}} R_{i_0}$.
Takve programe koristimo kao instrukcije (takozvane makroinstrukcije) u takozvanim makroprogramima.
Makroprogram se sastoji od makroinstrukcija i standardnih instrukcija (DEC R_i, k, INC R_i, GOTO k).

Funkcija $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ f(x,y) = x + y$ je izračunljiva.
Umjesto $f(R_{i_1}, R_{i_2}) \xrightarrow{\mathrm{N}} R_{i_0}$ pišemo $R_{i_1} + R_{i_2} \xrightarrow{\mathrm{N}} R_{i_0}$

Funkcija $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g(x) = x$ je izračunljiva, umjesto $g(R_{i_1}) \xrightarrow{\mathrm{N}} R_{i_0}$ pišemo $R_{i_1} \xrightarrow{\mathrm{N}} R_{i_0}$.

Primjer 2.4. *Promotrimo sljedeći makroprogram.*

0. *DEC* R_2,4
1. $R_0 + R_1 \xrightarrow{4} R_3$
2. $R_3 \xrightarrow{4} R_0$
3. *GOTO* 0
4. *INC* R_3

Uočimo sljedeće, ako su na početku izvršavanja ovog makroprograma u registrima R_0*,* R_1 *i* R_2 *zapisani brojevi* 0*,* x*,* y*, onda će na kraju izvršavanja makroprograma u registru* R_0 *biti zapisano* $x \cdot y$*.*
Neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$*, te neka je* P *makroprogram.*
Kažemo da makroprogram P *računa funkciju* f *ako za stanje registara* $0, x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots$ *makroprogram* P *staje i u registar* R_0 *zapisuje* $f(x_1, \ldots, x_k)$*.*
Za funkciju f *kažemo da je makroizračunljiva ako postoji makroprogram* P *koji računa* f*.*

Uočimo da je prema prehodnom primjeru funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ (x,y) \mapsto x \cdot y$ *makroizračunljiva.*

Teorem 2.1. *Svaka makroizračunljiva funkcija je izračunljiva.*

Dokaz. Neka je $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ makroizračunljiva funckija. Tada postoji makroprogram Q koji računa f.
Neka su $q_0, q_1, \dots q_n$ instrukcije makroprograma Q.
Pretpostavimo da je $i \in \{0, \dots, n\}$ tako da je q_i makroinstrukcija.
Dakle, q_i je program pa neka su $p_0, \dots, p_m$ njegove instrukcije.
Modificirat ćemo makroprogram Q na način da ćemo umjesto makroinstrukcija q_i staviti instrukcije $p_0, \dots, p_m$. Na taj način dobivamo makroprogram Q'.
Preciznije, instrukcije makroprograma Q' su $q'_0, \dots, q'_{i-1}, p'_0, \dots, p'_m, q'_{i+1}, \dots, q'_n$, pri čemu smo $q'_0 \dots, q'_n$ i $p'_0, \dots, p'_m$ dobili od $q_0, \dots q_n$ i $p_0, \dots p_m$ prikladnom zamjenom oznaka instrukcija. (Dakle, oznaka oblika DEC R_i, k zamjenjena je s DEC Ri, k', a instrukcija oblika GOTO k sa GOTO k'.)
Uočimo sljedeće, makroprogram Q' računa f i broj makroinstrukcija u Q' je manji od broja makroinstrukcija u Q.
Zaključujemo da ovim postupkom u konačno mnogo koraka dobivamo makroprogram koji računa f, a u kojem nema niti jedne makroinstrukcije, dakle, dobivamo program koji računa f. Zaključujemo da je f izračunljiva.

□

Primjer 2.5. *Znamo da je funkcija $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ f(x,y) = x \cdot y$ makroizračunljiva.*
Prema prethodnom teoremu funkcija f je izračunljiva.
Makroinstrukciju $f(R_i, R_j) \xrightarrow{N} R_k$ ćemo označavati s $R_i \cdot R_j \xrightarrow{N} R_k$.

Primjer 2.6. *Neka je $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana sa $g(x,y) = x^y$. Pokažimo da je g makroizračunljiva. Sljedeći makroprogram računa g.*

0. *INC* R_0
1. *DEC* R_2, 5
2. $R_0 \cdot R_1 \xrightarrow{3} R_3$
3. $R_3 \xrightarrow{3} R_0$
4. *GOTO* 1
5. *INC* R_3

Definicija 2.0.3. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f_1, \dots, f_n\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $g\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcije. Definiramo funkciju $h\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ s $h(x) = g(f_1(x), \dots f_n(x)), \forall x \in \mathbb{N}^k$. Za funkciju h kažemo da je dobivena kompozicijom funkcija $g, f_1, \dots, f_n$.*
Uočimo sljedeće, ako je $F\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ funkcija definirana s $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ onda je h dobivena kompozicijom funkcija $g, f_1, \dots, f_n$ ako i samo ako je $h = g \circ F$.

Propozicija 2.0.2. *Neka su* $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *te neka su* $f_1, \ldots, f_n \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *i* $g \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *izračunljive funkcije. Neka je* $h \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *dobivena kompozicijom funkcija* $g, f_1, \ldots, f_n$*. Tada je* h *izračunljiva funkcija.*

Dokaz. Sljedeći makroprogram računa funkciju h:

0. $f_1(R_1, \ldots, R_k) \xrightarrow{k+1} R_{k+1}$
1.$f_2(R_1, \ldots, R_k) \xrightarrow{k+2} R_{k+2}$
$\ldots$
$n-1$. $f_n(R_1, \ldots, R_k) \xrightarrow{k+n} R_{k+n}$
n. $g(R_{k+1}, \ldots, R_{k+n}) \xrightarrow{k+n} R_0$

Prema Teoremu 2.1 funkcija h je izračunljiva. □

Definicija 2.0.4. *Neka je* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *te neka su* $f \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *i* $g \colon \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ *funkcije. Definirajmo funkciju* $h \colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *na sljedeći način:*

$$h(0, y_1, \ldots, y_n) = f(y_1, \ldots, y_n), \quad y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{N}$$
$$h(x+1, y_1, \ldots, y_n) = g(h(x, y_1, \ldots, y_n), x, y_1, \ldots, y_n), \quad x, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{N}$$

Funkcija h *je definirana induktivno po prvoj varijabli.*
Za h *kažemo da je dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija* f *i* g*.*

Primjer 2.7. *Neka je* $h \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa* $h(x, y) = x + y$*.*
Za svaki $y \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $h(0, y) = y = f(y)$*, gdje je* $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa* $f(y) = y, \ \forall\, y \in \mathbb{N}$*.*
Nadalje, za sve $x, y \in \mathbb{N}$ *vrijedi:*

$$h(x+1, y) = h(x, y) + 1 = g(h(x, y), x, y)$$

gdje je $g \colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa* $g(a, b, c) = a + 1, \quad a, b, c \in \mathbb{N}$
Dakle, vrijedi:

$$h(0, y) = f(y)$$
$$h(x+1, y) = g(h(x, y), x, y) \quad x, y \in \mathbb{N}$$

Prema tome, funkcija h *je dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija* f *i* g*.*

Propozicija 2.0.3. *Neka je* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *te neka su* $f \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *i* $g \colon \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ *funkcije.*
Neka je h *dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija* f *i* g*.*
Pretpostavimo da su f *i* g *izračunljive.*
Tada je h *izračunljiva funkcija.*

Dokaz. Lako se vidi da sljedeći makroprogram računa funkciju h.

0. $f(R_2, \ldots, R_{n+1}) \xrightarrow{n+3} R_0$
1. DEC $R_1, 6$
2. $g(R_0, R_{n+2}, R_n, \ldots, R_{n+1} \to R_{n+3}$
3. $R_{n+3} \to R_0$
4. INC R_{n+2}
5. GOTO 1
6. INC R_{n+3}

Funkcija h je makroizračunljiva pa je prema Teoremu 2.1 izračunljiva. □

Definicija 2.0.5. *Neka je $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka je $g\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ funkcija tako da za sve $x_1, \ldots, x_n$ postoji $y \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da je $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$.*
Definirajmo funkciju $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ sa $f(x_1, \ldots, x_n) = \min\{y \in \mathbb{N} \mid g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\}$.
Za funkciju f kažemo da je dobivena primjenom μ operatora na funkciju g.
Umjesto $\min\{y \in \mathbb{N} \mid g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\}$ pišemo i $\mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$.
Dakle, $f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$.

Propozicija 2.0.4. *Neka je $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcija dobivena primjenom μ operatora na funkciju $g\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je g izračunljiva. Tada je f izračunljiva.*

Dokaz. Sljedeći makroprogram računa funkciju f.

0. $g(R_1, \ldots, R_n, R_0) \to R_{n+1}$
1. DEC $R_{n+1}, 4$
2. INC R_0
3. GOTO 0
4. INC R_{n+2}

Funkcija f je makroizračunljiva pa je prema Teoremu 2.1 izračunljiva. □

Poglavlje 3

Rekurzivne funkcije

3.1 Definiranje pojma rekurzivne funkcije

Definicija 3.1.1. *Neka je* $z\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa* $z(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{N}$.
Neka je $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa* $s(x) = x + 1,\ \forall x \in \mathbb{N}$.
Za $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *i* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *definiramo funkciju* $I^n_j\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *sa* $I^n_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j,\ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$.
(Primjetimo da je $I^1_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *identiteta na* $\mathbb{N}$.*)*
Za funkcije z, s, I^n_j *(*$n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ j \in \{1, \ldots, n\}$*) kažemo da su inicijalne funkcije.*

Definicija 3.1.2. *Definirajmo induktivno niz skupova* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *na sljedeći način.*
Neka je S_0 *skup svih inicijalnih funkcija.*
Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ *te da smo definirali skup* S_n.
Neka je T *skup svih fnkcija koje se mogu dobiti primjenom kompozicije, primitivne rekurzije i* μ *operatora na funkcije iz* S_n.
Definiramo $S_{n+1} = T \cup S_n$.
Za funkciju $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *kažemo da je rekurzivna ako* $\exists\ n \in \mathbb{N}$ *takav da je* $f \in S_n$.

