G-metrički prostori

Arhanić, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Arhanić

G-METRIČKI PROSTORI

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof.dr.sc.Sanja Varošanec

Zagreb, srpanj 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Dugujem zahvalnost poštovanoj prof. dr. sc. Sanji Varošanec na svesrdnoj pomoći te uloženom vremenu i trudu pri izradi mog diplomskog rada.
Zahvaljujem mojim roditeljima koji su me s puno ljubavi i požrtvovnosti vodili stazom mog dosadašnjeg života.
Hvala mojoj sestri koja me podržavala i motivirala tijekom cijelog studija.

Sadržaj

Uvod

Kada govorimo o metrici zamišljamo dvije točke i njihovu udaljenost. Ta udaljenost očito mora biti pozitivna, a jednaka je nuli ako i samo ako su te dvije točke jednake, odnosno ako govorimo o jednoj točki. Promatramo li udaljenost jedne točke do druge, isto je kao da promatramo udaljenost druge točke do prve. Također, uvedemo li još jednu točku, vrijedit će nejednakost trokuta. Upravo ta četiri nabrojana svojstva (pozitivnost, strogost, simetričnost i nejednakost trokuta) su definicijska svojstva metrike. Uređeni par kojeg čine neki skup i metrika naziva se metrički prostor.
Osnova G-metričkog prostora je upravo metrički prostor. Većina definicija i teorema koja vrijede u metričkom prostoru, imaju svoj analogon u G-metričkom prostoru. Koncept G-metričkog prostora, u matematici, je generalizacija metričkog prostora. Govorimo o nedavnoj generalizaciji. Godine 2006., Z. Mustafa i B. Sims predstavili su ovaj novi pristup generaliziranim metričkim prostorima u članku. [4]
Diplomski je rad podijeljen na tri dijela. U prvom dijelu naglasak će biti na samoj definiciji G-metrike i njezinim svojstvima koja će se koristiti tijekom cijelog rada. Drugi dio opisuje konvergenciju nizova u G-metričkom prostoru. Vidjet ćemo kako se može iz bilo koje metrike konstruirati G-metrika, ali i obratno. Opisuju se i potpuni G-metrički prostori. U posljednjem dijelu rada, proučavat ćemo razne teoreme o fiksnoj točki. Podsjetit ćemo se Banachovog teorema o fiksnoj točki te dokazati njegov analogon u G-metrici. Potom ćemo dokazati nekoliko teorema koji također nose naziv teoremi o fiksnoj točki.

Poglavlje 1

G-metrički prostor

1.1 Uvod u G-metrički prostor

Definicija 1.1.1. *Neka je X neprazan skup, a* $G : X \times X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ *funkcija koja zadovoljava:*

(G1) $G(x, y, z) = 0$ *ako je* $x = y = z$,

(G2) $0 < G(x, x, y)$, *za sve* $x, y \in X, x \neq y$,

(G3) $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$ *za sve* $x, y, z \in X, z \neq y$,

(G4) $G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, x, z) = ...$, *(simetričnost u sve tri varijable),*

(G5) $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$ *za sve* $x, y, z, a \in X$ *(nejednakost pravokutnika).*

Tada se preslikavanje G naziva generalizirana metrika ili G-metrika na X, a uređeni par (X, G) *G-metrički prostor.*

Ova definicija i rezultati ovog poglavlja mogu se naći u članku [4]. U ovom smo radu tvrdnje iz [4] detaljno dokazali.

Primjer 1.1.2. *Ako je* (X, d) *metrički prostor, tada su*

$$D_s(d)(x, y, z) = \frac{1}{3}(d(x, y) + d(y, z) + d(x, z)),$$

$$D_m(d)(x, y, z) = \max\{d(x, y), d(y, z), d(x, z)\},$$

G-metrike na X.

Dokaz. Dokažimo svojstva metrike prvo za $D_s(d)$, a potom za $D_m(d)$. Dakle, imamo

$$D_s(d)(x, y, z) = \frac{1}{3}(d(x, y) + d(y, z) + d(x, z)).$$

Dokažimo da je $G(x, y, z) = 0$ ako je $x = y = z$, gdje je $G = D_s(d)$.
Prema svojstvu metrike vrijedi:

$d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$,
$d(y, z) = 0$ ako i samo ako je $y = z$,
$d(x, z) = 0$ ako i samo ako je $x = z$,

Tada za $x = y = z$ vrijedi:

$$D_s(d)(x, y, z) = 0,$$

što je i trebalo dokazati.
Dokažimo da je $G(x, x, y) > 0$ za svaki $x, y \in X, x \neq y$ gdje je $G = D_s(d)$.

$$\begin{aligned} G(x, x, y) &= \frac{1}{3}(d(x, x) + d(x, y) + d(x, y)) \\ &= \frac{1}{3}(2d(x, y)) > 0, \end{aligned}$$

pri čemu koristimo svojstvo metrike: $d(x, y) > 0$ za svaki $x \neq y$.
Dokažimo da je $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$ za svaki $x, y, z \in X, z \neq y$, gdje je $G = D_s(d)$.

$$\begin{aligned} G(x, x, y) &= \frac{1}{3}(d(x, x) + d(x, y) + d(x, y)) \\ &= \frac{1}{3}(d(x, y) + d(x, y)) \\ &\leq \frac{1}{3}(d(x, y) + d(y, z) + d(x, z)) \\ &= G(x, y, z), \end{aligned}$$

pri čemu koristimo svojstvo nejednakosti trokuta za $d(x, y)$.
Svojstvo simetričnosti za $D_s(x, y, z)$ proizlazi iz svojstva simetričnosti metrike.
Dokažimo da za sve $x, y, z, a \in X$ vrijedi:

$$G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z),$$

gdje je $G = D_s(d)$. Prema nejednakosti trokuta za metriku d i točke x i y imamo

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y). \tag{1.1}$$

Prema nejednakosti trokuta za točke x i z imamo:

$$d(x,z) \leq d(x,a) + d(a,z). \tag{1.2}$$

Zbrojimo (1.1) i (1.2) i jednakost $d(y,z) = d(y,z)$. Dobivamo:

$$\begin{aligned} d(x,y) + d(x,z) + d(y,z) &\leq d(x,a) + d(a,y) + d(x,a) + d(a,z) + d(y,z) \\ &= 2d(x,a) + (d(a,y) + d(a,z) + d(y,z)). \end{aligned}$$

Podijelimo li tu nejednakost sa 3 i iskoristimo da je $D_s(d)(x,a,a) = \frac{2}{3}d(x,a)$ dobivamo

$$G(x,y,z) \leq G(x,a,a) + G(a,y,z),$$

što je i trebalo dokazati.

Dokažimo sad svojstva metrike za $D_m(d)$.

$$D_m(d)(x,y,z) = \max\{d(x,y), d(y,z), d(x,z)\}.$$

Dokažimo da je $G(x,y,z) = 0$ ako je $x = y = z$, gdje je $G = D_m(d)$.
Kako je $x = y = z$ tada iz svojstva metrike znamo da vrijedi:

$$d(x,y) = 0, d(y,z) = 0, d(x,z) = 0.$$

Pa vrijedi:

$$G(x,y,z) = \max\{d(x,y), d(y,z), d(x,z)\} = \max\{0,0,0\} = 0,$$

što je i trebalo dokazati. Dokažimo da je $G(x,x,y) > 0$ za svaki $x, y \in X, x \neq y$ gdje je $G = D_m(d)$. Vrijedi:

$$G(x,x,y) = \max\{d(x,x), d(x,y), d(x,y)\} = \max\{0, d(x,y)\} = d(x,y),$$

a to je po definiciji metrike veće od 0.
Dokažimo da je $G(x,x,y) \leq G(x,y,z)$ za svaki $x,y,z \in X, z \neq y$, gdje je $G = D_m(d)$.
Vrijedi:

$$G(x,x,y) = \max\{d(x,x), d(x,y), d(x,y)\} = \max\{0, d(x,y)\} = d(x,y),$$

Ako je $d(x,y) \geq d(y,z)$ i $d(x,y) \geq d(x,z)$, tada je

$$G(x,y,z) = \max\{d(x,y), d(y,z), d(x,z)\} = d(x,y)$$

i vrijedi

$$G(x,x,y) = d(x,y) \leq d(x,y) = G(x,y,z).$$

Ako je $d(y,z) \geq d(x,y)$ i $d(y,z) \geq d(x,z)$, tada je

$$G(x,y,z) = \max\{d(x,y), d(y,z), d(x,z)\} = d(y,z)$$

i vrijedi

$$G(x,x,y) = d(x,y) \leq d(y,z) = G(x,y,z).$$

Ako je $d(x,z) \geq d(x,y)$ i $d(x,z) \geq d(y,z)$, tada je

$$G(x,y,z) = \max\{d(x,y), d(y,z), d(x,z)\} = d(x,z)$$

i vrijedi

$$G(x,x,y) = d(x,y) \leq d(x,z) = G(x,y,z).$$

To je i trebalo dokazati.
Svojstvo simetričnosti za $D_m(x,y,z)$ proizlazi iz svojstva simetričnosti metrike.
Dokažimo da vrijedi nejednakost pravokutnika za $D_m(d)$.
Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $G(x,y,z) = d(x,z)$, tj. da je $d(x,z) \geq d(x,y)$ i $d(x,z) \geq d(y,z)$, gdje je $G = D_m(d)$. Za svaki $a \in X$ vrijedi:

$$G(x,a,a) = \max\{d(x,a), d(a,a), d(x,a)\} = d(x,a).$$

Za $G(a,y,z)$ imamo tri slučaja:

(1) $G(a,y,z) = d(a,y)$. U tom slučaju je $d(a,y) \geq d(a,z)$ i $d(a,y) \geq d(y,z)$.

(2) $G(a,y,z) = d(a,z)$. U tom slučaju je $d(a,z) \geq d(a,y)$ i $d(a,z) \geq d(y,z)$.

(3) $G(a,y,z) = d(y,z)$. U tom slučaju je $d(y,z) \geq d(a,y)$ i $d(y,z) \geq d(a,z)$.

(1) Ako je $G(a,y,z) = d(a,y)$, tada korištenjem nejednakosti trokuta za x i z imamo:

$$G(x,y,z) = d(x,z) \leq d(x,a) + d(a,z) \leq d(x,a) + d(a,y) = G(x,a,a) + G(a,y,z).$$

(2) Ako je $G(a,y,z) = d(a,z)$, tada:

$$G(x,y,z) = d(x,z) \leq d(x,a) + d(a,z) = G(x,a,a) + G(a,y,z).$$

(3) Ako je $G(a,y,z) = d(y,z)$, tada:

$$G(x,y,z) = d(x,z) \leq d(x,a) + d(a,z) \leq d(x,a) + d(y,z) = G(x,a,a) + G(a,y,z).$$

□

Definicija 1.1.3. *G-metrički prostor (X,G) je simetričan ako vrijedi*

$$(G6) \quad G(x, y, y) = G(x, x, y), \textit{za sve } x, y \in X.$$

Očito, bilo koji G-metrički prostor u kojem G nastaje iz metrike putem pravila D_s ili D_m je simetričan.

