SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Darija Dabić

NEWTONOVI ČETVEROKUTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, Srpanj, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

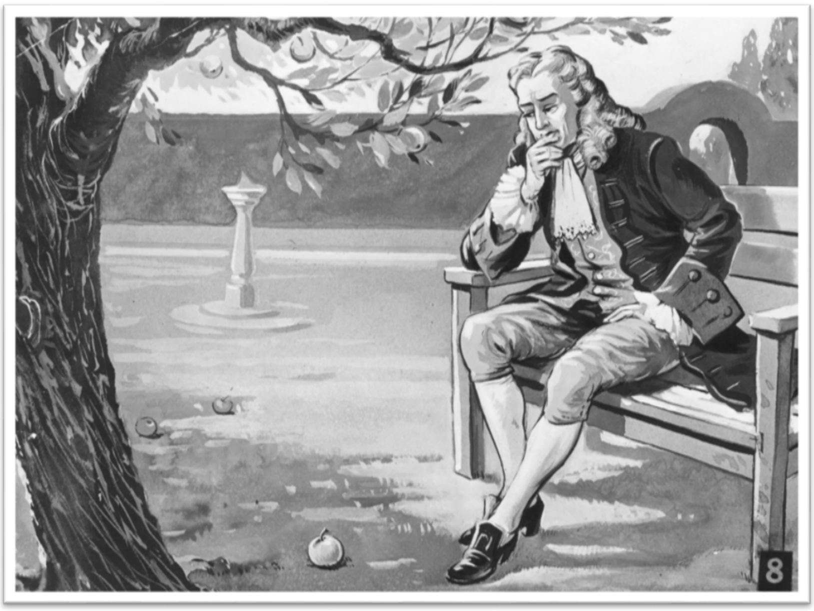
1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala prof. dr. sc. Juraju Šiftaru na stručnoj pomoći i vodstvu, prenesenom znanju te izuzetnoj mentorskoj podršci tijekom izrade ovog diplomskog rada.

Sadržaj

Uvod

Isaac Newton (1643. - 1727.) bio je jedan od najznačajnijih znanstvenika u povijesti. Iako je mnogo poznatiji po matematičkim otkrićima i postignućima na području infinitezimalnog računa, geometrija je također pripadala središtu njegove znanstvene misli. Ovaj diplomski rad posvećen je temi iz područja euklidske geometrije, Newtonovim četverokutima, pripadnim kubnim jednadžbama i njihovim racionalnim rješenjima.



Slika: Isaac Newton

U prvom poglavlju opisana je tema ovog diplomskog rada, odnosno objašnjena je osnovna problematika promatrane teme, a to je rezultat Newtonovog problema, Newtonov četverokut i njegova pripadna kubna jednadžba. Jedno potpoglavlje posvećeno je tetivnim četverokutima budući da Newtonov četverokut pripada toj vrsti. Zatim je prikazano šest različitih izvoda Newtonove jednadžbe.

U drugom poglavlju prikazan je povijesni pregled i razvoj rješavanja Newtonove jednadžbe u kojem je sudjelovala nekolicina značajnih matematičara. Opisane su metode te su izvedeni i dokazani glavni teoremi koji su ključni u pronalaženju svih racionalnih rješenja Newtonove jednadžbe.

U trećem poglavlju izložena su određena svojstva nultočaka Newtonovog polinoma i njemu pridruženog polinoma.

U četvrtom poglavlju iskazan je i dokazan obrat Newtonovog rezultata te je dana i dokazana formula za površinu Newtonovog četverokuta.

U petom poglavlju navedeno je nekoliko primjera u kojima se pojavljuju Newtonov polinom i njemu pridruženi polinom.

Glavna referenca ovog rada je znanstveni članak [1] čiji su autori matematičari Mowaffaq Hajja i Jonathan Sondow, stoga je valjano reći nekoliko riječi o njima.

Mowaffaq Hajja rođen je u Jordanu 1946. godine. Diplomirao je na Tehničkom Sveučilištu u Turskoj 1972. godine i doktorirao je na Purdue Sveučilištu u SAD-u 1978. godine gdje je napisao svoj prvi znanstveni rad pod vodstvom T. T. Moha. Nakon dvije godine rada na državnom sveučilištu u Michiganu u SAD-u, preselio se na Sveučilište Yarmouk u Irbidu u Jordanu gdje je do sada proveo većinu svog profesionalnog života. U njegovom znanstvenom istraživačko-matematičkom radu, glavni su mu interesi algebra, geometrija te pisanje za MAA (Mathematical Association of America) i slične časopise.

Jonathan Sondow rođen je u New Yorku 1943. godine, a umro je u New Jerseyju u siječnju ove (2020.) godine. Bio je izvrstan matematičar koji je poučavao stotine studenata, sudjelovao na mnogim matematičkim konferencijama te je izdao mnogo svojih matematičkih radova. Diplomirao je na Sveučilištu u Wisconsinu 1962. godine. Doktorirao je matematiku na Sveučilištu Princeton 1965. godine s 22 godine. Dugi niz godina predavao je matematiku na institutu Courant u New Yorku, Sveučilištu Rice u Houstonu i Sveučilištu Yeshiva u New Yorku. U njegovom znanstvenom matematičko-istraživačkom radu, glavni interes mu je bila teorija brojeva.

Poglavlje 1

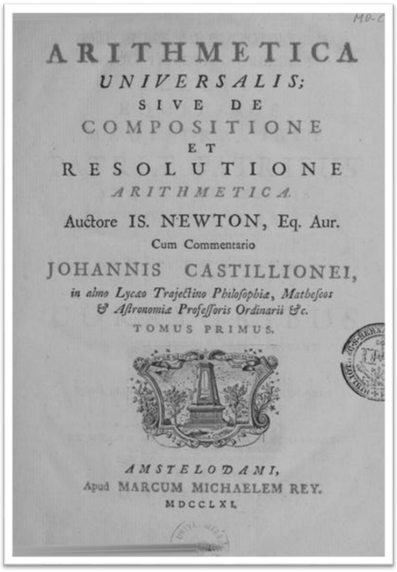
Newtonovi četverokuti

1.1 Newtonov četverokut i pripadna Newtonova jednadžba

U jednom poglavlju svoje knjige iz područja algebre, *Arithmetica Universalis*, nastale 1720. godine, Isaac Newton je pokazao kako se algebra primjenjuje na rješavanje geometrijskih problema. Spomenutom poglavlju dodijelio je naziv *Kako se geometrijska pitanja mogu svesti na jednadžbe* [1]. Jedan od razmatranih problema sastojao se u pronalaženju promjera d kružnice kojoj je upisan konveksni četverokut, čije su tri stranice zadanih duljina a, b i c, a četvrta stranica je d. Takav četverokut naziva se *Newtonov četverokut*, a njegova najdulja stranica naziva se *promjer četverokuta*.

Rješavanjem opisanog problema Newton je došao do relacije poznate kao *Newtonova jednadžba*:

$$d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - 2abc = 0. \qquad (1)$$

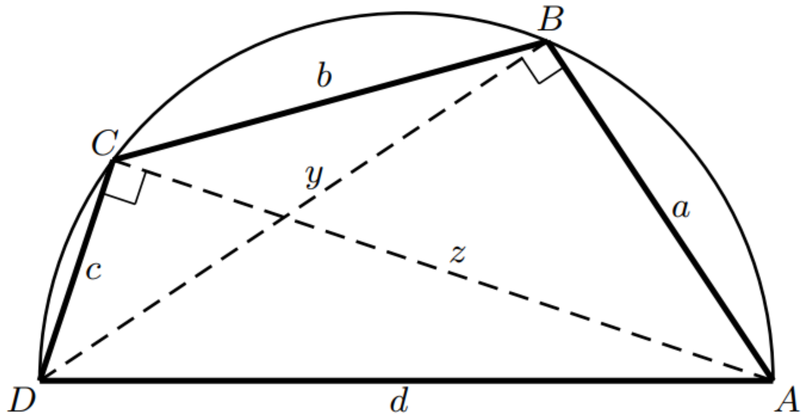


ARITHMETICA
UNIVERSALIS;
SIVE DE
COMPOSITIONE
ET
RESOLUTIONE
ARITHMETICA.
Auctore IS. NEWTON, Eq. Aur.
Cum Commentario
JOHANNIS CASTILLIONEI,
in almo Lycæo Trajectino Philosophiæ, Matheseos
& Astronomiæ Professoris Ordinarii &c.
TOMUS PRIMUS.
AMSTELODAMI,
Apud MARCUM MICHAELEM REY.
MDCCLXI.

Slika 1.1: Arithmetica Universalis (1720.)

Newton se nije bavio rješavanjem jednadžbe (1), ali ju je izveo na šest različitih načina koje ćemo izložiti u jednom od sljedećih potpoglavlja na temelju članka [2] Nicka Lorda.

[1] *How geometrical questions may be reduced to equations*



Slika 1.2: Newtonov (konveksni) četverokut

Sljedeće potpoglavlje posvećeno je tetivnim četverokutima i njihovim osnovnim karakterizacijama.

1.2 Tetivni četverokuti

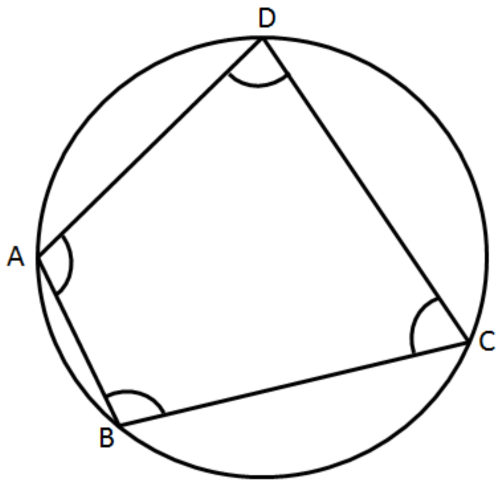
Kružnicu možemo nacrtati kroz bilo koje tri točke u ravnini pod uvjetom da su te tri točke nekolinearne. Međutim, to ne vrijedi za bilo koje četiri točke. Primjerice, kružnicu možemo nacrtati tako da prolazi vrhovima pravokutnika ili kvadrata, ali to ne vrijedi za ostale paralelograme.

U euklidskoj geometriji, četverokut kojem se može opisati kružnica zove se *tetivni četverokut* (slika 1.3). Sva četiri vrha tetivnog četverokuta leže na istoj kružnici i stranice tog četverokuta su tetive njemu opisane kružnice. U nastavku će se sve karakterizacije odnositi na konveksne četverokute. U svrhu potpunosti, navest ćemo i dobro poznate rezultate o tetivnim četverokutima.

Definicija 1.1. *Tetivni četverokut je četverokut kome se može opisati kružnica.*

Teorem 1.2. *Konveksni četverokut je tetivni ako i samo ako se simetrale stranica tog četverokuta sijeku u istoj točki. Točka sjecišta simetrala je središte opisane kružnice tom četverokutu.*

Dokaz. Neka je četverokut tetivni. Tetivnom četverokutu možemo opisati kružnicu i njegove stranice su tetive njemu opisane kružnice. Iz te činjenice i činjenice da se simetrale



Slika 1.3: Tetivni četverokut

tetiva kružnice sijeku u središtu kružnice slijedi da se simetrale stranica tog četverokuta sijeku u jednoj točki. Obratno, ako se simetrale stranica četverokuta sijeku u jednoj točki, ta točka je središte opisane kružnice tom četverokutu. Time dobivamo da se tom četverokutu može opisati kružnica, odnosno četverokut je tetivni. □

Teorem 1.3. *Zbroj dvaju nasuprotnih kutova tetivnog četverokuta je* $180°$.