Propozicija 3.1.1. *Vrijede sljedeće tvrdnje.*

1) *Pretpostavimo da su* $f, g_1, \ldots, g_n$ *rekurzivne funkcije, te da je h funkcija dobivena kompozicijom funkcija* $f, g_1, \ldots, g_n$. *Tada je h rekurzivna funkcija.*

2) *Neka su* f *i* g *rekurzivne funkcije, te neka je h funkcija dobivena primitivnom rekurzijom od* f *i* g. *Tada je h rekurzivna funkcija.*

3) *Neka je* f *rekurzivna funkcija, te neka je h funkcija dobivena primjenom* μ *operatora na funkciju* f. *Tada je h rekurzivna funkcija.*

Dokaz. 1) Budući da su $f, g_1, \ldots, g_n$ rekurzivne funkcije, postoje $k, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ takvi da $f \in S_k, g_1 \in S_{m_1}, \ldots, g_n \in S_{m_n}$.
Definiramo $m \in \mathbb{N}$ sa $m := \max\{k, m_1, \ldots, m_n\}$.
Iz definicije skupova $(S_n)_n$ slijedi $S_i \subseteq S_j$, za sve $i, j \in \mathbb{N}$ takve da $i \leqslant j$.
Stoga je $S_k \subseteq S_m,\ S_{m_1} \subseteq S_m, \ldots, S_{m_n} \subseteq S_m$.
Slijedi $f, g_1, \ldots, g_m \in S_m$.
Iz definicije skupa S_{m+1} slijedi da je $h \in S_{m+1}$.
Prema tome, h je rekurzivna funkcija.
Tvrdnje 2) i 3) dokazujemo analogno. □

3.2 Svojstva rekurzivnih funkcija

Propozicija 3.2.1. *Svaka rekurzivna funkcija je izračunljiva.*

Dokaz. Dokažimo indukcijom da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ svaka funkcija iz S_n izračunljiva.
Baza:
Za $n = 0$, elementi od S_0 su inicijalne funkcije.
Lako se vidi da je svaka inicijalna funkcija izračunljiva. Prema tome, svaka funkcija iz S_0 je izračunljiva.
Pretpostavka:
Za neki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi da je svaka funkcija iz S_n izračunljiva.
Korak:
Iz Propozicije 3.1.1 i definicije skupa S_{n+1} zaključujemo da su sve funkcije iz S_{n+1} izračunljive.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Primjer 3.1. *Neka je* $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, h(x, y) = x + y$.
Funkcija h je rekurzivna.
To slijedi iz činjenice da je h dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija f i g, gdje su $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ *definirane sa* $f(x) = x$, $g(a, b, c) = a + 1$.
Funkcija f je rekurzivna jer je inicijalna (I_1^1), *a iz* $g = s \circ I_1^3$ *slijedi da je g rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih. Dakle, h je rekurzivna.*

Primjer 3.2. *Pokažimo da je funkcija* $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *definirana sa* $h(x, y) = x \cdot y$ *rekurzivna.*
Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. *Imamo:*

$$h(0, y) = 0 = z(y)$$
$$h(x + 1, y) = (x + 1) \cdot y = xy + y = h(x, y) + y = g(h(x, y), x, y)$$

gdje je $g\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ *definirana sa* $g(a, b, c) = a + c$.
Zaključujemo da je h dobivena primitivnom rekurzijom od z i g.

Da bi h bila rekurzivna dovoljno je pokazati da je g rekurzivna.
Definirajmo funkciju $zb\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $zb(x, y) = x + y$.
Sada je $g(a, b, c) = zb(I_1^3(a, b, c), I_3^3(a, b, c))$, *za sve* $a, b, c, \in \mathbb{N}$, *pa zaključujemo da je g dobivena kompozicijom funkcija zb,* I_1^3, I_3^3.
Iz Primjera 3.1 i Propozicije 3.1.1 slijedi da je g rekurzivna funkcija.

Primjer 3.3. *Neka je* $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *rekurzivna funkcija.*
Tada je i funkcija $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *definirana sa* $h(x, y) = f(y, x)$ *rekurzivna.*
Naime, za sve $x, y \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $h(x, y) = f(I_2^2(x, y), I_1^2(x, y))$.
Zaključujemo da je h dobivena kompozicijom funkcija f, I_2^2, I_1^2.
Stoga je h rekurzivna.

Propozicija 3.2.2. *Neka je* $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
Svaka konstantna funkcija sa $\mathbb{N}^k$ *u* $\mathbb{N}$ *je rekurzivna.*

Dokaz. Za $a \in \mathbb{N}$ definiramo funkciju $C_a\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa $C_a(x) = a, \forall x \in \mathbb{N}^k$.
Dokažimo indukcijom da je C_a rekurzivna funkcija za svaki $a \in \mathbb{N}$.
Baza:
Za $a = 0$, imamo $C_0(x) = z(I_1^k(x)),\ \forall x \in \mathbb{N}^k$.
Slijedi da je C_0 rekurzivna funkcija kao kompozicija rekurzivnih funkcija.
Pretpostavka:
Pretpostavimo da za neki $a \in \mathbb{N}$ vrijedi da je funkcija $C_a\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna.
Korak:
Imamo $C_{a+1}(x) = s(C_a(x)),\ \forall x \in \mathbb{N}^k$.
Pošto je C_{a+1} kompozicija rekurzivnih funkcija slijedi da je C_{a+1} rekurzivna.
Zaključujemo da je C_a rekurzivna za svaki $a \in \mathbb{N}$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 3.2.3. *Neka je* $a \in \mathbb{N}$, *te neka je* $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *rekurzivna funkcija.*
Definirajmo funkciju $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *induktivno na sljedeći način:*

$$h(0) = a$$

$$h(x + 1) = g(h(x), x),\ \forall\ x \in \mathbb{N}$$

Tada je h rekurzivna funkcija.

Dokaz. Definirajmo $H\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa $H(x, y) = h(x)$, za sve $x, y \in \mathbb{N}$.
Dokažimo da je H rekurzivna funkcija.
Dovoljno je dokazati da postoje rekurzivne funkcije $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $G\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$H(0, y) = F(y) \tag{3.1}$$

$$H(x+1,y) = G(H(x,y),x,y) \tag{3.2}$$

Naime, iz toga slijedi da je H dobivena primitivnom rekurzijom od F i G, pa iz Propozicije 3.1.1 slijedi da je H rekurzivna funkcija.
Primjetimo da za svaki $y \in \mathbb{N}$ vrijedi $H(0,y) = a$, pa funkcija $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definirana sa $F(y) = a$ zadovoljava (3.1).
Iz prethodne propozicije slijedi da je F rekurzivna funkcija.
Primjetimo da za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$H(x+1,y) = h(x+1) = g(h(x),x) = g(H(x,y),x) \tag{3.3}$$

Definirajmo $G\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ sa $G(a,b,c) = g(a,b)$.
Vrijedi $G(a,b,c) = g(I_1^3(a,b,c), I_2^3(a,b,c))$, pa je G rekurzivna funkcija kao kompozicija rekurzivnih funkcija.
Iz definicije funkcije G i (3.3) slijedi (3.2).
Dakle, H je rekurzivna funkcija i za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$h(x) = H(x,0) = H(I_1^1(x), z(x))$$

pa slijedi da je h rekurzivna funkcija kao kompozicija rekurzivnih funkcija. □

Definicija 3.2.1. *Neka je preth*$\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa:*

$$preth(x) = \begin{cases} x-1, & x \geqslant 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Primjer 3.4. *Funkcija preth je rekurzivna.*
Vrijedi:

$$preth(0) = 0$$
$$preth(x+1) = x = I_2^2(preth(x), x), \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}$$

Iz prethodne propozicije, za $a = 0$ i $g = I_2^2$ slijedi da je preth rekurzivna funkcija.

Primjer 3.5. *Modificirano oduzimanje je rekurzivna funkcija.*
Prije svega tvrdimo da za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$y \dot{-} (x+1) = preth(y \dot{-} x) \tag{3.4}$$

Imamo dva slučaja:
1) $y \geqslant x + 1$.

Tada je:

$$y \dot{-} (x + 1) = y - (x + 1) = (y - x) - 1 = preth(y \dot{-} x)$$

2) $y < x + 1$.

Tada je:

$$y \leqslant x$$

Imamo:

$$y \dot{-} (x + 1) = 0 = preth(0) = preth(y \dot{-} x)$$

Dakle, vrijedi (3.4).
Definirajmo funkciju $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *sa* $f(x, y) = y \dot{-} x$.
Očito je $f(0, y) = y = I_1^1(y),\ \forall\, y \in \mathbb{N}$. *Nadalje, za sve* $x, y \in \mathbb{N}$, *prema* (3.4) *vrijedi:*

$$f(x + 1, y) = y \dot{-} (x + 1) = preth(y \dot{-} x) = preth(f(x, y)) = g(f(x, y), x, y)$$

gdje je $g: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ *definirana sa* $g(a, b, c) = preth(I_1^3(a, b, c))$.
Očito je g rekurzivna funkcija.
Dakle, za sve $x, y \in \mathbb{N}$ *vrijedi:*

$$f(0, y) = I_1^1(y)$$

,

$$f(x + 1, y) = g(f(x, y), x, y)$$

. *Stoga je f dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija* I_1^1 *i g.*
Zaključujemo da je f rekurzivna.
Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ *vrijedi:*

$$x \dot{-} y = f(y, x)$$

pa iz Primjera 3.3 slijedi da je modificirano oduzimanje rekurzivna funkcija.

Definicija 3.2.2. *Definirajmo funkciju* $sg: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *sa:*

$$sg(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$$

Definicija 3.2.3. *Definirajmo funkciju* $\overline{sg}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *sa:*

$$\overline{sg}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

Propozicija 3.2.4. *Funkcije sg i $\overline{sg}$ su rekurzivne.*

Dokaz. Vrijedi:

$$\mathrm{sg}(0) = 0$$

$$\mathrm{sg}(x+1) = g(sg(x), x), \text{ gdje je } g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ g(a,b) = 1$$

Prema Propoziciji 3.1.1 funkcija sg je rekurzivna.
Analogno dobivamo da je $\overline{sg}$ rekurzivna funkcija. □

Propozicija 3.2.5. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, te neka su $f, g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su $f + g$ i $f \cdot g$ rekurzivne funkcije.*

Dokaz. Neka je $\mathrm{zb}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:

$$\mathrm{zb}(x, y) = x + y$$

. Znamo da je zb rekurzivna funcija.
Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi:

$$(f + g)(x) = \mathrm{zb}(f(x), g(x))$$

. Funkcija $f + g$ je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija.
Analogno se pokaže da je $f \cdot g$ rekurzivna funkcija. □

Primjer 3.6. *Definirajmo $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor, & y \geqslant 1 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Pokažimo da je f rekurzivna.
Neka su $x, y \in \mathbb{N},\ y \geqslant 1$. Označimo $k := f(x, y)$.
Tada je $k \leqslant \frac{x}{y} < k + 1$ pa je $y \cdot k \leqslant x < y(k + 1)$.
Zaključujemo da je $k = \min\{z \in \mathbb{N} | x < y(z + 1)\}$.
Dakle, $f(x, y) = \min\{z \in \mathbb{N} |\ x < y(z + 1)\}$.
Definirajmo funkciju $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa $g(x, y, z) = y \cdot \overline{sg}(y \cdot (z + 1) \dot{-} x)$.
Uočimo da za $x, y, z \in \mathbb{N},\ y \neq 0$, vrijedi:

$$g(x, y, z) = 0 \iff x < y(z + 1)$$

Stoga je $f(x, y) = \min\{z \in \mathbb{N} | g(x, y, z) = 0\}$, za sve $x, y \in \mathbb{N}$.
Prema tome, funkcija f je dobivena primjenom μ operatora na funkciju g.
Ostaje dokazati da je g rekurzivna.
Prema Propoziciji 3.2.5 dovoljno je dokazati da je funkcija $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$:

$$(x, y, z) \to \overline{sg}(y(z + 1) \dot{-} x)$$

rekurzivna.
Pošto je $\overline{sg}$ *rekurzivna, dovoljno je dokazati da je funkcija* $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{N},\ h(x,y,z) = y(z+1) \dot{-} x$ *rekurzivna.*
Funkcija h je dobivena kompozicijom modificiranog oduzimanja te funkcija $I_2^3(s \circ I_3^3)$ *i* I_1^3.
Stoga je h rekurzivna funkcija pa slijedi da je g rekurzivna.
Zaključujemo da je f rekurzivna funkcija.

Primjer 3.7. *Neka je* $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $h(a,b) = |a-b|$.
Tvrdimo da je funkcija h rekurzivna.
Vrijedi:

$$|a-b| = (a \dot{-} b) + (b \dot{-} a),\ \text{za sve } a,b \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Neka je mo: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *modificirano oduzimanje.*
Neka je $mo'\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa* $mo'(a,b) = b \dot{-} a$.
Znamo da je mo rekurzivna funkcija, pa iz Primjera 3.3 slijedi da je mo' rekurzivna funkcija.
Prema (3.5) *vrijedi* $h = mo + mo'$.
Iz Propozicije 3.2.5 slijedi da je h rekurzivna.