Idući primjer prikazuje jedan primjer nesimetrične G-metrike koja ne proizlazi iz nijedne metrike na gore spomenute načine.

Primjer 1.1.4. *Neka je $X = \{a, b\}$, te neka je:*

$$G(a, a, a) = G(b, b, b) = 0, G(a, a, b) = 1, G(a, b, b) = 2$$

i proširimo G na cijeli $X \times X \times X$ po simetriji varijabli. Tada je G-metrički prostor, ali $G(a, b, b) \neq G(a, a, b)$, tj. nije simetričan.

1.2 Svojstva G-metričkog prostora

U ovom poglavlju dokazat ćemo niz svojstava G-metrike.

Propozicija 1.2.1. *Neka je (X,G) G-metrički prostor. Tada za bilo koje x, y, z, a ∈ X vrijedi:*

(1) $G(x, y, z) = 0 \Rightarrow x = y = z$,

(2) $G(x, y, z) \leq G(x, x, y) + G(x, x, z)$,

(3) $G(x, y, y) \leq 2G(y, x, x)$,

(4) $G(x, y, z) \leq G(x, a, z) + G(a, y, z)$,

(5) $G(x, y, z) \leq \frac{2}{3}(G(x, y, a) + G(x, a, z) + G(a, y, z))$,

(6) $G(x, y, z) \leq (G(x, a, a) + G(y, a, a) + G(z, a, a))$,

(7) $|G(x, y, z) - G(x, y, a)| \leq max\{G(a, z, z), G(z, a, a)\}$,

(8) $|G(x, y, z) - G(x, y, a)| \leq G(x, a, z)$,

(9) $|G(x, y, z) - G(y, z, z)| \leq max\{G(x, z, z), G(z, x, x)\}$,

(10) $|G(x, y, y) - G(y, x, x)| \leq max\{G(y, x, x), G(x, y, y)\}$.

Dokaz. (1) Pretpostavimo da je

$$G(x, y, z) = 0, \ x \neq y.$$

Iz $(G2)$ znamo da je

$$0 < G(x, x, y), za\ x \neq y.$$

Iz $(G3)$ je

$$G(x, x, y) \leq G(x, y, z) = 0,$$

pa je

$$0 < G(x, x, y) \leq 0.$$

Odavde slijedi da je

$$0 < 0,$$

a to je nemoguće. Stoga je pretpostavka da su x i y različiti nemoguća. Zaključujemo da mora vrijediti $x = y$.

(2) Iz (G5) znamo da je

$$G(x, y, z) \leq G(a, y, a) + G(x, a, z).$$

Za $x = a$, dobijemo

$$G(x, y, z) \leq G(x, y, x) + G(x, x, z),$$

a kako vrijedi (G4), tada je

$$G(x, y, z) \leq G(x, x, y) + G(x, x, z).$$

(3) Dokazali smo da je

$$G(x, y, z) \leq G(x, x, y) + G(x, x, z).$$

Ovo vrijedi za svaki x, y, z pa onda vrijedi i za

$$z = y.$$

Kada to uvrstimo u formulu, dobije se

$$G(x, y, y) \leq G(x, x, y) + G(x, x, y) = 2G(x, x, y) = 2G(y, x, x),$$

što je i trebalo dokazati.

(4) Na temelju (G5) vrijedi:

$$G(x, y, z) \leq G(a, y, z) + G(x, a, a).$$

Kako bismo dokazali tvrdnju, dovoljno je utvrditi je li

$$G(x,a,a) \leq G(x,a,z).$$

Iz (G3) i (G4) slijedi tvrdnja.

(5) Na temelju (G5) znamo da vrijede sljedeće nejednakosti:

$$G(x,y,z) \leq G(x,a,a) + G(a,y,z),$$

$$G(x,y,z) \leq G(a,y,a) + G(x,a,z),$$

$$G(x,y,z) \leq G(a,a,z) + G(x,y,a).$$

Zbrojimo li ove tri nejednakosti, dobije se:

$$3G(x,y,z) \leq G(x,a,a) + G(a,y,z) + G(a,y,a) + G(x,a,z) + G(a,a,z) + G(x,y,a).$$

Kako je, na temelju (G3),

$$G(x,a,a) \leq G(x,a,z),$$

$$G(a,y,a) \leq G(x,y,a),$$

$$G(a,a,z) \leq G(a,y,z),$$

slijedi da je

$$3G(x,y,z) \leq 2(G(x,a,z) + G(x,y,a) + G(a,y,z)).$$

Konačno,

$$G(x,y,z) \leq \frac{2}{3}(G(x,y,a) + G(x,a,z) + G(a,y,z)).$$

(6) Iz (G5) slijedi da je

$$\begin{aligned} G(x,y,z) &\leq G(x,a,a) + G(a,y,z) \\ &\leq G(x,a,a) + G(a,y,a) + G(a,a,z) \\ &= G(x,a,a) + G(y,a,a) + G(z,a,a). \end{aligned}$$

(7) Tvrdnja:

$$|G(x,y,z) - G(x,y,a)| \leq \max\{G(a,z,z), G(z,a,a)\}$$

Razlikujemo dva slučaja:
a) $G(a,z,z) \geq G(z,a,a)$
b) $G(a,z,z) \leq G(z,a,a)$

Promotrimo prvi slučaj kad je $G(a,z,z) \geq G(z,a,a)$. Tada je

$$\max\{G(a,z,z), G(z,a,a)\} = G(a,z,z)$$

i treba dokazati

$$|G(x,y,z) - G(x,y,a)| \leq G(a,z,z),$$

što se svodi na ove dvije nejednakosti

$$-G(a,z,z) \leq G(x,y,z) - G(x,y,a) \leq G(a,z,z).$$

Lijevu nejednakost napišemo ovako

$$G(x,y,a) \leq G(x,y,z) + G(a,z,z).$$

Desnu nejednakost napišemo ovako:

$$G(x,y,z) \leq G(a,z,z) + G(x,y,a).$$

Dokažimo lijevu nejednakost. Primijenimo $(G5)$ uz ove oznake

$$x \to a, \quad y \to x, \quad z \to y, \quad a \to z.$$

U originalnim oznakama $(G5)$ glasi:

$$G(x,y,z) \leq G(x,a,a) + G(a,y,z)$$

Uz gore navedene supstitucije dobivamo:

$$G(a,x,y) \leq G(a,z,z) + G(z,x,y). \tag{1.3}$$

Zbog aksioma $(G4)$ vrijedi:

$$G(a,x,y) = G(x,y,a), \quad G(z,x,y) = G(x,y,z)$$

pa nejednakost (1.3) postaje

$$G(x,y,a) \leq G(x,y,z) + G(a,z,z),$$

a to je i trebalo dokazati.

Dokažimo desnu stranu nejednakosti.

$G(x,y,z)$ napišimo kao $G(z,x,y)$ (prema (G4) aksiomu to je jednako). Tada primijenimo $(G5)$ uz ove oznake:

$$x \to z, \quad y \to x, \quad z \to y, \quad a \to a.$$

U originalnim oznakama $(G5)$ glasi:

$$G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$$

Uz gore navedene supstitucije dobivamo:

$$G(z, x, y) \leq G(z, a, a) + G(a, x, y). \tag{1.4}$$

Po pretpostavci koja vrijedi u ovom slučaju imamo nadalje da je $G(a, z, z) \geq G(z, a, a)$ pa nejednakost (1.4) nastavimo dalje ovako:

$$\begin{aligned} G(z, x, y) &\leq G(z, a, a) + G(a, x, y) \\ &\leq G(a, z, z) + G(a, x, y) \\ &= G(a, z, z) + G(x, y, a) \end{aligned}$$

i to je upravo desna nejednakost koja se trebala dokazati.

Promotrimo drugi slučaj kad je $G(a, z, z) \leq G(z, a, a)$. Tada je $\max\{G(a, z, z), G(z, a, a)\} = G(z, a, a)$ i treba dokazati

$$|G(x, y, z) - G(x, y, a)| \leq G(z, a, a),$$

što se svodi na ove dvije nejednakosti

$$-G(z, a, a) \leq G(x, y, z) - G(x, y, a) \leq G(z, a, a).$$

Lijevu nejednakost napišemo ovako

$$G(x, y, a) \leq G(x, y, z) + G(z, a, a).$$

Desnu nejednakost napišemo ovako:

$$G(x, y, z) \leq G(z, a, a) + G(x, y, a).$$

Dokažimo lijevu nejednakost. Primijenimo $(G5)$ uz ove oznake

$$x \to z, \quad z \to x, \quad y \to y, \quad a \to a.$$

U originalnim oznakama $(G5)$ glasi:

$$G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$$

Uz gore navedene supstitucije dobivamo:

$$G(z, y, x) \leq G(z, a, a) + G(a, y, x).$$

Zbog aksioma $(G4)$ vrijedi:

$$G(z, y, x) = G(x, y, z), \quad G(a, y, x) = G(x, y, a),$$

odnosno vrijedi

$$G(x, y, z) \leq G(x, y, a) + G(z, a, a),$$

a to je i trebalo dokazati.

Dokažimo desnu nejednakost.

$$\begin{aligned} G(x, y, a) &= G(a, x, y) \\ &\leq G(a, z, z) + G(z, x, y) \\ &= G(a, z, z) + G(x, y, z) \\ &\leq G(z, a, a) + G(x, y, z). \end{aligned}$$

Jednakosti vrijede zbog $(G4)$.

Prva nejednakost je $(G5)$ primijenjen na

$$x \to a, y \to x, z \to y, a \to z$$

Druga nejednakost je pretpostavka da je $G(z, a, a) \geq G(a, z, z)$

(8) Tvrdnja:

$$|G(x, y, z) - G(x, y, a)| \leq G(x, a, z)$$

Razlikujemo dva slučaja:

a) $G(x, y, z) \leq G(x, y, a) + G(x, a, z)$

b) $G(x, y, a) \leq G(x, y, z) + G(x, a, z)$

Dokažimo nejednakost pod a).