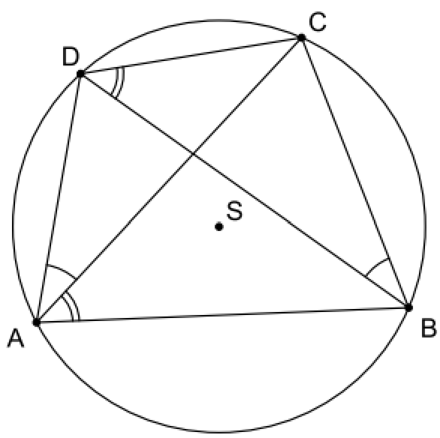
Dokaz. Unutarnje kutove četverokuta kod vrhova A, B, C, D označimo redom s $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Tvrdnja, kao neposredna posljedica teorema o obodnom i središnjem kutu, da su svi obodni kutovi nad istim lukom međusobno jednaki daje nam sljedeće: $\angle DAC = \angle DBC, \angle CAB = \angle CDB, \angle ACD = \angle ABD, \angle ACB = \angle ADB$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
\alpha + \gamma &= (\angle DAC + \angle CAB) + (\angle ACD + \angle ACB) \\
&= (\angle DBC + \angle CDB) + (\angle ABD + \angle ADB) \\
&= (\angle ABD + \angle DBC) + (\angle ADB + \angle CDB) \\
&= \beta + \delta.
\end{aligned}$$

Kako vrijedi da je $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$, tada je $\alpha + \gamma = 180°$ i $\beta + \delta = 180°$. □

Teorem 1.4. *Konveksni četverokut je tetivni ako i samo ako je kut između stranice i dijagonale jednak kutu između nasuprotne stranice i druge dijagonale.*

Dokaz. Pozivajući se na sliku 1.4, neka je četverokut $ABCD$ tetivni. Prema tvrdnji da su svi obodni kutovi nad istim lukom međusobno jednaki, što je neposredna posljedica teorema o obodnom i središnjem kutu, imamo: obodni kutovi nad tetivom $\overline{BC}$ su jednaki, odnosno $\angle BAC = \angle CDB$. Analogno bismo izveli dokaz za preostale stranice tetivnog četverokuta $ABCD$. Pretpostavimo da za trokute BAC i BDC vrijedi $\angle BAC = \angle CDB$. Kako trokuti BAC i BDC imaju zajedničku stranicu $\overline{BC}$ i kako su kutovi $\angle BAC$ i $\angle CDB$ nasuprot zajedničke stranice jednaki, tada postoji kružnica za koju vrijedi da je $\overline{BC}$ njena tetiva, a kutovi $\angle BAC$ i $\angle CDB$ su obodni kutovi nad tom tetivom. Time dobivamo da je četverokut $ABCD$ tetivni. Analogno bismo izveli dokaz za preostale stranice tetivnog četverokuta $ABCD$. □

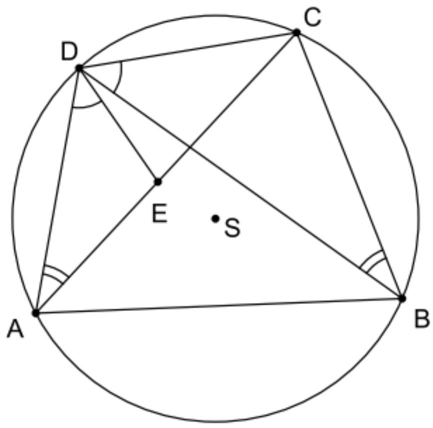


Slika 1.4

Teorem 1.5 (Ptolomejev teorem)**.** *Umnožak duljina dijagonala tetivnog četverokuta jednak je zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica četverokuta.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\angle BDC \leq \angle ADB$ (inače zamijenimo vrhove A i C). Neka je E točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $\angle ADE = \angle BDC$. Kako je uz to još i $\angle CAD = \angle CBD$ (obodni kutovi nad lukom $\widehat{CD}$, to su trokuti AED i BCD slični prema $K - K$ teoremu (sukladnost svih kutova) o sličnosti trokuta. Slijedi $\frac{|AE|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|}$, stoga

$$|AD| \cdot |BC| = |AE| \cdot |BD|.$$



Slika 1.5

Uočimo da je

$$\angle CDE = \angle BDC + \angle EDB = \angle ADE + \angle EDB = \angle ADB.$$

Uz to je i $\angle DBA = \angle DCA$ (obodni kutovi nad lukom $\widehat{DA}$), pa su trokuti BDA i CDE slični prema KKK teoremu o sličnosti trokuta. Slijedi $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|BA|}{|CE|}$, pa je

$$|AB| \cdot |CD| = |BD| \cdot |CE|.$$

Zbrajanjem $|AD| \cdot |BC| = |AE| \cdot |BD|$ i $|AB| \cdot |CD| = |BD| \cdot |CE|$ dobivamo

$$\begin{aligned} |AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| &= |AE| \cdot |BD| + |BD| \cdot |CE| \\ &= |BD|(|AE| + |CE|) = |AC| \cdot |BD|. \end{aligned}$$

□

Njemački matematičar Carl Anton Bretschneider, 1842. godine otkrio je formulu za površinu četverokuta koja glasi:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} \\ &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{2}abcd\left[1 + \cos(\alpha+\gamma)\right]} \end{aligned}$$

pri čemu su a, b, c, d stranice četverokuta, s je poluopseg četverokuta, a α i γ su dva nasuprotna kuta. *Bretschneiderova formula* vrijedi za opći četverokut pa tako i za tetivni. Dokaz formule slijedi u nastavku.

Neka je P površina četverokuta $ABCD$ tako da je

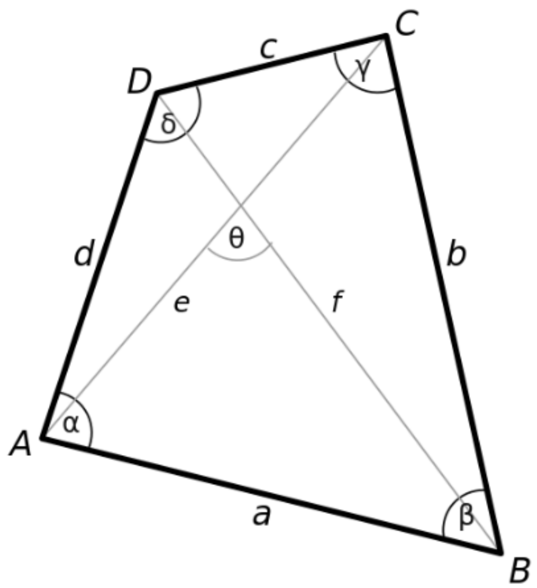
$$\begin{aligned} P(ABCD) &= P(ADB) + P(BDC) \\ &= \frac{ad \sin\alpha}{2} + \frac{bc \sin\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Množenjem obje strane jednakosti s 2 dobivamo

$$2P = ad \sin\alpha + bc \sin\gamma.$$

Kvadriranjem obje strane jednakosti dobivamo

$$4P^2 = (ad)^2 \sin^2\alpha + 2abcd \sin\alpha \sin\gamma + (bc)^2 \sin^2\gamma.$$



Slika 1.6

Kako je dijagonala BD četverokuta $ABCD$ zajednička stranica trokutima ADB i BDC, prema poučku o kosinusu vrijedi

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos\gamma.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} a^2 + d^2 - b^2 - c^2 &= 2ad\cos\alpha - 2bc\cos\gamma \\ \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2} &= ad\cos\alpha - bc\cos\gamma \end{aligned}$$

te kvadrirajući obje strane jednakosti dobivamo

$$\frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4} = (ad)^2\cos^2\alpha - 2abcd\cos\alpha\cos\gamma + (bc)^2\cos^2\gamma.$$

Zbrajanjem prethodne jednadžbe i formule za $4P^2$ dobivamo

$$\begin{aligned} 4P^2 + \frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4} &= (ad)^2 + (bc)^2 - 2abcd\cos(\alpha+\gamma) \\ &= (ad + bc)^2 - 2abcd - 2abcd\cos(\alpha+\gamma) \\ &= (ad + bc)^2 - 2abcd(\cos(\alpha+\gamma) + 1) \\ &= (ad + bc)^2 - 4abcd\left(\frac{\cos(\alpha+\gamma) + 1}{2}\right) \\ &= (ad + bc)^2 - 4abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \end{aligned}$$

Sređivanjem obje strane jednakosti imamo

$$16P^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4(ad + bc)^2 - 16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

$$16P^2 = (2(ad + bc))^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

$$16P^2 = \Big[2(ad + bc) - a^2 - d^2 + b^2 + c^2\Big]\Big[\Big]2(ad + bc) + a^2 + d^2 - b^2 - c^2\Big] - 16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

$$16P^2 = \Big[(b + c)^2 - (a + d)^2\Big]\Big[(a + d)^2 - (b + c)^2\Big] - 16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

$$16P^2 = (b + c - a - d)(b + c + a + d)(a + d - b - c)(a + d + b + c) - 16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

Uvođenjem supstitucije za poluopseg $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ imamo

$$16P^2 = 16(s - d)(s - c)(s - b)(s - a) - 16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

$$P^2 = (s-d)(s-c)(s-b)(s-a) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right).$$

Korjenovanjem obje strane jednakosti dobivamo Bretschneiderovu formulu za površinu četverokuta

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} \\ &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{2}abcd\,[1+\cos(\alpha+\gamma)]}. \end{aligned}$$

Kad izračunamo površinu tetivnog četverokuta, tada prema teoremu 1.3. vrijedi $\alpha+\gamma = 180°$, odnosno $\frac{\alpha+\gamma}{2} = 90°$. Prema Bretschneiderovoj formuli imamo

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cdot\cos^2(90°)}$$

Kako je

$$abcd\cdot\cos^2(90°) = abcd\cdot 0,$$

dobivamo

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Prethodna formula je formula za površinu tetivnog četverokuta pri čemu su a, b, c, d stranice četverokuta, a $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ poluopseg četverokuta $ABCD$ i ona je jedan od najpoznatijih rezultata indijskog matematičara Brahmagupte (iz 7. stoljeća) po kojemu je i dobila naziv.

1.3 Šest različitih izvoda Newtonove jednadžbe

Prije nego što se upustio u rješavanje opisanog geometrijskog problema, Newton je došao do zanimljivog opažanja. Za Newtonov četverokut $ABCD$ zadane su stranice a i c, promjer d njemu opisane kružnice i traži se stranica b tog četverokuta. Jasno je kako se taj problem može riješiti sintetički, odnosno geometrijskom konstrukcijom, međutim, ako su nam zadane tri stranice tog četverokuta a, b, c i traži se promjer d njemu opisane kružnice, tada ne možemo izravno sintetički pristupiti rješavanju problema jer ne možemo konstruirati inicijalnu kružnicu. Cilj svakog od Newtonovih sljedećih šest rješenja je izvesti kubnu jednadžbu (1) koja povezuje sve četiri veličine a, b, c, d kao duljine stranica Newtonovog četverokuta.

1.3.1 Pitagorin i Ptolomejev teorem

Pozivajući se na sliku 1.2, pri čemu vrijedi da je $ABCD$ Newtonov četverokut čiji je promjer $|AD| = d$ te su $|AB| = a$, $|BC| = b$ i $|CD| = c$ stranice tog četverokuta, Ptolomejev i Pitagorin teorem daju sljedeće jednakosti:

$$ac + bd = \sqrt{d^2 - a^2}\sqrt{d^2 - c^2}. \tag{2}$$

Kvadriranjem obje strane jednakosti dobivamo

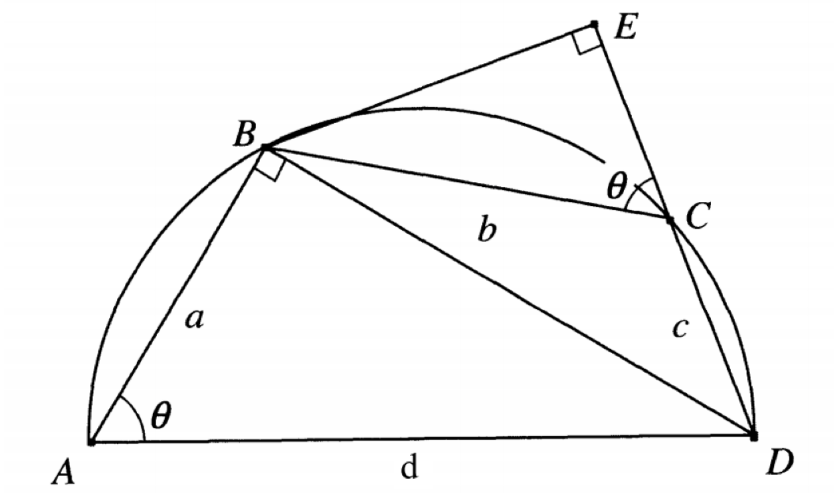
$$\begin{aligned}(ac + bd)^2 &= (d^2 - a^2)(d^2 - c^2)\\ a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 &= d^4 - a^2d^2 - c^2d^2 + a^2c^2\\ d^4 - d^2(a^2 + b^2 + c^2) - 2abcd &= 0\\ d\left(d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - 2abc\right) &= 0\end{aligned}$$

iz čega slijedi da je jednadžba (1) zadovoljena kada je $d \neq 0$.

1.3.2 Sličnost trokuta I

Povlačenjem okomice iz točke B na pravac DC, kao što je prikazano na slici 1.7, dobivamo točku presjeka koju označavamo s E. Kako je četverokut $ABCD$ tetivni i vrijedi $\angle BAD + \angle DCB = 180°$ dobivamo $\angle ECB = 180° - \angle DCB = \angle BAD = \theta$.
Zbog $\angle ABD = \angle CEB$ i $\angle BAD = \angle ECB$, prema teoremu K-K o sličnosti trokuta, pravokutni trokuti ABD i BED su slični, a iz toga dobivamo

$$\frac{|CE|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|DA|}, \quad \frac{|BE|}{|DB|} = \frac{|BC|}{|DA|}.$$



Slika 1.7: Newtonov četverokut - sličnost trokuta

Kako je $|BD| = \sqrt{d^2 - a^2}$, sređivanjem prethodnih razmjera dobivamo

$$|CE| = \frac{ab}{d}, \quad |BE| = \frac{b}{d}\sqrt{d^2 - a^2}.$$

Zatim za $|CD| = c$ imamo

$$c = |CD| = |ED| - |EC| = \sqrt{|BD|^2 - |BE|^2} - |EC|$$

iz čega slijedi

$$c = \sqrt{d^2 - a^2 - \frac{b^2}{d^2}(d^2 - a^2)} - \frac{ab}{d}.$$

Kada kvadriramo, a zatim sredimo obje strane jednakosti, dobivamo traženu jednadžbu (1) koja povezuje sve četiri veličine a, b, c, d.

Također, iz jednakosti

$$|BE|^2 = |BC|^2 - |CE|^2 = |BD|^2 - |ED|^2$$

dobivamo

$$b^2 - \frac{a^2b^2}{d^2} = d^2 - a^2 - \left(c + \frac{ab}{d}\right)^2$$

što se nakon sređivanja jednakosti svodi na (1). Newton je uočio da bismo na analogan način izveli jednadžbu da smo početno povukli okomicu iz točke D na pravac BC ili okomicu iz točke C na pravac BD.

1.3.3 Kosinusov poučak

U ovom rješenju se koristi kosinusov poučak koji se primjenjuje na trokut BCD (slika 1.7). Dakle, imamo

$$\begin{aligned} b^2 = d^2 - a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(180^\circ - \theta) \\ &= b^2 + c^2 + 2bc\cos\theta. \end{aligned}$$

Kako je $\cos\theta = \frac{a}{d}$, prema slici 1.7, uvrštavanjem u prethodno dobivenu jednakost imamo

$$d^2 - a^2 = b^2 + c^2 + \frac{2abc}{d}.$$

pa nakon sređivanja jednakosti dobivamo jednadžbu (1).

1.3.4 Sličnost trokuta II

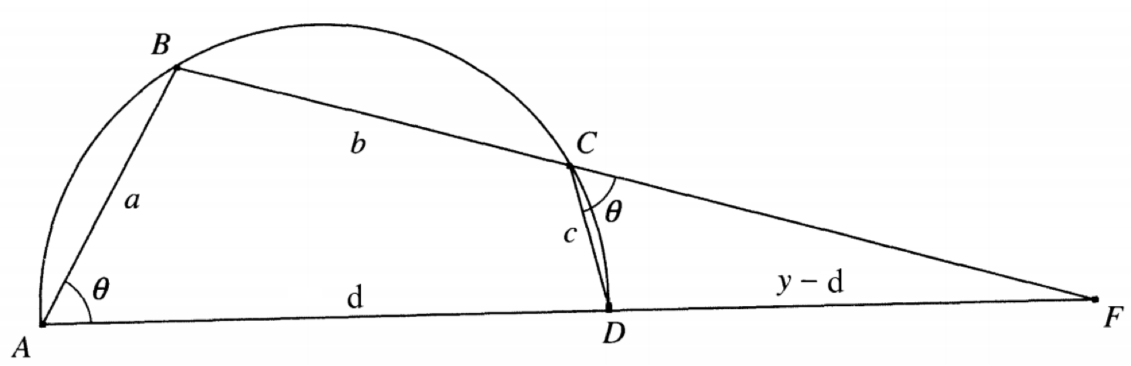
U ovom rješenju, s obzirom na sliku 1.8, konstruiramo pravce BC i AD, čiju točku sjecišta označavamo s F. Neka je $|AF| = y$.

Na analogan način, kao u rješenju Sličnost trokuta I, koristeći činjenicu da je $ABCD$ tetivni četverokut, dobivamo da su kutovi $\angle BAF$ i $\angle DCF$ jednaki. Za trokute ABF i CDF, iz prethodne jednakosti kutova te činjenice da imaju zajednički kut u vrhu F, dobivamo da su slični prema K-K teoremu o sličnosti trokuta te vrijedi

$$|CF| = \frac{cy}{a}, \quad |BF| = \frac{a(y-d)}{c}.$$

Zatim vrijedi

$$b = |BF| - |CF| = \frac{a(y-d)}{c} - \frac{cy}{a}.$$



Slika 1.8: Newtonov četverokut - sličnost trokuta II

Kad izrazimo y iz prethodne jednakosti dobivamo

$$y = \frac{a^2 d + abc}{a^2 - c^2}.$$

Primjenjujući kosinusov poučak na trokut ABF dobivamo

$$|BF|^2 = |AB|^2 + |AF|^2 - 2|AB| \cdot |AF| \cos\theta$$

odnosno

$$\frac{a^2(y-d)^2}{c^2} = a^2 + y^2 - 2ay\frac{a}{d}.$$

Uvrštavanjem y u prethodnu jednakost i sređivanjem dobivamo

$$\frac{a^2}{(a^2 - c^2)d}\left[d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - 2abc\right] = 0.$$

Kako uvijek vrijedi $\frac{a^2}{(a^2-c^2)d} \neq 0$, time smo dobili jednadžbu (1).

1.3.5 Površina četverokuta

U ovom rješenju se pozivamo na rješenje Sličnost trokuta I i sliku 1.7.
Dakle, imamo

$$\begin{aligned} P(ABCD) &= P(BAD) + P(BCD) \\ &= \frac{1}{2}|AB| \cdot |BD| + \frac{1}{2}|CD| \cdot |BE| \\ &= \frac{1}{2}a\sqrt{d^2 - a^2} + \frac{1}{2}c\frac{b}{d}\sqrt{d^2 - a^2} \\ &= \frac{ad + bc}{2d}\sqrt{d^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Slično, kada bismo podijelili četverokut $ABCD$ dijagonalom AC, dobili bismo

$$P(ABCD) = \frac{cd + ab}{2d}\sqrt{d^2 - c^2}.$$

Kada izjednačimo dobivene jednakosti za $P(ABCD)$, dobivamo

$$(ad + bc)\sqrt{d^2 - a^2} = (cd + ab)\sqrt{d^2 - c^2}.$$

Kvadriranjem i sređivanjem obje strane jednakosti dobivamo

$$d(a^2 - c^2)\left[d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - 2abc\right] = 0.$$

1.3.6 Metoda koordinata

Nezgrapnost ove metode insinuira sam naziv odjeljka u kojem je metoda opisana (članak [2]), a on glasi *Kako to ne raditi!*[2]. Newton je bio svjestan te nezgrapnosti, što je očito iz sljedećeg citata:

> *Jer oni načini, koji se nameću na prvi pogled, možda mogu prouzročiti dosta nevolje ako ih se primijeni. Tako, u problemu kojim smo se bavili, ništa ne bi bilo teže nego da nas dopadne sljedeća metoda umjesto jedne od prethodnih. No, ako bi se u računanje krenulo na taj način, zapalo bi se u veće i kompleksnije algebarske izraze nego u bilo kojem od prijašnjih postupaka i teže bi ih se dovelo do završne jednadžbe.*

[2] *Solution 6 - How not to do it!*

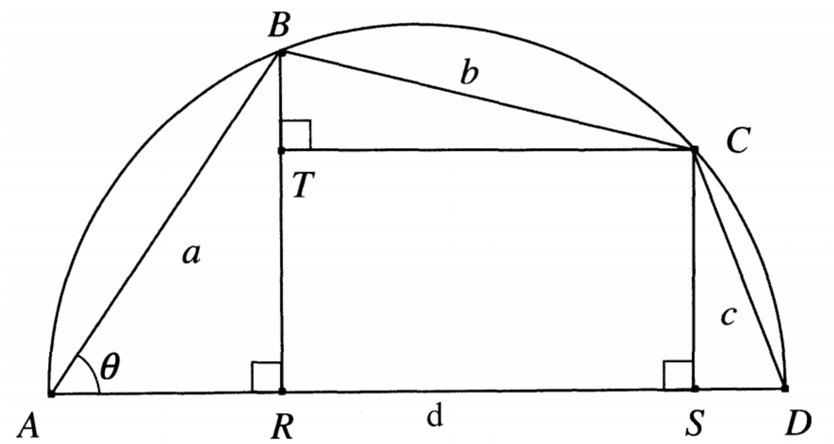
Uz pretpostavku da je zadan Kartezijev pravokutni koordinatni sustav s ishodištem u točki A, u ovoj metodi Newton je koristio koordinate točaka B i C, prema slici 1.9, kako bi izračunao $|BC| = b$.

Dakle, promatrajući trokute ABR i ABD imamo

$$|AR| = a\cos\theta = a \cdot \frac{a}{d} = \frac{a^2}{d}.$$

Slično, promatrajući trokute SDC i ADC, imamo $|SD| = \frac{c^2}{d}$ tako da

$$|RS| = |TC| = d - \frac{a^2+c^2}{d}.$$



Slika 1.9: Newtonov četverokut - metoda koordinata

Također, $|BT| = |BR| - |CS| = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{d^2}} - \sqrt{c^2 - \frac{c^4}{d^2}}$ odakle imamo

$$b^2 = |BC|^2 = |TC|^2 + |BT|^2 = \left(d - \frac{a^2+c^2}{d}\right)^2 + \left(\sqrt{a^2 - \frac{a^4}{d^2}} - \sqrt{c^2 - \frac{c^4}{d^2}}\right)^2.$$

Raspisivanjem prethodne jednakosti, zatim množenjem s d^2 dobivamo

$$b^2d^2 - 2a^2c^2 + a^2d^2 + c^2d^2 - d^4 + 2d^2\sqrt{\frac{a^2(d^2-a^2)}{d^2}}\sqrt{\frac{c^2(d^2-c^2)}{d^2}} = 0.$$

Kako su a, b, c i d pozitivni racionalni brojevi, imamo:

$$b^2d^2 - 2a^2c^2 + a^2d^2 + c^2d^2 - d^4 + 2d^2 = 2ac\sqrt{d^2 - a^2}\sqrt{d^2 - c^2}.$$

Izoliranjem korijena, zatim kvadriranjem obje strane jednakosti te faktoriziranjem izraza lijeve strane jednakosti dobivamo

$$d^2\left[d^6 - 2(a^2 + b^2 + c^2)d^4 + (a^2 + b^2 + c^2)^2d^2 - 4a^2b^2c^2\right] = 0$$

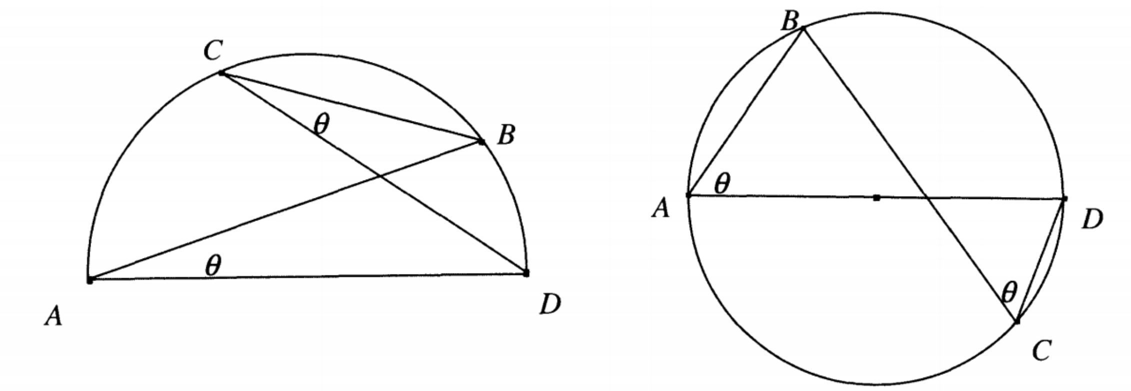
odnosno

$$d^2\left[d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - 2abc\right]\left[d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d + 2abc\right] = 0.$$

Osvrnimo se na drugo rješenje dobiveno posljednjom metodom (metodom koordinata)

$$d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d + 2abc = 0. \tag{3}$$

Dvostrukim kvadriranjem dopuštamo zamjenu x koordinata točaka B i C te mogućnost negativnog predznaka njihovih y koordinata. Rezultat toga prikazan je na slici 1.10.



Slika 1.10: Newtonovi nekonveksni četverokuti

Ako bismo analizirali dobiveni četverokut metodom u kojoj koristimo kosinusov poučak, možemo uočiti da $\angle BCD = \theta$ (prema poučku o obodnim kutovima nad istim lukom) te u tom slučaju imamo

$$d^2 - a^2 = |BD|^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta = b^2 + c^2 - \frac{2abc}{d}$$

iz čega jednostavnim sređivanjem dobivamo jednadžbu (3).

Jednadžba (1) odgovarajuća je za konveksne Newtonove četverokute, a jednadžba (3) odgovarajuća je za nekonveksne Newtonove četverokute. Važno je uočiti da $a, b, c, d \neq 0$.

U algebarskom smislu, razlikujemo dva slučaja. U prvom slučaju je $d^2 > a^2 + b^2 + c^2$ što vrijedi za jednadžbu (1), a u drugom slučaju je $d^2 < a^2 + b^2 + c^2$ što vrijedi za jednadžbu (3).
Geometrijski gledano, prvi slučaj slijedi iz činjenice da je kut $\angle BCD$ (slika 1.2) uvijek tupi kut pa prema tome $d^2 - a^2 = |BD|^2 > |BC|^2 + |CD|^2 = b^2 + c^2$. Slično, drugi slučaj proizlazi iz činjenice da je kut $\angle BCD$ (slika 1.10) uvijek šiljasti kut pa prema tome $d^2 - a^2 = |BD|^2 > |BC|^2 + |CD|^2 = b^2 + c^2$.

Jedan od primjera u kojem se pojavljuje jednadžba (3) je rješavanje Newtonovog problema u kojem se traži promjer d kružnice kojoj je upisan nekonveksni četverokut $ABCD$ sa zadanim duljinama stranica $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$ i promjerom $|AD| = d$, kao što je prikazano na slici 1.10. Tada jednadžba (2) poprima sljedeći oblik

$$ac - bd = yz = \sqrt{d^2 - a^2}\sqrt{d^2 - c^2}. \tag{4}$$

Dakle, relaciju između a, b, c i d, obzirom na sliku 1.10, dobili bismo iz jednadžbe (1) tako da umjesto b uvrstimo $-b$, što u konačnici rezultira jednadžbom (3). Jednadžbu (3) zovemo *Newtonova pridružena jednadžba*. Međutim, potrebno je uočiti specijalni slučaj kada vrijedi $a = b = c$, a tada su rješenja rezultirajućeg kubnog polinoma

$$d^3 - 3a^2d - 2a^3 = (d - 2a)(d + a)^2 \tag{5}$$

jednaka $d = 2a, -a, -a$.

Poglavlje 2

Racionalna rješenja Newtonove jednadžbe

2.1 Povijesni pregled pronalaženja racionalnih rješenja

Američki matematičar L.E. Dickson, u svojoj knjizi *History of the Theory of Numbers*[3] str. 220, raspravljao je o jednadžbi (1) promatrajući ju kao jednadžbu nad racionalnim brojevima. Naveo je 1915. godine da su matematičari E. Haentzschel i E. Lampe pronašli racionalne Newtonove četverokute metodom E. Kummera, što je L.E. Dickson objasnio detaljnije u svojoj knjizi[3] , str. 217-218. Haentzschel je u članku *Eine von Newton gestellte Aufgabe uber Sehnenvierecke*[4] dao neka od pozitivnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe (1) u obliku dvije parametrizacije za a, b, c i d.

Jednostavnija parametrizacija je

$$a = 2st(p^2 + q^2)$$

$$b = (p^2 - q^2)(s^2 + t^2)$$
$$c = 2pq(s^2 - t^2) - 2st(p^2 - q^2)$$
$$d = (p^2 + q^2)(s^2 + t^2)$$

gdje su $p, q, s, t \in \mathbb{N}$ i zadovoljavaju $\frac{s}{t} > \frac{p}{q} > 1$.

[3]L. E. Dickson. *History of the Theory of Numbers, vol. II*, Chelsea Publishing Co., New York, 1971.

[4]E. Haentzschel. *Eine von Newton gestellte Aufgabe uber Sehnenvierecke*, Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 46(1915) 190–194.

Uočimo da su za ovo rješenje dijagonale y i z četverokuta, prikazanog na slici 1.2, također cijeli brojevi. Naime, vrijedi

$$y = \sqrt{d^2 - a^2} = (p^2 + q^2)(s^2 - t^2)$$

$$z = \sqrt{d^2 - c^2} = p^2(s^2 - t^2) + 4pqst + q^2(t^2 - s^2).$$

U svojoj knjizi[3] str. 598, L. E. Dickson je naveo da je njemački matematičar P. Bachmann dao metodu za pronalaženje svih pozitivnih cjelobrojnih rješenja. Dickson je prezentirao skicu Bachmannove metode, međutim, propustio je spomenuti da je ista uključivala rješavanje Pellove jednadžbe.

Godine 1926., nizozemski matematičar N. Anning, u svojoj kratkoj bilješci[5] je raspravljao o Newtonovoj jednadžbi. Dijeljenjem jednadžbe (1) s d, problem pronalaženja cjelobrojnih rješenja jednadžbe (1) reducirao je na pronalaženje racionalnih rješenja jednadžbe

$$u^2 + v^2 + w^2 + 2uvw - 1 = 0. \tag{6}$$

Koristeći činjenicu da je jednadžba (6) zadovoljena kosinusima triju kutova bilo kojeg trokuta te činjenicu da su kosinusi kutova bilo kojeg trokuta racionalni brojevi ako i samo ako su duljine stranica trokuta racionalni brojevi (ekvivalentno vrijedi ako su stranice trokuta cijeli brojevi), zaključio je sljedeće: ako su α, β i γ racionalni brojevi (ekvivalentno, cijeli brojevi) koji predstavljaju duljine stranica trokuta ABC, tada je uređena trojka

$$(u, v, w) = (\cos A, \cos B, \cos C),$$

tj.

$$(u, v, w) = \left(\frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}, \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}, \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}\right) \tag{7}$$

racionalno rješenje jednadžbe (6).

Anning se nije bavio problemom pronalaženja svih racionalnih rješenja jednadžbe (6) iako je bio svjestan da su trojke oblika $(u, v, w) = (1, s, -s)$, $s > 1$ rješenja jednadžbe (6) koja nisu kosinusi kutova te na taj način ne mogu obuhvatiti rješenja od (7). Također, nije bio svjestan činjenice da će za šiljastokutne trokute ABC uređena trojka (7) dati točno sva pozitivna rješenja jednadžbe (6).

[5] N. Anning. *A cubic equation of Newton's*, Amer. Math. Monthly. 33 (1926) 211–212.

Godine 1953., američki matematičar L.J. Mordell[6], u [5], proučavao je diofantsku jednadžbu

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = n,$$

koja je za $n = 1$ jednaka slučaju kada je $d = 1$ u Newtonovoj jednadžbi. Mordell je pronašao sva cjelobrojna rješenja za taj slučaj i dao formule za neka od njih te je tvrdio da su rezultat Bachmannovom zaslugom.

Godine 1955., I.A. Barnett je razmatrao jednadžbu (6) u svojoj kratkoj bilješci[7]. Dokazao je da su sva racionalna rješenja dana sa (7) ako dopustimo da α, β i γ pripadaju skupu $\mathbb{Z} \setminus 0$. Njegova elegantna metoda, koju ćemo opisati u idućem potpoglavlju, koristi jednostavnu linearnu algebru i ne pokazuje povezanost s trigonometrijskim identitetima.

Nesvjestan rezultata koje su postigli matematičari Anning i Barnett, jordanski matematičar M. Hajja, koristeći identitet (6) koji vrijedi za kosinuse triju kutova bilo kojeg trokuta, uveo je familiju onih koju je nazvao generaliziranim trokutima. Utvrdio je njihova svojstva, slična onima za općenite trokute, a završio je s potpuno istim rezultatom kao i Barnett. Također, Hajja je dokazao da su sva pozitivna racionalna rješenja jednadžbe (6) dana u (7) kada α, β i γ ograničimo na duljine stranica šiljastokutnog trokuta.

2.2 Racionalna rješenja dobivena Barnettovom metodom

I.A. Barnett, u bilješci[7], bavio se Newtonovom jednadžbom (6) i dokazao teorem 2.1. Popunjavajući nekoliko detalja koje je on izostavio, u nastavku je iskazan i dokazan Barnettov teorem.

Teorem 2.1. *Racionalna rješenja jednadžbe $u^2 + v^2 + w^2 + 2uvw - 1 = 0$ su*

$$(u, v, w) = \left(\frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}, \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}, \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} \right), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{8}$$

zajedno s rješenjima oblika

$$(\pm 1, s, \mp s), (s, \pm 1, \mp s), (s, \pm s, \mp 1), \; s \in \mathbb{Q}. \tag{9}$$

[6] Louis Joel Mordell (1888-1972), britanski matematičar rođen u Americi, poznat po značajnim postignućima u teoriji brojeva. Osobito je istaknut najvažniji rezultat o eliptičkim krivuljama nad poljem racionalnih brojeva, a to je Mordell-Weilov teorem koji kaže da je grupa racionalnih točaka eliptičke krivulje konačno generirana Abelova grupa.

[7] I. A. Barnett. *A diophantine equation characterizing the law of cosines*, Amer. Math. Monthly. 62 (1955) 251–252.

Dokaz. Ako je uređena trojka (u, v, w) rješenje jednadžbe (6) i ako je $w = \pm 1$, tada je $v = \mp u$. Stavimo na stranu ona rješenja u kojima je jedna od nepoznanica jednaka ± 1, primjerice, rješenja poput

$$(u, v, w) = (\pm 1, s, \mp s), (s, \pm 1, \mp s), (s, \mp s, \pm 1).$$

Stoga neka je (u, v, w) rješenje jednadžbe (6) u kojem su $u, v, w \neq \pm 1$ i pretpostavimo da je dan sljedeći sustav jednadžbi

$$M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gdje je

$$M = \begin{bmatrix} v & u & -1 \\ -1 & w & v \\ w & -1 & u \end{bmatrix}.$$

Kako je determinanta matrice M jednaka $u^2 + v^2 + w^2 + 2uvw - 1$ i jednaka je nuli, slijedi da dani sustav ima netrivijalna rješenja $(x, y, z) = (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. Tada imamo

$$\alpha v + \beta u = \gamma, \quad \beta w + \gamma v = \alpha, \quad \alpha w + \gamma u = \beta. \tag{10}$$

Ako su bilo koje dvije koordinate jednake nuli, tada je i treća jednaka nuli. Uzmimo da su $\alpha = \beta = 0$, tada je i $\gamma = 0$ čime smo dobili kontradikciju s obzirom na $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. Ako je točno jedna od koordinata jednaka nuli, primjerice, $\alpha = 0$, a $\beta \neq 0$ i $\gamma \neq 0$, tada je $\beta u = \gamma, \beta w + \gamma v = 0, \gamma u = \beta$ te dobivamo da je $u = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$. Dakle, $u = \pm 1$ čime smo opet dobili kontradikciju.
Prema tome, $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$. Zapisivanjem (10) u obliku

$$L \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

gdje je

$$L = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & 0 \\ 0 & \gamma & \beta \\ \gamma & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

dobivamo

$$\det L = \beta\gamma\alpha + \alpha\beta\gamma = 2\alpha\beta\gamma.$$

Uočimo da je determinanta matrice L jednaka $2\alpha\beta\gamma \neq 0$ te primjenjujući Cramerovo pravilo dobivamo

$$D_1 = \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & 0 \\ \alpha & \gamma & \beta \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \det D_1 = \beta^2\alpha + \gamma^2\alpha - \alpha^3$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} \beta & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ \gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \det D_2 = \alpha^2\beta + \gamma^2\beta - \beta^3$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & \gamma \\ 0 & \gamma & \alpha \\ \gamma & 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad \det D_3 = \alpha^2\gamma + \beta^2\gamma - \gamma^3$$

i zatim

$$u = \frac{\beta^2\alpha + \gamma^2\alpha - \alpha^3}{2\alpha\beta\gamma} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$$

$$v = \frac{\alpha^2\beta + \gamma^2\beta - \beta^3}{2\alpha\beta\gamma} = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}$$

$$w = \frac{\alpha^2\gamma + \beta^2\gamma - \gamma^3}{2\alpha\beta\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}.$$

To su rješenja navedena u (8), čime smo dokazali tvrdnju. □

Sljedeći korolar parametrizira sva racionalna rješenja Newtonove jednadžbe (1) na više simetričan način nego u teoremu 2.3. kojeg prikazujemo u sljedećem potpoglavlju.

Korolar 2.2. *Racionalna rješenja* (a, b, c, d) *Newtonove jednadžbe* $d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - 2abc = 0$ *parametrizirana su na sljedeći način:*

$$(a, b, c, d) = t\Big((\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)\alpha, (\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2)\beta, (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)\gamma, 2\alpha\beta\gamma\Big), \tag{11}$$

gdje su $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ i t proizvoljan racionalan broj, zajedno s rješenjima oblika

$$t(\pm 1, s, \mp s, 1), t(s, \pm 1, \mp s, 1), t(s, \pm s, \mp 1, 1), \quad s, t \in \mathbb{Q}. \tag{12}$$

te rješenjima oblika

$$(a, b, c, 0), \quad a, b, c \in \mathbb{Q}, \quad abc = 0. \tag{13}$$

Dokaz. Skup rješenja (13) odgovara uvrštavanju $d = 0$ u jednadžbu (1). Ako je $d \neq 0$ u jednadžbi (1), tada jednadžba (6) slijedi iz jednadžbe (1) uvrštavajući sljedeće

$$u = \frac{a}{d}, \quad v = \frac{b}{d}, \quad w = \frac{c}{d}.$$

Stoga rješenja (a, b, c, d) od (1) su sljedeća

$$(a, b, c, d) = (ru, rv, rw, r), \tag{14}$$

gdje je (u, v, w) rješenje od (6) i vrijedi $r \neq 0$. Rješenja (u, v, w) od (6) u (9) daju rješenja od (1) u (12). Rješenja (u, v, w) od (6) u (11) daju rješenja od (1) u (11) uvrštavanjem $r = 2\alpha\beta\gamma t$ u (14). Uočimo, kako je raspon rješenja od α, β, γ nad skupom cijelih brojeva različitih od nule te kako je $t \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, tada je i $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. □

2.3 Racionalna rješenja dobivena algebarskom metodom

U ovom poglavlju prikazujemo još jednu metodu za pronalaženje općeg racionalnog rješenja jednadžbe (1), analogno jednadžbe (2). Zapišimo jednadžbu (2) u sljedećem obliku:

$$(ab + cd)^2 = (d^2 - a^2)(d^2 - b^2). \tag{15}$$

Ekvivalentnost (2) i (15) može se izravno provjeriti, ali isto tako slijedi iz činjenice da je (2) ekvivalentno (1), što je simetrično za a, b i c. Možemo uočiti da $d = 0, d = \pm a, d = \pm b$ i $d = \pm c$ vodi do rješenja opisanog u (12) i (13). Stoga pretpostavimo sljedeće

$$d \neq 0, \quad d \neq \pm a, \quad d \neq \pm b, \quad d \neq \pm c. \tag{16}$$

Dijeljenjem (15) s $(d + a)^2(d + b)^2$ dobivamo

$$\left(\frac{d - a}{d + a}\right)\left(\frac{d - b}{d + b}\right) = \left(\frac{cd + ab}{(d + a)(d + b)}\right)^2.$$

Supstitucijom

$$\frac{cd+ab}{(d+a)(d+b)} = t, \tag{17}$$

možemo uočiti da je $t \neq 0$, stoga

$$\frac{d-a}{d+a} = st, \tag{18}$$

za neki $s \neq 0$, stoga slijedi

$$\frac{d-b}{d+b} = \frac{t}{s}. \tag{19}$$

Pretpostavke u (16) su ekvivalentne s uvjetima

$$st \neq 0, \quad t \neq 1, \quad s \neq -1.$$

Rješavajući (17), (18), (19) za a, b i c dobivamo

$$a = \frac{1-st}{1+st}d, \quad b = \frac{s-t}{s+t}d, \quad c = \frac{4st-(1-st)(s-t)}{(1+st)(s+t)}d. \tag{20}$$

Dakle, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ ako i samo ako $d, s, t \in \mathbb{Q}$. Zamjenom d s r u (20), dokazali smo sljedeći rezultat.

Teorem 2.3. *Racionalna rješenja Newtonove jednadžbe dana su sljedećom parametrizacijom:*

$$(a,b,c,d) = \left(\frac{1-st}{1+st}r, \frac{s-t}{s+t}r, \frac{4st-(1-st)(s-t)}{(1+st)(s+t)}r, r\right), \tag{21}$$

gdje $r, s, t \in \mathbb{Q}$ *zadovoljavaju* $rst(1+st)(s+t) \neq 0$*, zajedno s rješenjima danim u (12) i (13). Dakle, racionalna rješenja od (6) su*

$$\left(\frac{1-st}{1+st}, \frac{s-t}{s+t}, \frac{4st-(1-st)(s-t)}{(1+st)(s+t)}\right), \quad s, t \in \mathbb{Q}, \quad st(1+st)(s+t) \neq 0,$$

zajedno s rješenjima danim u (9).

Iz prethodnog teorema dobivamo neka cjelobrojna rješenja.

Korolar 2.4. *Određena pozitivna cjelobrojna rješenja (a, b, c, d) Newtonove jednadžbe parametrizirana su na sljedeći način:*

$$a = (mq + np)(nq - mp), \quad b = (mq - np)(nq + mp),$$

$$c = 4mnpq - (nq - mp)(mq - np), \quad d = (mq + np)(nq + mp),$$

što je ekvivalentno

$$a = mn(q^2 - p^2) + pq(n^2 - m^2), \quad b = mn(q^2 - p^2) + pq(m^2 - n^2),$$

$$c = 4mnpq + pq(m + n)^2 - mn(p + q)^2, \quad d = mn(p^2 + q^2) + pq(m^2 + n^2),$$

gdje su $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ takvi da $a, b, c > 0$. Također, ako je (a, b, c, d) pozitivno cjelobrojno rješenje, tada je i (ka, kb, kc, kd) rješenje za proizvoljan $k \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Newtonova jednadžba je homogena, naime, ako je (a, b, c, d) rješenje, tada je i (ka, kb, kc, kd) rješenje za proizvoljan $k \in \mathbb{C}$. Zatim eliminiramo nazivnike u (21) tako da rješenje pomnožimo s $k = (1+st)(s+t)$. Nadalje, uzmimo da su $s = \frac{m}{n}$ i $t = \frac{p}{q}$ te eliminiramo nove nazivnike množenjem s $r = n^2q^2$. Konačno, odaberimo $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ takve da su $a, b, c > 0$. Time dobivamo rezultat koji je jednak tvrdnji teorema. Alternativno, potrebno je provjeriti da (1) vrijedi za a, b, c i d. □

Primjerice, odaberimo relativno proste brojeve $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ takve da vrijedi $nq - mp = 1$ i $mq - np > 0$. Tada imamo

$$a = mq + np > 0, \quad b = (mq - np)(nq + mp) > 0,$$

$$c = 4mnpq - (mq - np) > 0, \quad d = (mq + np)(nq + mp) > 0.$$

Kada bismo uzeli $(m, n) = (1, 1)$ i $(p, q) = (1, 2)$ dobili bismo $(a, b, c, d) = (3, 3, 7, 9)$. Uočimo da u ovom slučaju dijagonale $y = z = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}$ nisu racionalni brojevi, dok s Haentzschelovim parametriziranim rješenjem dobivamo da su duljine dijagonala cijeli brojevi, kao što smo vidjeli u prvom poglavlju.

2.4 Eksplicitna biracionalna korespondencija između skupova rješenja prema teoremu 2.1. i teoremu 2.3.

Racionalna rješenja jednadžbe (6), prema teoremima 2.1. i 3.1., dana su skupovima $S_0 \bigcup S_1$ i S_2 pri čemu vrijedi

$$S_0 = \{(\pm 1, s, \mp s), (s, \pm 1, \mp s), (s, \pm s, \mp 1) : s \in \mathbb{Q}\},$$

$$S_1 = \left\{ \left(\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}, \frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}, \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta} \right) : \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \left(\frac{1-st}{1+st}, \frac{s-t}{s+t}, \frac{4st-(1-st)(s-t)}{(1+st)(s+t)} \right) : s,t \in \mathbb{Q}, (1+st)(s+t) \neq 0 \right\}.$$

Može se direktno provjeriti da se skup S_0 sastoji od rješenja u kojima proizvoljna koordinata može biti jednaka ± 1. Također, ako uzmemo pozitivan racionalan broj p i skupove

$$\Delta = (-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma),$$

$$T_1 = \{(u,v,w) \in S_1 : \alpha+\beta+\gamma = 2p, \Delta \neq 0\},$$
$$T_2 = \{(a,b,c) \in S_2 : st(1+st)(s+t)(t-1)(s+1) \neq 0\},$$

tada se opet može izravno provjeriti da je svaka od disjunktnih unija $S_0 \bigcup T_1$ i $S_0 \bigcup T_2$ skup racionalnih rješenja jednadžbe (6). Stoga za T_1 i T_2 očekujemo da su biracionalno ekvivalentni. To bi značilo da među skupovima T_1 i T_2 postoji bijektivno racionalno preslikavanje kojem je inverz također racionalno preslikavanje. Ovo općenito ne mora vrijediti, a posebice ne znači da je lako pronaći eksplicitno biracionalno preslikavanje. Međutim, u nastavku ćemo prikazati jedno takvo eksplicitno pridruživanje.

Da bismo to učinili, pretpostavimo da je za $s,t \in \mathbb{Q}$ dano

$$st(1+s)(1-t)(1+st)(s+t) \neq 0,$$

te trebamo pronaći $(\alpha,\beta,\gamma) \in T_1$ tako da vrijedi

$$\frac{1-st}{1+st} = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} \tag{22}$$

$$\frac{s-t}{s+t} = \frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma} \tag{23}$$

$$\frac{4st-(1-st)(s-t)}{(1+st)(s+t)} = \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}. \tag{24}$$

Koristeći činjenicu da $x,y \neq -1$,

$$x = y \iff \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-y}{1+y},$$

vidimo da su jednadžbe (22) i (23) ekvivalentne sljedećim jednadžbama

$$st = \frac{1 - \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}}{1 + \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}} = \frac{(p-\gamma)(p-\beta)}{p(p-\alpha)},$$

$$\frac{t}{s} = \frac{1 - \frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}}{1 + \frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}} = \frac{(p-\gamma)(p-\alpha)}{p(p-\beta)}.$$

Dobivamo da za rješenje tog sustava vrijedi

$$s^2 = \frac{(p-\beta)^2}{(p-\alpha)^2}$$

i

$$t^2 = \frac{(p-\gamma)^2}{p^2}.$$

Dakle, rješenje glasi

$$(s,t) = \left(\frac{p-\beta}{p-\alpha}, \frac{p-\gamma}{p}\right)$$

ili

$$(s,t) = \left(\frac{-(p-\beta)}{p-\alpha}, \frac{-(p-\gamma)}{p}\right).$$

Za prvo rješenje (s,t) može se izravno provjeriti da zadovoljava jednadžbu (24). Međutim, izravna provjera pokazuje da drugo rješenje zadovoljava jednadžbu (24) ako i samo ako je

$$(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma) = 0,$$

što je u kontradikciji s definicijom skupa T_1. Prema tome,

$$(s,t) = \left(\frac{p-\beta}{p-\alpha}, \frac{p-\gamma}{p}\right).$$

Računajući α, β i γ imamo

$$(\alpha,\beta,\gamma) = \left(\frac{p(s+t)}{s+1}, \frac{p(st+1)}{p(s+1)}, p(1-t)\right),$$

što pripada skupu T_1 s obzirom na to da je

$$\frac{p(s+t)}{s+1} + \frac{p(st+1)}{p(s+1)} + p(1-t) = 2p$$

iz čega proizlazi sljedeći teorem:

Teorem 2.5. *Pridruživanja $\phi : T_1 \to T_2$ i $\psi : T_2 \to T_1$ dana s*

$$\phi(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{p-\beta}{p-\alpha}, \frac{p-\gamma}{p}\right),$$

$$\psi(s,t) = \left(\frac{s+t}{s+1}, \frac{st+1}{s+1}, 1-t\right)$$

su bijekcije.

Dokaz. Izravnom provjerom može se vrlo lako pokazati da su obje kompozicije od ϕ i ψ identitete (na svojim domenama). $\square$

Poglavlje 3

Nultočke Newtonovog i njemu pridruženog polinoma

U ovom poglavlju izložit ćemo određena svojstva nultočaka Newtonovog polinoma i njemu pridruženog polinoma. Ta svojstva koriste se u narednim poglavljima.

Teorem 3.1 (Descartesovo pravilo)**.** [8] *Broj strogo pozitivnih (strogo negativnih) realnih nultočaka polinoma $f(x)$ je ili jednak broju promjena predznaka koeficijenata polinoma $f(x)$ (polinoma $f(-x)$) ili je od njega manji za paran broj. Pri tome se svaka nultočka broji onoliko puta kolika joj je kratnost.*

Teorem 3.2. *Neka su*

$$f(x) = x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc, \quad g(x) = x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x + 2abc, \tag{25}$$

gdje su a, b i c pozitivni realni brojevi. Tada vrijedi:

1. *f ima točno jednu pozitivnu nultočku ρ i vrijedi:*

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} < \rho < a + b + c. \tag{26}$$

2. *ako $a = b = c$, tada $g(x) = x^3 - 3a^2x + 2a^3 = (x - a)^2(x + 2a)$; u suprotnom g ima točno dvije pozitivne nultočke ρ_1 i ρ_2, takve da $\rho_1 < \rho_2$ i vrijedi*

$$\rho_1 < \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} < \rho_2.$$

[8] A. G. Kurosh. *Higher Algebra*, Mir, Moskva, 1998.

Dokaz. 1. Prema Descartesovom pravilu o predznacima, f ima najviše jednu pozitivnu nultočku. Kako je

$$f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}) = -2abc < 0$$

i

$$\begin{aligned} f(a+b+c) &= (a+b+c)^3 - (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - 2abc \\ &= 2(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2) + 4abc \\ &> 0 \end{aligned}$$

slijedi da f ima točno jednu pozitivnu nultočku ρ i vrijedi

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} < \rho < a+b+c,$$

čime smo dokazali tvrdnju.

2. Kako je slučaj $a = b = c$ trivijalan, pretpostavimo da a, b, c nisu svi međusobno jednaki. Prema Descartesovom pravilu o predznacima, g ima najviše dvije pozitivne nultočke. Također

$$g'(x) = 3x^2 - (a^2+b^2+c^2) = 3(x^2 - x_0^2),$$

gdje je

$$x_0 = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Stoga u okolini x_0, g je padajuća za $x < x_0$ i rastuća za $x > x_0$, a svoj apsolutni minimum postiže u x_0. Također,

$$\begin{aligned} g(x_0) &= x_0^3 - (a^2+b^2+c^2)x_0 + 2abc \\ &= x_0^3 - (3x_0^2)x_0 + 2abc \\ &= -2\left(\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right). \end{aligned}$$

Prema nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine te koristeći pretpostavku da a, b i c nisu svi međusobno jednaki, imamo

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} > \sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Iz prethodnog slijedi da je $g(x_0) < 0$ i da g ima dvije pozitivne nultočke za koje vrijedi da se x_0 nalazi između njih. Time smo završili dokaz.

□

Napomena 3.3.

Ranije je promatran slučaj kada je $a = b = c$ (pogledati (5)), a tada Newtonov polinom f, dan s (25), možemo faktorizirati kao

$$f(x) = x^3 - 3a^2x - 2a^3 = (x + a)^2(x - 2a). \tag{27}$$

Taj slučaj nije izdvojen u teoremu 4.1., dio (1), zato što pozitivna nultočka $2a$ od f zadovoljava (26), odnosno $\sqrt{3}a < 2a < 3a$. Faktorizacija u (27) kaže ako je Newtonov četverokut $ABCD$ takav da je $|AB| = |BC| = |CD| = a$, tada je $|DA| = 2a$, što je geometrijski vidljivo. Štoviše, ako je G središte kružnice opisane Newtonovom četverokutu $ABCD$, odnosno polovište dužine $\overline{AD}$, tada su trokuti GAB, GBC, GCD kongruentni prema poučku SSS o sukladnosti trokuta, implicirajući da su tri kuta u točki G jednaka i da su tri trokuta jednakostranična. Tada slijedi da je $|DA| = 2a$. Također, važno je napomenuti da Newtonov četverokut koji ima tri jednake stranice ima najveću površinu među svim četverokutima koji su upisani u polukrug i imaju dva vrha u rubnim točkama promjera [7].

Poglavlje 4

Neka daljnja svojstva Newtonovih četverokuta

U prvom poglavlju prikazano je šest različitih načina kako je Newton dokazao tvrdnju: Ako je četverokut $ABCD$ Newtonov četverokut kojemu je $|AD|$ promjer i ako su $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$ i $|DA| = d$ stranice četverokuta, tada je zadovoljena sljedeća jednadžba

$$d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - 2abc = 0. \tag{28}$$

U teoremu koji slijedi dokazujemo obrat.

Teorem 4.1. *Ako su a, b, c i d pozitivni realni brojevi koji zadovoljavaju Newtonovu jednadžbu (28), tada postoji Newtonov četverokut $ABCD$ u kojem je $|AD|$ njegov promjer i $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$ stranice tog četverokuta.*

Dokaz. Neka su a, b, c i d pozitivni brojevi koji zadovoljavaju (28). Prema tome, d je pozitivna nultočka od $f(x) = x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc$. Prema teoremu 4.1., jedinstvena pozitivna nultočka, u ovom slučaju d, zadovoljava $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} < d < a + b + c$. U nastavku ćemo koristiti te nejednakosti, posebice sljedeću nejednakost:

$$a < \sqrt{a^2 + b^2} < \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} < d < a + b + c. \tag{30}$$

Uzmimo da imamo polukružnicu čiji je promjer duljine $|DA| = d$. Kako je $a < d$, tada postoji točka B na polukružnici takva da vrijedi $|AB| = a$. Budući da je $d^2 > a^2 + c^2$, slijedi da je $|DB| = \sqrt{d^2 - a^2} > c$. Stoga postoji točka C na luku DB tako da vrijedi $|CD| = c$. To proizlazi odatle što za varijabilnu točku P koja se po polukružnici giba od točke D do točke A, duljina tetive $|DP|$ zbog neprekidnosti poprima sve vrijednosti od 0 do d. Budući da je $|DB| > c$, točka C nalazi se na luku $|DB|$ polukružnice.
Neka je $k = |BC|$. Prema Newtonovoj jednadžbi imamo $d^3 - (a^2 + b^2 + k^2)d - 2abk = 0$.

Kada od (28) oduzmemo tu jednakost, dobivamo $(db + dk + 2ac)(b - k) = 0$, stoga je $b = k$. Dakle, četverokut $ABCD$ ima tražena svojstva. Alternativno, (30) pokazuje da je broj d, koji je najveći među brojevima a, b, c i d, manji od sume preostala tri broja. Dakle, svaki od brojeva a, b, c, d manji je od sume preostala tri broja. Prema Melzaku [8] postoji četverokut $ABCD$ u kojem $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$ i koji može biti tetivni. Neka je $\theta = \angle ABD = \angle ACD$. Pokazat ćemo da je $\theta = 90°$. Ako je $\theta < 90°$, tada $y^2 > d^2 - a^2$ i $z^2 > d^2 - c^2$. Stoga vrijedi

$$y^2z^2 > (d^2 - a^2)(d^2 - c^2).$$

Prema Ptolomejevom teoremu imamo $y^2z^2 = (ac + bd)^2$. Stoga vrijedi

$$(ac + bd)^2 > (d^2 - a^2)(d^2 - c^2).$$

Prema tome, $d(d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - 2abc) < 0$, što je u kontradikciji s (27). Analognu kontradikciju bismo dobili uzimajući pretpostavku $\theta > 90°$. Stoga $\theta = 90°$. Slijedi da je $|DA|$ promjer. Ono što smo ovdje zapravo koristili je obrat Talesovog teorema. □

U sljedećem teoremu dana je formula za površinu Newtonovog četverokuta. U napomeni na kraju ovog poglavlja, koristimo spomenutu formulu za površinu Newtonovog četverokuta koju koristimo kako bismo dobili još jedan od šest Newtonovih dokaza.

Teorem 4.2. *Površina Newtonovog četverokuta iz (1) jednaka je*

$$P(ABCD) = \frac{ab + cd}{2d}\sqrt{d^2 - c^2}. \tag{29}$$

Dokaz. Prema slici 4.1, dijagonala $z = |AC|$ dijeli četverokut $ABCD$ na trokute ACB i ACD, te imamo

$$P(ABCD) = P(ACB) + P(ACD).$$

Kako je četverokut $ABCD$ tetivni, nasuprotni kutovi $\angle ADC$ i $\angle ABC$ su suplementarni. Produživanjem pravca AB i povlačenjem okomice na isti iz točke C. Presjekom okomice i pravca dobivamo točku E te je kut $\angle EBC$ suplementaran kutu $\angle ABC$. Tada vrijedi $\angle ADC = \angle EBC$, tako da su trokuti ACD i CEB slični. Dakle, kako je $z = |AC| = \sqrt{d^2 - c^2}$ tada je $\frac{|EC|}{b} = \frac{z}{d}$ te

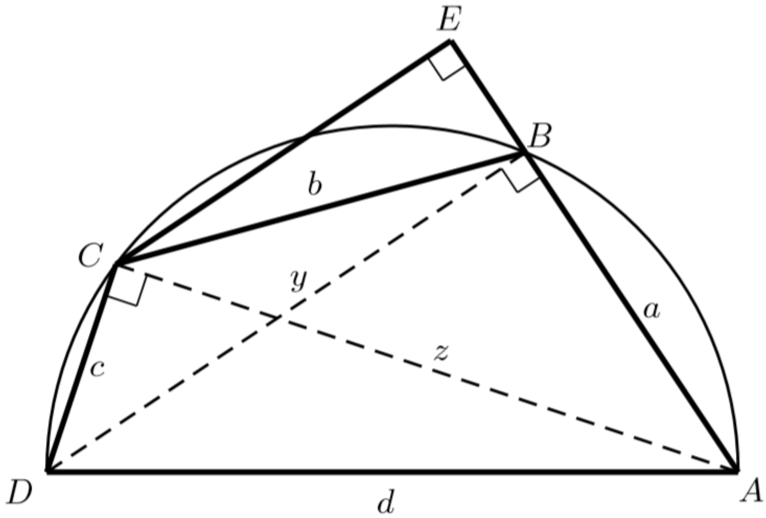
$$P(ACB) = \frac{1}{2}|AB| \cdot |EC| = \frac{abz}{2d}$$

$$P(ACD) = \frac{1}{2}|AC| \cdot |CD| = \frac{cz}{2}.$$

Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned} P(ABCD) &= P(ACB) + P(ACD) \\ &= \frac{abz}{2d} + \frac{cz}{2} = \frac{abz + czd}{2d} \\ &= \frac{ab + cd}{2d} \cdot z \\ &= \frac{ab + cd}{2d} \sqrt{d^2 - c^2} \end{aligned}$$

čime smo dokazali tvrdnju. □



Slika 4.1: Ilustracija dokaza obrata Newtonovog rezultata

Korolar 4.3. *Neka je $ABCD$ Newtonov četverokut s promjerom $|AD|$ i neka su $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$. Tada, za bilo koju permutaciju σ od a, b, c postoji Newtonov četverokut $A'B'C'D'$ s promjerom $A'D'$ takav da je $|A'B'| = \sigma(a)$, $|B'C'| = \sigma(b)$, $|C'D'| = \sigma(c)$, $|D'A'| = \sigma(d)$.*

Dokaz. Dokaz slijedi izravno iz teorema 4.1. i činjenice da je Newtonova jednadžba zadovoljena za bilo koju permutaciju brojeva a, b, c. Alternativno, korolar može biti dokazan izravno bez korištenja teorema 4.1., kao što slijedi u nastavku. Dakle, neka je O središte kružnice s promjerom $|AD|$. Tada je konveksni tetivni četverokut $ABCD$ unija jednakokračnih trokuta AOB, BOC i COD. Permutiranjem njihovih položaja unutar $ABCD$ i ponovnim spajanjem njihovih odgovarajućih stranica jednakih duljina, dobivamo odgovarajući Newtonov četverokut $A'B'C'D'$ s promjerom $A'D'$ s obzirom na to da je suma kutova uz O jednaka $180°$. □

Uočimo da korolar 4.2. na očit način generalizira tetivne mnogokute za $n \geq 3$. (vidi knjigu[8], str. 9)

Napomena 4.4.

Uočimo da zbog simetrije možemo zamijeniti a i c (analogno za a, b, c) u formuli (29) za formulu površine $P(ABCD)$. Izjednačavanjem dvije rezultirajuće formule dobivamo

$$\frac{ab + cd}{2d}\sqrt{d^2 - c^2} = \frac{bc + ad}{2d}\sqrt{d^2 - a^2},$$

stoga

$$(ab + cd)^2(d^2 - a^2) = (bc + ad)^2(d^2 - c^2).$$

Sređivanjem i faktoriziranjem prethodne jednakosti dobivamo

$$(c^2 - a^2)d(d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - 2abc) = 0.$$

Slično imamo

$$(c^2 - b^2)d(d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - 2abc) = 0.$$

Dakle, osim ako je $a = b = c$, zaključujemo da $d^3-(a^2+b^2+c^2)d-2abc = 0$, čime dobivamo još jedan dokaz Newtonovog rezultata. Zapravo, ovo je jedna od šest Newtonovih metoda dokazivanja njegove jednadžbe. Vodeći računa o slučaju $a = b = c$, koristimo činjenicu dokazanu u napomeni na kraju trećeg poglavlja, tj. ako je $a = b = c$ tada je $d = 2a$ i imamo

$$d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - 2abc = 8a^3 - 6a^3 - 2a^3 = 0.$$

Poglavlje 5

Primjeri pojavljivanja Newtonovog i njemu pridruženog polinoma

Newtonov polinom

$$f(x) = x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc \tag{31}$$

pojavio se u primjeru traženja promjera x kružnice koja opisuje konveksni četverokut $ABCD$ čije su tri duljine stranica dane s $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c$ i čija je četvrta stranica $|DA|$ promjer. Vidjeli smo da je jedinstvena pozitivna nultočka od (31) duljina odgovarajućeg promjera. Ako je $ABCD$ nekonveksan, tada će duljina odgovarajućeg promjera biti veća nultočka pridruženog polinoma

$$g(x) = x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x + 2abc. \tag{32}$$

U ovom poglavlju navodimo nekoliko primjera u kojima se polinomi f i g, kao i ostali pripadni polinomi, pojavljuju. Jedinstvenu pozitivnu nultočku označavat ćemo s ρ te ćemo dvije pozitivne nultočke od (32) označavati s ρ_1, ρ_2, pri čemu $\rho_1 < \rho_2$. O navedenim nultočkama više se govorilo u trećem poglavlju.

Maksimalna površina

Četverokut maksimalne površine među svim četverokutima sa zadanim duljinama triju stranica je upravo Newtonov četverokut. Naime, vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 5.1. *Četverokut maksimalne površine sa zadanim duljinama stranica a, b, c jest tetivni četverokut, pritom takav da je četvrta stranica promjer kružnice opisane tom četverokutu.*

Ovo je poseban slučaj teorema 2. iz [9] koji glasi:

Neka su $a_1, ..., a_n$ pozitivni realni brojevi. Tada među svim poligonima $A_1...A_{n+1}$ sa stranicama $\overline{A_1A_2} = a_1, ..., \overline{A_1A_{n+1}} = a_n$, maksimalnu površinu ima poligon kojem su vrhovi $A_1, ..., A_{n+1}$ na polukružnici nad promjerom $\overline{A_1A_{n+1}}$.

Napomenimo da Macnab u [9] iskazuje ovaj teorem kao očigledno poopćenje svojih prethodnih razmatranja u kojima je argument za maksimalnu površinu izložen za slučaj četverokuta. Dokaz slijedi u nastavku.

Polazimo od Brahmaguptine formule za površinu

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Uzmimo da su a, b, c zadane vrijednosti duljina stranica, a duljinu četvrte stranice označimo s x. Promatrat ćemo funkciju

$$P^2(x) = (s-a)(s-b)(s-c)(s-x),$$

odnosno, zbog $s - a = \frac{-a+b+c+x}{2}$ itd, možemo prijeći na funkciju

$$f(x) = 16P^2(x) = (-a+b+c+x)(a-b+c+x)(a+b-c+x)(a+b+c-x).$$

Želimo postaviti uvjet $f'(x) = 0$ za stacionarne točke funkcije f, kao nužni uvjet za ekstremne vrijednosti funkcije f. To su onda i nužni uvjeti za ekstreme funkcije $P(x)$ koja poprima samo pozitivne vrijednosti. Prvo transformiramo $f(x)$ (zapravo, Brahmaguptina formula u svom sažetom obliku dobije se kad se dulji izraz u a, b, c, d primjenom $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ lijepo faktorizira, a ovdje "razmontiramo" tu formulu da dobijemo polinom u ovisnosti o x:

$$\begin{aligned} f(x) &= [(c+x)-(a-b)]\,[(c+x)+(a-b)]\,[(a+b)-(c-x)]\,[(a+b)+(c-x)] \\ &= \left[(c+x)^2-(a-b)^2\right]\left[(a+b)^2-(c-x)^2\right]. \end{aligned}$$

Sređivanjem dobivamo

$$f(x) = -(x^2 - c^2)^2 + 2(a^2+b^2)x^2 + 8abcx + 2c^2(a^2+b^2).$$

Sad se lako derivira:

$$f'(x) = -2(x^2 - c^2)2x + 4(a^2+b^2)x + 8abc = -4\left[x^3 - (a^2+b^2+c^2)x - 2abc\right].$$

Stoga je $f'(x) = 0$ ako i samo ako je $x^3 - (a^2+b^2+c^2)x - 2abc = 0$, a to je upravo Newtonova jednadžba.

Problem omeđivanja

- **Problem omeđivanja za trokute**

  U ovom problemu, dane su nam cijene a, b, c takve da vrijedi $0 < a \leq b \leq c$ i graditi ćemo, koristeći fiksni iznos novca i neograničeno veliko polje, trokutastu ogradu ABC čije stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ predstavljaju cijene a, b, c kao novčane jedinice po jedinici duljine i čija je površina maksimalna. Ispostavlja se da su duljine stranica optimalnog trokuta racionalni izrazi u a, b, c i ρ.

- **Problem omeđivanja za četverokute**

  U ovom problemu omeđivanja uz cijene a, b, c i d, pri čemu vrijedi $0 < a \leq b \leq c \leq d$ ispostavlja se da ako je $\rho \leq d$ da se tada optimalni četverokut pretvara u trokut, nužno optimalni trokut koji rješava problem omeđivanja trokuta s cijenama a, b i c. Ako je $d < \rho$ tada su duljine stranica optimalnog četverokuta racionalni izrazi u a, b, c i d.

- **Problem omeđivanja za četverokute kada jedna cijena iznosi nula**

  Ovaj problem prelazi u drugi problem optimizacije, naime, pronalazak duljine četvrte stranice najvećeg četverokuta čije su preostale tri dane stranice a, b, c. Nije teško uočiti da je to ekivalentno Newtonovom problemu i odgovor je, dakle ρ.

Konstrukcija trokuta kojemu je dana udaljenost od središta opisane kružnice do njegovih stranica i slični problemi

U rješavanju ovog problema za koji je dana udaljenost središta trokutu opisane kružnice do njegovih stranica, matematičar Thomae je došao do Newtonovog polinoma (31) za šiljastokutne trokute i njemu pridruženog polinoma (32) za tupokutne trokute. Sličan je rezultat za dane udaljenosti stranica trokuta od središta njemu opisane kružnice do vrhova tog trokuta ili dane udaljenosti od ortocentra tog trokuta do stranica tog trokuta.

Točke jednakih cevijana trokuta

Dužine kojima su vrhovi trokuta ABC spojeni s nekim točkama na nasuprotnim stranicama nazivaju se cevijane (prema poznatom Cevinom teoremu). Ako je u ravnini trokuta zadana točka P, cevijane koje prolaze točkom P označene s AA_p, BB_p, CC_p, pri čemu su A_p, B_p, C_p redom točke na stranicama BC, CA, AB. Točka P naziva se točkom jednakih cevijana ako su AA_p, BB_p i CC_p jednakih duljina. Problem omeđivanja se čini teškim, međutim, zadovoljavajuće rješenje je dano u člancima *Equicevian points and cubics of a triangle*[9] i *Equicevian points of a triangle*[10]. U *Equicevian points on the altitudes of a triangle*[11], istraživanjem točaka na visini AO iz vrha A dovelo je do polinoma srodnog Newtonovom polinomu, odnosno

$$h(x) = x^3 - (a^3 - b^3 - c^3)x - 2abc.$$

Ortocentrički tetraedar

Neka je $T = ABCD$ nedegenerirani tetraedar. Označimo

$$\overline{DA} = a, \overline{DC} = c, \angle ADB = \gamma, \angle BDC = \alpha, \angle CDA = \beta$$

i neka je

$$\lambda_a = \frac{\cos\alpha}{a}, \lambda_b = \frac{\cos\beta}{b}, \lambda_c = \frac{\cos\gamma}{c}.$$

Tetraedar je ortocentrički ako se sve četiri visine iz vrhova na suprotne strane sijeku u jednoj točki. Orocentrički tetraedar karakteriziran je jednakošću $\lambda_a = \lambda_b = \lambda_c$. Nazovimo tu zajedničku vrijednost $\lambda(T)$. U članku *The open mouth theorem, or the scissors lemma, for orthocentric tetrahedra*[12] (teorem 3.3) dokazano je da se za bilo koji ortocentrički tetraedar vrijednost $\lambda(T)$ nalazi u intervalu $\left[\rho_2^{-1}, \rho_1^{-1}\right]$.

[9] S. Abu-Saymeh, M. Hajja, H. Stachel. *Equicevian points and cubics of a triangle*, J. Geom. Graphics 18 (2014) 133–157.

[10] S. Abu-Saymeh, M. Hajja, H. Stachel. *Equicevian points of a triangle*, Amer. Math. Monthly 122 (2015) 995–1000.

[11] S. Abu-Saymeh, M. Hajja. *Equicevian points on the altitudes of a triangle*, Elem. Math. 67 (2012) 187– 195.

[12] S. Abu-Saymeh, M. Hajja, M. Hayajneh. *The open mouth theorem, or the scissors lemma, for orthocentric tetrahedra*, J. Geom. 103 (2012) 1–16.

Bibliografija

[1] M. Hajja, J. Sondow. *Newton Quadrilaterals,the Associated Cubic Equations,and Their Rational Solutions*, Amer. Math. Monthly, Vol. 126, No. 2 (2019) 135–150.

[2] N. Lord. *Newton tackles an Olympiad problem*, Math. Gaz., Vol. 95, No. 533 (2011) 334-341.

[3] M. Bombardelli, D. Ilišević. *Elementarna geometrija*, Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, 2007.

[4] *Bretschneider's formula*, dostupno na: `https://en.wikipedia.org/wiki/Bretschneider%27s_formula` (srpanj 2020.)

[5] L. J. Mordell. *On the integer solutions of the equation $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = n$*, J. Lond. Math. Soc., 28 (1953) 500–510.

[6] A. G. Kurosh. *Higher Algebra*, Mir, Moskva, 1998..

[7] I. Niven. *Maxima and Minima without Calculus*, The Dolciani Mathematical Expositions, No. 6, Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1981.

[8] Z. A. Melzak. *Invitation to Geometry*, Wiley, New York, 1963.

[9] D.S. Macnab. *Cyclic Polygons and Related Questions*, Math. Gaz., Vol. 65, No. 431 (1981) 22-28.

[10] P. Thomas. *Maximizing the Area of a Quadrilateral*, The College Mathematics Journal, Vol. 34, No. 4 (2003) 315-316.

[11] W. E. Buker, R. A. Johnson. *Problems and solutions*, Amer. Math. Monthly, Vol. 51, No. 2 (1944) 93-95.

Sažetak

Newtonov četverokut je konveksan četverokut upisan u kružnicu čija je jedna stranica promjer kružnice. Rješavajući problem pronalaska promjera d kružnice kojoj je upisan konveksni četverokut čije su zadane tri stranice a, b i c, Newton je došao do relacije poznate kao Newtonova jednadžba. Newton se nije bavio rješavanjem vlastite jednadžbe, međutim, istu je izveo na šest različitih načina.

Pozitivna cjelobrojna rješenja Newtonove jednadžbe pronašao je P. Bachmann. Sva cjelobrojna rješenja Newtonove jednadžbe pronašao je A. Oppenheim, a formula koja daje beskonačno mnogo racionalnih rješenja, rezultat je matematičara N. Anninga koji je koristio elegantnu relaciju između kosinusa kutova trokuta. Sva racionalna rješenja Newtonove jednadžbe pronašao je I. A. Barnett koristeći jednostavnu i elegantnu metodu koja se temelji na linearnoj algebri. Jednake rezultate Barnettovim, postigao je M. Hajja koristeći relaciju između kosinusa kutova generaliziranog trokuta.

U ovom radu prezentirana je i direktna algebarska metoda koja daje sva racionalna rješenja. Prikazan je i slučaj nekonveksnog Newtonovog četverokuta, uspostavljena su određena svojstva nultočaka Newtonovog i njemu pridruženog polinoma, iskazan je i dokazan obrat Newtonovog rezultata te je dana i izvedena formula za površinu Newtonovog četverokuta. U posljednjem poglavlju je opisano nekoliko primjera pojavljivanja Newtonovog i njemu pridruženog polinoma.

Summary

A Newton quadrilateral is a convex quadrilateral inscribed in a circle whose one side is the diameter of the circle. Solving the problem of finding the diameter d of a circle that has an inscribed convex quadrilateral given by the three sides a, b, and c, Newton discovered the relation known as the Newton equation. Newton was not concerned with solving his own equation, however, he derived it in six different ways.

Positive integer solutions of the Newton equation were found by P. Bachmann. All integer solutions of Newton's equation were found by A. Oppenheim, and the formula that produces infinitely many rational solutions was found by N. Anning, who used an elegant relation among the cosines of the angles of a triangle. All rational solutions of Newton's equation were found by I. A. Barnett using a simple and elegant method based on linear algebra. The same results of Barnett, M. Hajja achieved using the relation between the cosines of angles of a generalized triangle.

In this thesis, a direct algebraic method is presented which gives all rational solutions. Also, the case of a non-convex Newton quadrilateral is presented, certain properties of the zeros of the Newton's polynomial and its associated polynomials are established, the converse of the Newton result is presented and proved and the formula for the area of the Newton's quadrilateral is given. The last chapter describes several examples where Newton's polynomial and its associated polynomial appears.

Životopis

Zovem se Darija Dabić i rođena sam 23. studenog 1989. godine u Zagrebu. Svoje formalno obrazovanje započela sam u osnovnoj školi Nikole Hribara u Velikoj Gorici koje je trajalo u razdoblju od 1996. godine do 2004. godine, a zatim sam isto nastavila u Ekonomskoj školi Velika Gorica u razdoblju od 2004. godine do 2008. godine. Fakultetsko obrazovanje započela sam 2009. godine na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. Preddiplomski sveučilišni studij Matematika, nastavnički smjer, upisala sam 2015. godine te ga uspješno završila 2017. godine. Diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika, nastavnički smjer, upisala sam 2017. godine. Zaposlena sam kao Python i PostgreSQL programer 2019. godine u informatičkoj tvrtki u Zagrebu.