Definicija 3.2.4. *Neka je* $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{N}^k$.
Kažemo da je S rekurzivan podskup od $\mathbb{N}^k$ *ako je karakteristična funkcija od S,* $\chi_S : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, *definirana sa:*

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & x \in S \\ 0, & x \notin S \end{cases}$$

rekurzivna.

Primjer 3.8. *Neka je* $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. *Tada su* $\emptyset$ *i* $\mathbb{N}^k$ *rekurzivni podskupovi od* $\mathbb{N}^k$.
To slijedi iz Propozicije 3.2.2.

Primjer 3.9. *Neka je* $S = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$. *Tada je S rekurzivan podskup od* $\mathbb{N}$.
Neka je $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definirana sa* $g(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$.
Iz Primjera 3.6 slijedi da je g rekurzivna.
Neka je $x \in \mathbb{N}$. *Vrijedi:*

$$x \in S \iff x = 2 \cdot \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \iff x = 2 \cdot g(x) \iff |2g(x) - x| = 0$$

Dakle, za $x \in S$ *je* $\overline{sg}(|2g(x) - x|) = \overline{sg}(0) = 1$, *a za* $x \in \mathbb{N}\setminus S$ *je* $\overline{sg}(|2g(x) - x|) = 0$.
Stoga je $\chi_S(x) = \overline{sg}(|2g(x) - x|)$, *za svaki* $x \in \mathbb{N}$.
Iz Primjera 3.7 slijedi da je χ_S *rekurzivna.*

Primjer 3.10. *Skup $S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x|y\}$ je rekurzivan.*
Uzmimo $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiranu sa:

$$f(x, y) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Prema Primjeru 3.6 funkcija f je rekurzivna.
Uočimo da za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$x|y \iff y = x \cdot f(y, x) \tag{3.6}$$

Naime, za $x \neq 0$ vrijedi:

$$x|y \iff y = x \cdot \left\lfloor \frac{y}{x} \right\rfloor$$

a za $x = 0$ vrijedi:

$$x|y \iff y = 0 \iff y = x \cdot 0$$

Iz (3.6) *zaključujemo da je*

$$\chi_S(x, y) = \overline{sg}(|y - x \cdot f(y, x)|), \text{ za sve } x, y \in \mathbb{N}$$

Neka je $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija iz Primjera 3.7. Tada vrijedi:

$$\chi_S(x, y) = \overline{sg}(h(y, x \cdot f(y, x)), \text{ za sve } x, y \in \mathbb{N}$$

Želimo dokazati da je χ_S rekurzivna funkcija.
Iz Propozicije 3.2.4 slijedi da je $\overline{sg}$ rekurzivna funkcija pa je dovoljno dokazati da je $h'\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $h'(x, y) = h(y, x \cdot f(x, y))$, za sve $x, y \in \mathbb{N}$ rekurzivna.
Definirajmo $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa $g(x, y) = x \cdot f(y, x)$.
Slijedi da je h' kompozicija funkcija h, I_2^2 i g. Prema Primjeru 3.7 funkcija h je rekurzivna.
Ostaje nam dokazati da je g rekurzivna.
Funkcija g je rekurzivna kao produkt rekurzivnih funkcija, pri tome koristimo Propoziciju 3.2.5.
Zaključujemo da je χ_S rekurzivna, stoga je S rekurzivan skup.

Propozicija 3.2.6. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Neka su S i T rekurzivni podskupovi od $\mathbb{N}^k$. Tada su i $S \cup T$, $S \cap T$, S^c rekurzivni podskupovi od $\mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Vrijedi $\chi_{S\cap T}(x) = \chi_S(x) \cdot \chi_T(x)$ pa slijedi da je $\chi_{S\cap T}$ rekurzivna funkcija kao produkt rekurzivnih funkcija. Dakle, $S \cap T$ je rekurzivan skup.
Nadalje, vrijedi $\chi_{S\cup T}(x) = \mathrm{sg}(\chi_S(x) + \chi_T(x))$, prema tome $\chi_{S\cup T}$ je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Dakle, $S \cup T$ je rekurzivan skup. Vrijedi $\chi_{S^c}(x) = \overline{sg}(\chi_S(x))$, pa slijedi da je χ_{S^c} rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Stoga je S^c rekurzivan skup. $\square$

Propozicija 3.2.7. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ rekurzivan skup takav da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, y) \in S$.*
Tada postoji rekurzivna funkcija $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $(x, f(x)) \in S,\ \forall x \in \mathbb{N}^k$.

Dokaz. Definirajmo funkciju $g \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa $g(x, y) = \overline{sg}(\chi_S(x, y))$. Očito je g rekurzivna funkcija.
Uočimo da za sve $x \in \mathbb{N}^k,\ y \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$(x, y) \in S \iff g(x, y) = 0 \tag{3.7}$$

Stoga za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $g(x, y) = 0$.
Neka je f funkcija dobivena primjenom μ operatora na g.
Očito je f rekurzivna funkcija.
Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada iz $f(x) = \mu y(g(x, y) = 0)$ slijedi $g(x, f(x)) = 0$.
Stoga iz (3.7) slijedi $(x, f(x)) \in S$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. □

Lema 3.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ rekurzivan skup takav da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, y) \in S$.*
Neka je funkcija $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definirana sa $f(x) = \mu y((x, y) \in S)$ (tj. $f(x) = \min\{y \in \mathbb{N} | (x, y) \in S\}$).
Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Uočimo da za sve $x \in \mathbb{N}^k,\ y \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$(x, y) \in S \iff \overline{sg}(\chi_S(x, y)) = 0$$

Stoga za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi:

$$f(x) = \mu y(\overline{sg}(\chi_S(x, y)) = 0)$$

Zaključujemo da je f rekurzivna funkcija jer je dobivena primjenom μ operatora na rekurzivnu funkciju. □

Neka je $\mathcal{P}$ skup svih prostih brojeva.

Propozicija 3.2.8. *Skup $\mathcal{P}$ je rekurzivan.*

Dokaz. Definirajmo funkciju $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = \mu y((y > 1 \text{ i } y|x) \text{ ili } x \leqslant 1)$.
Tvrdimo da je f rekurzivna funkcija.
Definiramo $S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | (y > 1 \text{ i } y|x) \text{ ili } x \leqslant 1\}$.
Za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$f(x) = \mu y((x, y) \in S)$$

stoga je prema Lemi 3.1 dovoljno dokazati da je S rekurzivan skup.
Neka je $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 | y > 1 \text{ i } y|x\}$ i $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 | x \leqslant 1\}$.
Tada je $S = S_1 \cup S_2$ pa je dovoljno dokazati da su S_1 i S_2 rekurzivni skupovi.
Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\chi_{S_2}(x,y) = \overline{sg}(x \dot{-} 1)$$

pa je χ_{S_2} rekurzivna funkcija, dakle S_2 je rekurzivan skup.
Neka je $S_1' = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 | y > 1\}$ i $S_1'' = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 | y|x\}$.
Vrijedi $S_1 = S_1' \cap S_1''$.
Uočimo da je $\chi_{S_1'} = \mathrm{sg}(y \dot{-} 1)$, stoga je S_1' rekurzivan skup. Iz Primjera 3.10 i Primjera 3.3 slijedi da je S_1'' rekurzivan skup. Slijedi da je S_1 rekurzivan skup kao presjek rekurzivnih skupova.
Zaključujemo da je S rekurzivan skup. Prema tome, f je rekurzivna funkcija.
Za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$x \in \mathcal{P} \iff x > 1 \text{ i } f(x) = x$$

. Stoga je $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{N} | x > 1\} \cap \{x \in \mathbb{N} | f(x) = x\}$. Skup $T = \{x \in \mathbb{N} | f(x) = x\}$ je rekurzivan jer je $\chi_T = \overline{sg}(|f(x) - x|)$.
Stoga je $\mathcal{P}$ rekurzivan skupkao presjek rekurzivnih skupova. □

Neka su $p_0, p_1, p_2, \ldots$ svi prosti brojevi redom ($p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \ldots$).

Propozicija 3.2.9. *Funkcija* $\mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \to p_x$ *je rekurzivna.*

Dokaz. Neka je $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $g(x) = \mu y(y \in \mathcal{P} \text{ i } y > x)$.
Definirajmo:

$$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 | y \in \mathcal{P}\}$$

,

$$S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 | y > x\}$$

. Vrijedi $\chi_{S_1}(x,y) = \chi_{\mathcal{P}}(y)$ pa iz Propozicije 3.2.8 slijedi da je S_1 rekurzivan skup. Nadalje, vrijedi $\chi_{S_2}(x,y) = \mathrm{sg}(y \dot{-} x)$ pa je S_2 rekurzivan skup. Iz definicije funkcije g je očito da je $g(x) = \mu y((x,y) \in S_1 \cap S_2)$. Iz Leme 3.1 slijedi da je g rekurzivna funkcija. Uočimo da vrijedi sljedeće:

$$p_0 = 2$$

$$p_{x+1} = g(p_x),\ \forall x \in \mathbb{N}$$

Definirajmo funkciju $G \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa $G(x,y) = g(x)$. Očito je G rekurzivna funkcija. Vrijedi:

$$p_0 = 2$$

$$p_{x+1} = G(p_x, x),\ \forall x \in \mathbb{N}$$

Iz Propozicije 3.1.1 slijedi da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \to p_x$ rekurzivna. □

Lema 3.2. *Neka je $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $f(x, y) = y^x$.*
Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće:

$$f(0, y) = 1 \tag{3.8}$$

$$f(x + 1, y) = f(x, y) \cdot y \tag{3.9}$$

Neka je $C\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $C(y) = 1$. Neka je $g\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $g(a, b, c) = a \cdot c$.
Lako se vidi da su funkcije C i g rekurzivne.
Iz (3.8) i (3.9) slijedi da za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$f(0, y) = C(y)$$

$$f(x + 1, y) = g(f(x, y), x, y)$$

Dakle, funkcija f dobivena je primitivnom rekurzijom od funkcija C i g.
Stoga je f rekurzivna. □

Propozicija 3.2.10. *Neka je $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$f(x, i) = \begin{cases} \textit{eksponent kojim } p_i \textit{ ulazi u rastav od } x \textit{ na proste faktore}, & x \geqslant 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 1$. Neka je $i \in \mathbb{N}$.
Označimo $y = f(x, i)$.
Uočimo da vrijedi:

$$p_i^y \mid x \text{ i } p_i^{y+1} \nmid x$$

Stoga je:

$$f(x, i) = \mu y(p_i^{y+1} \nmid x)$$

Iz toga slijedi da za sve $x, i \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$f(x, i) = \mu y(p_i^{y+1} \nmid x \text{ ili } x = 0)$$

Definirajmo skupove:

$$S = \{(x, i, y) \in \mathbb{N}^3 | p_i^{y+1} \nmid x\}$$

$$T = \{(x, i, y) \in \mathbb{N}^3 | x = 0\}$$

Tada je $f(x, i) = \mu(y(x, i, y) \in S \cup T)$, za sve $x, i \in \mathbb{N}$.
Stoga je dovoljno, prema Lemi 3.1, dokazati da su S i T rekurzivni skupovi.
Očito je T rekurzivan skup.
Definirajmo skup $G = \{(a, b) \in \mathbb{N}^3 | \ a \mid b\}$.
Prema Primjeru 3.10 skup G je rekurzivan. Vrijedi:

$$\chi_S(x, i, y) = \overline{sg}(\chi_G(p_i^{y+1}, x)), \text{ za sve } x, i, y \in \mathbb{N}$$

Stoga je dovoljno dokazati da je funkcija $g \colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, $g(x, i, y) = p_i^{y+1}$ rekurzivna funkcija.
Definirajmo funkciju $h \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa $h(a, b) = b^a$. Prema Lemi 3.2 slijedi da je h rekurzivna funkcija.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Neka je f funkcija iz prethodne propozicije.
Za $x, i \in \mathbb{N}$ broj $f(x, i)$ označit ćemo sa $(x)_i$.