Iz propozicije1.2.1 svojstva 4, vrijedi:

$$G(x, y, z) \leq G(x, a, z) + G(a, y, z)$$

Za

$$x \to y, \quad z \to x, \quad y \to z, \quad a \to a,$$

vrijedi

$$G(y, z, x) \leq G(y, a, x) + G(a, z, x).$$

Zbog aksioma $(G4)$ vrijedi:

$$G(y,z,x) = G(x,y,z) \quad G(y,a,x) = G(x,y,a) \quad G(a,z,x) = G(x,a,z)$$

i to je upravo nejednakost pod a) koja se trebala dokazati.
Dokažimo nejednakost pod b).
Iz propozicije1.2.1 (4) vrijedi:

$$G(x,y,z) \leq G(x,a,z) + G(a,y,z)$$

Za

$$x \to y, \quad z \to x, \quad y \to a, \quad a \to z,$$

vrijedi

$$G(y,a,x) \leq G(y,z,x) + G(z,a,x).$$

Zbog aksioma $(G4)$ vrijedi:

$$G(y,a,x) = G(x,y,a) \quad G(y,z,x) = G(x,y,z) \quad G(z,a,x) = G(x,a,z)$$

i to je upravo nejednakost pod b) koja se trebala dokazati.

(9) Tvrdnja:

$$|G(x,y,z) - G(y,z,z)| \leq \max\{G(x,z,z), G(z,x,x)\}$$

Razlikujemo dva slučaja:
a) $G(x,z,z) \geq G(z,x,x)$
b) $G(x,z,z) \leq G(z,x,x)$
Promotrimo prvi slučaj kad je $G(x,z,z) \geq G(z,x,x)$. Tada je

$$\max\{G(x,z,z), G(z,x,x)\} = G(x,z,z)$$

i treba dokazati

$$|G(x,y,z) - G(y,z,z)| \leq G(x,z,z),$$

što se svodi na ove dvije nejednakosti

$$-G(x,z,z) \leq G(x,y,z) - G(y,z,z) \leq G(x,z,z).$$

Lijevu nejednakost napišemo ovako

$$G(y,z,z) \leq G(x,y,z) + G(x,z,z).$$

Desnu nejednakost napišemo ovako:

$$G(x,y,z) \leq G(x,z,z) + G(y,z,z).$$

Dokažimo lijevu nejednakost. Primijenimo $(G3)$ uz ove oznake

$$x \to z, \quad y \to y, \quad z \to x.$$

U originalnim oznakama $(G3)$ glasi:

$$G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$$

Uz gore navedene supstitucije dobivamo:

$$G(z, z, y) \leq G(z, y, x)$$

Zbog aksioma $(G4)$ vrijedi:

$$G(z, z, y) = G(y, z, z) \quad G(z, y, x) = G(x, y, z),$$

pa dobivamo:

$$G(y, z, z) \leq G(x, y, z),$$

a također onda vrijedi i:

$$G(y, z, z) \leq G(x, y, z) + G(x, z, z)$$

i to je upravo lijeva nejednakost koja se trebala dokazati.

Dokažimo desnu nejednakost. Primijenimo propoziciju 1.2.1 (2) uz ove oznake

$$x \to z, \quad y \to x, \quad z \to y.$$

U originalnim oznakama propozicije 1.2.1 (2) glasi:

$$G(x, y, z) \leq G(x, x, y) + G(x, x, z)$$

Uz gore navedene supstitucije dobivamo:

$$G(z, x, y) \leq G(z, z, x) + G(z, z, y).$$

Zbog aksioma $(G4)$ vrijedi:

$$G(z, x, y) = G(x, y, z) \quad G(z, z, x) = G(x, z, z) \quad G(z, z, y) = G(y, z, z),$$

pa dobivamo:

$$G(x, y, z) \leq G(x, z, z) + G(y, z, z).$$

i to je upravo desna nejednakost koja se trebala dokazati.

Promotrimo drugi slučaj kad je $G(z, x, x) \geq G(x, z, z)$. Tada je

$$\max\{G(x, z, z), G(z, x, x)\} = G(z, x, x)$$

i treba dokazati

$$|G(x, y, z) - G(y, z, z)| \leq G(z, x, x),$$

što se svodi na ove dvije nejednakosti

$$-G(z, x, x) \leq G(x, y, z) - G(y, z, z) \leq G(z, x, x).$$

Lijevu nejednakost napišemo ovako

$$G(y, z, z) \leq G(x, y, z) + G(z, x, x).$$

Desnu nejednakost napišemo ovako:

$$G(x, y, z) \leq G(y, z, z) + G(z, x, x).$$

Dokažimo lijevu nejednakost. Primijenimo $(G3)$ uz ove oznake

$$x \to z, \quad y \to y, \quad z \to x.$$

U originalnim oznakama $(G3)$ glasi:

$$G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$$

Uz gore navedene supstitucije dobivamo:

$$G(z, z, y) \leq G(z, y, x)$$

Zbog aksioma $(G4)$ vrijedi:

$$G(z, z, y) = G(y, z, z) \quad G(z, y, x) = G(x, y, z),$$

pa dobivamo:

$$G(y, z, z) \leq G(x, y, z),$$

a također onda vrijedi i:

$$G(y, z, z) \leq G(x, y, z) + G(z, x, x)$$

i to je upravo lijeva nejednakost koja se trebala dokazati.

Dokažimo desnu nejednakost. Iz propozicije 1.2.1, svojstva 6, ako stavimo da je $a = z$ imamo

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &< G(x, z, z) + G(y, z, z) + G(z, z, z) \\ &= G(x, z, z) + G(y, z, z) + 0 \\ &< G(z, x, x) + G(y, z, z), \end{aligned}$$

a tu se koristila pretpostavka drugog slučaja.

(10) Tvrdnja:

$$|G(x, y, y) - G(y, x, x)| \leq \max\{G(y, x, x), G(x, y, y)\}$$

Razlikujemo dva slučaja:

a) $G(y, x, x) \geq G(x, y, y)$

b) $G(y, x, x) \leq G(x, y, y)$

Promotrimo prvi slučaj kad je $G(y, x, x) \geq G(x, y, y)$. Tada je

$$\max\{G(y, x, x), G(x, y, y)\} = G(y, x, x)$$

i treba dokazati

$$|G(x, y, y) - G(y, x, x)| \leq G(y, x, x),$$

što se svodi na ove dvije nejednakosti

$$-G(y, x, x) \leq G(x, y, y) - G(y, x, x) \leq G(y, x, x).$$

Lijevu nejednakost napišemo ovako

$$G(y, x, x) \leq G(y, x, x) + G(x, y, y).$$

Desnu nejednakost napišemo ovako:

$$G(x, y, y) \leq G(y, x, x) + G(y, x, x) = 2G(y, x, x).$$

Dokažimo lijevu nejednakost. Uočavamo da iz lijeve nejednakosti odmah slijedi:

$$G(x, y, y) \geq 0,$$

a to vrijedi po $(G2)$.

Dokažimo desnu nejednakost. Uočavamo da ona vrijedi iz propozicije 1.2.1 (3).

Promotrimo drugi slučaj kad je $G(y, x, x) \leq G(x, y, y)$. Tada je

$$\max\{G(y, x, x), G(x, y, y)\} = G(x, y, y)$$

i treba dokazati

$$|G(x, y, y) - G(y, x, x)| \leq G(x, y, y),$$

što se svodi na ove dvije nejednakosti

$$-G(x, y, y) \leq G(x, y, y) - G(y, x, x) \leq G(x, y, y).$$

Lijevu nejednakost napišemo ovako

$$G(y, x, x) \leq G(x, y, y) + G(x, y, y) = 2G(x, y, y).$$

Uočavamo da ona vrijedi iz svojstva (3).
Desnu nejednakost napišemo ovako:

$$G(x, y, y) \leq G(y, x, x) + G(x, y, y).$$

Ona je ekvivalentna sa:

$$G(y, x, x) \geq 0,$$

a to vrijedi po ($G2$). □

Propozicija 1.2.2. *Neka je (X,G) G-metrički prostor i neka je $k > 0$. Tada su G_1 i G_2 također G-metrike na X, pri čemu*

(1) $G_1(x, y, z) = \min\{k, G(x, y, z)\}$,

(2) $G_2(x, y, z) = \dfrac{G(x, y, z)}{k + G(x, y, z)}$.

Nadalje, ako je $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ neka particija skupa X, tada je G_3 G-metrika na X pri čemu je

$$G_3(x, y, z) = \begin{cases} G(x, y, z) & \textit{ako za neki } i \textit{ su } x, y, z \in A_i \\ k + G(x, y, z) & \textit{inače.} \end{cases}$$

Dokaz. Kako bismo dokazali propoziciju, potrebno je odrediti vrijede li svojstva (G1)-(G5) iz definicije 1.1.1.
(1) (G1)

$$G_1(x, y, z) = \min\{k, G(x, y, z)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow k = 0 \textit{ ili } G(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z,$$

što vrijedi zbog (G1) iz definicije.
(G2)

$$G_1(x, x, y) = \min\{k, G(x, x, y)\} > 0$$

vrijedi jer je

$$k > 0 \ i \ G(x, x, y) > 0$$

po definiciji ($G2$).
(G3)

$$G_1(x, x, y) \leq G_1(x, y, z) \Leftrightarrow \min\{k, G(x, x, y)\} \leq \min\{k, G(x, y, z)\}.$$

Ako je $k \leq G(x, y, z)$, po definiciji slijedi $k \leq G(x, y, z) \leq G(x, y, z)$. Ako je $G(x, x, y) \leq k$, tada je po definiciji

$$G(x, x, y) \leq G(x, y, z).$$

(G4) $G_1(x, y, z) = \min\{k, G(x, y, z)\}$, po definiciji simetričnosti od G slijedi tvrdnja.
(G5) Provjeravamo je li

$$G_1(x, y, z) = \min\{k, G(x, y, z)\} \leq G_1(x, a, a) + G_1(a, y, z).$$

Za $k < G(x, y, z)$ imamo četiri slučaja:

(1) $k \leq k + G(a, y, z) \Leftrightarrow G(a, y, z) \geq 0$, a to slijedi iz definicije 1.1.1,

(2) $k \leq k + k$, što očito vrijedi,

(3) $k \leq G(x, a, a) + k \Leftrightarrow G(x, a, a) \geq 0$, a to slijedi iz definicije 1.1.1,

(4) $k \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$, a to slijedi iz $k \leq G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$.

Za $k > G(x, y, z)$ imamo četiri slučaja:

(1) $G(x, y, z) \leq k + G(a, y, z)$, a to slijedi iz $G(x, y, z) \leq k \leq k + G(a, y, z)$,

(2) $G(x, y, z) \leq k + k$, a to slijedi iz $G(x, y, z) \leq k \leq k + k$,

(3) $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + k$, a to slijedi iz $G(x, y, z) \leq k \leq G(x, a, a) + k$,

(4) $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$, a to slijedi iz definicije 1.1.1.

Dokažimo da je funkcija G_2 generalizirana metrika
(G1)

$$G_2(x, y, z) = \frac{G(x, y, z)}{k + G(x, y, z)} = 0 \Leftrightarrow G(x, y, z) = 0,$$

a to vrijedi, po definiciji ako je $x = y = z$.
(G2)

$$G_2(x, x, y) > 0 \Leftrightarrow \frac{G(x, y, z)}{k + G(x, y, z)} > 0.$$

Budući da su $G(x, y, z)$ i $k + G(x, y, z)$ pozitivni brojevi slijedi da je i taj razlomak pozitivan pa aksiom $(G2)$ vrijedi.
(G3)

$$\begin{aligned} G_2(x, x, y) \leq G_2(x, y, z) &\Leftrightarrow \frac{G(x, x, y)}{k + G(x, x, y)} \leq \frac{G(x, y, z)}{k + G(x, y, z)} \\ &\Leftrightarrow k \cdot G(x, x, y) + G(x, x, y) \cdot G(x, y, z) \\ &\leq k \cdot G(x, y, z) + G(x, x, y) \cdot G(x, y, z) \\ &\Leftrightarrow G(x, x, y) \leq G(x, y, z), \end{aligned}$$

a to vrijedi po definiciji za $G(x, y, z)$.
(G4) Slijedi iz svojstva simetričnosti za $G(x, y, z)$.
(G5) Provjeravamo je li

$$G_2(x, y, z) = \frac{G(x, y, z)}{k + G(x, y, z)} \leq G_2(x, a, a) + G_2(a, y, z).$$

Sređivanjem dobivamo da je početna nejednakost ekvivalentna sljedećoj:

$$\begin{aligned} k^2 G(x, y, z) \leq k^2(G(x, a, a) + G(a, y, z)) &+ 2k \cdot G(x, a, a)G(a, y, z) \\ &+ G(x, y, z)G(a, y, z)G(x, a, a), \end{aligned}$$

zbog $(G5)$ za $G(x, y, z)$ vrijedi

$$k^2 G(x, y, z) \leq k^2(G(x, a, a) + G(a, y, z))$$

pa tvrdnja vrijedi.

Dokažimo da je funkcija G_3 generalizirana metrika
(G1) Ako je $x = y = z$ tada su ti elementi iz nekog A_i te na njih primjenjujemo prvi dio definicije od G_3 tj.

$$G_3(x, y, z) = G_3(x, x, x) = G(x, x, x) = 0$$

jer za $G(x, y, z)$ vrijedi aksiom $(G1)$.
(G2)

$$G_3(x, x, y) > 0 \Leftrightarrow G(x, y, y) > 0 \ \& \ k + G(x, y, z) > 0,$$

što po definiciji vrijedi.
(G3) Treba dokazati da je

$$G_3(x, x, y) \leq G_3(x, y, z).$$

Ako su sva tri elementa x, y, z u nekom A_i, tada se primjenjuje prvi dio definicije od G_3 i imamo:

$$G_3(x, x, y) = G(x, x, y) \leq G(x, y, z) = G_3(x, y, z).$$

Ako je bar jedan od ta tri elementa izvan skupa A_i, tada se primjenjuje drugi dio defincije od G_3 i imamo:

$$G_3(x, x, y) = k + G(x, x, y) \leq k + G(x, y, z) = G_3(x, y, z).$$

(G4) Slijedi iz svojstva simetričnosti za $G(x, y, z)$.
(G5) Za nejednakost trokuta treba razmatrati sve mogućnosti koje se svedu na ove slučajeve:

(a) $x, y, z, a \in A_i$. Tada je $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$, a to vrijedi po $G5$.

(b) $x, y, z \in A_i, a \notin A_i$. Tada je $G(x, y, z) \leq k + G(x, a, a) + k + G(a, y, z)$, a to vrijedi po $G5$.

(c) Dva od x, y, z su u A_i, npr. $x, y \in A_i$ $z, a \notin A_i$. Tada je $k + G(x, y, z) \leq k + G(x, a, a) + k + G(a, y, z)$, a to vrijedi po $G5$.
(d) Jedan od njih npr. x je u A_i, $y, z, a \notin A_i$. Tada je $k+G(x, y, z) \leq k+G(x, a, a)+G(a, y, z)$, a to vrijedi po $G5$.
(e) Nijedan nije u A_i. Tada je $k + G(x, y, z) \leq k + G(x, a, a) + k + G(a, y, z)$, a to vrijedi po $G5$.
(f) $a \in A_i, x, y, z \notin A_i$, analogno kao u (e)

(g) $a, x \in A_i, y, z \notin A_i$. Tada je $k + G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + k + G(a, y, z)$, a to vrijedi po $G5$.

(h) $a, x, y \in A_i, z \notin A_i$, analogno kao u (g)

Ostali se mogu svesti na gore navedene. □

Propozicija 1.2.3. *Neka je (X, G) G-metrički prostor. Tada su iduće tvrdnje međusobno ekvivalentne:*
(1) (X, G) je simetričan,
(2) $G(x, y, y) \leq G(x, y, a)$ za svaki $x, y, a \in X$,
(3) $G(x, y, z) \leq G(x, y, a) + G(z, y, b)$ za sve $x, y, z, a, b \in X$.

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2) Iz $(G3)$ vrijedi:

$$G(x, x, y) \leq G(x, y, z).$$

Zbog pretpostavke vrijedi:
$$G(x, y, y) \leq G(x, y, z).$$
Za $z = a,\ x = x,\ y = y$ vrijedi:
$$G(x, y, y) \leq G(x, y, a).$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Iz propozicije 1.2.1 (2) vrijedi:
$$G(x, y, z) \leq G(x, x, y) + G(x, x, z)$$
Za $x = y,\ y = x,\ z = z$ i zbog $(G4)$ vijedi:
$$G(x, y, z) \leq G(x, y, y) \leq G(y, y, z)$$
I pretpostavke slijedi:
$$G(x, y, z) \leq G(x, y, a) + G(y, y, z)$$
Zbog $(G3)$ za $x = y,\ y = z,\ z = b$ i $(G4)$ vrijedi:
$$G(y, y, z) \leq G(z, y, b),$$
pa je
$$G(x, y, z) \leq G(x, y, a) + G(y, y, z) \leq G(x, y, a) + G(z, y, b).$$
(3) $\Rightarrow$ (1) Iz pretpostavke znamo:
$$G(x, y, z) \leq G(x, y, a) + G(z, y, b).$$
Za $a = x,\ b = y$ imamo:
$$G(x, y, z) \leq G(x, y, x) + G(z, y, y).$$
Kada bi vrijedila simetričnost tj. $G(x, x, y) = G(x, y, y)$, tada bismo dobili:
$$G(x, y, z) \leq G(x, y, y) + G(z, y, y),$$
a to vrijedi po propoziciji 1.2.1 (2). Dakle (X, G) je simetričan. $\square$

Poglavlje 2

Nizovi u G-metričkom prostoru

U ovom poglavlju razmatramo pojmove kao što je kugla u G-metričkom prostoru, G-konvergencija niza, G-Cauchyjevi nizovi. Ovi su pojmovi prvi put uvedeni u radu[4]. Ovdje smo vrlo detaljno razradili dokaz svake od danih tvrdnji. Za bilo koji neprazan skup X, vidjeli smo da iz bilo koje metrike na X, možemo konstruirati G-metriku. Obrnuto, za bilo koju G-metriku G na X, funkcija

$$d_G(x, y) = G(x, y, y) + G(x, x, y)$$

je metrika na X.

Dokaz. Dokažimo da je $d_G(x, y) \geq 0$. Ako je $x \neq y$, tada iz svojstva $(G2)$ definicije 1.1.1 slijedi:

$$G(x, x, y) > 0.$$

Zamijenimo li mjesta x i y, dobivamo:

$$G(y, y, x) > 0,$$

a onda je i njihova suma,

$$G(x, x, y) + G(y, y, x) > 0.$$

Ako je $x = y$, tada je

$$d_G(x, y) = d_G(x, x) = G(x, x, x) + G(x, x, x) = 0,$$

prema svojstvu $(G1)$.
Dokažimo da je $d_G(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$. Jedan smjer je već dokazan u prethodnom tekstu.
Neka je $d_G(x, y) = 0$ i pretpostavimo da je $x \neq y$.
Tada je

$$G(x, x, y) + G(y, y, x) = 0.$$

Za $x \neq y$ znamo da je $G(x, x, y) > 0$ i $G(y, y, x) > 0$ pa bi bilo:

$$G(x, x, y) + G(y, y, x) > 0,$$

što nije istina. Dakle, mora biti $x = y$

Dokažimo simetriju, odnosno da vrijedi:

$$d_G(x, y) = d_G(y, x).$$

To slijedi iz simetrije G-metrike. Dakle vrijedi:

$$d_G(x, y) = G(x, y, y) + G(x, x, y) = G(x, x, y) + G(x, y, y) = G(y, x, x) + G(y, x, x) = d_G(y, x).$$

Dokažimo nejednakost trokuta:

$$d_G(x, y) \leq d_G(x, z) + d_G(z, y), \;\; x, y, z \in X.$$

Prema $(G5)$ za $a = z$ imamo:

$$G(y, x, x) \leq G(y, z, z) + G(z, x, x). \tag{2.1}$$

Prema $(G5)$ za $a = z$ imamo:

$$G(x, y, y) \leq G(x, z, z) + G(z, y, y). \tag{2.2}$$

Zbrojimo li (2.1) i (2.2) dobivamo:

$$G(y, x, x) + G(x, y, y) \leq G(y, z, z) + G(z, x, x) + G(x, z, z) + G(z, y, y).$$
$$d_G(x, y) \leq d_G(x, z) + d_G(z, y),$$

što je i trebalo dokazati. □

Za G-metriku G i $G_s(d_G)$ vrijedi:

$$G(x, y, z) \leq G_s(d_G)(x, y, z) \leq 2G(x, y, z).$$

Slično,

$$\frac{1}{2}G(x, y, z) \leq G_m(d_G)(x, y, z) \leq 2G(x, y, z).$$

Nadalje, polazeći od metrike d na X imamo,

$$d_{G_s(d)}(x, y) = \frac{4}{3}d(x, y), \;\; d_{G_m(d)}(x, y) = 2d(x, y).$$

Definicija 2.0.1. *Neka je (X, G) G-metrički prostor. Tada za $x_0 \in X, r > 0$, G-kugla sa središtem u x_0 i radijusom r je:*

$$B_G(x_0, r) = \{y \in X : G(x_0, y, y) < r\}.$$

Propozicija 2.0.1. *Neka je (X, G) G-metrički prostor. Tada za bilo koji $x_0 \in X$ i $r > 0$, imamo:*
(1) ako je $G(x_0, x, y) < r$, tada je $x, y \in B_G(x_0, r)$.
(2) ako je $y \in B_G(x_0, r)$, tada postoji $\delta > 0$ takav da $B_G(y, \delta) \subseteq B_G(x_0, r)$.