Propozicija 3.2.11. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Neka su $S_1, \ldots, S_n$ rekurzivni podskupovi od $\mathbb{N}^k$ takvi da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji jedinstveni $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $x \in S_i$. Neka su $f_1, \ldots, f_n \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Definirajmo $F \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa:*

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in S_1 \\ & \ldots \\ f_n(x), & x \in S_n \end{cases}$$

Tada je F rekurzivna funkcija.

Dokaz. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi:

$$F(x) = f_1(x) \cdot \chi_{S_1}(x) + \ldots + f_n(x) \cdot \chi_{S_n}(x)$$

Stoga je F rekurzivna kao zbroj konačno mnogo rekurzivnih funkcija (što je posljedica Propozicije 3.2.5). □

Definicija 3.2.5. *Instrukcije možemo preciznije definirati na sljedeći način.*
Instrukciju INC R_i definiramo kao uređeni par $(0, i)$, intrukciju DEC R_i, k definiramo kao $(1, i, k)$ i instrukciju GOTO k definiramo kao $(2, k)$.
Svakoj instrukciji q pridružujemo funkciju $\overline{q} \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definiranu na sljedeći način.
Ako je $q = INC\ R_i$ neka je $q(s, (r_j)) = (s + 1, (r_0, r_1, \ldots, r_{i-1}, r_i + 1, r_{i+1}, \ldots))$.
Ako je $q = DEC\ R_i, k$ neka je $q(s, (r_j)) = \begin{cases} (s + 1, (r_0, r_1, \ldots, r_{i-1}, r_i - 1, r_{i+1}, \ldots)), & r_i > 0 \\ (k, (r_j)), & r_i = 0 \end{cases}$

Ako je $q = GOTO\ k$, neka je $\overline{q}(s,(r_j)) = (k,(r_j))$.

U navedenoj definiciji niz (r_j) predstavlja stanje registara u trenutku izvršavanja instrukcije, a s predstavlja redni broj instrukcije u programu koju treba izvršiti.

Definicija 3.2.6. *Neka je $i \in \mathbb{N}$ te neka je $(r_j) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*
Kažemo da je i kod niza (r_j) ako za svaki $j \in \mathbb{N}$ vrijedi $(i)_j = r_j$.
Naprimjer, broj 48 je kod niza $(4, 1, 0, 0, \dots)$ jer je $48 = 2^4 \cdot 3^1$.
Uočimo da niz $(r_j) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ima kod ako i samo ako postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $r_j = 0,\ \forall j \geqslant N$

Definicija 3.2.7. *Neka je q instrukcija.*
Ako je $q = INC\ R_i$, onda za broj $2^0 3^i$ kažemo da je kod instrukcije q.
Ako je $q = DEC\ R_i, k$, onda za broj $2^1 3^i 5^k$ kažemo da je kod instrukcije q.
Ako je $q = GOTO\ k$, onda za broj $2^2 3^k$ kažemo da je kod instrukcije q.

Definicija 3.2.8. *Neka je $i \in \mathbb{N}$ te neka je $(s,(r_j)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Kažemo da je i kod od $(s,(r_j))$ ako je i kod niza $(s, r_0, r_1, \dots)$.*
Uočimo da je i kod od $(s,(r_j))$ ako i samo ako je $s = (i)_0$ i $r_j = (i)_{j+1}$, za svaki $j \in \mathbb{N}$.

Propozicija 3.2.12. *Postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa sljedećim svojstvom:*
Ako je x kod instrukcije $q = INC\ R_i$ i y kod od $(s,(r_j))$, onda je $f(x,y)$ kod od $\overline{q}(s,(r_j))$.

Dokaz. Pretpostavimo da je x kod instrukcije $q = \text{INC}\ R_i$ i y kod od $(s,(r_j))$.
Tada je $x = 2^0 3^i$ i $y = p_0^s p_1^{r_0} \cdot \ldots \cdot p_{j+1}^{r_j} \cdot \ldots \cdot p_N^{r_{N-1}}$, za neki $N \in \mathbb{N}$, pri čemu pretpostavljamo $N > i + 1$.
Vrijedi:

$$\overline{q}(s,(r_i)) = (s+1,(r_0,\dots,r_{i-1},r_i+1,r_{i+1},\dots))$$

Stoga je broj $z = p_0^{s+1} p_1^{r_0} \cdot \ldots \cdot p_i^{r_{i-1}} p_{i+1}^{r_i+1} p_{i+2}^{r_{i+1}} \cdot \ldots \cdot p_N^{r_{N-1}}$ kod od $\overline{q}(s,(r_i))$.
Uočimo, $z = y \cdot p_0 \cdot p_{i+1} = 2 \cdot y \cdot p_{i+1}$.
Iz $x = 2^0 3^i$ slijedi $i = (x)_1$. Stoga je $z = 2 \cdot y \cdot p_{(x)_1+1}$.
Definirajmo funkciju $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa $f(x,y) = 2 \cdot y \cdot p_{(x)_1+1}$.
Prethodno razmatranje pokazuje da funkcija f ima traženo svojstvo. Preostaje dokazati da je f rekurzivna. U tu svrhu, dovoljno je dokazati da je funkcija $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ g(x,y) = p_{(x)_1+1}$ rekurzivna.
Funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \to (x)_1$ je prema Propoziciji 3.2.10 rekurzivna pa je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \to p_{(x)_1+1}$ rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Iz ovoga slijedi da je funkcija g rekurzivna.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 3.2.13. *Postoji rekurzivna funkcija $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa sljedećim svojstvom:*
Ako je x kod instrukcije $q = DEC\ R_i, k$ i y kod od $(s,(r_j))$, onda je $g(x,y)$ kod od $\overline{q}(s,(r_j))$.

Dokaz. Pretpostavimo da je x kod instrukcije $q = \text{DEC } R_i, k$ i y kod od $(s, (r_j))$.
Tada je:

$$x = 2 \cdot 3^i \cdot 5^k \quad \text{i} \quad y = p_0^s p_1^{r_0} \cdot \ldots \cdot p_i^{r_{i-1}} p_{i+1}^{r_i} \cdot \ldots \cdot p_N^{r_{N-1}} \tag{3.10}$$

za neki $n \in \mathbb{N}$, pritom pretpostavimo $N > i + 1$.
Vrijedi:

$$\overline{q}(s, (r_j)) = \begin{cases} (s+1, (r_0, r_1, \ldots, r_{i-1}, r_i - 1, r_{i+1}, \ldots)), & r_i > 0 \\ (k, (r_j)), & r_i = 0 \end{cases}$$

Neka je z kod od $\overline{q}(s, (r_j))$.
Tada je:

$$z = \begin{cases} \frac{y \cdot p_0}{p_{i+1}}, \ r_i > 0 \\ \frac{y}{2^s} \cdot 2^k, \ r_i = 0 \end{cases}$$

Iz $x = 2 \cdot 3^i 5^k$ slijedi $i = (x)_1, \ k = (x)_2$.
Iz (3.10) slijedi $r_i = (y)_{i+1}, \ s = (y)_0$.
Slijedi:

$$z = \begin{cases} \frac{y \cdot 2}{p_{(x)_1+1}}, \ (y)_{(x)_1+1} > 0 \\ \frac{y}{2^{(y)_0}} \cdot 2^{(x)_2}, \ (y)_{(x)_1+1} = 0 \end{cases}$$

Definirajmo funkciju $g \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa:

$$g(x, y) = \begin{cases} \lfloor \frac{y \cdot 2}{p_{(x)_1+1}} \rfloor, \ (y)_{(x)_1+1} > 0 \\ \lfloor \frac{y}{2^{(y)_0}} \cdot 2^{(x)_2} \rfloor, \ (y)_{(x)_1+1} = 0 \end{cases}$$

Prethodno razmatranje pokazuje da funkcija g ima traženo svojstvo.
Preostaje dokazati da je g rekurzivna.
Definirajmo skupove:

$$S_1 = \{(x, y) |\ (y)_{(x)_1+1} > 0\}$$

$$S_2 = S_1^c$$

Nadalje, definirajmo funkcije $g_1, g_2 \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa:

$$g_1(x, y) = \left\lfloor \frac{y \cdot 2}{p_{(x)_1+1}} \right\rfloor$$

$$g_2(x, y) = \left\lfloor \frac{y}{2^{(y)_0}} \cdot 2^{(x)_2} \right\rfloor$$

Vrijedi:

$$g(x, y) = \begin{cases} g_1(x, y), \ (x, y) \in S_1 \\ g_2(x, y), \ (x, y) \in S_2 \end{cases}$$

Stoga je, prema Propoziciji 3.2.11 dovoljno dokazati da su skupovi S_1, S_2 rekurzivni i funkcije g_1, g_2 rekurzivne.
Vrijedi $\chi_{S_1}(x,y) = \mathrm{sg}((y)_{(x)_1+1})$, za sve $x, y \in \mathbb{N}$.
Neka je $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $h(x,y) = (y)_{(x)_1+1}$.
Neka je $F\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana sa $F(i,j) = (i)_j$.
Prema Propoziciji 3.2.10 funkcija F je rekurzivna. Vrijedi $h(x,y) = F(y,(x)_1+1)$, iz čega lako zaključujemo da je funkcija h rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Iz ovoga slijedi da je χ_{S_1} rekurzivna funkcija, odnosno S_1 je rekurzivan skup. Iz Propozicije 3.2.6 slijedi da je S_2 rekurzivan skup.
Neka je f funkcija iz Primjera 3.10. Funkcija f je rekurzivna i vrijedi $g_1(x,y) = f(2y, p_{(x)_1+1})$.
Iz ovoga zaključujemo da je g_1 rekurzivna funkcija. Vrijedi $g_2(x,y) = f(y \cdot 2^{(x)_2}, 2^{(y)_0})$ pa koristeći Lemu 3.2 zaključujemo da je g_2 rekurzivna.
Dakle, funkcija g je rekurzivna funkcija. □

Propozicija 3.2.14. *Postoji rekurzivna funkcija $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa sljedećim svojstvom: Ako je x kod instrukcije $q =$ GOTO k i y kod od $(s,(r_j))$ onda je $h(x,y)$ kod od $\overline{q}(s,(r_j))$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je x kod instrukcije $q =$ GOTO k i y kod od $(s,(r_j))$.
Tada je $x = 2^2 3^k$ i $y = p_0^s p_1^{r_0} \cdot \ldots \cdot p_{j+1}^{r_j} \cdot \ldots \cdot p_N^{r_{N-1}}$, za neki $N \in \mathbb{N}$, pritom pretpostavimo $N > i+1$.
Tada je $\overline{q}(s,(r_j)) = (k,(r_j))$.
Neka je z kod od $\overline{q}(s,(r_j))$.
Slijedi:

$$z = \frac{y \cdot p_0^k}{p_0^s} = \frac{y \cdot 2^k}{2^s}$$

Vrijedi $k = (x)_1$ i $s = (y)_0$, pa je $z = \frac{y \cdot 2^{(x)_1}}{2^{(y)_0}}$.
Definirajmo $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $h(x,y) = \lfloor \frac{y \cdot 2^{(x)_1}}{2^{(y)_0}} \rfloor$.
Tada je h tražena funkcija. □

Propozicija 3.2.15. *Postoji rekurzivna funkcija $\phi\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi: Ako je x kod instrukcije q i y kod od $(s,(r_j))$, onda je $\phi(x,y)$ kod od $\overline{q}(s,(r_j))$.*

Dokaz. Neka su f, g, h funkcije iz Propozicije 3.2.12, Propozicije 3.2.13 i Propozicije 3.2.14.
Pretpostavimo da je x kod neke instrukcije q.
Tada je $q =$ INC R_i, za neki $i \in \mathbb{N}$ ako i samo ako je $(x)_0 = 0$. Nadalje, vrijedi $q =$ DEC R_i, k, za neke $i, k \in \mathbb{N}$ ako i samo ako je $(x)_0 = 1$. Vrijedi $q =$ GOTO k, za neki $k \in \mathbb{N}$, ako i samo ako je $(x)_0 = 2$. Definirajmo funkciju $\phi\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ na

sljedeći način:

$$\phi(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x)_0 = 0 \\ g(x,y), & (x)_0 = 1 \\ h(x,y), & \text{inače} \end{cases}$$

Tada funkcija ϕ ima traženo svojstvo. Dokažimo da je ϕ rekurzivna.
Definirajmo skupove:

$$S_1 = \{(x,y) |\ (x)_0 = 0\}$$

,

$$S_2 = \{(x,y) |\ (x)_0 = 1\}$$

,

$$S_3 = (S_1 \cup S_2)^c$$

. Vrijedi $\chi_{S_1}(x,y) = \overline{sg}((x)_0)$, za sve $x, y \in \mathbb{N}$, pa zaključujemo da je S_1 rekurzivan skup. Vrijedi $\chi_{S_2}(x,y) = \overline{sg}|(x)_0 - 1|$, za sve $x, y \in \mathbb{N}$, pa zaključujemo da je S_2 rekurzivan skup. Skup S_3 je rekurzivan prema Propoziciji 3.2.6.
Vrijedi:

$$\phi(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{za } (x,y) \in S_1, \\ g(x,y), & \text{za } (x,y) \in S_2, \\ h(x,y), & \text{za } (x,y) \in S_3. \end{cases}$$

Prema Propoziciji 3.2.11 slijedi da je ϕ rekurzivna funkcija. □

Definicija 3.2.9. *Neka je $P = (q_0, \ldots, q_n)$ program. Za $i \in \{0, \ldots, n\}$ neka je x_i kod instrukcije q_i.*
Definirajmo $e = p_0^{x_0} \cdot \ldots \cdot p_n^{x_n}$.
Tada za e kažemo da je kod programa P.

Primjer 3.11. *Neka je P sljedeći program:*

0\. $INC\ R_0$

1\. $INC\ R_0$

2\. $INC\ R_0$

Kod instrukcije $INC\ R_0$ je $2^0 3^0 = 1$. Stoga je kod programa P jednak $p_0^1 \cdot p_1^1 \cdot p_2^1 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 30$.

Primjer 3.12. *Neka je P sljedeći program:*

0\. $DEC\ R_1, 2$

1. *GOTO* 0

2. *INC* R_2

Kod instrukcije DEC $R_1, 2$ *je:*

$$2^1 3^1 5^2 = 150$$

Kod instrukcije GOTO 0 *je:*

$$2^2 3^0 = 4$$

Kod instrukcije INC R_2 *je:*

$$2^0 3^2 = 9$$

Stoga je kod programa P jednak:

$$p_0^{150} \cdot p_1^4 \cdot p_2^9 = 2^{150} \cdot 3^4 \cdot 5^9$$

Definicija 3.2.10. *Neka je* $P = (q_0, \ldots, q_n)$ *program.*
Definiramo funkciju $\overline{P} \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *sa:*

$$\overline{P}(s, (r_j)) = \begin{cases} \overline{q}_s(s, (r_j)), & s \leqslant n, \\ (s, (r_j)), & s > n \end{cases}$$

Lema 3.3. *Postoji rekurzivna funkcija* $\lambda \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *koja ima sljedeće svojstvo:*
Ako je e kod nekog programa $P = (q_0, \ldots, q_n)$ *onda je* $\lambda(e) = n$.

Dokaz. Pretpostavimo da je e kod programa $P = (q_0, \ldots, q_n)$. Vrijedi:

$$e = p_0^{x_0} \cdot \ldots \cdot p_n^{x_n}$$

gdje su $x_0, \ldots, x_n$ kodovi instrukcija $q_0, \ldots, q_n$.
Općenito, kod instrukcije ne može biti 0, prema tome $x_0, \ldots, x_n > 0$. Iz ovoga zaključujemo da $p_i \mid e$, za svaki $i \leqslant n$, a očito $p_{n+1} \nmid e$.
Stoga je $n = \min\{i \in \mathbb{N} \mid p_{i+1} \nmid e\}$.
Definirajmo funkciju $\lambda \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa $\lambda(e) = \min\{i \in \mathbb{N} \mid p_{i+1} \nmid e \text{ ili } e = 0\}$. Funkcija λ ima traženo svojstvo, ostaje dokazati da je λ rekurzivna funkcija.
Definirajmo $S = \{(e, i) \mid p_{i+1} \nmid e \text{ ili } e = 0\}$. Vrijedi:

$$\lambda(e) = \mu_i((e, i) \in S), \quad \text{za svaki} \quad e \in \mathbb{N}$$

. Prema Lemi 3.1 dovoljno je dokazati da je S rekurzivan skup.
Definirajmo $S_1 = \{(e, i) \mid p_{i+1} \nmid e\}$, $\quad S_2 = \{(e, i) \mid e = 0\}$.
Očito je $S = S_1 \cup S_2$ pa je dovoljno dokazati da su S_1 i S_2 rekurzivni. Analogno kao u dokazu Propozicije 3.2.10 vidimo da je skup S_1 rekurzivan. Skup S_2 je očito rekurzivan, pa slijedi da je skup S rekurzivan, čime je tvrdnja leme dokazana. □

Propozicija 3.2.16. *Postoji rekurzivna funkcija $H\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da: ako je e kod programa P i y kod od $(s,(r_j)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, onda je $H(e,y)$ kod od $\overline{P}(s,(r_i))$.*

Dokaz. Neka je $\phi\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija iz Propozicije 3.2.15, te neka je $\lambda\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija iz Leme 3.3. Definirajmo $H\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa:

$$H(e,y) = \begin{cases} \phi((e)_{(y)_0}, y), & \text{ako je } (y)_0 \leqslant \lambda(e) \\ y, & \text{inače} \end{cases}$$

Pokažimo da je H rekurzivna funkcija.
Neka je $S_1 = \{(e,y) | (y)_0 \leqslant \lambda(e)\}$ i neka je $S_2 = S_1^c$.
Imamo $\chi_{S_1}(e,y) = \overline{sg}((y)_0 \dot{-} \lambda(e))$ za sve $e, y \in \mathbb{N}$, pa zaključujemo da je χ_{S_1} rekurzivna funkcija. Prema tome,S_1 je rekurzivan skup, pa slijedi da je i S_2 rekurzivan skup.
Neka je $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana sa $f(e,y) = \phi((e)_{(y)_0}, y)$.
Lako se vidi da je f rekurzivna funkcija.
Za sve $e, y \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$H(e,y) = \begin{cases} f(e,y), & \text{ako je } (e,y) \in S_1 \\ I_2^2(e,y), & \text{ako je } (e,y) \in S_2 \end{cases}$$

Iz Propozicije 3.2.11 slijedi da je funkcija H rekurzivna.
Pretpostavimo da je e kod nekog programa P, te da je y kod od $(s,(r_j)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Imamo $P = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$. Za $i \in \{1, \ldots, n\}$ neka je x_i kod instrukcije q_i. Vrijedi $e = p_0^{x_0} \cdot \ldots \cdot p_n^{x_n}$, nadalje vrijedi $n = \lambda(e)$. Budući da je y kod od $(s,(r_j))$ vrijedi $s = (y)_0$.
Imamo 2 slučaja:
1)$s \leqslant n$
Tada je $\overline{P}(s,(r_j)) = \overline{q}_s(s,(r_j))$. Budući da je e kod programa P vrijedi da je $(e)_s = x_s$, a x_s je kod instrukcije q_s. Dakle, $(e)_s$, odnosno $(e)_{(y)_0}$ je kod instrukcije q_s.
Iz Propozicije 3.2.15 slijedi da je $\phi((e)_{(y)_0}, y)$ kod od $\overline{q}_s(s,(r_j))$, to jest od $\overline{P}(s,(r_j))$. Očito je $\phi((e)_{(y)_0}, y) = H(e,y)$, dakle $H(e,y)$ je kod od $\overline{P}(s,(r_j))$.

2)$s > n$
Tada je $\overline{P}(s,(r_j)) = (s,(r_j))$ pa je y kod od $\overline{P}(s,(r_j))$ i $y = H(e,y)$. Slijedi da je $H(e,y)$ kod od $\overline{P}(s,(r_j))$.

Zaključujemo da funkcija H ima traženo svojstvo. □

Definicija 3.2.11. *Neka je P program te neka je $(r_j) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Definirajmo niz $((s_i,(r_j^i)))_{i\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ induktivno na sljedeći način:*

$$(s_0,(r_j^0)) = (0,(r_j))$$

$$(s_{i+1}, (r_j^{i+1})) = \overline{P}(s_i, (r_j^i))$$

Za $((s_i, (r_j^i)))_{i\in\mathbb{N}}$ *kažemo da je niz izvršavanja programa* P *za* (r_j).

Uočimo sljedeće, ako je $P = (q_0, \dots, q_n)$ program, $(r_j) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ te $((s_i, (r_j^i))_{i\in\mathbb{N}}$ niz izvršavanja programa P za (r_j) onda P staje za ulazne podatke (r_j) ako i samo ako $\exists i \in \mathbb{N}$ takav da $s_i > n$. Nadalje, ako je $i \in \mathbb{N}$ takav da $s_i > n$, onda je (r_j^i) rezultat izvršavanja programa P.

Napomena 3.2.1. *Neka je* $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *te neka je* $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *izračunljiva funkcija.*
Tada postoji program $P = (q_0, \dots, q_n)$ *koji računa funkciju* f.
Neka su $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$.
Neka je $((s_i, (r_j^i))_{i\in\mathbb{N}}$ *niz izvršavanja programa* P *za* $(0, x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots)$.
Tada postoji $i \in \mathbb{N}$ *takav da je* $s_i > n$ *i vrijedi* $r_0^i = f(x_1, \dots, x_k)$.