Dokaz. (1) Potrebno je dokazati da vrijedi:

$$G(x_0, y, y) < r, \; G(x_0, x, x) < r.$$

Zbog $(G3)$ vrijedi:

$$G(x, x, y) \leq G(x, y, z).$$

Za $z = x_0$ vrijedi:

$$G(x, x, y) \leq G(x, y, x_0),$$

a zbog pretpostavke i $(G4)$ vrijedi:

$$G(x, y, x_0) < r.$$

Dakle,

$$G(x, x, y) \leq G(x, y, x_0) < r,$$

iz čega slijedi:

$$G(x, x, y) < r.$$

Za $y = x_0, \; x = y$ vrijedi:

$$G(x_0, y, y) < r.$$

Za $y = x_0, \; x = x$ vrijedi:

$$G(x_0, x, x) < r,$$

a to je i trebalo dokazati.
(2) Potrebno je dokazati da ako je $x \in B_G(y, \delta)$, da je tada $x \in B_G(x_0, r)$.
Iz pretpostavke vrijedi:

$$y \in B_G(x_0, r) \Rightarrow G(x_0, y, y) < r,$$

pa je:

$$\delta = r - G(x_0, y, y).$$

Ako je $x \in B_G(y, \delta)$, slijedi:

$$G(y, x, x) < \delta = r - G(x_0, y, y).$$

Stoga je:

$$G(x_0, x, x) \leq G(x_0, y, y) + G(y, x, x) < G(x_0, y, y) + r - G(x_0, y, y) = r,$$

tj. $x \in B_G(x_0, r)$, što dokazuje:

$$B_G(y, \delta) \subseteq B(x_0, r).$$

□

Propozicija 2.0.2. *Neka je (X, G) G-metrički prostor. Tada za svaki $x_0 \in X$ i $r > 0$, imamo:*

$$B_G(x_0, \frac{1}{3}r) \subseteq B_{d_G}(x_0, r) \subseteq B_G(x_0, r).$$

Dokaz. Treba dokazati da vrijedi:

$$B_G(x_0, \frac{1}{3}r) \subseteq B_{d_G}(x_0, r) \text{ i } B_{d_G}(x_0, r) \subseteq B_G(x_0, r).$$

Tada po tranzitivnosti relacije podskup, vrijedi tvrdnja.
Dokažimo prvo $B_G(x_0, \frac{1}{3}r) \subseteq B_{d_G}(x_0, r)$.
Neka je $y \in B_G(x_0, \frac{1}{3}r)$. Tada vrijedi po definiciji:

$$G(x_0, y, y) < \frac{1}{3}r.$$

Dakle,

$$G(x_o, y, y) + G(x_0, x_0, y) < G(x_o, y, y) + 2G(x_o, y, y) = 3G(x_o, y, y) < 3 \cdot \frac{1}{3}r = r,$$

odnosno $y \in B_{d_G}(x_0, r)$.
Dokažimo sad $B_{d_G}(x_0, r) \subseteq B_G(x_0, r)$.
Neka je $y \in B_{d_G}(x_0, r)$. Tada vrijedi:

$$G(x_0, y, y) < G(x_0, y, y) + G(x_0, x_0, y) < r,$$

tj. $y \in B_G(x_0, r)$.
Time je propozicija dokazana. □

2.1 Konvergencija u G-metričkom prostoru

Definicija 2.1.1. *Neka je (X, G) G-metrički prostor. Niz $(x_n) \subseteq X$ je G-konvergentan s limesom u x ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ $x_n \in B_G(x, \varepsilon)$.*

Teorem 2.1.2. *Neka je (X, G) G-metrički prostor. Tada za niz $(x_n) \subseteq X$ i točku $x \in X$ vrijede ekvivalencije idućih tvrdnji:*

(1) (x_n) *je G-konvergentan u* x.

(2) $d_G(x_n, x) \to 0$, *kada* $n \to \infty$ *(tj.* (x_n) *konvergira prema* x *u odnosu na metriku* d_G*).*

(3) $G(x_n, x_n, x) \to 0$, *kada* $n \to \infty$.

(4) $G(x_n, x, x) \to 0$, *kada* $n \to \infty$.

(5) $G(x_m, x_n, x) \to 0$, *kada* $m,\ n \to \infty$.

Dokaz. (1) $\Leftrightarrow$ (2) Slijedi iz propozicije 2.0.2.
(2) $\Rightarrow$ (3) Budući da vrijedi:

$$d_G(x_n, x) = G(x_n, x, x) + G(x_n, x_n, x) \to 0, n \to \infty,$$

slijedi:

$$G(x_n, x, x) \to 0, \ \ G(x_n, x_n, x) \to 0, \ \ n \to \infty.$$

(3) $\Rightarrow$ (4) Kako iz propozicije 1.2.1 (3) vrijedi:

$$G(x, y, y) \leq 2G(y, x, x).$$

Ako u tu nejednakost umjesto x stavimo x_n, a umjesto y stavimo x, dobivamo:

$$0 < G(x_n, x, x) \leq 2G(x, x_n, x_n).$$

Iz pretpostavke i po teoremu o sendviču slijedi tvrdnja.

(4) $\Rightarrow$ (5) Iz propozicije 1.2.1 (2) i $(G3)$ slijedi:

$$G(x_m, x_n, x) = G(x, x_n, x_m) \leq G(x, x, x_n) + G(x, x, x_m).$$

Iz pretpostavke znamo:

$$G(x_n, x, x) \to 0, n \to \infty,$$

a to ujedno znači i da je $G(x, x, x_m) \to 0$ za $m \to \infty$ Konačno, po teoremu o sendviču:

$$G(x_m, x_n, x) \to 0, n \to \infty.$$

(5) $\Rightarrow$ (2) Po definiciji za d_G vrijedi:

$$d_G(x_n, x) = G(x_n, x, x) + G(x_n, x_n, x).$$

Prema propoziciji 1.2.1 (3) slijedi:

$$d_G(x_n, x) = G(x_n, x, x) + G(x_n, x_n, x) \leq 3G(x, x_n, x_n).$$

Trebamo dokazati:

$$G(x, x_n, x_n) \to 0, n \to \infty.$$

Znamo:

$$G(x_m, x_n, x) \to 0,\ m, n \to \infty.$$

Iz $(G3)$ i $(G4)$ slijedi:

$$0 \leq G(x_n, x_n, x) \leq G(x_m, x_n, x).$$

Iz pretpostavke i teorema o sendviču slijedi:

$$G(x_n, x_n, x) \to 0, n \to \infty.$$

Dakle,

$$d_G(x_n, x) \to 0, n \to \infty.$$

□

2.2 Potpunost G-metričkog prostora

Definicija 2.2.1. *Neka je (X, G) G-metrički prostor. Tada je niz $(x_n) \subseteq X$ G-Cauchyjev ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da*

$$G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon$$

za svaki $n, m, l \geq N$.

Teorem 2.2.2. *Neka je (X, G) G-metrički prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(1) Niz (x_n) je G-Cauchyjev.

(2) Za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $G(x_n, x_m, x_m) < \varepsilon$ za svaki $n, m \geq N$.

(3) (x_n) je Cauchyjev niz u metričkom prostoru (X, d_G).

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2)
Ako je niz (x_n) G-Cauchyjev, tada postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon$ za svaki $n, m \geq N$. Za $l = m$ je $G(x_n, x_m, x_m) < \varepsilon$.

(2) $\Rightarrow$ (3)
Za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je

$$G(x_n, x_m, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, G(x_m, x_n, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

za svaki $n, m \geq N$.
Dakle,

$$d_G(x_n, x_m) = G(x_n, x_m, x_m) + G(x_m, x_n, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(3) $\Rightarrow$ (1)
Neka je niz (x_n) Cauchyjev niz u metričkom prostoru (X, d_G). To znači da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n, m > n_0$ vrijedi:

$$d_G(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Prema definiciji metrike d_G slijedi:

$$G(x_n, x_m, x_m) + G(x_n, x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Treba dokazati da je (x_n) G-Cauchyjev niz, tj.:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (n, m, l > n_0)(G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon).$$

Neka su $n, m, l > n_0$ gdje je n_0 iz definicije Cauchyjevog niza.
Tada prema svojstvu $(G5)$ za $a = x_m$ imamo:

$$G(x_n, x_m, x_l) \leq G(x_n, x_m, x_m) + G(x_m, x_m, x_l). \tag{2.3}$$

Prema svojstvu $(G5)$ za $a = x_l$ imamo:

$$G(x_n, x_m, x_l) = G(x_n, x_l, x_m) \leq G(x_n, x_l, x_l) + G(x_l, x_l, x_m). \tag{2.4}$$

Prema svojstvu $(G5)$ za $a = x_n$ dobivamo:

$$G(x_n, x_m, x_l) = G(x_m, x_l, x_n) \leq G(x_m, x_n, x_n) + G(x_n, x_l, x_n) = G(x_m, x_n, x_n) + G(x_n, x_n, x_l). \tag{2.5}$$

Zbrajajući (2.3), (2.4) i (2.5), imamo:

$$\begin{aligned}
3G(x_n, x_m, x_l) &\leq (G(x_n, x_m, x_m) + G(x_m, x_m, x_l)) + (G(x_n, x_l, x_l) \\
&\quad + G(x_l, x_l, x_m)) + (G(x_m, x_n, x_n) + G(x_n, x_n, x_l)) \\
&= d_G(x_n, x_m) + d_G(x_m, x_l) + d_G(x_n, x_l) \\
&< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, $G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon$ što je i trebalo dokazati.