Propozicija 3.2.17. *Neka je* $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
Tada postoji rekurzivna funkcija $g\colon \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ *sa sljedećim svojstvom:*
Ako je e *kod programa* P, $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$ *te ako je* $((s_i, (r_j^i)))_{i\in\mathbb{N}}$ *niz izvršavanja programa* P *za* $(0, x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots)$, *onda je* $g(i, e, x_1, \dots, x_k)$ *kod od* $(s_i, (r_j^i))$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Neka je H funkcija iz Propozicije 3.2.16.
Definirajmo funkciju $g\colon \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ na sljedeći način:

$$g(0, e, x_1, \dots, x_k) = p_2^{x_1} \cdots p_{k+1}^{x_k}$$

$$g(i+1, e, x_1, \dots, x_k) = H(e, g(i, e, x_1, \dots, x_k))$$

Nije teško zaključiti da je g rekurzivna funkcija.
Pretpostavimo da je e kod nekog programa P, $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$ te $((s_i, (r_j^i))_{i\in\mathbb{N}}$ niz izvršavanja programa P za $(0, x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots)$.
Dokažemo indukcijom po $i \in \mathbb{N}$ da je:

$$g(i, e, x_1, \dots, x_k) \quad \text{kod od} \quad (s_i, (r_j^i)) \tag{3.11}$$

Primjetimo da je $(s_0, (r_j^0)) = (0, (0, x_1, \dots, x_k, 0, \dots))$ pa je $p_2^{x_1} \cdots p_{k+1}^{x_k}$ kod od $(s_0, (r_j^0))$.
Slijedi da (3.11) vrijedi za $i = 0$.
Pretpostavimo da (3.11) vrijedi za neki $i \in \mathbb{N}$.
Budući da je e kod programa P, prema Propoziciji 3.2.16 vrijedi:

$$H(e, g(i, e, x_1, \dots, x_k)) \quad \text{kod od} \quad \overline{P}(s_i, (r_j^i))$$

Dakle, $g(i+1, e, x_1, \dots, x_k)$ je kod od $(s_{i+1}, (r_j^{i+1}))$.
Prema tome, (3.11) vrijedi za svaki $i \in \mathbb{N}$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Teorem 3.1. *Svaka izračunljiva funkcija je rekurzivna.*

Dokaz. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ izračunljiva funkcija.
Tada postoji program $P = (q_0, \ldots, q_n)$ koji računa f.
Neka je e kod od P. Neka je λ funkcija iz Leme 3.3. Tada vrijedi $\lambda(e) = n$.
Neka je $g \colon \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ funkcija iz Propozicije 3.2.17.
Neka su $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$. Neka je $((s_i, (r^i_j)))_{i \in \mathbb{N}}$ niz izvršavanja od P za $(0, x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots)$.
Tada je $g(i, e, x_1, \ldots, x_k)$ kod od $(s_i, (r^i_j))$ pa je $s_i = (g(i, e, x_1, \ldots, x_k))_0$ i $r^i_0 = (g(i, e, x_1, \ldots, x_k))_1$.
Znamo da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $s_i > n$. Stoga postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da $(g(i, e, x_1, \ldots, x_k))_0 > \lambda(e)$.
Nadalje, za svaki $i \in \mathbb{N}$ takav da $(g(i, e, x_1, \ldots, x_k))_0 > \lambda(e)$(tj. $s_i > n$) vrijedi $f(x_1, \ldots, x_k) = r^i_0$, tj. $f(x_1, \ldots, x_k) = (g(i, e, x_1, \ldots, x_k))_1$.
Definirajmo funkciju $h \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa $h(x_1, \ldots, x_k) = \mu i((g(i, e, x_1, \ldots, x_k))_0 > \lambda(e))$.
Tvrdimo da je h rekurzivna funkcija.
Definirajmo skup $S = \{(x_1, \ldots, x_k, i) \in \mathbb{N}^{k+1} | \ (g(i, e, x_1, \ldots, x_k))_0 > \lambda(e)\}$. Za sve $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ vrijedi $h(x_1, \ldots, x_k) = \mu i((x_1, \ldots, x_k, i) \in S)$ pa je prema Lemi 3.1 dovoljno dokazati da je S rekurzivan skup.
Imamo $\chi_S(x_1, \ldots, x_k, i) = \mathrm{sg}((g(i, e, x_1, \ldots, x_k))_0 \dot{-} \lambda(e))$.
Stoga je dovoljno dokazati da je funkcija $g' \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$,

$$g'(x_1, \ldots, x_k, i) = (g(i, e, x_1, \ldots, x_k))_0 \dot{-} \lambda(e)$$

rekurzivna.
Neka je mo modificirano oduzimanje te $\phi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $\phi(x) = (x)_0$.
Vrijedi da su mo i ϕ rekurzivne funkcije.
Definirajmo funkcije $a, b \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ sa:

$$a(x_1, \ldots, x_k, i) = (\phi \circ g)(i, e, x_1, \ldots, x_k)$$

$$b(x_1, \ldots, x_k, i) = \lambda(e)$$

Tada je g' kompozicija funkcija mo, a i b.
Stoga je dovoljno dokazati da su a i b rekurzivne.
Očito je funkcija b rekurzivna jer je konstantna. Neka je $c \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću e. Vrijedi:

$$a(z) = (\phi \circ g)(I^{k+1}_{k+1}(z), c(z), I^{k+1}_1(z), \ldots, I^{k+1}_k(z)), \qquad \text{za svaki } z \in \mathbb{N}^{k+1}$$

Slijedi da je a rekurzivna funkcija kao kompozicija rekurzivnih funkcija.
Zaključujemo da je S rekurzivan skup. Prema tome, h je rekurzivna funkcija.
Neka su $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$. Vrijedi $g(h(x_1, \ldots, x_k), e, x_1, \ldots, x_k))_0 > \lambda(e)$ pa je:

$$f(x_1, \ldots, x_k) = (g(h(x_1, \ldots, x_k), e, x_1, \ldots, x_k))_1 \tag{3.12}$$

Dakle, (3.12) vrijedi za sve $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$.
Lako zaključujemo da je f rekurzivna funkcija. $\square$

Poglavlje 4

Parcijalno izračunljive funkcije

Definicija 4.0.1. *Neka je* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *te neka je* S *podskup od* $\mathbb{N}^k$.
Neka je $f \colon S \to \mathbb{N}$. *Kažemo da je funkcija* f *parcijalno izračunljiva ako postoji program* P *sa sljedećim svojstvom:*
1) *Ako je* $(x_1, \ldots, x_k) \in S$, *onda program* P *staje za* $\boxed{0 \mid x_1 \mid x_2 \mid \ldots \mid x_k \mid 0 \mid \ldots}$ *i daje rezultat* $\boxed{f(x_1, \ldots, x_k) \mid \ldots}$.
2) *Ako* $(x_1, \ldots, x_k) \notin S$, *onda program* P *ne staje za* $\boxed{0 \mid x_1 \mid x_2 \mid \ldots \mid x_k \mid 0 \mid \ldots}$.
Za takav program P *kažemo da računa funkciju* f.

Primjer 4.1. *Neka je* $S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leqslant y\}$. *Neka je* $f \colon S \to \mathbb{N}, \quad f(x, y) = x$.
Tada je f *parcijalno izračunljiva funkcija. Sljedeći program računa funkciju* f:
0. *DEC* R_1, 4
1. *INC* R_0
2. *DEC* R_2, 2
3. *GOTO* 0
4. *INC* R_3

Propozicija 4.0.1. *Neka je* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *te neka je* S *podskup od* $\mathbb{N}^k$.
Neka je $f \colon S \to \mathbb{N}$ *parcijalno izračunljiva funkcija.*
Neka su $i_0, i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$ *međusobno različiti brojevi, te neka je* $N \in \mathbb{N}$. *Tada postoji program* Q *sa sljedećim svojstvom:*
Ako su u registrima $R_{i_1}, \ldots, R_{i_k}$ *brojevi* $x_1, \ldots, x_k$ *takvi da* $(x_1, \ldots, x_k) \in S$ *tada* Q *staje i u registar* R_{i_0} *zapisuje* $f(x_1, \ldots, x_k)$ *i pritom za svaki* $j \neq i_0,\ j \leqslant N$ *sadržaj registra* R_j *ostaje nepromijenjen.*
Ako $(x_1, \ldots, x_k) \notin S$ *tada program* Q *ne staje.*

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo analogno kao tvrdnju Propozicije 2.0.1. □

U skladu s prethodnom propozicijom, pojam makroinstrukcije $f(R_{i_1}, \ldots, R_{i_k}) \xrightarrow{\mathrm{N}} R_{i_0}$, definiran ranije za izračunljivu funkciju $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, sada proširujemo i za parcijalno izračunljivu funkciju $f\colon S \to \mathbb{N}$, $S \subseteq \mathbb{N}^k$.
Također, proširujemo i pojam makroprograma.
Pri tome smatramo da će makroinstrukcija $f(R_{i_1}, \ldots, R_{i_k}) \xrightarrow{\mathrm{N}} R_{i_0}$ napraviti beskonačnu petlju u makroprogramu P (tj. makroprogram P neće nikad stati) ako se u trenutku izvršavanja te makroinstrukcije u registrima R_{i_1}, R_{i_k} nalaze brojevi $x_1, \ldots, x_k$ takvi da $(x_1, \ldots, x_k) \notin S$.
Pojam parcijalno makroizračunljive funkcije definiramo na očit način.
Sljedeći teorem dokazujemo na isti način kao Teorem 2.1.

Teorem 4.1. *Svaka parcijalno makroizračunljiva funkcija je parcijalno izračunljiva.*

Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Neka su $S_1, \ldots, S_m \subseteq \mathbb{N}^k$ te $f_1\colon S_1 \to \mathbb{N}, \ldots, f_n\colon S_n \to \mathbb{N}$ funkcije. Neka je $T \subseteq \mathbb{N}^n$ te $g\colon T \to \mathbb{N}$ funkcija. Definirajmo skup $V = \{x \in S_1 \cap \ldots \cap S_n | \ (f_1(x), \ldots, f_n(x) \in T)\}$. Definirajmo funkciju $h\colon V \to \mathbb{N}$ sa $h(x) = g(f_1(x), \ldots, f_n(x)),\quad$ za svaki $x \in V$. Tada za h kažemo da je dobivena kompozicijom funkcija $g, f_1, \ldots, f_n$.
Uočimo da ovaj pojam proširuje ranije definiran pojam kompozicije funkcija.

Propozicija 4.0.2. *Pretpostavimo da su $g, f_1, \ldots, f_n$ parcijalno izračunljive funkcije te da je h dobivena kompozicijom ovih funkcija.*
Tada je h parcijalno izračunljiva funkcija.

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu Propozicije 2.0.2. □

Definicija 4.0.2. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$ te neka je $f\colon \S \to \mathbb{N}$.*
Tada za f kažemo da je k-mjesna funkcija.

Definicija 4.0.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.*
Neka je f n-mjesna funkcija te neka je g $(n+2)$-mjesna funkcija. Definiramo $(n+1)$-mjesnu funkciju h na sljedeći način:
Ako su $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{N}$ takvi da $(y_1, \ldots, y_n)$ u domeni od f, onda smatramo da je $(0, y_1, \ldots, y_n)$ u domeni od h te da je $h(0, y_1, \ldots, y_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$.
Ako su $x, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{N}$ takvi da $(x, y_1, \ldots, y_n)$ u domeni od h te da je $(h(x, y_1, \ldots, y_n), x, y_1, \ldots, y_n)$ u domeni od g onda smatramo da je $(x+1, y_1, \ldots, y_n)$ u domeni od h te:

$$h(x+1, y_1, \ldots, y_n) = g(h(x, y_1, \ldots, y_n), x, y_1, \ldots, y_n)$$

Tada za funkciju h kažemo da je dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija f i g.

Uočimo da smo ovom definicijom proširili pojam funkcije dobivene primitivnom rekurzijom.

Propozicija 4.0.3. *Neka su f i g parcijalno izračunljive funkcije te neka je h funkcija dobivena primitivnom rekurzijom od f i g.*
Tada je h parcijalno izračunljiva funkcija.

Dokaz. Dokazujemo na isti način kao u Propoziciji 2.0.3. □

Definicija 4.0.4. *Neka je $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te $S \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$. Neka je $g \colon S \to \mathbb{N}$ funkcija. Definirajmo $T = \{x \in \mathbb{N}^n | \ \exists y \in \mathbb{N} \ (x, 0), \ldots, (x, y) \in S \ i \ g(x, y) = 0\}$. Definirajmo funkciju $f \colon T \to \mathbb{N}$ sa $f(x) = \min\{y \in \mathbb{N} | \ (x, 0), \ldots, (x, y) \in S \ i \ g(x, y) = 0\}$.*
Za funkciju f kažemo da je dobivena primjenom μ operatora na funkciju g.
U tom slučaju pišemo $f(x) \simeq \mu y(g(x, y) = 0)$.

Uočimo da ovaj pojam proširuje ranije definiran pojam funkcije dobivene primjenom μ operatora.