$\square$

Korolar 2.2.3. *Svaki G-konvergentan niz u G-metričkom prostoru je G-Cauchyjev.*

Dokaz. Neka je (x_n) niz koji konvergira prema $x \in X$. Tada prema Teoremu 2.1.2 (5) za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $G(x_n, x_m, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ za $n, m \geq N$. Za $l \geq N$ vrijedi $G(x, x, x_l) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sada je:

$$G(x_n, x_m, x_l) \leq G(x_n, x_m, x) + G(x, x, x_l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Korolar 2.2.4. *Ako G-Cauchyjev niz u G-metričkom prostoru (X, G) sadrži G-konvergentan podniz, taj niz je G-konvergentan.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ zadan proizvoljno. Tada postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

$$G(x_n, x_m, x_l) < \frac{\varepsilon}{2},\ m, n, l \geq N.$$

Neka niz (x_{n_k}) konvergira prema x. Tada za $\frac{\varepsilon}{2}$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $k \geq k_0$ vrijedi:

$$G(x, x_{n_k}, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sada za $m, n \geq N$ uzmimo n_k takav da je i veći od N i $k \geq k_0$ pa vrijedi:

$$G(x_n, x_m, x) \leq G(x_n, x_m, x_{n_k}) + G(x_{n_k}, x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

što prema Teoremu 2.1.2 znači da je (x_n) G-konvergentan. □

Definicija 2.2.5. *Kažemo da je G-metrički prostor (X, G) G-potpun ako je svaki G-Cauchyjev niz u (X, G) G-konvergentan u (X, G).*

Propozicija 2.2.1. *G-metrički prostor (X, G) je G-potpun ako i samo ako je (X, d_G) potpun metrički prostor.*

Dokaz. Iz teorema 2.2.2 slijedi da je niz (x_n) G-Cauchyjev ako i samo ako je taj niz Cauchyjev u metričkom prostoru (X, d_G).
Pretpostavimo da je (X, G) G-potpun. Iz pretpostavke slijedi, ako je niz G-Cauchyjev, tada je on i G-konvergentan. Neka niz (x_n) konvergira prema x. Tada po Teoremu 2.1.2 slijedi:

$$G(x_n, x_n, x) \to 0,\ kada\ n \to \infty$$

$$G(x_n, x, x) \to 0,\ kada\ n \to \infty,$$

Slijedi:

$$d_G(x_n, x) = G(x_n, x, x) + G(x_n, x_n, x) \to 0, \ kada \ n \to \infty.$$

Dakle, niz (x_n) je konvergentan.
Dokažimo i drugi smjer. Pretpostavimo da je (X, d_G) potpun metrički prostor. Iz pretpostavke slijedi, ako je niz (x_n) Cauchyjev, on konvergira prema točki $x \in X$. Treba dokazati da je taj niz G-konvergentan u x. Poznato je:

$$d_G(x_n, x) = G(x_n, x, x) + G(x_n, x_n, x) \to 0, \ kada \ n \to \infty.$$

Iz teorema 2.1.2 slijedi $d_G(x_n, x) \to 0, \ kada \ n \to \infty$ ako i samo ako $G(x_n, x_n, x) \to 0, \ kada \ n \to \infty \ i \ G(x_n, x, x) \to 0, \ kada \ n \to \infty$, a to znači da je (x_n) G-konvergentan. □

Poglavlje 3

Teoremi o fiksnoj točki

U ovom poglavlju razmatrat ćemo teoreme o fiksnoj točki. Prvo ćemo iskazati i dokazati klasični teorem o fiksnoj točki za metrički prostor (X, d).

3.1 Banachov teorem o fiksnoj točki

Funkcija $f : X \to X$ naziva se kontrakcija ako postoji $q \in [0, 1\rangle$ takav da za svaki $x, y \in X$ vrijedi:

$$d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y).$$

Element $x \in X$ naziva se fiksna točka preslikavanja f ako je $f(x) = x$.

Teorem 3.1.1. *(Banachov teorem o fiksnoj točki) [3] Neka je (X,d) neprazan potpun metrički prostor, a $T : X \to X$ kontrakcija. Tada postoji jedinstvena fiksna točka x^* u X za preslikavanje T. Nadalje, za proizvoljni element x_0 u X, niz (x_n), $x_n = Tx_{n-1}, n \geq 1$, konvergira prema fiksnoj točki x^*.*

Dokaz. Odaberemo proizvoljnu točku $x_0 \in X$ i definirajmo niz (x_n), $x_n = Tx_{n-1}$. Budući da je T kontrakcija, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq qd(x_n, x_{n-1}) &= qd(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) \\ &\leq q^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq ... \leq q^n d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Sad možemo pokazati da je (x_n) Cauchyjev niz. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $m > n$. Koristeći nejednakost trokuta konačno mnogo puta dobivamo:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + (d(x_{m-1}, x_{m-2}) + d(x_{m-2}, x_n)) \\ &\leq ... \leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + ... + d(x_{n+1}, x_n). \end{aligned}$$

Sad imamo:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + ... + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq q^{m-1}d(x_1, x_0) + q^{m-2}d(x_1, x_0) + ... + q^n d(x_1, x_0) \\ &= q^n d(x_1, x_0) \sum_{k=0}^{m-n-1} q^k \\ &\leq q^n d(x_1, x_0) \sum_{k=0}^{\infty} q^k \\ &= q^n d(x_1, x_0) \cdot \frac{1}{1-q} \\ &= \frac{q^n}{1-q} \cdot d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Neka je izabran proizvoljan $\varepsilon > 0$. Budući da je $q \in [0, 1\rangle$, možemo pronaći takav $N \in \mathbb{N}$ da je:

$$q^N < \frac{\varepsilon(1-q)}{d(x_1, x_0)}.$$

Za svaki $m, n > N$, možemo pisati:

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot d(x_1, x_0) < \frac{\varepsilon(1-q)}{d(x_1, x_0)} \cdot d(x_1, x_0) \cdot \frac{1}{1-q} = \varepsilon.$$

Dakle, (x_n) je Cauchyjev niz.
Zbog potpunosti (X, d), postoji limes $x^* \in X$ za niz (x_n).
Dokažimo da je x^* fiksna točka za T. Promatramo $d(x^*, Tx^*)$ i primijenimo nejednakost trokuta:

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &\leq d(x^*, x_n) + d(x_n, Tx^*) \\ &= d(x^*, x_n) + d(Tx_{n-1}, Tx^*) \\ &\leq d(x^*, x_n) + q \cdot d(x_{n-1}, x^*), \end{aligned}$$

pri čemu smo u drugom retku iskoristili da je $x_n = Tx_{n-1}$, a u trećem retku smo primijenili definiciju kontrakcije.
Budući da je x^* limes niza (x_n) slijedi da je:

$$d(x^*, x_n) \to 0,\ d(x^*, x_{n-1}) \to 0, n \to 0,$$

pa je prema teoremu o sendviču:

$$d(x^*, Tx^*) = 0.$$

Prema aksiomu metrike to je moguće samo kad je $x^* = Tx^*$, a to upravo znači da je x^* fiksna točka za T. Konačno, T ne može imati više od jedne fiksne točke u (X, d) jer za svaki par različitih fiksnih točaka p_1 i p_2, imali bismo:

$$d(Tp_1, Tp_2) = d(p_1, p_2) > qd(p_1, p_2),$$

tj.

$$d(Tp_1, Tp_2) > qd(p_1, p_2),$$

što je kontradikcija s pretpostavkom da je T kontrakcija. □

Naredni dio poglavlja posvećen je teoremima o fiksnoj točki u G-metričkom prostoru.

3.2 Teoremi o fiksnoj točki u G- metričkim prostorima

Teorem 3.2.1. *Neka je (X, G) potpun G-metrički prostor i $T : X \to X$ preslikavanje koje zadovoljava:*

$$G(Tx, Ty, Tz) \leq k\, G(x, y, z),$$

za svaki $x, y, z \in X$, $k \in [0, 1\rangle$. Tada postoji jedinstvena fiksna točka za preslikavanje T.

Dokaz. Neka je x_0 proizvoljno odabrana točka u X te neka je niz $(x_n) \in X$ definiran:

$$x_n = T^n x_0,\ za\ svaki\ n \in \mathbb{N}.$$

Drugim riječima, $x_n = Tx_{n-1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = G(Tx_{n-1}, Tx_n, Tx_n) \leq k\, G(x_{n-1}, x_n, x_n).$$

Prema indukciji slijedi:

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k^n G(x_0, x_1, x_1).$$

Neka su $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$. Tada korištenjem nejednakosti pravokutnika $(G5)$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
G(x_n, x_m, x_m) &\leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_m, x_m) \\
&\leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + [G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_m, x_m)] \\
&\leq ... \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + ... + G(x_{m-1}, x_m, x_m) \\
&\leq (k^n + k^{n+1} + ... + k^{m-1})\, G(x_0, x_1, x_1) = k^n(1 + k + ... + k^{m-n-1})G(x_0, x_1, x_1) \\
&< k^n(1 + k + k^2 + ...)G(x_0, x_1 x_1) = \frac{k^n}{1-k} G(x_0, x_1, x_1).
\end{aligned}$$

Budući da je $k \in [0, 1\rangle$ za proizvoljni ε postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je za $n > N$

$$\frac{k^n}{1-k} G(x_0, x_1, x_1) < \varepsilon.$$

To znači da za $m, n > N$ vrijedi $G(x_n, x_m, x_m) < \varepsilon$ pa je prema propoziciji 2.2.2 (x_n) je G-Cauchyjev. Kako je (X, G) G-potpun, postoji $x' \in X$ takav da $x_n \to x'$. Dokažimo da je x' fiksna točka za G. Primijenimo nejednakost pravokutnika ($G5$) na $G(x', Tx', Tx')$:

$$\begin{aligned} G(x', Tx', Tx') &\leq G(x', x_n, x_n) + G(x_n, Tx', Tx') = G(x', x_n, x_n) + G(Tx_{n-1}, Tx', Tx') \\ &\leq G(x', x_n, x_n) + kG(x_{n-1}, x', x'), \end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili da je $x_n = Tx_{n-1}$ i pretpostavku teorema da je

$$G(Tx_{n-1}, Tx', Tx') \leq kG(x_{n-1}, x', x').$$

Budući da (x_n) G-konvergira prema x', prema teoremu 2.1.2 slijedi da

$$G(x', x_n, x_n) \to 0, G(x_{n-1}, x', x') \to 0, n \to \infty.$$

Iz toga slijedi da je $G(x', Tx', Tx') = 0$. Kad bi bilo $x' \neq Tx'$, tada bi prema svojstvu ($G2$) izraz $G(x', Tx', Tx')$ bio pozitivan, a to nije istina. Dakle, mora vrijediti $x' = Tx'$. Dakle, x' je fiksna točka od T.
Neka je y još jedna fiksna točka od T. Tada:

$$G(x', y, y) = G(Tx', Ty, Ty) \leq k\, G(x', y, y),$$

iz čega slijedi $G(x', y, y) = 0$ za $k \in [0, 1\rangle$. Stoga je $x' = y$, odnosno x' je jedinstvena fiksna točka od T. □

Teorem 3.2.1 mogli bismo smatrati direktnim analogonom Banachovog teorema o fiksnoj točki u metričkom prostoru. Sad slijedi nekoliko teorema za G-metriku koji se također nazivaju teoremi o fiksnoj točki, a od teorema 3.2.1 se razlikuju u pretpostavci koja vrijedi umjesto pretpostavke $G(Tx, Ty, Tz) \leq kG(x, y, z)$.

Teorem 3.2.2. *[1] Neka je (X, G) potpun G-metrički prostor, a $T : X \to X$ kontrakcija koja zadovoljava sljedeći uvjet:*

$$G(Tx, Ty, Ty) \leq kG(x, Tx, y), \ k \in [0, 1\rangle. \tag{3.1}$$

Tada T ima jedinstvenu fiksnu točku.

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$ proizvoljna točka i neka je definiran niz (x_n), $x_n = T^n(x_0)$. Iz nejednakosti u pretpostavci 3.1 imamo:

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq kG(x_{n-1}, x_n, x_n). \tag{3.2}$$

Tada također vrijedi:

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k^n G(x_0, x_1, x_1). \tag{3.3}$$

Osim toga, za svaki $m, n \in \mathbb{N}; n < m$, po nejednakosti pravokutnika, vrijedi:

$$\begin{aligned} G(x_n, x_m, x_m) &\leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) \\ &\quad + ... + G(x_{m-1}, x_m, x_m) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + k^{n+2} + ... + k^{m-1})G(x_0, x_1, x_1) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} G(x_0, x_1, x_1). \end{aligned}$$

Tada $G(x_n, x_m, x_m) \to 0,\ n, m \to \infty$. Tako je niz (x_n) G-Cauchyjev niz.
Kada n ide u beskonačno, tada prema svojstvu potpunosti od (X, G), postoji $u \in X$ takav da je (x_n) G-konvergentan prema u.
Pretpostavimo da je $Tu \neq u$. Tada stavimo u 3.1 $x = x_{n-1}$ i $y = u$ i dobivamo:

$$G(x_n, Tu, Tu) \leq kG(x_{n-1}, x_n, u),$$

Prema svojstvu $(G5)$ imamo:

$$\begin{aligned} G(u, Tu, Tu) &\leq G(u, x_n, x_n) + G(x_n, T_u, T_u) \\ &\leq G(u, x_n, x_n) + kG(x_{n-1}, x_n, u), \end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem redu koristili prethodno dokazanu nejednakost. Budući da je u limes niza (x_n), prema Teoremu 2.1.2 vrijedi:

$$G(u, x_n, x_n) \to 0 \ i \ G(x_{n-1}, x_n, u) \to 0$$

kad $n \to \infty$. To znači da je $G(u, Tu, Tu) \leq 0$. Ali, ako su u i Tu različiti, tada je $G(u, Tu, Tu)$ pozitivan, čime smo došli u kontradikciju. Dakle, mora vrijediti $u = Tu$, tj. u je fiksna točka za T. Za dokaz jedinstvenosti, pretpostavimo da postoje dvije fiksne točke u i v takve da je $u \neq v$. Koristeći svojstva definicije 1.1.1 vrijedi:

$$G(u, u, v) = G(Tu, Tu, Tv) \leq kG(u, Tu, v) = kG(u, u, v),$$

što je nemoguće ako je $G(u, u, v) \neq 0$ i $k \in [0, 1\rangle$. Dobili smo kontradikciju pa slijedi $u = v$. □

Primjer 3.2.3. *Neka je $X = [0, \infty\rangle$ te*

$$G(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \textit{ako je } x = y = z, \\ \max\{x, y, z\}, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Funkcija G je G-metrika na X.
Dokažimo prvo tu tvrdnju.
$(G1)$ *Svojstvo da je $G(x, y, z) = 0$ ako je $x = y = z$ slijedi iz definicije ove G-metrike.*

$(G2)$ *$G(x, x, y) > 0$ jer su $x \neq y$, $x, y \geq 0$, ali budući da ne mogu oba odjednom biti 0, maksimum je strogo veći od 0.*

$(G3)$ $G(x, x, y) = \max\{x, y\} \leq \max\{x, y, z\} = G(x, y, z)$.
Ako su na lijevoj i desnoj strani maksimumi x ili y, tvrdnja očito vrijedi, a ako je $\max\{x, y, z\} = z$, tada je također tvrdnja vrijedi.

$(G4)$ *Simetričnost vrijedi jer je* $\max\{x, y, z\} = \max\{y, x, z\} = \max\{x, z, y\} = ...$

$(G5)$ *Nejednakost pravokutnika također vrijedi.*
Ako je $x > y, x > z, x > a$, tada je nejednakost $(G5)$ ekvivalentna sa $x \leq x + G(a, y, z)$, što je istina.
Ako je $x > y, x > z, x < a$, tada je $x \leq a + a$, što je istina.
Ako je $y > x, y > z$, tada je $y \leq G(x, a, a) + y$, što je istina.
Ako je $z > x, z > y$, tada je $z \leq G(x, a, a) + y$, što je istina.

Dakle, $G(x, y, z)$ je G-metrika na X.

Neka je sad definirano preslikavanje $T : X \to X$, $Tx = \frac{1}{5}x$. Tada vrijedi uvjet iz teorema 3.2.2. Zapravo,

$$G(Tx, Ty, Ty) = \frac{1}{5}\max\{x, y\}$$

i

$$G(x, Tx, y) = \max\{x, y\}$$

pa je:

$$G(Tx, Ty, Ty) \leq \frac{1}{4}G(x, Tx, y).$$

Odnosno, uvjeti iz teorema 3.2.2 vrijede za ovaj primjer.

Teorem 3.2.4. *[1] Neka je (X,G) potpun G-metrički prostor i $T : X \to X$ preslikavanje koje zadovoljava sljedeći uvjet za sve $x, y \in X$, pri čemu je $a + b + c + d < 1, a, b, c, d \geq 0$:*

$$G(Tx, Ty, T^2y) \leq aG(x, Tx, T^2x) + bG(y, Ty, T^2y) + cG(x, Tx, Ty) + dG(y, Ty, T^3x). \quad (3.4)$$

Tada T ima jedinstvenu fiksnu točku.

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$. Konstruiramo takav niz (x_n) točaka iz X da vrijedi:

$$x_{n+1} = Tx_n, \ \textit{za svaki}\ n = 0, 1, 2, ...$$

Ako je $x_{n'} = x_{n'+1}$ za neke $n' \in \mathbb{N}$, tada je očito x_n fiksna točka. Dakle, pretpostavimo da je $x_n \neq x_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada prema propoziciji 1.2.1 vrijedi:

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) > 0.$$

Koristeći nejednakost u (3.4), za $x = x_{n-1}, y = x_n$, slijedi:

$$G(Tx_{n-1}, Tx_n, T^2x_n) \leq aG(x_{n-1}, Tx_{n-1}, T^2x_{n-1}) + bG(x_n, Tx_n, T^2x_n)$$
$$+cG(x_{n-1}, Tx_{n-1}, Tx_n) + dG(x_n, Tx_n, T^3x_{n-1}),$$

iz čega slijedi:

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) \leq aG(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) + bG(x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$$
$$+cG(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) + dG(x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$$

pa je

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) \leq kG(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}),$$

gdje je $k = \frac{a+c}{1-b-d} < 1$. Kad tu nejednakost primjenimo konačno mnogo puta, dobijemo:

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) \leq k^n G(x_0, x_1, x_2), \tag{3.5}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz $(G3)$ znamo: $G(x_n, x_n, x_{n+1}) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$ za $x_n \neq x_{n+1}$, a iz propozicije 1.2.1, znamo

$$G(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n) \leq 2G(x_n, x_n, x_{n+1}).$$

Koristeći te nejednakosti i (3.5) dobivamo:

$$G(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n) \leq 2k^n G(x_0, x_1, x_2).$$

Za $n, m \in \mathbb{N}, \ n < m$, zbog nejednakosti pravokutnika, slično kao u dokazu teorema 3.2.1 imamo:

$$\begin{aligned} G(x_m, x_m, x_n) &\leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) \\ &\quad + ... + G(x_{m-1}, x_m, x_m) \\ &\leq 2(k^n + k^{n+1} + k^{n+2} + ... + k^{m-1})G(x_0, x_1, x_2) \\ &\leq \frac{2k^n}{1-k} G(x_0, x_1, x_2). \end{aligned}$$

Budući da $k^n \to 0$ za $n \to \infty$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da za $n > N$ vrijedi $k^n < \varepsilon \cdot \dfrac{1-k}{2G(x_0, x_1, x_2)}$. Tada za $n, m > N, m > n$ vrijedi $G(x_m, x_m, x_n) \leq \varepsilon$, a to unači da je niz (x_n) G-Cauchyjev prema propoziciji 2.2.2. Zbog potpunosti od (X, G), postoji $z \in X$ takav da je (x_n) G-kovergentan u z. Budući da $x_n \to z$ tada prema propoziciji 2.1.2 za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za $n > n_0$,

$$G(x_n, x_n, z) < \varepsilon, G(x_n, z, z) < \varepsilon.$$

U sljedećem računu ε je proizvoljan broj, a $n > n_0$ iz gornje rečenice. Želimo dokazati da je

$$(1-b)G(z, Tz, T^2z) \leq (c+d)G(z, z, Tz).$$

Prema $(G5)$ za $a = x_{n+1}$ vrijedi:

$$G(z, Tz, T^2z) \leq G(z, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, Tz, T^2z) \leq \varepsilon + G(x_{n+1}, Tz, T^2z) \tag{3.6}$$

Stavimo da je $x_{n+1} = Tx_n$ pa na $G(Tx_n, Tz, T^2z)$ primijenimo pretpostavku teorema za $x = x_n, y = z$. Tada dobivamo:

$$G(Tx_n, Tz, T^2z) \leq aG(x_n, Tx_n, T^2x_n) + bG(z, Tz, Tz^2) + cG(x_n, Tx_n, Tz) + dG(z, Tz, T^3x_n)$$

$$G(x_{n+1}, Tz, T^2z) \leq aG(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) + bG(z, Tz, Tz^2) + cG(x_n, x_{n+1}, Tz) + dG(z, Tz, x_{n+3}) \tag{3.7}$$

Sad ćemo ocijeniti svaki od tih pribrojnika na desnoj strani.
Prema $(G5)$ za $a = x_{n+1}$ imamo:

$$\begin{aligned}
G(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+2}) \\
&\leq \frac{2k^n}{1-k}G(x_0, x_1, x_2) + \frac{2k^{n+2}}{1-k}G(x_0, x_1, x_2) \\
&\leq 2 \cdot \frac{2k^n}{1-k}G(x_0, x_1, x_2) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

za dovoljno velik n i $m > n_0$.
Prema $(G5)$ za $a = z$ imamo:

$$\begin{aligned}
G(x_n, x_{n+1}, Tz) &\leq G(x_n, z, z) + G(z, x_{n+1}, Tz) \\
&< \varepsilon + G(Tz, z, x_{n+1}) \\
&\leq \varepsilon + G(Tz, z, z) + G(z, z, x_{n+1}) \\
&< 2\varepsilon + G(z, z, Tz).
\end{aligned}$$

Prema $(G5)$ za $a = z$

$$G(z, Tz, x_{n+3}) = G(Tz, z, x_{n+3}) \leq G(Tz, z, z) + G(z, z, x_{n+3}) < G(z, z, Tz) + \varepsilon.$$

Sad iz ovih ocjena i (3.6) i (3.7) imamo:

$$\begin{aligned} G(z, Tz, T^2z) &\leq \varepsilon + G(x_{n+1}, Tz, T^2z) \\ &\leq \varepsilon + a \cdot \varepsilon + bG(z, Tz, T^2z) + c(2\varepsilon + G(z, z, Tz)) + d(\varepsilon + G(z, z, Tz)) \end{aligned}$$

$$G(z, Tz, T^z) - bG(z, Tz, T^2z) \leq \varepsilon(1 + a + 2c + d) + (c + d)G(z, z, Tz).$$

Budući da je ε proizvoljan i $1 - b > 0$, vrijedi:

$$G(z, Tz, T^2z) \leq \frac{c + d}{1 - b} G(z, z, Tz).$$

Zbog $(G3)$ vrijedi $G(z, z, Tz) \leq G(z, Tz, T^2z)$ pa dobivamo:

$$G(z, Tz, T^2z) \leq \frac{c + d}{1 - b} G(z, Tz, T^z).$$

Dokažimo i jedinstvenost fiksne točke z. Neka su u i z fiksne točke za T. Tada je $u = Tu = T^2u = T^3u, z = Tz = T^2z = T^3z$. Uvrstimo u pretpostavku (3.4) $x = u, y = z$:

$$G(Tu, Tz, T^2z) \leq aG(u, Tu, T^2u) + bG(z, Tz, T^2z) + cG(u, Tu, Tz) + dG(z, Tz, T^3u),$$

$$G(u, z, z) \leq aG(u, u, u) + bG(z, z, z) + cG(u, u, z) + dG(z, z, u).$$

Budući da je prema $(G1)$

$$G(u, u, u) = G(z, z, z) = 0,$$

dobivamo:

$$(1 - d)G(u, z, z) \leq cG(u, u, z)$$

$$G(u, z, z) \leq \frac{c}{1 - d} G(u, u, z) \tag{3.8}$$

Zamijenimo li mjesta u i z, dobivamo:

$$G(z, u, u) \leq \frac{c}{1 - d} G(z, z, u). \tag{3.9}$$

Iz (3.8) i (3.9) slijedi:

$$G(u, z, z) \leq \frac{c^2}{(1 - d)^2} G(u, z, z).$$

Kad bi vrijedilo $u \neq z$, tada je prema $(G2)$ $G(u, z, z) > 0$ i trebalo bi vrijediti $\frac{c^2}{(1-d)^2} \geq 1$, tj. $\frac{c}{1-d} \geq 1$ ili $\frac{c}{1-d} \leq -1$. Prva nejednakost vodi prema $c \geq 1 - d$, tj. $c + d \geq 1$ što nije istina prema uvjetima na c i d. Druga nejednakost vodi prema $c \leq -1 + d$, tj. $1 + c \leq d$, što također nije istina jer su c i d manji od 1. Dakle, pretpostavka $u \neq z$ nije istinita pa zaključujemo da je $u = z$, tj. fiksna točka na T je jedinstvena. □

Teorem 3.2.5. *Neka je (X, G) G-metrički prostor i $T : X \to X$ funkcija takva da vrijedi:*

$$G(Tx, Ty, Tz) \leq aG(x, y, z) + bG(x, Tx, Tx) + cG(y, Ty, Ty) + dG(z, Tz, Tz) \ \forall \ x, y, z \in X, \tag{3.10}$$

pri čemu je $a + b + c + d < 1$, $c + d < 1$ i $a + b \geq 0$. Tada ili T ima jedinstvenu fiksnu točku ili svaki element od X je fiksna točka od T.

Dokaz. Neka je proizvoljno odabrana točka $x_0 \in X$ te neka je definiran niz (x_n) u X, $x_n = T^n(x_0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo:

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq aG(x_{n-1}, x_n, x_n) + bG(x_{n-1}, x_n, x_n) + cG(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + dG(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}),$$

iz čega slijedi:

$$\begin{aligned} G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) &\leq \frac{a+b}{1-(c+d)} G(x_{n-1}, x_n, x_n) \\ &\leq \left(\frac{a+b}{1-(c+d)} \right)^2 G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1}) \leq ... \leq \\ &\leq \left(\frac{a+b}{1-(c+d)} \right)^n G(x_0, x_1, x_1). \end{aligned}$$

Iz uvjeta teorema, $a + b + c + d < 1$ slijedi $a + b < 1 - (c + d)$, a ujedno je i $a + b \geq 0$ pa je koeficijent $\frac{a+b}{1-(c+d)} \in [0, 1\rangle$. Za $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$, slično kao u dokazu teorema 3.1.1, dobivamo da je

$$G(x_n, x_m, x_m) < \frac{k^n}{1-k} G(x_0, x_1, x_1),$$

gdje je $k = \frac{a+b}{1-(c+d)}$ i dobivamo da je (x_n) G-Cauchyjev niz prema teoremu 2.2.2.
Budući da je (X, G) G-potpun, postoji x' takav da $x_n \to x'$.
Sada je :

$$\begin{aligned} G(x', Tx', Tx') &\leq G(x', x_n, x_n) + G(x_n, Tx', Tx') \\ &\leq G(x', x_n, x_n) + aG(x_{n-1}, x', x') + bG(x_{n-1}, x_n, x_n) + (c + d)G(x', Tx'.Tx'), \end{aligned}$$

iz čega slijedi:

$$(1 - (c + d))G(x', Tx', Tx') \leq G(x', x_n, x_n) + aG(x_{n-1}, x', x') + bG(x_{n-1}, x_n, x_n). \tag{3.11}$$

Budući da je x' limes niza x_n, prema teoremu2.1.2 imamo da

$$G(x', x_n, x_n) \to 0 \ i \ G(x_{n-1}, x', x') \to 0,$$

tj. za svaki $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$ vrijedi

$$G(x', x_n, x_n) < \varepsilon, \; G(x_{n-1}, x', x') < \varepsilon.$$

Budući da je (x_n) G-Cauchyjev niz, prema teoremu 2.2.2 za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da za $m, n \geq n_1$ vrijedi:

$$G(x_n, x_m, x_m) < \varepsilon.$$

Kad u tu nejednakost umjesto n stavimo $n - 1$, a umjesto m stavimo n, dobivamo da za $n > n_1 + 1$ vrijedi:

$$G(x_{n-1}, x_n, x_n) < \varepsilon.$$

Vratimo li sve ove ocjene u nejednakost 3.11 dobivamo da za $n \geq \max\{n_0, n_1 + 1\}$ vrijedi:

$$\begin{aligned}(1 - (c + d))G(x', Tx', Tx') &\leq \varepsilon(1 + a + b)\\ G(x', Tx', Tx') &\leq \varepsilon\frac{1 + a + b}{1 - (c + d)}.\end{aligned}$$

Ova nejednakost vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$ pa je $G(x', Tx', Tx') = 0$ iz čega slijedi da je $x' = Tx'$. Naime, kad bi bilo $x' \neq Tx'$, tada bi $G(x', Tx', Tx')$ bio strogo pozitivan broj što ne vrijedi. Dakle preslikavanje T ima fiksnu točku x'.
Kad $n \to \infty$, imamo:

$$G(x', Tx', Tx') = 0.$$

Ako nisu svi elementi od X nije fiksne točke za T, tada postoji neki $x^* \in X$ takav da je $Tx^* \neq x^*$ pa stavimo $x = y = z = x^*$ u izraz (3.10) te imamo:

$$0 \geq (b + c + d)G(x^*, Tx^*, Tx^*),$$

iz čega slijedi da je $b + c + d \geq 0$. Iz uvjeta teorema $a + b + c + d < 1$, slijedi da A mora biti manji od 1. Neka je y druga fiksna točka od T. Tada:

$$\begin{aligned}G(x', y, y) &= G(Tx', Ty, Ty)\\ &\leq aG(x', y, y) + bG(x', Tx', Tx') + (c + d)G(y, Ty, Ty)\\ &= aG(x', y, y),\end{aligned}$$

iz čega slijedi da je $G(x', y, y) = 0$ za $a < 1$. Zato je $x' = y$, tj. x' je jedinstvena fiksna točka od T. □

Ideju za ovaj teorem crpili smo iz članka [2]. Ovdje smo dokazali teorem čiji analogon je dan u spomenutom članku.

Bibliografija

[1] M. Asadi, E. Karapinar, P. Salimi, *A new approach to G-metric and related fixed point theorems, J. Inequal. Appl. 2013, 2013:454.*

[2] K. Jain, J. Kaur, *A generalization of G-metric spaces and related fixed point theorems, Math. Inequal. Appl., 22(2019), 1145-1160.*

[3] S. Mardešić, *Matematička analiza 1. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1991.*

[4] Z. Mustafa, B. Sims, *A new approach to generalized metric spaces, J. Nonlinear Convex Anal. 7(2006), 289-297.*

Sažetak

U diplomskom radu definirali smo G-metriku i dokazali njezina najbitnija svojstva koja smo koristil tijekom cijelog rada. Konstruirali smo G-metriku iz metrike, ali i metriku iz G-metrike. Dokazali smo i nekoliko dokaza vezanih uz konvergenciju i potpunost G-metričkog prostora. Za kraj smo proučavali teoreme o fiksnoj točki. Dokazali smo Banachov teorem o fiksnoj točki, teorem o fiksnoj točki u G-metričkom prostoru i povezano s tim dijelom, još nekoliko teorema.

Summary

In the thesis, we have defined the G -metric and proved its most important properties that we used throughout the paper. We constructed G -metrics from metrics, but also metrics from G -metrics. We have also given several theorems related to the convergence and completeness of the G -metric space. Finally, we have studied fixed point theorems. We have proved Banach's fixed point theorem, the fixed point theorem in G -metric space and several other related theorems.

Životopis

Zovem se Ana Arhanić. Rođena sam 10. ožujka 1996. godine u Zagreb. Osnovnu "Cvjetno naselje" pohađala sam u Zagrebu u razdoblju od 2002. do 2010. godine. Srednju školu "II. gimnazija" pohađala sam također u Zagrebu u razdoblju od 2010. do 2014. godine. Potom sam upisala Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu. Tu sam završila preddiplomski sveučilišni studij Matematika-smjer nastavnički, a nakon toga sam upisala i diplomski sveučilišni studij Matematika-smjer nastavnički.