Sljedeću propoziciju dokazujemo na isti način kao Propoziciju 2.0.4

Propozicija 4.0.4. *Neka je $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te $S \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$. Neka je $g \colon S \to \mathbb{N}$ parcijalno izračunljiva funkcija. Neka je f funkcija dobivena primjernom μ operatora na g.*
Tada je f parcijalno izračunljiva.

Poglavlje 5

Parcijalno rekurzivne funkcije

Definicija 5.0.1. *Za funkciju $f\colon S \to \mathbb{N}$, gdje je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ i $S \subseteq \mathbb{N}^k$, kažemo da je totalna ako je $S = \mathbb{N}^k$*

Definicija 5.0.2. *Definirajmo induktivno niz skupova $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na sljedeći način.*
Neka je P_0 skup svih inicijalnih funkcija.
Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da smo definirali skup P_n. Neka je T skup svih funkcija koje se mogu dobiti primjenom kompozicije, primitivne rekurzije i μ operatora na funkcije iz P_n. (Pri čemu na navedena tri operatora gledamo u smislu definicije 4.0.2, dakle funkcije iz skupa T ne moraju biti totalne.)
Definiramo $P_{n+1} = T \cup P_n$.
Za funkciju $f\colon S \to \mathbb{N}$, gdje je $S \subseteq \mathbb{N}^k$, kažemo da je parcijalno rekurzivna ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $f \in P_n$.

Propozicija 5.0.1. *Svaka rekurzivna funkcija je parcijalno rekurzivna.*

Dokaz. Neka je S_n niz skupova iz Definicije 3.1.2 te neka je P_n niz skupova iz Definicije 5.0.2. Dokažimo indukcijom po $n \in \mathbb{N}$ da vrijedi $S_n \subseteq P_n$. Za $n = 0$ vrijedi $S_0 \subseteq P_0$ jer su S_0 i P_0 skupovi svih inicijalnih funkcija.
Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $S_n \subseteq P_n$.
Neka je $f \in S_{n+1}$. Tada je $f \in S_n$ ili je f dobivena primjenom kompozicije, primitivne rekurzije, μ operatora na funkcije iz S_n. Stoga je $f \in P_n$ ili je f dobivena primjenom navedenih operacija na funkcije iz P_n. U svakom slučaju vrijedi $f \in P_{n+1}$. Prema tome, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $S_n \subseteq P_n$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 5.0.2. *Sljedeće tvrdnje vrijede:*
1) *Pretpostavimo da su $f, g_1, \ldots, g_n$ parcijalno rekurzivne funkcije, te da je h funkcija dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, \ldots, g_n$.*

Tada je h parcijalno rekurzivna funkcija.
2) *Neka su f i g parcijalno rekurzivna funkcija, te neka je h funkcija dobivena primitivnom rekurzijom od f i g.*
Tada je h parcijalno rekurzivna funkcija.
3) *Neka je f parcijalno rekurzivna funkcija te neka je h funkcija dobivena primjenom μ operatora na funkciju f.*
Tada je h parcijalno rekurzivna funkcija.

Dokaz. Dokazujemo na isti način kao Propoziciju 3.1.1. □

Primjer 5.1. *Neka je $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $g(x, y) = x + y$.*
Znamo da je g rekurzivna funkcija, stoga je g i parcijalno rekurzivna.
Promotrimo funkciju f dobivenu primjenom μ operatora na funkciju g.
Neka je $x \in \mathbb{N}$. Tada postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da $g(x, y) = 0$ ako i samo ako $x = 0$. Stoga je domena funkcije f jednaka $\{0\}$ i vrijedi $f(0) = 0$. Prema Propoziciji 5.0.2 funkcija f je parcijalno rekurzivna.
Međutim, funkcija f nije totalna stoga slijedi da f nije rekurzivna.

Propozicija 5.0.3. *Svaka parcijalno rekurzivna funkcija je parcijalno izračunljiva.*

Dokaz. Koristeći Propoziciju 4.0.2, Propoziciju 4.0.3 i Propoziciju 4.0.4 tvrdnju dokazujemo na isti način kao tvrdnju Propozicije 3.2.1. □

Lema 5.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ rekurzivan skup.*
Neka je h k-mjesna funkcija takva da je $h(x_1, \dots, x_k) \simeq \mu_i((x_1, \dots, x_k, i) \in S)$.
Tada je h parcijalno rekurzivna funkcija.

Dokaz. Vrijedi:

$$h(x_1, \dots, x_k) \simeq \mu_i(\overline{sg}(\chi_S(x_1, \dots, x_k, i)) = 0)$$

Funkcija h je dobivena primjenom μ operatora na funkciju $\overline{sg} \circ \chi_S$ koja je očito rekurzivna. Stoga je h parcijalno rekurzivna funkcija. □

Teorem 5.1. *Svaka parcijalno izračunljiva funkcija je parcijalno rekurzivna.*

Dokaz. Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, neka je $T \subseteq \mathbb{N}^k$ te neka je $f\colon T \to \mathbb{N}$ parcijalno izračunljiva funkcija. Tada postoji program P koji računa f. Neka je e kod od P. Neka je λ funkcija iz Leme 3.3. Tada vrijedi $\lambda(e) = n$.
Neka je $g\colon \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ funkcija iz Propozicije 3.2.17. Neka su $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$.
Na isti način kao u dokazu Teorema 3.1 vidimo da vrijedi sljedeće:

$$(x_1, \dots, x_k) \iff \exists i \in \mathbb{N} \text{ t.d. } (g(i, e, x_1, \dots, x_k))_0 > \lambda(e)$$

Nadalje, ako $(x_1, \ldots, x_k) \in T$ i $i \in \mathbb{N}$ t.d. $(g(i, e, x_1, \ldots, x_k))_0 > \lambda(e)$, onda je:

$$f(x_1, \ldots, x_k) = (g(i, e, x_1, \ldots, x_k))_1 \tag{5.1}$$

Definirajmo k-mjesnu funkciju h sa $h(x_1, \ldots, x_k) \simeq \mu i((g(i, e, x_1, \ldots, x_k))_0 > \lambda(e))$.
Tvrdimo da je h parcijalno rekurzivna funkcija.
Da bismo to dokazali postupamo na sljedeći način.
Definirajmo skup $S = \{(x_1, \ldots, x_k, i) \in \mathbb{N}^{k+1} | \, (g(i, e, x_1, \ldots, x_k))_0 > \lambda(e)\}$.
U dokazu Teorema 3.1 smo vidjeli da je S rekurzivan skup. Za sve $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ vrijedi $h(x_1, \ldots, x_k) \simeq \mu i((x_1, \ldots, x_k, i) \in S)$. Iz Leme 5.1 slijedi da je h parcijalno rekurzivna funkcija.
Koristeći (5.1) zaključujemo da za sve $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$f(x_1, \ldots, x_k) \simeq (g(h(x_1, \ldots, x_k), e, x_1, \ldots, x_k))_1$$

Iz ovoga zaključujemo da je f parcijalno rekurzivna funkcija kao kompozicija parcijalno rekurzivnih funkcija. □

Teorem 5.2. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tada postoji $(k+1)$-mjesna parcijalno rekurzivna funkcija w sa sljedećim svojstvom:*
Za svaku k-mjesnu parcijalno rekurzivnu funkciju f postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da je:

$$f(x_1, \ldots, x_k) \simeq w(e, x_1, \ldots, x_k), \quad \textit{za sve } x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$$

Dokaz. Neka je λ funkcija iz Leme 3.3. Neka je $g \colon \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ funkcija iz Propozicije 3.2.17.
Definirajmo $(k+1)$-mjesnu funkciju H sa:

$$H(e, x_1, \ldots, x_k) \simeq \mu i((g(i, e, x_1, \ldots, x_k))_0 > \lambda(e))$$

Na sličan način kao u dokazu prethodnog teorema zaključujemo da je H parcijalno rekurzivna.
Definirajmo $(k+1)$-mjesnu funkciju w sa:

$$w(e, x_1, \ldots, x_k) \simeq (g(H(e, x_1, \ldots, x_k), e, x_1, \ldots, x_k))_1$$

Tada je w parcijalno rekurzivna funkcija kao kompozicija parcijalno rekurzivnih funkcija.
Neka je f k-mjesna parcijalno rekurzivna funkcija. Tada je, prema Propoziciji 5.0.3 f parcijalno izračunljiva. Stoga postoji program P koji računa f. Neka je e kod programa P. Iz dokaza prethodnog teorema slijedi da je $f(x_1, \ldots, x_k) \simeq (g(h(x_1, \ldots, x_k), e, x_1, \ldots, x_k))_1$, gdje je h k-mjesna funkcija definirana sa $h(x_1, \ldots, x_k) \simeq \mu_i(g(i, e, x_1, \ldots, x_k)_0) > \lambda(e))$.
Očito je $H(e, x_1, \ldots, x_k) \simeq h(x_1, \ldots, x_k)$ pa je $f(x_1, \ldots, x_k) \simeq (g(H(e, x_1, \ldots, x_k), e, x_1, \ldots, x_k))_1$.
Dakle, slijedi da je $f(x_1, \ldots, x_k) \simeq w(e, x_1, \ldots, x_k)$. □

Primjer 5.2. *Prema Teoremu 5.2 postoji* 2*-mjesna parcijalno rekurzivna funkcija w sa sljedećim svojstvom:*
Za svaku 1*-mjesnu parcijalno rekurzivnu funkciju f postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da je:*

$$f(x) \simeq w(e, x), \ \forall x \in \mathbb{N}$$

Definirajmo 1*-mjesnu funkciju f sa $f(x) \simeq w(x, x) + 1$.*
Definirajmo 1*-mjesnu funkciju w' sa $w'(x) \simeq w(x, x)$. Primjerimo da je $w'(x) \simeq w(I_1^1(x), I_1^1(x))$, odnosno w' je kompozicija funkcija w', I_1^1 i I_1^1. Stoga je w' parcijalno rekurzivna funkcija.*
Definirajmo funkciju $zb\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa $zb(a, b) = a + b$. Vrijedi:

$$f(x) \simeq zb(w'(x), 1)$$

Slijedi da je f kompozicija funkcija zb, w' i konstantne funkcije $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa vrijednošću 1*.*
Stoga je f parcijalno rekurzivna funkcija.
Tvrdimo da se f ne može proširiti do rekurzivne funkcije $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji rekurzivna funkcija $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $g(x) = f(x)$ za svaki $x \in S$.
Budući da je g 1*-mjesna parcijalno rekurzivna funkcija, prema svojstvu funkcije w, postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da:*

$$g(x) \simeq w(e, x), \ \forall x \in \mathbb{N}$$

S obzirom da je g definirana na $\mathbb{N}$ i $e \in \mathbb{N}$, iz $g(e) \simeq w(e, e)$ slijedi da je (e, e) iz domene od w.
Iz definicije funkcije f slijedi da je $e \in S$ i vrijedi $f(e) = w(e, e) + 1$. Pošto je $g(x) = f(x)$ za svaki $x \in S$ slijedi da je $g(e) = f(e)$. Stoga je $w(e, e) = g(e) = f(e) = w(e, e) + 1$. Dakle, $w(e, e) = w(e, e) + 1$, što je kontradikcija.
Zaključujemo da ne postoji rekurzivna funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koja proširuje f.

Primjer 5.3. *Pitamo se postoji li rekurzivna funkcija $L\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da:*
za svaku rekurzivnu funkciju $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da je:

$$f(x) = L(e, x), \ \forall x \in \mathbb{N}$$

Tvrdimo da ne postoji rekurzivna funkcija L koja zadovoljava traženo svojstvo.
Pretpostavimo suprotno, tj. neka je L rekurzivna funkcija sa traženim svojstvom.
Definirajmo funkciju $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa $F(x) = L(x, x) + 1$
Lako se vidi, slično kao u prethodnom primjeru da je F rekurzivna funkcija.
Iz svojstva funkcije L slijedi da postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da $F(x) = L(e, x)$, za svaki $x \in \mathbb{N}$. Stoga je:

$$F(e) = L(e, e) \tag{5.2}$$

Iz definicije funkcije F slijedi:

$$F(e) = L(e, e) + 1 \tag{5.3}$$

Iz (5.2) *i* (5.3) *slijedi* $L(e,e) = L(e,e) + 1$*, što je kontradikcija.*
Zaključujemo da ne postoji rekurzivna funkcija L sa traženim svojstvom.

Propozicija 5.0.4. *Neka je* $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *te* $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *parcijalno rekurzivna funkcija. Tada je* f *rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Funkcija f je očito parcijalno izračunljiva. Iz dokaza Teorema 5.2 vidimo da postoji rekurzivna funkcija $g\colon \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ i rekurzivan skup $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ takvi da je:

$$f(x_1,\dots,x_k) \simeq (g(h(x_1,\dots,x_k), e, x_1,\dots,x_k))_1 \tag{5.4}$$

gdje je h k-mjesna funkcija za koju vrijedi $h(x_1,\dots,x_k) \simeq \mu i((x_1,\dots,x_k,i) \in S),\ i \in \mathbb{N}$.
Iz činjenice da je f totalna funkcija slijedi da je h totalna funkcija, dakle:

$$h(x_1,\dots,x_k) = \mu_i((x_1,\dots,x_k,i) \in S), \quad \text{za sve } x_1,\dots,x_k \in \mathbb{N}$$

Prema Lemi 3.1 funkcija h je rekurzivna.
Iz (5.4) zaključujemo da je f rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. □

Propozicija 5.0.5. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{N}$ *te neka je* $f\colon S \to \mathbb{N}$ *parcijalno rekurzivna funkcija. Pretpostavimo da je* S *rekurzivan skup.*
Tada se f *može proširiti do rekurzivne funkcije* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$, tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$. Odaberimo $s_0 \in S$.
Definirajmo 1-mjesnu funkciju $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa:

$$g(x) \simeq f(\chi_S(x) \cdot x + \overline{sg}(\chi_S(x)) \cdot s_0)$$

Uočimo da za svaki$x \in S$ vrijedi $g(x) = f(x)$. Nadalje, funkcija g je totalna.
Očito je g kompozicija parcijalno rekurzivnih funkcija, stoga je g parcijalno rekurzivna funkcija.
Iz Propozicije 5.0.4 slijedi da je g rekurzivna funkcija. □

Definicija 5.0.3. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{N}$*. Kažemo da je* S *rekurzivno prebrojiv skup ako je* $S = \emptyset$ *ili postoji rekurzivna funkcija* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *takva da je* $S = f(\mathbb{N})$.

Propozicija 5.0.6. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{N}$ *rekurzivan skup.*
Tada je S *rekurzivno prebrojiv skup.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ tvrdnja očito vrijedi.
Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$.
Odaberimo $s_0 \in S$.

Definirajmo funkciju $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa $f(x) = \begin{cases} x, & x \in S \\ s_0, & x \notin S \end{cases}$.
Za svaki $x \in \mathbb{N}$ očito vrijedi $f(x) \in S$. Stoga je $f(\mathbb{N}) \subseteq S$.
Za svaki $x \in S$ vrijedi $x = f(x)$ pa slijedi $x \in f(\mathbb{N})$. Stoga je $S \subseteq f(\mathbb{N})$.
Zaključujemo da je $f(\mathbb{N}) = S$.
Iz Propozicije 3.2.11 slijedi da je f rekurzivna funkcija.
Prema tome, S je rekurzivno prebrojiv skup. □

Teorem 5.0.7. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*
1) *S je rekurzivno prebrojiv*
2) *S je domena neke parcijalno rekurzivne funkcije*
3)*Postoji rekurzivan skup $T \subseteq \mathbb{N}^2$ takav da:*

$$x \in S \iff \exists y \in \mathbb{N} \quad t.d.\ (x, y) \in T$$

Dokaz. 1) $\implies$ 2)
Pretpostavimo da je S rekurzivno prebrojiv skup.
Ako je $S = \emptyset$ onda je očito S domena neke parcijalno rekurzivne funkcije.
Pretpostavimo $S \neq \emptyset$.
Tada postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $S = f(\mathbb{N})$.
Neka je $A = \{(x, i) \in \mathbb{N}^2 |\ x = f(i)\}$. Za sve (x, i) vrijedi $\chi_A(x, i) = \overline{sg}|x - f(i)|$ pa iz Primjera 3.7 slijedi da je χ_A rekurzivna funkcija. Prema tome, A je rekurzivan skup.
Neka je h 1-mjesna funkcija definirana sa $h(x) \simeq \mu i((x, i) \in A)$. Prema Lemi 5.1 funkcija h je parcijalno rekurzivna.
Očito je da je domena funkcije h skup S.
2) $\implies$ 3)
Pretpostavimo da postoji parcijalno rekurzivna funkcija $f\colon S \to \mathbb{N}$. Iz dokaza Teorema 5.2 slijedi da postoje rekurzivna funkcija $g\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ i rekurzivan skup $T \subseteq \mathbb{N}^2$ takvi da $f(x) \simeq (g(h(x), e, x))_1$, gdje je $h(x) \simeq \mu i((x, i) \in T)$. Vidimo da su domene funkcija f i h jednake. Stoga imamo sljedeći zaključak:

$$x \in S \iff x \text{ u domeni od } h \iff \exists i \in \mathbb{N} \text{ t.d. } (x, i) \in T$$

Prema tome, 3) vrijedi.
3) $\implies$ 1)
Pretpostavimo da postoji rekurzivan skup $T \subseteq \mathbb{N}^2$ takav da:

$$x \in S \iff \exists y \in \mathbb{N} \text{ t.d. } (x, y) \in T \tag{5.5}$$

Ako je $T = \emptyset$, tada je $S = \emptyset$ pa je S rekurzivno prebrojiv skup.
Pretpostavimo da je $T \neq \emptyset$.

Odaberimo $(t_1, t_2) \in T$. Definirajmo funkciju $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ sa $\tau(x) = ((x)_1, (x)_2)$. Uočimo sljedeće:
Ako je $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ onda je $\tau(x) = (u, v)$, gdje je $x = 3^u 5^v$.
Prema tome, τ je surjekcija.
Definirajmo funkciju $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ sa:

$$f(x) = \begin{cases} \tau(x), & \text{ako je } \tau(x) \in T \\ (t_1, t_2), & \text{inače} \end{cases}$$

Neka su $f_1, f_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od f.
Neka je $\Omega = \{x \in \mathbb{N} \mid \tau(x) \in T\}$.
Uočimo da vrijedi:

$$\chi_\Omega(x) = \chi_T(\tau(x)) = \chi_T((x)_1, (x)_2)$$

Stoga je χ_Ω rekurzivna funkcija kao kompozicija rekurzivnih funkcija.
Slijedi da je Ω rekurzivan skup.
Iz definicije funkcije τ i skupa Ω slijedi:

$$f(x) = \begin{cases} ((x)_1, (x)_2), & \text{ako je } x \in \Omega \\ (t_1, t_2), & \text{inače} \end{cases}$$

Stoga je:

$$f_1(x) = \begin{cases} (x)_1, & \text{ako je } x \in \Omega \\ t_1, & \text{inače} \end{cases}$$

Prema Propoziciji 3.2.11 zaključujemo da je f_1 rekurzivna.
Analogno slijedi da je f_2 rekurzivna funkcija.
Primjetimo da za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(x) \in T$.
Slijedi da je $f(\mathbb{N}) \subseteq T$.
Neka je $y \in T$. Pošto je τ surjekcija, postoji $x \in \mathbb{N}$ takav da je $\tau(x) = y$, odnosno $f(x) = y$.
Slijedi da je $f(\mathbb{N}) = T$.
Iz (5.5) direktno slijedi $S = I_1^2(T)$. Pošto je $f(\mathbb{N}) = T$ slijedi $S = I_1^2(f(\mathbb{N})) = (I_1^2 \circ f)(\mathbb{N})$.
Primjetimo da je $I_1^2 \circ f = f_1$. Slijedi da je $S = f_1(\mathbb{N})$.
Pošto je f_1 rekurzivna funkcija slijedi da je S rekurzivno prebrojiv skup. $\square$

Primjer 5.3 pokazuje da postoje $S \subseteq \mathbb{N}$ i parcijalno rekurzivna funkcija $f\colon S \to \mathbb{N}$ koja se ne može proširiti do rekurzivne funkcije.
Iz Propozicije 5.0.5 slijedi da S ne može biti rekurzivan skup.
Prema prethodnom teoremu skup S je rekurzivno prebrojiv.
Dakle, postoji rekurzivno prebrojiv skup koji nije rekurzivan.

Definicija 5.0.4. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$. Kažemo da je f rekurzivna funkcija ako su sve komponentne funkcije od f rekurzivne.*

Lema 5.2. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $g\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada je $g \circ f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka su $f_1, \ldots, f_n$ komponentne funkcije od f.
Tada je:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

Funkcija $g \circ f$ je kompozicija funkcija $g, f_1, \ldots, f_n$ koje su rekurzivne, pa je $g \circ f$ rekurzivna funkcija. □

Propozicija 5.0.8. *Neka su $k, n, l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $g\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^l$ rekurzivne funkcije.*
Tada je $g \circ f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka su $g_1, \ldots, g_l$ komponentne funkcije od g.
Tada je:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (g_1(f(x)), \ldots, g_l(f(x)))$$

Iz prethodne leme slijedi da su $g_1 \circ f, \ldots, g_l \circ f$ rekurzivne funkcije, a to su upravo komponentne funkcije od $g \circ f$.
Slijedi da je $g \circ f$ rekurzivna funkcija. □

Bibliografija

[1] K. Weihrauch, *Computable Analysis*, Springer, Berlin, 2000.

[2] M.B.Pour-El, I. Richards, *Computability in Analysis and Physics*, Springer-Verlag, Berlin-Heielberg-New York, 1989.

Sažetak

U radu smo proučili pojam izračunljivih funkcija, povezan s pojmom programa.
Zatim smo uveli pojam rekurzivnih funkcija. Dokazali smo da je svaka rekurzivna funkcija izračunljiva, te obrat te tvrdnje.
Idući pojam koji smo uveli je pojam parcijalno izračunljive funkcije koju povezujemo uz ranije definiranu izračunljivu funkciju.
U zadnjem poglavlju promatrali smo parcijalno rekurzivne funkcije i njihova svojstva, uz korištenje svojstava rekurzivnih funkcija.
Konačno, dokazali smo ekvivalenciju parcijalno rekurzivnih funkcija i parcijalno izračunljivih funkcija. Na kraju smo dobili važan rezultat, da postoji rekurzivno prebrojiv skup koji nije rekurzivan.

Summary

In this paper we studied the computable functions, related to the concept of the program. Then we introduced the concept of the recursive functions. We proved that every recursive function is computable, and reverse.
The next concept we introduced is the concept of the partially computable functions which we related to the earlier introduced computable functions.
In the last chapter we studied the partially recursive functions and their properties, by using the properties of the recursive functions.
Finally, we proved the equivalence of the partially recursive functions and the partially computable functions.
In the end we got important result, that there is a recursively countable set that is not recursive.

Životopis

Rođena sam 5. ožujka 1995. godine u Zagrebu. Nakon završetka Osnovne škole Čazma upisala sam Opću gimnaziju u Čazmi. Nakon završene srednje škole, 2013. godine upisala sam preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu te isti završila 2017. godine i stekla titulu sveučilišne prvostupnice matematike. U rujnu iste godine upisujem diplomski studij Matematička statistika, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu.