

# Poopćenja skalarnog produkta

---

**Hitrec, Mihaela**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:073316>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2021-03-07**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Mihaela Hitrec

**POOPĆENJA SKALARNOG  
PRODUKTA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
Prof. dr. sc. Sanja Varošaneć

Zagreb, srpanj 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem se mentorici prof. dr. sc. Sanji Varošanc na pristupačnosti, razumijevanju i strpljenju tijekom izrade diplomskog rada.*

*Posebnu zahvalu iskazujem svojim roditeljima koji su uvelike zaslužni za ono što sam postigla, koji su bili tu za mene u dobrim i lošim trenucima i bez kojih sve ono što sam do sad postigla ne bi bilo moguće.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 2-skalarni produkt i 2-norma</b>	<b>2</b>
1.1 2-skalarni produkt i 2-unitarni prostor . . . . .	2
1.2 2-norma i 2-normirani prostor . . . . .	7
<b>2 Povezanost 2-unitarnih i 2- normiranih prostora</b>	<b>11</b>
2.1 Karakterizacije 2-unitarnih prostora . . . . .	11
2.2 Poopćenje 2-skalarnog produkta i 2-norme . . . . .	29
<b>3 Heronovo preslikavanje</b>	<b>31</b>
3.1 Heronovo preslikavanje u unitarnim prostorima . . . . .	31
3.2 Superaditivnost i monotonost 2-normi generiranih sa skalarnim produktom	38
3.3 Superaditivnost i monotonost nekih funkcionala povezanih s 2-skalarnim produktom . . . . .	44
3.4 Heronovo preslikavanje u 2-normiranom prostoru . . . . .	48
<b>Bibliografija</b>	<b>51</b>

# Uvod

Glavni cilj ovog diplomskog rada je proučiti jedno poopćenje skalarnog produkta, takozvani 2-skalarni produkt, odnosno 2-unitarne prostore. Dokazat ćemo nekoliko svojstava 2-skalarnog produkta, kao i nekoliko njegovih karakterizacija. Proučit ćemo i neka svojstva pridruženih 2-normi.

Koncept 2-skalarnog produkta intenzivno se proučava od strane mnogih autora već tri desetljeća. Neki od njih su S. Gähler, A. White, Y. J. Cho, S. S. Kim, A. Misiak i P. C. S. Lin. 2-skalarni produkti i 2-unitarni prostori su zapravo dvodimenzionalni analogoni koncepta skalarnog produkta i unitarnog prostora.

Rad je podijeljen u tri poglavlja. U prvom poglavlju navedene su definicije osnovnih pojmova te su opisani ostali pojmovi vezani uz 2-skalarni produkt, 2-unitarne prostore te 2-norme. U drugom poglavlju navedena su i dokazana neka svojstva 2-skalarnog produkta i 2-unitarnih prostora kao i neka svojstva 2-normi i 2-normiranih prostora. U trećem poglavlju definirano je Heronovo preslikavanje, te je prikazana veza Heronovog preslikavanja i 2-normiranih prostora. Također je prikazano svojstvo superaditivnosti i svojstvo monotonosti nekih funkcionala povezanih s 2-skalarnim produktom.

Ovaj se rad temelji na rezultatima danima u literaturi navedenoj na kraju rada pri čemu su sve razmatrane tvrdnje detaljno i u potpunosti dokazane u ovom radu.

# Poglavlje 1

## 2-skalarni produkt i 2-norma

Skalarni produkt je jedan od osnovnih pojmova linearne algebre. Već u srednjoj školi susrećemo se sa skalarnim produktom definiranim na dvodimenzionalnom vektorskom prostoru  $V^2$ .

U kolegiju Linearna algebra 2 proučavali smo prostor  $\mathbb{R}^3$  i tri različita produkta definirana na njemu: skalarni, vektorski, mješoviti. Dok vektorski i mješoviti produkt ne generaliziramo čak niti na  $\mathbb{R}^n$ , skalarni produkt možemo definirati u vrlo generalnoj situaciji, tj. na vektorskom prostoru. Vektorski prostor snabdjeven skalarnim produktom naziva se unitarni prostor. U ovom poglavlju razmatramo funkciju koja je analogon skalarnog produkta, takozvani 2-skalarni produkt.

### 1.1 2-skalarni produkt i 2-unitarni prostor

**Definicija 1.1.1.** *Neka je  $X$  vektorski prostor dimenzije veće od 1 i neka je  $(\cdot, \cdot | \cdot)$  realna funkcija sa  $X \times X \times X$  takva da zadovoljava sljedeća svojstva:*

(i)  $(a, a | b) \geq 0$ , pri čemu je  $(a, a | b) = 0 \Leftrightarrow a$  i  $b$  linearno zavisni

(ii)  $(a, a | b) = (b, b | a)$

(iii)  $(a, b | c) = (b, a | c)$

(iv)  $(\alpha a, b | c) = \alpha(a, b | c)$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(v)  $(a + a', b | c) = (a, b | c) + (a', b | c)$ ,  $\forall a, a', b, c \in X$ .

Tada realnu funkciju  $(\cdot, \cdot | \cdot)$  zovemo **2-skalarni produkt**, a uređeni par  $(X, (\cdot, \cdot | \cdot))$  zovemo **2-unitarni prostor**.

**Teorem 1.1.2.** *Neka je  $(X, (\cdot, \cdot))$  unitarni prostor. Funkcija  $(\cdot, \cdot | \cdot)$  definirana na sljedeći način:*

$$(a, b | c) = \begin{vmatrix} (a | b) & (a | c) \\ (b | c) & (c | c) \end{vmatrix} = (a | b) \cdot \|c\|^2 - (a | c) \cdot (b | c)$$

je jedan 2-skalarni produkt.

*Dokaz.* (i)

$$(a, a | b) = \begin{vmatrix} (a | a) & (a | b) \\ (a | b) & (b | b) \end{vmatrix} = (a | a) \cdot \|b\|^2 - (a | b) \cdot (a | b) = \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - (a | b)^2.$$

Znamo da u svakom unitarnom prostoru vrijedi:  $| (a, b) | \leq \|a\| \cdot \|b\|$ , pa zaključujemo:

$$\|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - (a | b)^2 \geq 0.$$

$$\begin{aligned} (a, a | b) = 0 &\iff \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - (a | b)^2 = 0 \iff \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 = (a | b)^2 \\ &\iff \|a\| \cdot \|b\| = |a | b| \\ &\iff (a | a) \cdot (b | b) = (a | b)^2 \\ &\iff a = \lambda \cdot b, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} (a, a | b) &= \begin{vmatrix} (a | a) & (a | b) \\ (a | b) & (b | b) \end{vmatrix} = (a | a) \cdot \|b\|^2 - (a | b) \cdot (a | b) = \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - (a | b)^2 \\ &= \|b\|^2 \cdot \|a\|^2 - (b | a)^2 = \begin{vmatrix} (b | b) & (b | a) \\ (b | a) & (a | a) \end{vmatrix} = (b, b | a). \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} (a, b | c) &= \begin{vmatrix} (a | b) & (a | c) \\ (b | c) & (c | c) \end{vmatrix} = (a | b) \cdot \|c\|^2 - (a | c) \cdot (b | c) \\ &= (b | a) \cdot \|c\|^2 - (c | a) \cdot (c | b) = \begin{vmatrix} (b | a) & (c | a) \\ (c | b) & (c | c) \end{vmatrix} = (b, a | c). \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} (\alpha a, b | c) &= \begin{vmatrix} (\alpha a | b) & (\alpha a | c) \\ (b | c) & (c | c) \end{vmatrix} = (\alpha a | b) \cdot \|c\|^2 - (\alpha a | c) \cdot (b | c) \\ &= \alpha (a | b) \cdot \|c\|^2 - \alpha (a | c) \cdot (b | c) = \alpha [(a | b) \cdot \|c\|^2 - (a | c) \cdot (b | c)] \\ &= \alpha \begin{vmatrix} (a | b) & (a | c) \\ (b | c) & (c | c) \end{vmatrix} = \alpha \cdot (a, b | c). \end{aligned}$$



(v)

$$\begin{aligned}
(a + a', b | c) &= \left| \begin{array}{cc} (a + a' | b) & (a + a' | c) \\ (b | c) & (c | c) \end{array} \right| = (a + a' | b) \cdot \|c\|^2 - (a + a' | c) \cdot (b | c) \\
&= [(a | b) + (a' | b)] \cdot \|c\|^2 - [(a | c) + (a' | c)] \cdot (b | c) \\
&= (a | b) \cdot \|c\|^2 + (a' | b) \cdot \|c\|^2 - (a | c) \cdot (b | c) - (a' | c) \cdot (b | c) \\
&= (a | b) \cdot \|c\|^2 - (a | c) \cdot (b | c) + (a' | b) \cdot \|c\|^2 - (a' | c) \cdot (b | c) \\
&= (a, b | c) + (a', b | c).
\end{aligned}$$

□

**Korolar 1.1.1.** *Ako su  $a, b, c$  nizovi s članovima  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  redom tada je funkcija  $(\cdot, \cdot | \cdot)$  definirana sa*

$$(a, b | c) = \sum_{i < j} (\alpha_i \gamma_j - \gamma_i \alpha_j)(\beta_i \gamma_j - \gamma_i \beta_j)$$

također jedan 2-skalarni produkt.

*Dokaz.* (i)

$$\begin{aligned}
(a, a | b) &= \sum_{i < j} (\alpha_i \beta_j - \beta_i \alpha_j)(\alpha_i \beta_j - \beta_i \alpha_j) \\
&= \sum_{i < j} (\alpha_i \beta_j - \beta_i \alpha_j)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a, a | b) = 0 &\iff \sum_{i < j} (\alpha_i \beta_j - \beta_i \alpha_j)^2 = 0 \iff |\alpha_i \beta_j - \beta_i \alpha_j| = 0, \forall i, j \\
&\iff \alpha_i \beta_j = \beta_i \alpha_j \iff \alpha_i \beta_i = \alpha_j \beta_j, \forall i, j \iff a = \lambda b.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
(a, a | b) &= \sum_{i < j} (\alpha_i \beta_j - \beta_i \alpha_j)^2 = \sum_{i < j} (\beta_j \alpha_i - \alpha_j \beta_i)^2 \\
&= \sum_{i < j} (\beta_j \alpha_i - \alpha_j \beta_i)(\beta_j \alpha_i - \alpha_j \beta_i) = (b, b | a).
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}(a, b | c) &= \sum_{i < j} (\alpha_i \gamma_j - \gamma_i \alpha_j)(\beta_i \gamma_j - \gamma_i \beta_j) \\ &= \sum_{i < j} (\beta_i \gamma_j - \gamma_i \beta_j)(\alpha_i \gamma_j - \gamma_i \alpha_j) = (b, a | c).\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}(\lambda a, b | c) &= \sum_{i < j} (\lambda \alpha_i \gamma_j - \gamma_i \lambda \alpha_j)(\beta_i \gamma_j - \gamma_i \beta_j) \\ &= \sum_{i < j} \lambda (\alpha_i \gamma_j - \gamma_i \alpha_j)(\beta_i \gamma_j - \gamma_i \beta_j) = \lambda (a, b | c).\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}(a + a', b | c) &= \sum_{i < j} ((\alpha_i + \alpha'_i) \gamma_j - \gamma_i (\alpha_j + \alpha'_j))(\beta_i \gamma_j - \gamma_i \beta_j) \\ &= \sum_{i < j} (\alpha_i \gamma_j + \alpha'_i \gamma_j - \gamma_i \alpha_j - \gamma_i \alpha'_j)(\beta_i \gamma_j - \gamma_i \beta_j) \\ &= \sum_{i < j} (\alpha_i \gamma_j - \gamma_i \alpha_j)(\beta_i \gamma_j - \gamma_i \beta_j) + \sum_{i < j} (\alpha'_i \gamma_j - \gamma_i \alpha'_j)(\beta_i \gamma_j - \gamma_i \beta_j) \\ &= (a, b | c) + (a', b | c).\end{aligned}$$

□

**Propozicija 1.1.2.** *Cauchy - Schwarz - Bunjakovskijeva nejednakost*  
Neka je  $X$  2-unitarni prostor. Za svaki  $a, b, c \in X$  vrijedi:

$$|(a, b | c)| \leq \sqrt{(a, a | c)} \cdot \sqrt{(b, b | c)}.$$

*Dokaz.* Neka je  $\beta$  proizvoljan realan broj. Koristeći svojstva 2-skalarnog produkta (iii), (iv) i (v) dobivamo da vrijedi:

$$\begin{aligned}
0 &\leq (a + \beta(a, b|c)b, a + \beta(a, b|c)b|c) \\
&= (a, a + \beta(a, b|c)b|c) + (\beta(a, b|c)b, a + \beta(a, b|c)b|c) \\
&= (a + \beta(a, b|c)b, a|c) + (a + \beta(a, b|c)b, \beta(a, b|c)b|c) \\
&= (a, a|c) + (\beta(a, b|c)b, a|c) + (a, \beta(a, b|c)b|c) + (\beta(a, b|c)b, \beta(a, b|c)b|c) \\
&= (a, a|c) + \beta((a, b|c)b, a|c) + (\beta(a, b|c)b, a|c) + \beta((a, b|c)b, \beta(a, b|c)b|c) \\
&= (a, a|c) + \beta((a, b|c)b, a|c) + \beta((a, b|c)b, a|c) + \beta(\beta(a, b|c)b, (a, b|c)b|c) \\
&= (a, a|c) + 2\beta((a, b|c)b, a|c) + \beta^2((a, b|c)b, (a, b|c)b|c) \\
&= (a, a|c) + 2\beta(a, b|c) \cdot (b, a|c) + \beta^2(a, b|c) \cdot (a, b|c) \cdot (b, b|c) \\
&= (a, a|c) + 2\beta(a, b|c)^2 + \beta^2(a, b|c)^2 \cdot (b, b|c).
\end{aligned}$$

Ako je  $(b, b|c) = 0$  gornja nejednakost oĉito vrijedi.

Ako je  $(b, b|c) \neq 0$  tada gornju nejednakost dobivamo supstitucijom  $\beta = \frac{-1}{(b, b|c)}$ .

$$\begin{aligned}
(a, a|c) + 2 \cdot \frac{-1}{(b, b|c)} \cdot (a, b|c)^2 + \left(\frac{-1}{(b, b|c)}\right)^2 \cdot (a, b|c)^2 \cdot (b, b|c) &\geq 0 \\
(a, a|c) + \frac{-2}{(b, b|c)} \cdot (a, b|c)^2 + \frac{1}{(b, b|c)^2} \cdot (a, b|c)^2 \cdot (b, b|c) &\geq 0 / \cdot (b, b|c) \\
(a, a|c) (b, b|c) &\geq (a, b|c)^2.
\end{aligned}$$

□

**Korolar 1.1.3.** Za svaki  $a, b, c \in X$  vrijedi:  $(a, b|b) = 0$ .

*Dokaz.* Ako u prethodno dokazanu nejednakost uvrstimo  $c = b$  dobivamo

$$|(a, b|b)| \leq \sqrt{(a, a|b)} \cdot \sqrt{(b, b|b)}.$$

Prema definicijskom svojstvu (i) vrijedi  $(b, b|b) = 0$  te je stoga  $|(a, b|b)| \leq 0$ . To znaĉi da je  $(a, b|b) = 0$ . □

**Propozicija 1.1.4.** Za svaki  $a, b, c \in X$  i  $\gamma \in \mathbb{R}$  vrijedi:

$$(a, b|\gamma c) = \gamma^2 (a, b|c).$$

*Dokaz.* Promotrimo ĉemu je jednak izraz  $(a + b, a + b|\gamma c) - (a - b, a - b|\gamma c)$ .

$$\begin{aligned}
(a + b, a + b|\gamma c) - (a - b, a - b|\gamma c) &= (a, a|\gamma c) + 2(a, b|\gamma c) + (b, b|\gamma c) - (a, a|\gamma c) \\
&\quad + 2(a, b|\gamma c) - (b, b|\gamma c) \\
&= 4(a, b|\gamma c).
\end{aligned}$$

Iskoristimo li svojstva (ii), (iii) i (iv) iz definicije 2-skalnog produkta dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} [(a+b, a+b | \gamma c) - (a-b, a-b | \gamma c)] &= \frac{1}{4} [(\gamma c, \gamma c | a+b) - (\gamma c, \gamma c | a-b)] \\ &= \frac{\gamma^2}{4} [(c, c | a+b) - (c, c | a-b)] \\ &= \gamma^2 (a, b | c). \end{aligned}$$

□

## 1.2 2-norma i 2-normirani prostor

**Definicija 1.2.1.** Neka je  $X$  realan vektorski prostor dimenzije veće od 1 i neka je  $\|\cdot, \cdot\| : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  realna funkcija za koju vrijedi:

(i)  $\|a, b\| \geq 0$ , pri čemu je  $\|a, b\| = 0 \Leftrightarrow a$  i  $b$  linearno zavisni

(ii)  $\|a, b\| = \|b, a\|$ ,  $\forall a, b \in X$

(iii)  $\|a, \alpha b\| = |\alpha| \|a, b\|$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(iv)  $\|a, b+c\| \leq \|a, b\| + \|a, c\|$ ,  $\forall a, b, c \in X$  i  $\alpha \in \mathbb{R}$  (nejednakost trokuta).

Tada funkciju  $\|\cdot, \cdot\|$  zovemo **2-norma** na  $X$ . Uređeni par  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  zovemo **2-normirani prostor**.

**Propozicija 1.2.1.** Neka je  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  2-normirani prostor. Tada za svaki  $x, y \in X$  i  $\alpha \in \mathbb{R}$  vrijedi

(i)  $\|a, b\| = \|a, \alpha a + b\|$

(ii)  $\|a+b, a-b\| = 2\|a, b\|$ .

*Dokaz.* (i) Kad na izraz  $\|a, \alpha a + b\|$  primijenimo nejednakost trokuta, to jest svojstvo (iv) iz definicije 2-norme imamo

$$\|a, \alpha a + b\| \leq \|a, \alpha a\| + \|a, b\| = |\alpha| \|a, a\| + \|a, b\| = 0 + \|a, b\| = \|a, b\|.$$

S druge strane, napišemo li  $\|a, b\|$  ovako  $\|a, (\alpha a + b) + (-\alpha a)\|$  i ponovno primijenimo nejednakost trokuta imamo:

$$\begin{aligned} \|a, b\| &= \|a, (\alpha a + b) + (-\alpha a)\| \leq \|a, \alpha a + b\| + \|a, -\alpha a\| \\ &= \|a, \alpha a + b\| + |\alpha| \|a, a\| = \|a, \alpha a + b\| + 0 = \|a, \alpha a + b\| \end{aligned}$$

Pokazali smo da vrijedi i  $\|a, \alpha a + b\| \leq \|a, b\|$  i  $\|a, b\| \leq \|a, \alpha a + b\|$  pa vrijedi jednakost i time je dokazana tvrdnja (i).

(ii) Primijenimo li na vektor  $a + b$ ,  $a - b$  i na skalar  $\alpha = 1$  prvi dio propozicije dobivamo:

$$\begin{aligned}\|a + b, a - b\| &= \|1(a + b), 1(a + b) + (a - b)\| \\ &= \|a + b, 2a\| = 2\|a, a + b\|.\end{aligned}$$

Sada primjenom prvog dijela propozicije na vektore  $a$ ,  $b$  i  $\alpha = 1$  dobivamo:

$$\|a, a + b\| = \|a, 1 \cdot a + b\| = \|a, b\|,$$

pa sveukupno imamo:

$$\|a + b, a - b\| = 2\|a, b\|$$

što je i trebalo dokazati. □

**Propozicija 1.2.2.** *Ako je  $(\cdot, \cdot | \cdot)$  2- skalarni produkt, tada se njemu pridružuje funkcija  $\|\cdot, \cdot\|$  definirana na sljedeći način:*

$$\|a, b\| = \sqrt{(a, a | b)}$$

*i ta je funkcija 2-norma.*

*Dokaz. (i)*

$$\begin{aligned}\|a, b\| &= \sqrt{(a, a | b)} \geq 0, \\ \|a, b\| = 0 &\iff \sqrt{(a, a | b)} = 0 \iff (a, a | b) = 0 \iff a = \lambda b, \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(ii)

$$\|a, b\| = \sqrt{(a, a | b)} = \sqrt{(b, b | a)} = \|b, a\|.$$

(iii)

$$\begin{aligned}\|a, \alpha b\| &= \sqrt{(a, a | \alpha b)} = \sqrt{(\alpha b, \alpha b | a)} \\ &= \sqrt{\alpha^2 (b, b | a)} = |\alpha| \sqrt{(b, b | a)} = |\alpha| \cdot \|b, a\|.\end{aligned}$$

(iv) Treba dokazati da za danu funkciju vrijedi  $\|a, b + c\| \leq \|a, b\| + \|a, c\|$ . Po defnciji funkcije imamo:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(a, a | b + c)} &\leq \sqrt{(a, a | b)} + \sqrt{(a, a | c)} \\
&\iff \sqrt{(b + c, b + c | a)} \leq \sqrt{(b, b | a)} + \sqrt{(c, c | a)} \\
&\iff (b, b | a) + 2(b, c | a) + (c, c | a) \leq (b, b | a) + (c, c | a) + 2\sqrt{(b, b | a)(c, c | a)} \\
&\iff (b, c | a) \leq \sqrt{(b, b | a)(c, c | a)} \\
&\iff (b, c | a)^2 \leq (b, b | a) \cdot (c, c | a)
\end{aligned}$$

što vrijedi prema propoziciji 1.1.2.

Dakle, funkcija definirana na sljedeći način  $\|a, b\| = \sqrt{(a, a | b)}$  je 2-norma.  $\square$

**Teorem 1.2.2. Besselova nejednakost u 2-unitarnim prostorima**

Neka je  $(X, (\cdot, \cdot | \cdot))$  2-unitarni prostor i neka su  $e_1, e_2, \dots, e_n \in X$  takvi da je  $(e_i, e_j | b) = 0$  za  $i \neq j$  te  $(e_i, e_i | b) = 1$  za  $i = 1, 2, \dots, n$ . Tada sa svaki  $x \in X$  vrijedi:

$$\sum_{i=1}^n |(x, e_i | b)|^2 \leq \|x, b\|^2.$$

*Dokaz.* Neka je

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i,$$

$\alpha_i \in \mathbb{R}$  to jest  $y \in \text{conv}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ .

Koristeći svojstva 2-skalarneog produkta imamo:

$$\begin{aligned}
(x, y | b) &= (x, \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i | b) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (x, e_i | b), \\
(y, y | b) &= (\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i | b) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (e_i, e_i | b) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2
\end{aligned}$$

Promotrimo čemu je jednak 2-skalarni produkt  $(x - y, x - y | b)$ :

$$\begin{aligned}
(x - y, x - y | b) &= (x, x | b) - 2(x, y | b) + (y, y | b) \\
&= (x, x | b) - 2(x, y | b) + \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \\
&= (x, x | b) - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i (x, e_i | b) + \sum_{i=1}^n \alpha_i^2
\end{aligned}$$

Stavimo li da je  $\alpha_i = (x, e_i | b)$  tj.

$$y = \sum_{i=1}^n (x, e_i | b) \cdot e_i$$

dobivamo:

$$(x - y, x - y | b) = (x, x | b) - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2.$$

Znamo po definiciji 2-skalarneog produkta da je  $(x - y, x - y | b) \geq 0$ . Slijedi da je:

$$\begin{aligned} (x, x | b) - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 &\geq 0 \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 &\leq (x, x | b) \\ \sum_{i=1}^n (x, e_i | b)^2 &\leq \|x, b\|^2. \end{aligned}$$

□

## Poglavlje 2

# Povezanost 2-unitarnih i 2- normiranih prostora

### 2.1 Karakterizacije 2-unitarnih prostora

**Teorem 2.1.1.** Na proizvoljnom 2-unitarnom prostoru  $(X, (\cdot, \cdot | \cdot))$ ,  $\|a, b\| := \sqrt{(a, a | b)}$  definira 2-normu za koju vrijedi:

1.  $(a, b | c) = \frac{1}{4} (\|a + b, c\|^2 - \|a - b, c\|^2)$
2. 2-dimenzionalni analogon jednakosti paralelograma:

$$\|a + b, c\|^2 + \|a - b, c\|^2 = 2(\|a, c\|^2 + \|b, c\|^2).$$

*Dokaz.* Već smo pokazali da je  $\|a, b\|$  norma.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (\|a + b, c\|^2 - \|a - b, c\|^2) &= \frac{1}{4} [(a + b, a + b | c) - (a - b, a - b | c)] \\ &= \frac{1}{4} [(a, a | c) + 2(a, b | c) + (b, b | c) \\ &\quad - (a, a | c) + 2(a, b | c) - (b, b | c)] \\ &= \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot (a, b | c) = (a, b | c). \end{aligned}$$

Koristeći definiciju 2-normi i svojstva (iii), (iv) i (v) 2-skalarneog produkta dobivamo:



$$\begin{aligned}
 & \|a + b, c\|^2 + \|a - b, c\|^2 \\
 &= (a + b, a + b | c) + (a - b, a - b | c) \\
 &= (a, a + b | c) + (b, a + b | c) + (a, a - b | c) + (-b, a - b | c) \\
 &= (a + b, a | c) + (a + b, b | c) + (a - b, a | c) - (a - b, b | c) \\
 &= (a, a | c) + (b, a | c) + (a, b | c) + (b, b | c) + (a, a | c) - (b, a | c) - (a, b | c) + (b, b | c) \\
 &= 2(a, a | c) + 2(b, b | c) \\
 &= 2(\|a, c\|^2 + \|b, c\|^2).
 \end{aligned}$$

□

Svaki 2-unitarni prostor  $(X, (\cdot, \cdot | \cdot))$  smatrat će se 2-normiranim prostorom s 2-normom  $\|a, b\| := \sqrt{(a, a | b)}$ . Između 2-normiranog prostora i 2-unitarnog prostora postoji karakterizacija koja je 2-dimenzionalni analogon pravilu paralelograma.

**Teorem 2.1.2.** *Neka je  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  2-normirani prostor u kojem je za svaki  $a, b, c \in X$  vrijedi pravilo paralelograma:*

$$\|a + b, c\|^2 + \|a - b, c\|^2 = 2(\|a, c\|^2 + \|b, c\|^2). \quad (2.1)$$

Tada je preslikavanje  $(\cdot, \cdot | \cdot)$  definirano na sljedeći način:

$$(a, b | c) = \frac{1}{4} (\|a + b, c\|^2 - \|a - b, c\|^2)$$

jedan 2-skalarni produkt na  $X$ .

*Dokaz.* Pokažimo da vrijede svojstva 2-skalarnog produkta:

(i)

$$\begin{aligned}
 (a, a | b) \geq 0 &\iff \frac{1}{4} (\|a + a, b\|^2 - \|a - a, b\|^2) \geq 0 \\
 &\iff \|2a, b\|^2 - \|0, b\|^2 \geq 0 \iff \|2a, b\|^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

(ii)

$$(a, a | b) = \frac{1}{4} (\|2a, b\|^2 - \|a - a, b\|^2) = \frac{1}{4} (\|2b, a\|^2 - \|b - b, a\|^2) = (b, b | a).$$

(iii)

$$\begin{aligned} (a, b | c) &= \frac{1}{4} (\|a + b, c\|^2 - \|a - b, c\|^2) = \frac{1}{4} (\|b + a, c\|^2 - \|-(b - a), c\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|b + a, c\|^2 - \|b - a, c\|^2) = (b, a | c). \end{aligned}$$

Dokažimo sada (v) svojstvo 2-skalarneog produkta. Prema definiciji imamo:

$$\begin{aligned} (a, b | c) + (a', b | c) &= \frac{1}{4} (\|a + b, c\|^2 - \|a - b, c\|^2 + \|a' + b, c\|^2 - \|a' - b, c\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|a + b, c\|^2 + \|a' + b, c\|^2) - \frac{1}{4} (\|a - b, c\|^2 + \|a' - b, c\|^2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Umjesto  $a$  uvrstimo u (2.1) izraz  $\frac{a + a'}{2} + b$ , a umjesto  $b$  stavimo  $\frac{a - a'}{2}$ . Tada (2.1) postaje:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{a + a'}{2} + b + \frac{a - a'}{2}, c \right\|^2 + \left\| \frac{a + a'}{2} + b - \frac{a - a'}{2}, c \right\|^2 &= 2 \left[ \left\| \frac{a + a'}{2} + b, c \right\|^2 + \left\| \frac{a - a'}{2}, c \right\|^2 \right] \\ \|a + b, c\|^2 + \|a' + b, c\|^2 &= 2 \left[ \left\| \frac{a + a'}{2} + b, c \right\|^2 + \left\| \frac{a - a'}{2}, c \right\|^2 \right]. \end{aligned}$$

Ako u (2.1) umjesto  $a$  uvrstimo  $\frac{a + a'}{2} - b$ , a umjesto  $b$  uvrstimo  $\frac{a - a'}{2}$  dobivamo

$$\begin{aligned} \left\| \frac{a + a'}{2} - b + \frac{a - a'}{2}, c \right\|^2 + \left\| \frac{a + a'}{2} - b - \frac{a - a'}{2}, c \right\|^2 &= 2 \left[ \left\| \frac{a + a'}{2} - b, c \right\|^2 + \left\| \frac{a - a'}{2}, c \right\|^2 \right] \\ \|a - b, c\|^2 + \|a' - b, c\|^2 &= 2 \left[ \left\| \frac{a + a'}{2} - b, c \right\|^2 + \left\| \frac{a - a'}{2}, c \right\|^2 \right]. \end{aligned}$$

Uvrstimo sada dobivene izraze u (2.3) i imamo:

$$\begin{aligned} (a, b | c) + (a', b | c) &= \frac{1}{4} \cdot 2 \left( \left\| \frac{a + a'}{2} + b, c \right\|^2 + \left\| \frac{a - a'}{2}, c \right\|^2 \right) - \frac{1}{4} \cdot 2 \left( \left\| \frac{a + a'}{2} - b, c \right\|^2 + \left\| \frac{a - a'}{2}, c \right\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \left\| \frac{a + a'}{2} + b, c \right\|^2 + \left\| \frac{a + a'}{2} - b, c \right\|^2 \right) \\ &= 2 \cdot \left( \frac{a + a'}{2}, b | c \right), \end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjoj jednakosti iskoristili definiciju od  $(\cdot, \cdot | \cdot)$ .

Zamjetimo da je  $(0, b | c) = 0$  jer kad u definiciju preslikavanja  $(\cdot, \cdot | \cdot)$  stavimo  $a = 0$  dobivamo  $(0, b | c) = \frac{1}{4} (\|b, c\|^2 - \|-b, c\|^2) = 0$ .

Ako u dobiveni izraz  $(a, b | c) + (a', b | c) = 2 \left( \frac{a+a'}{2}, b | c \right)$  uvrstimo  $a' = 0$  dobivamo

$$(a, b | c) = 2 \left( \frac{a}{2}, b | c \right).$$

Dobivena jednakost vrijedi za svaki vektor  $a$ , pa specijalno vrijedi i za vektor  $a + a'$  to jest

$$(a + a', b | c) = 2 \left( \frac{a+a'}{2}, b | c \right),$$

a to znači da je  $(a, b | c) + (a', b | c) = (a + a', b | c)$ . Time je svojstvo (v) dokazano.

Iz svojstva  $(a, b | c) = 2 \left( \frac{a}{2}, b | c \right)$  slijedi daljni niz jednakosti:  $(a, b | c) = 2 \left( \frac{a}{2}, b | c \right) = 2^2 \left( \frac{a}{2^2}, b | c \right) = 2^3 \left( \frac{a}{2^3}, b | c \right) = \dots = 2^n \left( \frac{a}{2^n}, b | c \right), n \in \mathbb{N}$ .

Neka je  $m \in \mathbb{N}$ . Tada vrijedi  $\left( \frac{ma}{2^n}, b | c \right) = \frac{m}{2^n} (a, b | c)$ .

Dokažimo:

Za  $m = 1$ ,  $\left( \frac{ma}{2^n}, b | c \right) = \left( \frac{a}{2^n}, b | c \right) = \frac{1}{2^n} (a, b | c)$  prema gornjem nizu jednakosti.

Pretpostavimo da za neki  $m \in \mathbb{N}$  vrijedi:  $\left( \frac{ma}{2^n}, b | c \right) = \frac{m}{2^n} (a, b | c)$ .

Za  $m + 1$  tada vrijedi:

$$\left( \frac{m+1}{2^n} a, b | c \right) = \left( \frac{m}{2^n} a + \frac{a}{2^n}, b | c \right).$$

Pokazali smo da vrijedi svojstvo (v) 2-skalarnog produkta, pa gornju jednakost možemo zapisati na sljedeći način:

$$\left( \frac{m}{2^n} a + \frac{a}{2^n}, b | c \right) = \left( \frac{ma}{2^n}, b | c \right) + \left( \frac{a}{2^n}, b | c \right).$$

Iskoristimo li sada pretpostavku i činjenicu da je  $(a, b | c) = 2^n \left( \frac{a}{2^n}, b | c \right)$  dobivamo:

$$\left( \frac{m}{2^n} a + \frac{a}{2^n}, b | c \right) = \frac{m}{2^n} (a, b | c) + \frac{(a, b | c)}{2^n} = \left( \frac{m}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right) \cdot (a, b | c) = \left( \frac{m+1}{2^n} \right) \cdot (a, b | c).$$

Dakle, sada imamo da je  $\alpha(a, b | c) = (\alpha a, b | c)$  za  $\alpha = \frac{m}{2^n}$ .

Kako su  $\|\alpha a + b, c\|$  i  $\|\alpha a - b, c\|$  neprekidne funkcije od  $\alpha$ ,  $(\alpha a, b | c)$  je također neprekidna funkcija po  $\alpha$ ,  $\alpha(a, b | c) = (\alpha a, b | c)$ , za svaki realan broj  $\alpha$ .  $\square$

Dakle, prema upravo dokazanom teoremu, svaki 2-normirani prostor  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  čija 2-norma zadovoljava pravilo paralelograma smatramo i 2-unitarnim prostorom s 2-skalarnim produktom

$$(a, b | c) = \frac{1}{4} (\|a + b, c\|^2 - \|a - b, c\|^2).$$

Neka je  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  2-normirani prostor i neka je  $c \in X$ . Neka je  $X(\{c\})$  vektorski potprostor generiran vektorom  $c$ , to jest  $X(\{c\})$  je skup svih vektora oblika  $\lambda c$ , pri čemu je  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Definiramo relaciju  $\sim$  ovako:  $x \sim y$  ako i samo ako je vektor  $x - y$  iz  $X(\{c\})$ . Neka je  $X_c$  kvocijentni prostor prostora  $X$  s obzirom na relaciju  $\sim$ . Za element  $a \in X$  sa  $(a)_c$  označavamo klasu u  $X_c$  koja sadrži vektor  $a$ , to jest  $(a)_c = a + X(\{c\}) = \{a + \lambda c : \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Dakle, ako je  $v$  iz  $(a)_c$  tada postoji  $\alpha \in \mathbb{R}$  takav da je  $v - a = \alpha c$ .

$X_c$  je vektorski prostor uz zbrajanje definirano ovako:  $(a)_c + (a')_c = (a + a')_c$  i množenje skalarom:  $(\alpha a)_c = \alpha(a)_c$ .

Na  $X_c$  definiramo funkciju  $\|\cdot\|_c$  na sljedeći način:  $\|(a)_c\|_c = \|a, c\|$ .

Nul-vektor u  $X_c$  je klasa  $(0)_c$  gdje je  $0$  nul-vektor u  $X$ . Pri tome je  $(0)_c = (a)_c$  za svaki  $a \in X(\{c\})$ . Naime, ako je  $a \in X(\{c\})$ , tada je  $a = \lambda_0 c$ , pa je  $(a)_c = \{a + \lambda c : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda_0 c + \lambda c : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda_0 + \lambda)c : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{0 + \mu c : \mu \in \mathbb{R}\} = (0)_c$ .

Provjerimo je li ta funkcija dobro definirana, tj. da li za drugog predstavnika  $v$  iste klase  $(a)_c$  vrijedi  $\|v, c\| = \|a, c\|$ . Za normu  $\|\cdot, \cdot\|$  vrijedi nejednakost trokuta:  $\|b + c, a\| \leq \|b, a\| + \|c, a\|$ . Ako imamo dva vektora  $v$  i  $a$  iz klase  $(a)_c$ , tada je  $v = a + (v - a)$ . Primijenimo li nejednakost trokuta na vektore  $a$  i  $(v - a)$  dobivamo:

$$\begin{aligned} \|a + (v - a), c\| &\leq \|a, c\| + \|v - a, c\| \\ \|v, c\| &\leq \|a, c\| + \|v - a, c\| \\ \|v, c\| - \|a, c\| &\leq \|v - a, c\| = \|\alpha c, c\| = |\alpha| \|c, c\| = 0. \end{aligned}$$

Na isti način, za vektor  $a$  i  $a - v$  dobivamo  $\|a, c\| - \|v, c\| \leq 0$  što zajedno s prethodnom nejednakosti daje da je  $\|v, c\| = \|a, c\|$ , tj. bez obzira kojeg predstavnika klase  $(a)_c$  uzeli, uvijek dobivamo istu vrijednost za  $\|(a)_c\|_c$ .

**Propozicija 2.1.1.** *Funkcija  $\|\cdot\|_c$  je norma na  $X_c$ .*

*Dokaz.* Moramo provjeriti vrijedi li svojstva norme:

1.  $\|(a)_c\|_c = 0 \Leftrightarrow \|a, c\| = 0$ . To vrijedi ako i samo ako su  $a$  i  $c$  linearno zavisni, tj.  $a \in X(\{c\})$ , a za tave smo već dokazali da je  $(a)_c = (0)_c$ .
2.  $\|\alpha(a)_c\|_c = \|(\alpha a)_c\|_c = \|\alpha a, c\| = |\alpha| \|a, c\| = |\alpha| \|(a)_c\|_c$  za  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$3. \|(a)_c + (b)_c\|_c = \|(a + b)_c\|_c = \|a + b, c\| \leq \|a, c\| + \|b, c\| = \|(a)_c\|_c + \|(b)_c\|_c.$$

□

**Teorem 2.1.3.** *2-normirani prostor  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  je 2-unitarni prostor ako i samo ako je za svaki  $c \in X, c \neq 0$   $(X_c, \|\cdot\|_c)$  unitarni prostor.*

*Dokaz.* Pretpostavimo prvo da je  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  2-unitaran prostor i neka je  $c \in X, c \neq 0$  proizvoljan vektor. Za proizvoljne točke  $(a)_c, (b)_c \in X_c$  prema definiciji norme  $\|\cdot\|_c$  i teoremu 2.1.1 slijedi:

$$\begin{aligned} \|(a)_c + (b)_c\|_c^2 + \|(a)_c - (b)_c\|_c^2 &= \|a + b, c\|^2 + \|a - b, c\|^2 \\ &= 2(\|a, c\|^2 + \|b, c\|^2) \\ &= 2(\|(a)_c\|_c^2 + \|(b)_c\|_c^2). \end{aligned}$$

Prema teoremu 2.1.1 zaključujemo da je  $(X_c, \|\cdot\|_c)$  unitarni prostor.

Sada pretpostavimo da je za svaki ne-nul vektor  $c \in X$ ,  $(X_c, \|\cdot\|_c)$  unitarni prostor. Tada imamo:

$$\begin{aligned} \|a + b, c\|^2 + \|a - b, c\|^2 &= \|(a)_c + (b)_c\|_c^2 + \|(a)_c - (b)_c\|_c^2 \\ &= 2\|(a)_c\|_c^2 + 2\|(b)_c\|_c^2 \\ &= 2(\|a, c\|^2 + \|b, c\|^2), \end{aligned}$$

to jest za  $\|\cdot\|$  vrijedi pravilo paralelograma, pa prema teoremu 2.1.2 zaključujemo da je  $(X, \|\cdot\|)$  2-unitaran prostor. □

Osim uvjeta iskazanog u teoremu 2.1.2 postoji niz uvjeta koji su nužni i dovoljni da normirani prostor  $(X, \|\cdot\|)$  bude unitaran prostor. Navedimo ih:

- (a) Za proizvoljne točke  $a, b \in X$  takve da je  $\|a\| = \|b\|$  i za proizvoljne realne brojeve  $\alpha$  i  $\beta$  vrijedi:

$$\|\alpha a + \beta b\| = \|\beta a + \alpha b\|.$$

- (b) Iz jednakosti  $\|a + b\| = \|a - b\|$  za  $a, b \in X$  slijedi  $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$ .
- (c) Postoji konstanta  $\alpha \neq 0, \pm 1$  takva da ako za  $a, b \in X$  vrijedi  $\|a + b\| = \|a - b\|$  tada je  $\|a + \alpha b\| = \|a - \alpha b\|$ .
- (d) Postoji konstanta  $\alpha \neq 0, \pm 1$  takva da ako za  $a, b \in X$  vrijedi  $\|a\| = \|b\|$  tada je  $\|a + \alpha b\| = \|\alpha a + b\|$ .

- (e) Za  $\|a\| = \|b\|, a, b \in X$  slijedi da za svaki realan broj  $\alpha \neq 0$  vrijedi  $\|\alpha a + \alpha^{-1}b\| \geq \|a + b\|$ .
- (f) Za proizvoljne vektore  $a_1, a_2, a_3 \in X$  takve da je  $a_1 + a_2 + a_3 = 0$  i  $\|a_1\| = \|a_2\|$  slijedi  $\|a_1 - a_3\| = \|a_2 - a_3\|$ .
- (g) Za proizvoljne vektore  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in X$  takve da je  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$  i  $\|a_1\| = \|a_2\|$  i  $\|a_3\| = \|a_4\|$  slijedi  $\|a_1 - a_3\| = \|a_2 - a_4\|, \|a_2 - a_3\| = \|a_1 - a_4\|$ .
- (h) Za proizvoljne vektore  $a_1, a_2, a_3 \in X$ , funkcija  $\Phi(a_1, a_2, a_3) = \|a_1 + a_2 + a_3\|^2 + \|a_1 + a_2 - a_3\|^2 - \|a_1 - a_2 - a_3\|^2 - \|a_1 - a_2 + a_3\|^2$  je uvijek neovisna o  $a_3$ .
- (i) Za proizvoljne točke  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in X, n \geq 3$  takve da je  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$  vrijedi:  $\sum_{i,j=1}^n \|a_i - a_j\|^2 = 2n \cdot \sum_{i=1}^n \|a_i\|^2$ .

Sada metodom analogije uočavamo koji su nužni i dovoljni uvjeti da 2-normirani prostor  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  bude 2-unitaran prostor. Neka je  $c \in X$  proizvoljni ne-nul vektor:

- (a') Za proizvoljne vektore  $a, b \in X$  takve da je  $\|a, c\| = \|b, c\|$  i za proizvoljne realne brojeve  $\alpha$  i  $\beta$  vrijedi:

$$\|\alpha a + \beta b, c\| = \|\beta a + \alpha b, c\|.$$

- (b') Iz jednakosti  $\|a + b, c\| = \|a - b, c\|$  za  $a, b \in X$  slijedi  $\|a + b, c\|^2 = \|a, c\|^2 + \|b, c\|^2$ .
- (c') Postoji konstanta  $\alpha \neq 0, \pm 1$  takva da ako za  $a, b \in X$  vrijedi  $\|a + b, c\| = \|a - b, c\|$  onda je  $\|a + \alpha b, c\| = \|a - \alpha b, c\|$ .
- (d') Postoji konstanta  $\alpha \neq 0, \pm 1$  takva da ako za  $a, b \in X$  vrijedi  $\|a, c\| = \|b, c\|$  onda je  $\|a + \alpha b, c\| = \|\alpha a + b, c\|$ .
- (e') Za  $\|a, c\| = \|b, c\|, a, b \in X$  slijedi da za svaki realan broj  $\alpha \neq 0, \|\alpha a + \alpha^{-1}b, c\| \geq \|a + b, c\|$ .
- (f') Za proizvoljne vektore  $a_1, a_2, a_3 \in X$  takve da je  $a_1 + a_2 + a_3 = 0$  i  $\|a_1, c\| = \|a_2, c\|$  slijedi  $\|a_1 - a_3, c\| = \|a_2 - a_3, c\|$ .
- (g') Za proizvoljne vektore  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in X$  takve da je  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$  i  $\|a_1, c\| = \|a_2, c\|$  i  $\|a_3, c\| = \|a_4, c\|$  slijedi  $\|a_1 - a_3, c\| = \|a_2 - a_4, c\|, \|a_2 - a_3, c\| = \|a_1 - a_4, c\|$ .
- (h') Za proizvoljne vektore  $a_1, a_2, a_3 \in X$ , funkcija  $\Phi(a_1, a_2, a_3) = \|a_1 + a_2 + a_3, c\|^2 + \|a_1 + a_2 - a_3, c\|^2 - \|a_1 - a_2 - a_3, c\|^2 - \|a_1 - a_2 + a_3, c\|^2$  je uvijek neovisna o  $a_3$ .

(i') Za proizvoljne točke  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in X$ ,  $n \geq 3$  takve da je  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$  vrijedi:  $\sum_{i,j=1}^n \|a_i - a_j, c\|^2 = 2n \cdot \sum_{i=1}^n \|a_i, c\|^2$ .

**Teorem 2.1.4.** 2-normirani prostor  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  je 2-unitarni prostor ako i samo ako su uvjeti (a'), (b'),  $\dots$ , (i') zadovoljeni za svaki ne-nul vektor  $c \in X$ .

*Dokaz.* Prema (a) za  $a_c, b_c \in X_c$   $\|a_c\|_c = \|b_c\|_c$  i  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \|\alpha a_c + \beta b_c\|_c = \|\beta a_c + \alpha b_c\|_c. \quad (2.3)$$

Uvjet  $\|a_c\|_c = \|b_c\|_c$  prelazi u oblik  $\|a, c\| = \|b, c\|$ , a uvjet (2.3) prelazi u oblika  $\|\alpha a + \beta b, c\| = \|\beta a + \alpha b, c\|$ , a to je upravo uvjet (a'). Ostali slučajevi se dokazuju na analogan način.  $\square$

Koristeći činjenicu da je  $\|a, b\| = \|a, \alpha a + b\|$  za proizvoljan realan broj  $\alpha$  dolazimo do sljedeće tvrdnje:

**Propozicija 2.1.2.** Neka je  $(X, (\cdot, \cdot | \cdot))$  2-unitaran prostor. Za svaki  $a, b, c \in X$  vrijedi:

$$\|a + b, b + c\| = \|a - c, b + c\| = \|a + b, a - c\| \quad (2.4)$$

$$\|a + b, b - c\| = \|a + c, b - c\| = \|a + b, a + c\| \quad (2.5)$$

$$\|a - b, b + c\| = \|a + c, b + c\| = \|a - b, a + c\| \quad (2.6)$$

$$\|a - b, b - c\| = \|a - c, b - c\| = \|a - b, a - c\|. \quad (2.7)$$

*Dokaz.* Znamo da prema propoziciji 1.2.1 za  $a, b \in X$  vrijedi  $\|a, b\| = \|a, \alpha a + b\|$  za svaki realan broj  $\alpha$ . Neka je  $\alpha = -1$ . Tada uzimajući u obzir svojstva 2-norme imamo:

$$\begin{aligned} \|a + b, b + c\| &= \|a + b, -1 \cdot (a + b) + b + c\| \\ &= \|a + b, -a - b + b + c\| \\ &= \|a + b, -(a - c)\| \\ &= |-1| \|a + b, a - c\| \\ &= \|a + b, a - c\|. \end{aligned}$$

Isto tako:

$$\begin{aligned} \|a + b, b + c\| &= \|b + c, a + b\| \\ &= \|b + c, -1 \cdot (b + c) + a + b\| \\ &= \|b + c, a - c\| \\ &= \|a - c, b + c\|. \end{aligned}$$

Time smo dokazali tvrdnju (2.4). Analogno, za (2.5) imamo:

$$\begin{aligned}\|a + b, b - c\| &= \|b - c, a + b\| \\ &= \|b - c, -(b - c) + a + b\| \\ &= \|b - c, a + c\| \\ &= \|a + c, b - c\|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|a + b, b - c\| &= \|a + b, -(a + b) + b - c\| \\ &= \|a + b, -a - c\| \\ &= \|a + b, -(a + c)\| \\ &= \|a + b, a + c\|.\end{aligned}$$

Tvrdnje (2.6) i (2.7) dokazuju se također analogno. □

**Propozicija 2.1.3.** *U 2-unitarnom prostoru vrijedi:*

$$\|a + b, b + c\|^2 = S + 2(a, b | c) - 2(a, c | b) + 2(b, c | a), \quad (2.8)$$

$$\|a + b, b - c\|^2 = S + 2(a, b | c) + 2(a, c | b) - 2(b, c | a), \quad (2.9)$$

$$\|a - b, b + c\|^2 = S - 2(a, b | c) + 2(a, c | b) + 2(b, c | a), \quad (2.10)$$

$$\|a - b, b - c\|^2 = S - 2(a, b | c) - 2(a, c | b) - 2(b, c | a). \quad (2.11)$$

pri čemu je  $S = \|a, b\|^2 + \|a, c\|^2 + \|b, c\|^2$ .

Uočimo, zbrajanjem (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) dobivamo da vrijedi:

$$\|a + b, b + c\|^2 + \|a + b, b - c\|^2 + \|a - b, b + c\|^2 + \|a - b, b - c\|^2 = 4S. \quad (2.12)$$

Zbrojimo li pak (2.8) i (2.9) te oduzmemo zbroj (2.10) i (2.11) dobivamo:

$$[\|a + b, b + c\|^2 + \|a + b, b - c\|^2] - [\|a - b, b + c\|^2 + \|a - b, b - c\|^2] = 8(a, b | c) \quad (2.13)$$

Dakle, u 2-unitarnom prostoru vrijede (2.12) i (2.13). Vrijedi i obrat, to jest ako u 2-normiranom prostoru vrijedi (2.12), tada je taj prostor ujedno i 2-unitarni. Dakle, (2.12) je nužan i dovoljan uvjet da 2-normirani prostor postane 2-unitarni. Dokažimo tu tvrdnju.

**Teorem 2.1.5.** *2-normirani prostor  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  je 2-unitarni prostor ako i samo ako je tvrdnja (2.12) istinita. 2-skalarni produkt je tada dan s (2.13).*



*Dokaz.* Ako je  $X$  2-unitarni prostor tada smo u pretdnom postupku dokazali da vrijedi (2.12). Dokažimo obrat.

Pretpostavimo da u 2-normiranom prostoru vrijedi (2.12), to jest da vrijedi:

$$\|a + b, b + c\|^2 + \|a + b, b - c\|^2 + \|a - b, b + c\|^2 + \|a - b, b - c\|^2 = 4S.$$

Kada u (2.12) umjesto  $a$  stavimo  $c + b$ , umjesto  $b$  stavimo  $a$  i umjesto  $c$  stavimo  $c - b$  dobivamo:

$$\begin{aligned} & 4(\|c + b, a\|^2 + \|a, c - b\|^2 + \|c + b, c - b\|^2) \\ &= \|c + b + a, a + c - b\|^2 + \|c + b + a, a - c + b\|^2 \\ &+ \|c + b - a, a + c - b\|^2 + \|c + b - a, a - c + b\|^2 \\ &= \|b + (a + c), (a + c) - b\|^2 + \|c + (a + b), a + b - c\|^2 + \|c - (a - b), a - b + c\|^2 \\ &+ \|b - (a - c), a - c + b\|^2. \end{aligned}$$

Sada na svaki od navedenih pribrojnika primijenimo propoziciju (1.2.1) (ii). Kada u propoziciji (1.2.1) (ii) umjesto  $a$  stavimo  $a + c$ , a umjesto  $b$   $b$  dobivamo:

$$\|c + b + a, a + c - b\|^2 = \|(a + c) + b, (a + c) - b\|^2 = (2\|a + c, b\|)^2 = 4\|a + c, b\|^2.$$

Ako pak u propoziciji (1.2.1) (ii) umjesto  $a$  uvrstimo  $a + b$ , a umjesto  $b$  uvrstimo  $c$  dobivamo:

$$\|c + b + a, a - c + b\|^2 = \|(a + b) + c, (a + b) - c\|^2 = (2\|a + b, c\|)^2 = 4\|a + b, c\|^2.$$

Uvrstimo li u propoziciju (1.2.1) (ii) umjesto  $a$   $c$ , a umjesto  $b$  uvrstimo  $b - a$  dobivamo:

$$\|c + b - a, a + c - b\|^2 = \|c + (b - a), c - (b - a)\|^2 = (2\|c, b - a\|)^2 = 4\|c, b - a\|^2.$$

I konačno, ako u propoziciju (1.2.1) (ii) umjesto  $a$  uvrstimo  $b$ , a umjesto  $b$  uvrstimo  $c - a$  dobivamo:

$$\|c + b - a, a - c + b\|^2 = \|b + (c - a), b - (c - a)\|^2 = (2\|b, c - a\|)^2 = 4\|b, c - a\|^2.$$

Kada sve dobiveno uvrstimo u gornju jednakost imamo:

$$\begin{aligned} & 4(\|c + b, a\|^2 + \|a, c - b\|^2 + \|c + b, c - b\|^2) \\ &= 4(\|b, a + c\|^2 + \|c, b + a\|^2 + \|c, a - b\|^2 + \|b, a - c\|^2). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Slično, kada u (2.12) umjesto  $a$  stavimo  $c + a$  i umjesto  $c$  stavimo  $c - a$  dobivamo:

$$\begin{aligned}
 & 4(\|c + a, b\|^2 + \|c - a, b\|^2 + \|c + a, c - a\|^2) \\
 &= \|c + a + b, b + c - a\|^2 + \|c + a + b, b - (c - a)\|^2 \\
 &+ \|c + a - b, b + c - a\|^2 + \|c + a - b, b - c + a\|^2 \\
 &= \|(b + c) + a, (b + c) - a\|^2 + \|a + b + c, b + a - c\|^2 + \|c - (b - a), b - a + c\|^2 \\
 &+ \|a - (b - c), b - c + a\|^2.
 \end{aligned}$$

Sada na svaki od navedenih pribrojnika primjenimo propoziciju (1.2.1) (ii). Kada u propoziciji (1.2.1) (ii) umjesto  $a$  stavimo  $b + c$ , a umjesto  $b$  stavimo  $a$  dobivamo:

$$\|c + a + b, b + c - a\|^2 = \|(b + c) + a, (b + c) - a\|^2 = (2\|b + c, a\|)^2 = 4\|b + c, a\|^2.$$

Ako pak u propoziciji (1.2.1) (ii) umjesto  $a$  uvrstimo  $a + b$ , a umjesto  $b$  uvrstimo  $c$  dobivamo:

$$\|c + a + b, b - (c - a)\|^2 = \|(a + b) + c, (a + b) - c\|^2 = (2\|a + b, c\|)^2 = 4\|a + b, c\|^2.$$

Uvrstimo li u propoziciju (1.2.1) (ii) umjesto  $a$   $c$ , a umjesto  $b$  uvrstimo  $b - a$  dobivamo:

$$\|c + a - b, b - c + a\|^2 = \|c - (b - a), c + (b - a)\|^2 = (2\|c, b - a\|)^2 = 4\|c, b - a\|^2.$$

I konačno, ako u propoziciju (1.2.1) (ii) umjesto  $b$  uvrstimo  $b - c$  dobivamo:

$$\|a - b + c, b - c + a\|^2 = \|a - (b - c), a + (b - c)\|^2 = (2\|a, b - c\|)^2 = 4\|a, b - c\|^2.$$

Kada sve dobiveno uvrstimo u gornju jednakost imamo:

$$\begin{aligned}
 & 4(\|c + a, b\|^2 + \|c - a, b\|^2 + \|c + a, c - a\|^2) \\
 &= 4(\|a, b + c\|^2 + \|c, b + a\|^2 + \|c, b - a\|^2 + \|a, b - c\|^2). \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

Zbrojimo li sada (2.14) i (2.15) imamo:

$$\begin{aligned}
 & 4(\|b, a + c\|^2 + \|c, b + a\|^2 + \|c, a - b\|^2 + \|b, a - c\|^2 + 4(\|a, b + c\|^2 + \|c, b + a\|^2 + \|c, b - a\|^2 + \|a, b - c\|^2) \\
 &= 4(\|c + b, a\|^2 + \|a, c - b\|^2 + \|c + b, c - b\|^2) + 4(\|c + a, b\|^2 + \|c - a, b\|^2 + \|c + a, c - a\|^2 \\
 &\|b, a + c\|^2 + \|c, b + a\|^2 + \|c, a - b\|^2 + \|b, a - c\|^2 + \|a, b + c\|^2 + \|c, b + a\|^2 + \|c, b - a\|^2 + \|a, b - c\|^2) \\
 &= \|a, b + c\|^2 + \|a, -(b - c)\|^2 + \|c + b, c - b\|^2 + \|b, a + c\|^2 + (\|b, -(a - c)\|^2 + \|c + a, c - a\|^2)
 \end{aligned}$$

$$\|c, b + a\|^2 + \|c, a - b\|^2 + \|c, b + a\|^2 + \|c, b - a\|^2 = \|c + b, c - b\|^2 + \|c + a, c - a\|^2$$

$$2\|c, a + b\|^2 + \|c, a - b\|^2 + \|c, -(a - b)\|^2 = 4\|c, b\|^2 + 4\|c, a\|^2$$

$$2(\|c, a + b\|^2 + \|c, a - b\|^2) = 4(\|c, b\|^2 + \|c, a\|^2)$$

$$\|a + b, c\|^2 + \|a - b, c\|^2 = 2[\|a, c\|^2 + \|b, c\|^2].$$

Prema teoremu 2.1.2 zaključujemo da je to ujedno i 2-unitarni prostor u kojem je 2-skalarni produkt definiran ovako:

$$(a, b | c) = \frac{1}{4}(\|a + b, c\|^2 - \|a - b, c\|^2).$$

Iskoristimo li sada ponovno tvrdnju (2.12) za vektore  $a + b$ ,  $b + c$  i  $b - c$  imamo:

$$\begin{aligned} 4(\|a + b, b + c\|^2 + \|a + b, b - c\|^2 + \|b + c, b - c\|^2) \\ = \|a + 2b + c, 2b\|^2 + \|a + 2b + c, 2c\|^2 + \|a - c, 2b\|^2 + \|a - c, 2c\|^2. \end{aligned}$$

Sada na svaki od navedenih pribrojnika primijenimo propoziciju 1.2.1 (i). Kada u propoziciji 1.2.1 (i) umjesto  $a$  stavimo  $2b$ , a umjesto  $b$  stavimo  $a + c$  dobivamo:

$$\|a + b, 2b\| = \|2b, a + c\| = \|2b, 1 \cdot 2b + a + c\| = \|2b, 2b + a + c\| = \|a + 2b + c, 2b\|.$$

Kada kvadriramo dobiveni izraz i primijenimo svojstva 2-norme, dobivamo

$$4\|a + c, b\|^2 = \|a + 2b + c, 2b\|^2.$$

Slično, ako u propoziciju 1.2.1 (i) umjesto  $a$  uvrstimo  $2c$ , a umjesto  $b$  uvrstimo  $a + 2b$  dobivamo:

$$\|a + 2b, 2c\| = \|2c, a + 2b\| = \|2c, \frac{1}{2} \cdot 2c + a + 2b\| = \|2c, c + a + 2b\| = \|a + 2b + c, 2c\|.$$

Ako kvadriramo dobiveni izraz i primijenimo svojstva 2-norme, imamo

$$4\|a + 2b, c\|^2 = \|a + 2b + c, 2c\|^2.$$

Kvadriranjem i korištenjem svojstva 2-norme dolazimo i do jednakosti:

$$\|a - c, 2b\|^2 = 4\|a - c, b\|^2.$$

I konačno, ako u propoziciju 1.2.1 (i) umjesto  $a$  uvrstimo  $2c$ , a umjesto  $b$  uvrstimo  $a$  dobivamo

$$\|a, 2c\| = \|2c, a\| = \|2c, \frac{-1}{2} \cdot 2c + a\| = \|2c, -c + a\| = \|a - c, 2c\|.$$

Kvadriranjem i korištenjem svojstava 2-norme dolazimo do jednakosti:

$$\|a - c, 2c\|^2 = 4\|a, c\|^2.$$

Kada sve dobivene jednakosti uvrstimo u gornju jednakost imamo

$$\begin{aligned} 4(\|a + b, b + c\|^2 + \|a + b, b - c\|^2 + \|b + c, b - c\|^2) \\ = 4[\|a + c, b\|^2 + \|a + 2b, c\|^2 + \|a - c, b\|^2 + \|a, c\|^2]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Iskoristimo li pak tvrdnju (2.12) za vektore  $a - b$ ,  $b + c$  i  $b - c$  imamo:

$$\begin{aligned} 4(\|a - b, b + c\|^2 + \|a - b, b - c\|^2 + \|b + c, b - c\|^2) \\ = \|a + c, 2b\|^2 + \|a + c, 2c\|^2 + \|a - 2b - c, 2b\|^2 + \|a - 2b - c, 2c\|^2. \end{aligned}$$

Kvadriranjem i korištenjem svojstva 2-norme dolazimo do jednakosti:  $\|a + c, 2b\|^2 = 4\|a + c, b\|^2$ .

Sada ponovno iskoristimo propoziciju 1.2.1 (i). Umjesto  $a$  uvrstimo  $2c$ , a umjesto  $b$  uvrstimo  $a + c$  i dobivamo:

$$\|a + c, 2c\| = \|2c, a + c\| = \|2c, \frac{-1}{2} \cdot 2c + a + c\| = \|2c, a\| = \|a, 2c\|.$$

Kvadriranjem i korištenjem svojstva 2-norme dobivamo:

$$\|a + c, 2c\|^2 = 4\|a, c\|^2.$$

Umjesto  $a$  uvrstimo  $2b$ , a umjesto  $b$  uvrstimo  $a - 2b - c$  u propoziciju 1.2.1 (i) i dobivamo:

$$\|a - 2b - c, 2b\| = \|2b, a - 2b - c\| = \|2b, 1 \cdot 2b + a - 2b - c\| = \|2b, a - c\| = \|a - c, 2b\|.$$

Ponovno kvadriranjem i korištenjem svojstava 2-norme dolazimo do sljedeće jednakosti:

$$\|a - 2b - c, 2b\|^2 = 4\|a - c, b\|^2.$$

Analognim postupkom ako za  $a$  uvrstimo  $2c$ , a umjesto  $b$  uvrstimo  $a - 2b - c$  dobivamo;

$$\|a - 2b - c, 2c\| = \|2c, a - 2b - c\| = \|2c, \frac{1}{2} \cdot 2c + a - 2b - c\| = \|2c, a - 2b\| = \|a - 2b, c\|.$$

Konačno imamo  $\|a - 2b - c\|^2 = 4\|a - 2, c\|^2$ .

Kada sve dobivene jednakosti uvrstimo u gornju jednakost imamo

$$\begin{aligned} & 4(\|a - b, b + c\|^2 + \|a - b, b - c\|^2 + \|b + c, b - c\|^2) \\ & = 4[\|a + c, b\|^2 + \|a, c\|^2 + \|a - c, b\|^2 + \|a - 2b, c\|^2]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Dakle, sada imamo sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} & \|a + b, b + c\|^2 + \|a + b, b - c\|^2 + \|b + c, b - c\|^2 \\ & = \|a + c, b\|^2 + \|a + 2b, c\|^2 + \|a - c, b\|^2 + \|a, c\|^2 \\ \\ & \|a - b, b + c\|^2 + \|a - b, b - c\|^2 + \|b + c, b - c\|^2 \\ & = \|a + c, b\|^2 + \|a, c\|^2 + \|a - c, b\|^2 + \|a - 2b, c\|^2. \end{aligned}$$

Oduzimanjem tih jednakosti dobivamo:

$$\|a + b, b + c\|^2 + \|a + b, b - c\|^2 - \|a - b, b + c\|^2 - \|a - b, b - c\|^2 = \|a + 2b, c\|^2 - \|a - 2b, c\|^2.$$

Transformiramo desnu stranu te jednakosti i to tako da u formulu za 2-skalarni produkt stavimo  $c = c$ ,  $a = a$  i  $b = 2b$  te dobivamo:

$$\|a + 2b, c\|^2 - \|a - 2b, c\|^2 = 4(a, 2b | c) = 8(a, b | c).$$

Drugim riječima, pokazali smo da za 2-skalarni produkt vrijedi (2.13). Time je dokaz teorema gotov.  $\square$

**Teorem 2.1.6.** *2-normirani prostor  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  je 2-unitarni prostor ako i samo ako za sve  $a, b \in X$ ,  $N(s, t) = \|sa + b, b + tc\|^2$  je kvadratna funkcija po realnim varijablama  $s$  i  $t$ .*

*Dokaz.* Neka je  $(X; \|\cdot, \cdot\|)$  2-normirani prostor. Pretpostavimo da je i 2-unitarni prostor.

Tada za sve  $a, b \in X$  i realne brojeve  $s, t$  slijedi:

$$\begin{aligned}
 N(s, t) &= \|sa + b, b + tc\|^2 \\
 &= (sa + b, sa + b | b + tc) \\
 &= (sa, sa + b | b + tc) + (b, sa + b | b + tc) \\
 &= (sa + b, sa | b + tc) + (sa + b, b | b + tc) \\
 &= (sa, sa | b + tc) + (b, sa | b + tc) + (sa, b | b + tc) + (b, b | b + tc) \\
 &= (b + tc, b + tc | sa) + (sa, b | b + tc) + (sa, b | b + tc) + (b + tc, b + tc | b) \\
 &= (b, b + tc | sa) + (tc, b + tc | sa) + 2s(a, b | b + tc) \\
 &\quad + (b, b + tc | b) + (tc, b + tc | b) \\
 &= (b + tc, b | sa) + (b + tc, tc | sa) + 2s(a, b | b + tc) \\
 &\quad + (b + tc, b | b) + (b + tc, tc | b) \\
 &= (b, b | sa) + (tc, b | sa) + (b, tc | sa) + (tc, tc | sa) + 2s(a, b | b + tc) \\
 &\quad + (b, b | b) + (tc, b | b) + (b, tc | b) + (tc, tc | b) \\
 &= s^2(b, b | a) + s^2t(c, b | a) + s^2t(b, c | a) + s^2t^2(c, c | a) + 2s(a, b | b + tc) + t^2(c, c | b) \\
 &= s^2\|a, b\|^2 + 2s^2t(b, c | a) + s^2t^2\|a, c\|^2 + 2s(a, b | b + tc) + t^2\|b, c\|^2.
 \end{aligned}$$

Prema (2.13)  $(a, b | b + tc)$  možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
 (a, b | b + tc) &= \frac{1}{8}[\|a + b, b + b + tc\|^2 + \|a + b, b - b - tc\|^2] \\
 &\quad - \frac{1}{8}[\|a - b, b + b + tc\|^2 + \|a - b, b - b - tc\|^2] \\
 &= \frac{1}{8}[\|a + b, 2b + tc\|^2 + \|a + b, -tc\|^2] - \frac{1}{8}[\|a - b, 2b + tc\|^2 + \|a - b, -tc\|^2] \\
 &= \frac{1}{8}[\|a + b, 2b + tc\|^2 + \|a + b, tc\|^2] - \frac{1}{8}[\|a - b, 2b + tc\|^2 + \|a - b, tc\|^2].
 \end{aligned}$$

Pri čemu, po propoziciji 2.1.3, slijedi:

$$\begin{aligned}
 \|a + b, 2b + tc\|^2 &= 4\|a + b, b + \frac{t}{2}c\|^2 \\
 &= 4[\|a, b\|^2 + \|a, \frac{t}{2}c\|^2 + \|b, \frac{t}{2}c\|^2 + 2(a, b | \frac{t}{2}c) - 2(a, \frac{t}{2}c | b) + 2(b, \frac{t}{2}c | a)] \\
 &= 4\|a, b\|^2 + t^2\|a, c\|^2 + t^2\|b, c\|^2 + 2t^2(a, b | c) - 4t(a, c | b) + 4t(b, c | a).
 \end{aligned}$$

Nadalje:

$$\begin{aligned}
 \|a + b, tc\|^2 &= (a + b, a + b | tc) \\
 &= (a, a + b | tc) + (b, a + b | tc) \\
 &= (a + b, a | tc) + (a + b, b | tc) \\
 &= (a, a | tc) + (b, a | tc) + (a, b | tc) + (b, b | tc) \\
 &= \|a, tc\|^2 + 2(a, b | tc) + \|b, tc\|^2 \\
 &= t^2 \|a, c\|^2 + 2t^2 (a, b | c) + t^2 \|b, c\|^2.
 \end{aligned}$$

Isto tako

$$\begin{aligned}
 \|a - b, tc\|^2 &= (a - b, a - b | tc) \\
 &= (a, a - b | tc) + (-b, a - b | tc) \\
 &= (a - b, a | tc) - (a - b, b | tc) \\
 &= (a, a | tc) - (b, a | tc) - (a, b | tc) + (b, b | tc) \\
 &= \|a, tc\|^2 - 2(a, b | tc) + \|b, tc\|^2 \\
 &= t^2 \|a, c\|^2 - 2t^2 (a, b | c) + t^2 \|b, c\|^2.
 \end{aligned}$$

Ponovno, po propoziciji 2.1.3. imamo:

$$\begin{aligned}
 \|a - b, 2b + tc\|^2 &= 4 \|a - b, b + \frac{t}{2}c\|^2 \\
 &= 4 [\|a, b\|^2 + \|a, \frac{t}{2}c\|^2 + \|b, \frac{t}{2}c\|^2 - 2(a, b | \frac{t}{2}c) + 2(a, \frac{t}{2}c | b) + 2(b, \frac{t}{2}c | a)] \\
 &= 4 \|a, b\|^2 + t^2 \|a, c\|^2 + t^2 \|b, c\|^2 - 2t^2 (a, b | c) + 4t (a, c | b) + 4t (b, c | a).
 \end{aligned}$$

Konačno dobivamo:

$$\begin{aligned}
 N(s, t) &= s^2 \|a, b\|^2 + 2s^2 t (b, c | a) + s^2 t^2 \|a, c\|^2 + 2s \cdot \frac{1}{8} [\|a + b, 2b + tc\|^2 + \|a + b, tc\|^2] \\
 &\quad - 2s \cdot \frac{1}{8} [\|a - b, 2b + tc\|^2 + \|a - b, tc\|^2] + t^2 \|b, c\|^2 \\
 &= s^2 \|a, b\|^2 + 2s^2 t (b, c | a) + s^2 t^2 \|a, c\|^2 + \frac{1}{4} s [4 \|a, b\|^2 + t^2 \|b, c\|^2 + t^2 \|a, c\|^2 \\
 &\quad + 2t^2 (a, b | c) - 4t (a, c | b) + 4t (b, c | a) + t^2 \|a, c\|^2 + 2t^2 (a, b | c) + t^2 \|b, c\|^2] \\
 &\quad - \frac{1}{4} s [4 \|a, b\|^2 + t^2 \|b, c\|^2 + t^2 \|a, c\|^2 - 2t^2 (a, b | c) + 4t (a, c | b) + 4t (b, c | a) \\
 &\quad + t^2 \|a, c\|^2 - 2t^2 (a, b | c) + t^2 \|b, c\|^2] + t^2 \|b, c\|^2 \\
 &= s^2 \|a, b\|^2 + 2s^2 t (b, c | a) + s^2 t^2 \|a, c\|^2 + s \|a, b\|^2 + \frac{1}{4} s t^2 \|b, c\|^2 + \frac{1}{4} s t^2 \|a, c\|^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} t^2 s (a, b | c) - s t (a, c | b) + s t (b, c | a) + \frac{1}{4} t^2 s \|a, c\|^2 + \frac{1}{2} t^2 s (a, b | c) \\
 &\quad + \frac{1}{4} t^2 s \|b, c\|^2 - s \|a, b\|^2 - \frac{1}{4} s t^2 \|b, c\|^2 - \frac{1}{4} s t^2 \|a, c\|^2 + \frac{1}{2} t^2 s (a, b | c) \\
 &\quad - s t (a, c | b) - s t (b, c | a) - \frac{1}{4} s t^2 \|a, c\|^2 + \frac{1}{2} t^2 s (a, b | c) - \frac{1}{4} s t^2 \|b, c\|^2 + t^2 \|b, c\|^2 \\
 &= s^2 \|a, b\|^2 + 2s^2 t (b, c | a) + s^2 t^2 \|a, c\|^2 + 2t^2 s (a, b | c) - 2s t (a, c | b) + t^2 \|b, c\|^2,
 \end{aligned}$$

to jest,  $N(s, t) = \|sa + b, b + tc\|^2$  je kvadratna funkcija po  $s$  i  $t$ , pri čemu su  $s$  i  $t$  realni brojevi.

Obrnuto, pretpostavimo da je  $N(s, t) = \|sa + b, b + tc\|^2$  kvadratna funkcija po  $s$  i  $t$ , pri čemu su  $s$  i  $t$  realni brojevi. To znači da je oblika:

$$N(s, t) = ms^2t^2 + ls^2t + ks^2 + dst^2 + et^2 + fst.$$

Trebamo dokazati da je  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  2-unitarni prostor.

Uvrštavanjem konkretnih realnih brojeva  $s$  i  $t$  dobivamo:

$$\begin{aligned}
 N(1, 1) &= \|a + b, b + c\|^2 \\
 N(1, 1) &= \|a + b, b - c\|^2 \\
 N(-1, 1) &= \|-a + b, b + c\|^2 = \|a - b, b + c\|^2 \\
 N(-1 - 1) &= \|-a + b, b - c\|^2 = \|a - b, b - c\|^2.
 \end{aligned}$$

Zbrojimo li vrijednosti funkcije  $N$  u gornjim točkama dobivamo:



$$\begin{aligned}
 & N(1, 1) + N(1, -1) + N(-1, 1) + N(-1, -1) \\
 &= (m + l + k + d + e + f) + (m - l + k + d + e - f) + (m + l + k - d + e - f) \\
 &+ (m - l + k - d + e - f) \\
 &= 4m + 4k + 4e \\
 &= 4(m + k + e).
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Isto tako koristeći propoziciju 1.2.1 (i) za  $\alpha = 1$

$$N(1, 0) = \|a + b, b\|^2 = \|a, b\|^2.$$

Kad u propoziciju 1.2.1 (i) stavimo  $\alpha = 1$ ,  $a = b$  i  $b = c$  imamo:

$$N(0, 1) = \|b, b + c\|^2 = \|b, c\|^2.$$

S druge strane:

$$\begin{aligned}
 N(1, 0) &= m \cdot 1 \cdot 0 + l \cdot 1 \cdot 0 + k \cdot 1 + d \cdot 1 \cdot 0 + e \cdot 0 + f \cdot 1 \cdot 0 = k \\
 N(0, 1) &= m \cdot 0 \cdot 1 + l \cdot 0 \cdot 1 + k \cdot 0 + d \cdot 0 \cdot 1 + e \cdot 1 + f \cdot 0 \cdot 1 = e
 \end{aligned}$$

Kako je:

$$\begin{aligned}
 \frac{N(s, t)}{s^2 t^2} &= \frac{\|sa + b, b + tc\|^2}{s^2 t^2} = \left\| a + \frac{b}{s}, \frac{b}{t} + c \right\|^2 \\
 &= \frac{ms^2 t^2 + ls^2 t + ks^2 + dst^2 + et^2 + fst}{s^2 t^2} \\
 &= m + \frac{l}{t} + \frac{k}{t^2} + \frac{d}{s} + \frac{e}{s^2} + \frac{f}{st},
 \end{aligned}$$

slijedi da je:

$$\begin{aligned}
 \|a, c\|^2 &= \lim_{s, t \rightarrow +\infty} \left\| a + \frac{b}{s}, \frac{b}{t} + c \right\|^2 \\
 &= \lim_{s, t \rightarrow +\infty} \frac{\|sa + b, b + ta\|^2}{s^2 t^2} \\
 &= \lim_{s, t \rightarrow +\infty} \left( m + \frac{l}{t} + \frac{k}{t^2} + \frac{d}{s} + \frac{e}{s^2} + \frac{f}{st} \right) \\
 &= m
 \end{aligned}$$

Kada u (2.18), tj. u izraz  $4(m + k + e) = N(1, 1) + N(1, -1) + N(-1, 1) + N(-1, -1)$  uvrstimo sve što smo izračunali dobivamo

$$\begin{aligned}
 & 4(\|a, b\|^2 + \|b, c\|^2 + \|a, c\|^2) \\
 &= \|a + b, b + c\|^2 + \|a + b, b - c\|^2 + \|a - b, b + c\|^2 + \|a - b, b - c\|^2.
 \end{aligned}$$

što po teoremu 2.1.5 povlači da je  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  2- unitaran prostor.  $\square$

## 2.2 Poopćenje 2-skalarnog produkta i 2-norme

Upravo opisani 2-skalarni produkt ima svoje prirodno poopćenje [1, str.229].

**Definicija 2.2.1.** *Neka je  $n$  prirodan broj,  $X$  vektorski prostor dimenzije veće ili jednake  $n$ . Neka je  $(\cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot)$  realna funkcija definirana na  $X^{n+1} = X \times X \cdots \times X$  sa ovim svojstvima:*

1.  $(a, a | a_2, \dots, a_n) \geq 0$ , pri čemu je  $(a, a | a_2, \dots, a_n) = 0$  ako i samo ako su  $a, a_2, \dots, a_n$  linearno zavisni vektori,
2.  $(a, b | a_2, \dots, a_n) = (b, a | a_2, \dots, a_n)$ ,
3.  $(a, b | a_2, \dots, a_n) = (a, b | a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$  za sve permutacije  $(i_2, \dots, i_n)$  od  $(2, \dots, n)$ ,
4. Ako je  $n > 0$ , tada  $(a, a | a_2, \dots, a_n) = (a_2, a_2 | a_3, \dots, a_n)$ ,
5.  $(\alpha a, b | a_2, \dots, a_n) = \alpha (a, b | a_2, \dots, a_n)$ , za svaki  $\alpha$  realan broj,
6.  $(a + a', b | a_2, \dots, a_n) = (a, b | a_2, \dots, a_n) + (a', b | a_2, \dots, a_n)$ .

Funkcija  $(\cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot)$  naziva se  **$n$ -skalarni produkt**, a uređeni par  $(X, (\cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot))$   **$n$ -unitarni prostor**.

Kada je  $n = 1$ , tada govorimo o (klasičnom) skalarnom produktu  $(\cdot, \cdot)$ . Kada je  $n = 2$ , tada se radi o upravo razmatranom 2-skalarnom produktu.

Mnoga svojstva koja smo dokazali za 2-skalarni produkt mogu se dokazati i za  $n$ -skalarni produkt.

Navedimo prvo jedan primjer  $n$ -skalarnog produkta.

**Primjer:**

Neka je funkcija  $(\cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot)$  definirana na  $X^{n+1}$  ovako

$$(a, b | a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} (a | b) & (a | a_2) & \dots & (a | a_n) \\ (a_2 | b) & (a_2 | a_2) & \dots & (a_2 | a_n) \\ \vdots & & & \\ (a_n | b) & (a_n | a_2) & \dots & (a_n | a_n) \end{vmatrix}.$$

Ova je funkcija jedan  $n$ -skalarni produkt.

Od svojstava istaknimo Cauchy - Schwarz- Bunjakovskijevu nejednakost za  $n$ -skalarni produkt.

**Teorem 2.2.2.** *Za  $a, b, a_2, \dots, a_n \in X$  vrijedi*

$$|(a, b | a_2, \dots, a_n)| \leq \sqrt{(a, a | a_2, \dots, a_n)} \sqrt{(b, b | a_2, \dots, a_n)}.$$

I koncepti norme i 2-norme mogu se generalizirati.

Tako  **$n$ -normom** na  $X$  nazivamo funkciju  $\|\cdot, \dots, \cdot\|$  na  $X^n$  koja zadovoljava sljedeća svojstva:

1.  $\|a_1, \dots, a_n\| = 0$  ako i samo ako su  $a_1, \dots, a_n$  linearno zavisni,
2.  $\|a_1, \dots, a_n\| = \|a_{i_1}, \dots, a_{i_n}\|$  za sve permutacije  $(i_1, \dots, i_n)$  od  $(1, \dots, n)$ ,
3.  $\|\alpha a_1, \dots, a_n\| = |\alpha| \|a_1, \dots, a_n\|$ , za sve realne brojeve  $\alpha$ ,
4.  $\|a_1 + a'_1, a_2, \dots, a_n\| \leq \|a_1, a_2, \dots, a_n\| + \|a'_1, a_2, \dots, a_n\|$ .

Prostor  $X$  s ovako definiranom  $n$ -normom naziva se  **$n$ -normirani prostor**. Svaki  $n$ -skalarni produkt prirodno je generiran  $n$ -normom ovako:

$$\|a_1, a_2, \dots, a_n\| := \sqrt{(a_1, a_1 | a_2, \dots, a_n)}.$$

## Poglavlje 3

# Heronovo preslikavanje

### 3.1 Heronovo preslikavanje u unitarnim prostorima

U ovom odjeljku prikazat ćemo Heronovo preslikavanje za unitarne prostore i neka svojstva Heronove formule. Potom ćemo definirati 2-skalarni produkt koristeći upravo Heronovo preslikavanje .

**Definicija 3.1.1.** *Neka je  $(X, \|\cdot\|)$  normirani vektorski prostor. Heronovno preslikavanje je preslikavanje  $A : X \times X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  za koje vrijedi:*

$$A(x, y, z) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (3.1)$$

pri čemu je  $a = \|x - y\|$ ,  $b = \|x - z\|$ ,  $c = \|y - z\|$  i  $s = \frac{a + b + c}{2}$ .

Koristeći (3.1) algebarskim transformacijama dolazimo do sljedeća dva teorema:

**Teorem 3.1.2.** *Neka je  $A$  Heronovo preslikavanje. Tada:*

1.  $A(x, y, z)$  je invarijantno s obzirom na redoslijed točaka  $x, y, z$ .
2.  $A(x + u, y + u, z + u) = A(x, y, z)$ , za svaki  $u \in X$ .
3.  $A(px, py, pz) = p^2 \cdot A(x, y, z)$ , za svaki realan broj  $p$ .

*Dokaz.* Pokažimo prvo da je Heronovo preslikavanje  $A$  invarijantno s obzirom na redoslijed točaka  $x, y, z$ . Drugim riječima pokazat ćemo da vrijedi  $A(x, y, z) = A(x, z, y) = A(y, z, x) = A(z, y, x) = A(z, x, y) = A(y, x, z)$ .

Koristeći svojstva norme lako se pokaže da vrijedi:

$$\|x - z\| = \|-(z - x)\| = |-1|\|z - x\| = \|z - x\|.$$

Sada koristeći definiciju Heronovnog preslikavanja i asocijativnost zbrajanja i množenja i gore navedenu tvrdnju dobivamo:

$$\begin{aligned}
A(x, y, z)^2 &= s(s-a)(s-b)(s-c) = s(s-b)(s-a)(s-c) \\
&= \frac{\|x-y\| + \|x-z\| + \|y-z\|}{2} \cdot \left( \frac{\|x-y\| + \|x-z\| + \|y-z\|}{2} - \|x-z\| \right) \\
&\quad \cdot \left( \frac{\|x-y\| + \|x-z\| + \|y-z\|}{2} - \|x-y\| \right) \cdot \left( \frac{\|x-y\| + \|x-z\| + \|y-z\|}{2} - \|z-y\| \right) \\
&= \frac{\|x-y\| + \|x-y\| + \|z-y\|}{2} \cdot \left( \frac{\|x-y\| + \|x-y\| + \|z-y\|}{2} - \|x-z\| \right) \\
&\quad \cdot \left( \frac{\|x-y\| + \|x-y\| + \|z-y\|}{2} - \|x-y\| \right) \cdot \left( \frac{\|x-y\| + \|x-y\| + \|z-y\|}{2} - \|y-z\| \right) \\
&= A(x, z, y)^2.
\end{aligned}$$

Slično se pokaže da vrijede i ostale jednakosti.

Pokažimo sada da vrijedi:  $A(x+u, y+u, z+u) = A(x, y, z)$ , za svaki  $u \in X$ .

Prema definiciji Heronovog preslikavanja

$$A(x+u, y+u, z+u)^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

pri čemu je  $a = \|x+u - (y+u)\| = \|x+u - y - u\| = \|x-y\|$ ,  $b = \|x+u - (z+u)\| = \|x+u - z - u\| = \|x-z\|$ ,  $c = \|y+u - (z+u)\| = \|y+u - z - u\| = \|y-z\|$  i  $s = \frac{a+b+c}{2}$ .

Uočavamo:  $A(x+u, y+u, z+u) = A(x, y, z)$ , za svaki  $u \in X$ . Pogledajmo čemu je jednak  $s$  za  $A(px, py, pz)$ :

$$s = \frac{\|px - py\| + \|px - pz\| + \|py - pz\|}{2} = \frac{\|p(x-y)\| + \|p(x-z)\| + \|p(y-z)\|}{2}.$$

Iskoristimo li svojstva norme dobivamo:

$$s = \frac{|p| \cdot (\|x-y\| + \|x-z\| + \|y-z\|)}{2}.$$

Koristeći ponovno svojstva norme i gore navedenu jednakost za  $s$  imamo:

$$\begin{aligned}
A(px, py, pz)^2 &= \frac{|p|(\|x-y\| + \|x-z\| + \|y-z\|)}{2} \cdot \left( \frac{|p|(\|x-y\| + \|x-z\| + \|y-z\|)}{2} - |p|\|x-y\| \right) \\
&\quad \cdot \left( \frac{|p|(\|x-y\| + \|x-z\| + \|y-z\|)}{2} - |p|\|x-z\| \right) \\
&\quad \cdot \left( \frac{|p|(\|x-y\| + \|x-z\| + \|y-z\|)}{2} - |p|\|y-z\| \right) \\
&= p^4 \left( \frac{(\|x-y\| + \|x-z\| + \|y-z\|)}{2} \right) \cdot \left( \frac{(\|x-y\| + \|x-z\| + \|y-z\|)}{2} - \|x-y\| \right) \\
&\quad \cdot \left( \frac{(\|x-y\| + \|x-z\| + \|y-z\|)}{2} - \|x-z\| \right) \\
&\quad \cdot \left( \frac{(\|x-y\| + \|x-z\| + \|y-z\|)}{2} - \|y-z\| \right).
\end{aligned}$$

Zaključujemo,  $A(x, y, z) = p^2 A(x, y, z)$ , za svaki realan broj  $p$ . □

Formulu (3.1) možemo zapisati i na sljedeći način:

**Teorem 3.1.3.** *Neka je  $(X, \|\cdot\|)$  unitaran prostor i neka je  $A$  preslikavanje dano sa (3.1). Tada je:*

$$\begin{aligned}
A(x, y, z) &= \frac{1}{4} \sqrt{-a^4 - b^4 - c^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)} \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{-(a^2 - b^2 - c^2)^2 + 4b^2c^2}.
\end{aligned}$$

*Dokaz.* Neka je  $A$  Heronovo preslikavanje, tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
A(x, y, z) &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\
&= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \left( \frac{a+b+c}{2} - a \right) \left( \frac{a+b+c}{2} - b \right) \left( \frac{a+b+c}{2} - c \right)} \\
&= \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{16}} \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)] \cdot [(a-b+c)(-a-b+c)]} \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{((a+b)^2 - c^2) \cdot (c^2 - (a-b)^2)} \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab - c^2) \cdot (c^2 - a^2 + 2ab - b^2)} \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{-a^4 - b^4 - c^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)}.
\end{aligned}$$

Izraz pod korijenom u zadnjem retku možemo grupirati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \sqrt{-(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2) + 4b^2c^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{-(a^2 - b^2 - c^2)^2 + 4b^2c^2}. \end{aligned}$$

□

U nastavku ovog poglavlja  $A$  označava Heronovo preslikavanje dano sa (3.1).

**Teorem 3.1.4.** *Neka je  $(X, \|\cdot\|)$  unitaran prostor. Tada vrijedi:*

1.  $A(x, y, z) = A(x, y, 0)^2 + A(0, y, z)^2 + A(x, 0, z)^2 + \frac{1}{2} [((x|z)(y|z) - (x|y)\|z\|^2) + ((y|x)(z|x) - (y|z)\|x\|^2) + ((z|y)(x|y) - (z|x)\|y\|^2)]^{\frac{1}{2}}$ ,
2.  $A(x, y, 0) = \frac{1}{2} [\|x\|^2\|y\|^2 - (x|y)^2]^{\frac{1}{2}}$ ,
3.  $A(x, y, 0) = A(x, -y, 0)$ ,
4.  $A(x, x, 0) = A(x, 0, 0) = 0$ .

*Dokaz.* Prema teoremu 3.1.3 i po definiciji Heronovog preslikavanja imamo:

$$\begin{aligned} A(x, y, z) &= \frac{1}{4} [-(\|x - y\|^2)^2 + (\|x - z\|^2)^2 + (\|y - z\|^2)^2 + 2\|x - y\|\|x - z\|^2 \\ &\quad + 2\|x - y\|\|y - z\|^2 + 2\|y - z\|\|x - z\|^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} [-(x - y|x - y)^2 + (x - z|x - z)^2 + (y - z|y - z)^2] \\ &\quad + 2(x - y|x - y) \cdot (x - z|x - z) + 2(x - y|x - y)(y - z|y - z) \\ &\quad + 2(y - z|y - z)(x - z|x - z)]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} [-(x|x - 2(x|y) + (y|y))^2 + ((x|x) - 2(x|z) + (z|z))^2 + ((y|y) \\ &\quad - 2(y|z) + (z|z))^2] + 2(((x|x) - 2(x|y) + (y|y)) \cdot ((x|x) - 2(x|z) + (z|z))) \\ &\quad + 2((x|x) - 2(x|y) + (y|y)) \cdot ((y|y) - 2(y|z) + (z|z)) \\ &\quad + 2(((y|y) - 2(y|z) + (z|z)) \cdot ((x|x) - 2(x|z) + (z|z))) ]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}[-(x|x)^2 - 4(x|x)(x|y) + 4(x|y)^2 + 2(x|x)(y|y) \\
&- 4(x|y)(y|y) + (x|x)^2 - 4(x|x)(x|z) + 4(x|z)^2 + 2(x|x)(z|z) \\
&- 4(x|z)(z|z) + (z|z)^2 + (y|y)^2 - 4(y|y)(y|z) + 4(y|z)^2 + 2(y|y)(z|z) \\
&- 4(y|z)(z|z) + (z|z)^2] + 2(x|x)(x|x) - 4(x|x)(x|z) + 2(x|x)(z|z) \\
&- 4(x|y)(x|x) + 8(x|y)(x|z) - 4(x|y)(z|z) + 2(y|y)(x|x) \\
&- 4(y|y)(x|z) + 2(y|y)(z|z) + 2(x|x)(y|y) - 4(x|x)(y|z) + 2(x|x)(z|z) \\
&- 4(x|x)(y|y) + 8(x|y)(y|z) - 4(x|y)(z|z) + 2(y|y)(y|y) \\
&- 4(y|y)(y|z) + 2(y|y)(z|z) + 2(y|y)(x|x) - 4(y|y)(x|z) + 2(y|y)(z|z) \\
&- 4(y|z)(x|x) + 8(y|z)(x|z) - 4(y|z)(z|z) + 2(z|z)(x|x) - 4(z|z)(x|z) \\
&+ 2(z|z)(z|z)]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{4}[-\|x\|^4 + 4\|x\|^2(x|y) - 4(x|y)^2 - 2\|x\|^2\|y\|^2 + 4(x|y)\|y\|^2 - \|y\|^4 - \|x\|^4 \\
&+ 4\|x\|^2(x|z) - 4(x|z)^2 - 2\|x\|^2\|z\|^2 + 4(x|z)\|z\|^2 - \|z\|^4 - \|y\|^4 + 4\|y\|^2(y|z) - 4(y|z)^2 \\
&- 2\|y\|^2\|z\|^2 + 4(y|z)\|z\|^2 - \|z\|^4 + 2\|x\|^4 - 4\|x\|^2(x|z) + 2\|x\|^2\|z\|^2 - 4(x|y)\|x\|^2 \\
&+ 8(x|y)(x|z) - 4(x|y)\|z\|^2 + 2\|y\|^2\|x\|^2 - 4\|y\|^2(x|z) + 2\|y\|^2\|z\|^2 + 2\|x\|^2\|y\|^2 \\
&- 4\|x\|^2(y|z) + 2\|x\|^2\|z\|^2 - 4(x|y)\|y\|^2 + 8(x|y)(y|z) - 4(x|y)\|z\|^2 + 2\|y\|^4 \\
&- 4\|y\|^2(y|z) + 2\|y\|^2\|z\|^2 + 2\|y\|^2\|x\|^2 - 4\|y\|^2(x|z) + 2\|y\|^2\|z\|^2 - 4(y|z)\|x\|^2 \\
&+ 8(y|z)(x|z) - 4(y|z)\|z\|^2 + 2\|z\|^2\|x\|^2 - 4\|z\|^2(x|z) + 2\|z\|^4]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{4}[-4(x|y)^2 - 4(x|z)^2 - 4(y|z)^2 - 8\|z\|^2(x|y) - 8\|x\|^2(y|z) - 8\|y\|^2(x|z) \\
&+ 4\|x\|^2\|z\|^2 + 4\|y\|^2\|x\|^2 + 4\|y\|^2\|z\|^2 + 8(x|y)(x|z) + 8(x|y)(y|z) + 8(y|z)(x|z)]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}[\|x\|^2\|y\|^2 - (x|y)^2 + \|y\|^2\|z\|^2 - (y|z)^2 + \|z\|^2\|x\|^2 - (x|z)^2 \\
&- 2[(x|y)(y|z) - (x|y)\|z\|^2] + ((y|x)(z|x) - (y|z)\|x\|^2) + ((z|y)(x|y) - (z|x)\|y\|^2)]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

iz čega slijedi (2), (3) i (4), a koristeći tvrdnju (2) dolazimo i do tvrdnje (1).  $\square$

**Korolar 3.1.1.** *Neka je  $(X, \|\cdot\|)$  unitarni prostor. Tada:*

$$A(x, y, z)^2 + A(x, y - z)^2 = 2[A(x, y, 0)^2 + A(0, y, z)^2 + A(x, 0, z)^2] + (x|z)(y|z) - (x|y)\|z\|^2.$$

*Dokaz.* Promatrajući (1) i (3) teorema 3.1.4 i koristeći invarijantnost Heronovog preslika-



vanja s obzirom na redosljed točkaka dolazimo do:

$$\begin{aligned}
 A(x, y, z)^2 + A(x, y, -z)^2 &= A(x, y, 0)^2 + A(0, y, z)^2 + A(x, 0, z)^2 + \frac{1}{2}[(x|z)(y|z) - (x|y)\|z\|^2] \\
 &\quad + ((y|x)(z|x) - (y|z)\|x\|^2) + ((z|y)(x|y) - (z|x)\|y\|^2) + A(x, y, 0)^2 \\
 &\quad + A(0, y, -z)^2 + A(x, 0, -z)^2 + \frac{1}{2}[(x|-z)(y|-z) - (x|y)\|z\|^2] \\
 &\quad + ((y|x)(z|x) - (y|-z)\|x\|^2) + ((-z|y)(x|y) - (-z|x)\|y\|^2) \\
 &= 2[A(x, y, 0)^2 + A(0, y, z)^2 + A(x, 0, z)^2] + (x|z)(y|z) - (x|y)\|z\|^2.
 \end{aligned}$$

□

**Korolar 3.1.2.** *Neka je  $(X, \|\cdot\|)$  unitarni prostor. Tada vrijedi:*

$$\begin{aligned}
 &A(x+y, y+z, 0)^2 + A(x+y, y-z, 0)^2 - A(x-y, y+z, 0)^2 - A(x-y, y-z, 0)^2 \\
 &= 2((x|y)\|z\|^2 - (x|z)(y|z))
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
 &A(x+y, y+z, 0)^2 + A(x+y, y-z, 0)^2 + A(x-y, y+z, 0)^2 + A(x-y, y-z, 0)^2 \\
 &= 4(A(x, y, 0)^2 + A(0, y, z)^2 + A(x, 0, z)^2).
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

*Dokaz.* Za Heronovo preslikavanje  $A$  vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned}
 A(x+y, y+z, 0) &= A(x, -y, z), \\
 A(x+y, y-z, 0) &= A(x, -y, -z), \\
 A(x-y, y+z, 0) &= A(x-y, -z-y, 0) = A(x, y, -z), \\
 A(x-y, y-z, 0) &= A(x-y, z-y, 0) = A(x, y, z).
 \end{aligned}$$

Pokažimo istinitost prve nejednakosti. Ostale jednakosti dokazuju se na sličan način. Prema definiciji Heronovog preslikavanja  $A(x+y, y+z, 0) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ , pri čemu je

$$\begin{aligned}
 a &= \|x+y - (y-z)\| = \|x-z\|, \\
 b &= \|x+y - 0\| = \|x+y\|, \\
 c &= \|y+z - 0\| = \|y+z\|, \\
 s &= \frac{a+b+c}{2}.
 \end{aligned}$$

Analogno dobivamo da je  $A(x, -y, z) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ , pri čemu je

$$\begin{aligned}
 a &= \|x - (-y)\| = \|x+y\|, \\
 b &= \|x-z\|, \\
 c &= \|-y-z\| = \|(y+z)\| = \|y+z\|, \\
 s &= \frac{a+b+c}{2}.
 \end{aligned}$$

Iskoristimo li asocijativnost zbrajanja i množenja vidimo da vrijedi  $A(x + y, y + z, 0) = A(x, -y, z)$ .

Koristeći korolar 3.1.1 i gore navedene jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned}
& A(x + y, y + z, 0)^2 + A(x + y, y - z, 0)^2 - A(x - y, y + z, 0)^2 - A(x - y, y - z, 0)^2 \\
&= A(x, -y, z)^2 + A(x, -y, -z)^2 - A(x, y, -z)^2 - A(x, y, z)^2 \\
&= 2[A(x, y, 0)^2 + A(0, y, z)^2 + A(x, 0, z)^2] - [A(x, y, z)^2 + A(x, y, -z)^2] \\
&= 2[A(x, y, 0)^2 + A(0, y, z)^2 + A(x, 0, z)^2] + (x | z)(-y | z) - (x | -y) \|z\|^2 \\
&\quad - [2[A(x, y, 0)^2 + A(0, y, z)^2 + A(x, 0, z)^2] + (x | z)(y | z) - (x | y) \|z\|^2] \\
&= 2[(x | y) \|z\|^2 - (x | z)(y | z)].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A(x + y, y + z, 0)^2 + A(x + y, y - z, 0)^2 + A(x - y, y + z, 0)^2 + A(x - y, y - z, 0)^2 \\
&= A(x, -y, z)^2 + A(x, -y, -z)^2 + A(x, y, -z)^2 + A(x, y, z)^2 \\
&= 2[A(x, y, 0)^2 + A(0, y, z)^2 + A(x, 0, z)^2] + A(x, y, z)^2 + A(x, y, -z)^2 \\
&= 2[A(x, y, 0)^2 + A(0, y, z)^2 + A(x, 0, z)^2] + (x | z)(-y | z) - (x | -y) \|z\|^2 \\
&\quad + [2[A(x, y, 0)^2 + A(0, y, z)^2 + A(x, 0, z)^2] + (x | z)(y | z) - (x | y) \|z\|^2] \\
&= 4[A(x, y, 0)^2 + A(0, y, z)^2 + A(x, 0, z)^2].
\end{aligned}$$

□

**Teorem 3.1.5.** *Neka je  $(X, \| \cdot \|)$  unitaran prostor. Tada za 2-skalarni produkt  $(\cdot, \cdot | \cdot)$  definiran u teoremu 1.1.2 vrijedi*

$$(x, y | z) = \frac{1}{2} [A(x + y, y + z, 0)^2 + A(x + y, y - z, 0)^2 - A(x - y, y + z, 0)^2 - A(x - y, y - z, 0)^2].$$

*Za odgovarajuću 2-normu vrijedi:  $\|x, y\| = 2A(x, y, 0)$ .*

*Dokaz.* Koristeći (3.2) dobivamo:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} [A(x + y, y + z, 0)^2 + A(x + y, y - z, 0)^2 - A(x - y, y + z, 0)^2 - A(x - y, y - z, 0)^2] \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2 \left( (x | y) \|z\|^2 - (x | z)(y | z) \right) = \left( (x | y) \|z\|^2 - (x | z)(y | z) \right) = (x, y | z).
\end{aligned}$$

Prema definiciji 2-norme i 2-skalarnog produkta vrijedi:

$$\begin{aligned}
\|x, y\| &= \sqrt{(x, x | y)} \\
&= \sqrt{(x | x) \|y\|^2 - (x | y)(x | y)} \\
&= \sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - (x | y)^2},
\end{aligned}$$

što je po teoremu 3.1.4 jednako  $A(x, y, 0)$ .

□

## 3.2 Superaditivnost i monotonost 2-normi generiranih sa skalarnim produktom

Neka je  $X$  realan vektorski prostor i  $(\cdot | \cdot)_i$  ( $i = 1, 2$ ) skalarni produkti na  $X$ . Ti skalarni produkti generiraju 2-skalarne produkte  $(\cdot, \cdot | \cdot)_i : X^3 \rightarrow \mathbb{R}$  i 2-norme  $\|\cdot, \cdot\|_i : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ovako:

$$(a, b | c)_i = (a | b)_i \|c\|_i^2 - (a | c)_i (b | c)_i \quad (3.4)$$

i

$$\|a, b\|_i = [(a, a | b)_i]^{\frac{1}{2}} = [ \|a\|_i^2 \|b\|_i^2 - (a | b)_i^2 ]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5)$$

Definiramo novu funkciju kao zbroj dva skalarna produkta. Nju ćemo označavati s  $(\cdot | \cdot)_3$ . Dakle,

$$(\cdot | \cdot)_3 = (\cdot | \cdot)_1 + (\cdot | \cdot)_2$$

Dokažimo da je  $(\cdot | \cdot)_3$  također skalarni produkt.

*Dokaz.*  $(x | x)_3 \geq 0 \iff (x | x)_1 + (x | x)_2 \geq 0$ . Budući da su  $(\cdot | \cdot)_1$  i  $(\cdot | \cdot)_2$  skalarni produkti navedena nejednakost vrijedi za svaki elementi  $x \in X$ .

$$(x | y)_3 = (x | y)_1 + (x | y)_2 = (y | x)_1 + (y | x)_2 = (y | x)_3 \text{ za svaki } x, y \in X.$$

$$(\alpha x | y)_3 = (\alpha x | y)_1 + (\alpha x | y)_2 = \alpha [(x | y)_1 + (x | y)_2] = \alpha (x | y)_3 \text{ za svaki } x, y \in X \text{ i za svaki } \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$(x + y | z)_3 = (x + y | z)_1 + (x + y | z)_2 = (x | z)_1 + (y | z)_1 + (x | z)_2 + (y | z)_2 = [(x | z)_1 + (x | z)_2] + [(y | z)_1 + (y | z)_2] = (x | z)_3 + (y | z)_3 \text{ za svaki } x, y, z \in X. \quad \square$$

Za skalarni produkt  $(\cdot, \cdot)_3$  imamo i odgovarajući 2-skalarni produkt  $(\cdot, \cdot | \cdot)_3$  kao i odgovarajuću 2-normu  $\|\cdot, \cdot\|_3$  definiranu pomoću (3.4) i (3.5).

**Teorem 3.2.1.** Za 2-normu  $\|\cdot, \cdot\|_3$  definiranu na gore naveden način vrijedi:

$$\|a, b\|_3 \geq \|a, b\|_1 + \|a, b\|_2 \quad (3.6)$$

za sve  $a, b \in X$ . Tvrđnju ovog teorema možemo smatrati nekom vrstom superaditivnosti norme.

*Dokaz.* Za  $a, b \in X$  vrijedi:

$$\begin{aligned} \|a, b\|_3 &= \|a\|_3^2 \|b\|_3^2 - (a | b)_3^2 \\ &= (\|a\|_1^2 + \|a\|_2^2) (\|b\|_1^2 + \|b\|_2^2) - [(a | b)_1 + (a | b)_2]^2 \\ &= \|a\|_1^2 \|b\|_1^2 + \|a\|_1^2 \|b\|_2^2 + \|a\|_2^2 \|b\|_1^2 + \|a\|_2^2 \|b\|_2^2 - (a | b)_1^2 - 2(a | b)_1 (a | b)_2 - (a | b)_2^2 \\ &= \|a, b\|_1^2 + \|a, b\|_2^2 + \|a\|_1^2 \|b\|_2^2 - 2(a | b)_1 (a | b)_2 + \|a\|_2^2 \|b\|_1^2. \end{aligned}$$

Pokazat ćemo da je:

$$\|a\|_1^2 \|b\|_2^2 - 2(a | b)_1 (a | b)_2 + \|a\|_2^2 \|b\|_1^2 \geq 2 \|a, b\|_1 \|a, b\|_2. \quad (3.7)$$

Promotrimo prvo sljedeću nejednakost:

$$(mn - pq)^2 \geq (m^2 - p^2)(n^2 - q^2) \quad (3.8)$$

Nejednakost (3.8) ekvivalentna je s:

$$m^2 n^2 - 2mnpq + p^2 q^2 \geq m^2 n^2 + p^2 q^2 - m^2 q^2 - n^2 p^2$$

što je očito ekvivalentno s:

$$(mn - np)^2 \geq 0.$$

Zaključujemo da nejednakost (3.8) vrijedi za sve realne brojeve  $m, n, p, q$ .

Zamijenimo li sada u nejednakosti (3.8)  $m$  sa  $\|a\|_1 \|b\|_1$ ,  $n$  sa  $\|a\|_2 \|b\|_2$ ,  $p$  sa  $(a | b)_1$  i  $q$  sa  $(a | b)_2$  dobivamo sljedeću nejednakost:

$$(\|a\|_1^2 \|b\|_1^2 - (a | b)_1^2) (\|a\|_2^2 \|b\|_2^2 - (a | b)_2^2) \leq (\|a\|_1 \|b\|_1 \|a\|_2 \|b\|_2 - (a | b)_1 (a | b)_2)^2.$$

Iz čega slijedi:

$$\begin{aligned} &2[\|a\|_1^2 \|b\|_1^2 - (a | b)_1^2] (\|a\|_2^2 \|b\|_2^2 - (a | b)_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2 | (\|a\|_1 \|b\|_1 \|a\|_2 \|b\|_2 - (a | b)_1 (a | b)_2) | \\ &= 2(\|a\|_1 \|b\|_1 \|a\|_2 \|b\|_2 - (a | b)_1 (a | b)_2) \end{aligned}$$

Prema Cauchy - Schwarz - Bunjakovski nejednakosti u unitarnim prostorima vrijedi

$$\|a\|_i \|b\|_i \geq (a | b)_i, i = 1, 2.$$

Konačno, promatrajući nejednakost

$$2(\|a\|_1 \|b\|_1 \|a\|_2 \|b\|_2 - (a | b)_1 (a | b)_2) \leq \|a\|_1^2 \|b\|_2^2 - 2(a | b)_1 (a | b)_2 + \|a\|_2^2 \|b\|_1^2,$$

koja je ekvivalentna s

$$(\|a\|_1 \|b\|_2 - \|a\|_2 \|b\|_1)^2 \geq 0$$

i nejednakost (3.7) slijedi i uz to je

$$\|a, b\|_3^2 \geq \|a, b\|_1^2 + \|a, b\|_2^2 + 2\|a, b\|_1 \|a, b\|_2 = (\|a, b\|_1 + \|a, b\|_2)^2,$$

što pokazuje da nejednakost (3.6) vrijedi.  $\square$

**Definicija 3.2.2.** Za dva skalarna produkta  $(\cdot | \cdot)_1$  i  $(\cdot | \cdot)_2$  na  $X$  vrijedi  $(\cdot | \cdot)_2 > (\cdot | \cdot)_1$  ako je  $\|x\|_2 > \|x\|_1, \forall x \in X \setminus \{0\}$ .

Definiramo novo preslikavanje

$$(\cdot | \cdot)_{2,1} = (\cdot | \cdot)_2 - (\cdot | \cdot)_1. \quad (3.9)$$

Ako je  $(\cdot | \cdot)_2 > (\cdot | \cdot)_1$ , tada je  $(\cdot | \cdot)_{2,1}$  skalarni produkt na  $X$ .

*Dokaz.*  $(x | x)_{2,1} = (x | x)_2 - (x | x)_1 \geq 0$  za svaki  $x \in X$  jer je  $(x | x)_2 > (x | x)_1$  i jer su  $(\cdot | \cdot)_1$  i  $(\cdot | \cdot)_2$  dva skalarna produkta.

$(x | y)_{2,1} = (x | y)_2 - (x | y)_1 = (y | x)_2 - (y | x)_1 = (y | x)_{2,1}$  za svaki  $x, y \in X$ .

$(\alpha x | y)_{2,1} = (\alpha x | y)_2 - (\alpha x | y)_1 = \alpha[(x | y)_2 - (x | y)_1] = \alpha(x | y)_{2,1}$  za svaki  $x, y \in X$  i za svaki  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$(x + y | z)_{2,1} = (x + y | z)_2 - (x + y | z)_1 = (x | z)_2 + (y | z)_2 - [(x | z)_1 + (y | z)_1] = (x | z)_{2,1} + (y | z)_{2,1}$  za svaki  $x, y, z \in X$ .  $\square$

**Teorem 3.2.3.** Neka je  $(\cdot, \cdot)_2 > (\cdot, \cdot)_1$ . Tada za svaki  $a, b \in X$  vrijedi

$$\|a, b\|_2 \geq \|a, b\|_1. \quad (3.10)$$

Odnosno, preslikavanje  $\|\cdot, \cdot\|$  je padajuće kao preslikavanje generirano skalarnim produktom.

*Dokaz.* Jednakost (3.9) povlači da je

$$(\cdot | \cdot)_2 = (\cdot | \cdot)_{2,1} + (\cdot | \cdot)_1.$$

Sada, primijenimo li teorem 3.2.1 zaključujemo

$$\|a, b\|_2 \geq \|a, b\|_{2,1} + \|a, b\|_1 \geq \|a, b\|_1,$$

pri čemu smo u zadnjoj nejednakosti koristili nenegativnost norme  $\|\cdot, \cdot\|_{2,1}$ .  $\square$

U nastavku poglavlja navest ćemo nekoliko primjera 2-normi generiranih skalarnim produktom koji zadovoljava nejednakost (3.10).

**Primjer 1:**

Neka je  $A : H \rightarrow H$  pozitivno definiran linearni operator na Hilbertovom prostoru  $(H, (\cdot | \cdot))$  nad poljem  $\mathbb{R}$  i neka postoji  $m > 0$  takav da  $A$  zadovoljava sljedeću relaciju:

$$(Ax | x) > m \|x\|^2, \quad (3.11)$$

za svaki  $x \in H \setminus \{0\}$ .

Preslikavanja  $(\cdot | \cdot)_A, (\cdot | \cdot)_m : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  definirana na sljedeći način:

$$\begin{aligned} (x | y)_A &= (Ax | y), \\ (x | y)_m &= m(x | y), \end{aligned}$$

za svaki  $x, y \in H$ , su skalarni produkti na  $H$  i kako je  $(\cdot | \cdot)_A > (\cdot | \cdot)_m$ , po (3.11) za  $x \in H \setminus \{0\}$  imamo:

$$\|x\|_A = \sqrt{(Ax | x)} > \sqrt{m \|x\|^2} = \|x\|_m.$$

Sada možemo konstruirati 2-skalarne produkte  $(\cdot, \cdot | \cdot)_A, (\cdot, \cdot | \cdot)_m : H^3 \rightarrow \mathbb{R}$  na sljedeći način:

$$\begin{aligned} (x, y | z)_A &= (Ax | y)(Az | z) - (Ax | z)(Ay | z), \\ (x, y | z)_m &= m^2[(x | y)\|z\|^2 - (x | z)(y | z)], \end{aligned}$$

kao i odgovarajuće 2-norme

$$\begin{aligned} \|x, y\|_A &= [(Ax | x)(Ay | y) - (Ax | y)^2]^{\frac{1}{2}}, \\ \|x, y\|_m &= m[\|x\|^2\|y\|^2 - (x | y)^2] = m\|x, y\|. \end{aligned}$$

Uočimo, iskoristimo li teorem 3.2.3 vidimo da vrijedi:

$$\|x, y\|_A \geq m\|x, y\| \quad (3.12)$$

**Primjer 2:**

Neka je  $A$  strogo pozitivan linearni operator na  $H$ ,  $A > 0$ , koji zadovoljava sljedeću nejednakost:

$$(Ax, x) < M \|x\|^2 \quad (3.13)$$

za svaki  $x \in H \setminus \{0\}$ , pri čemu je  $M > 0$  konstanta. Slično kao u primjeru 1 možemo zaključiti da vrijed nejednakosti:

$$\|x, y\|_A \leq M \|x, y\| \quad (3.14)$$

za svaki  $x, y \in H$ .

**Primjer 3:**

Neka je  $A : H \rightarrow H$  ograničeni linearni operator na Hilbertovom prostoru  $(H, (\cdot | \cdot))$  i neka je

$$\|A\| = \sup \{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$$

norma od  $A$ . Pretpostavimo još da je  $A$  injektivno preslikavanje tj. da  $Ax = 0$  povlači  $x = 0$ . Preslikavanje  $[\cdot | \cdot]_A : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  definirano s

$$[x | y]_A = (Ax | Ay)$$

je skalarni produkt na  $H$  koji generira normu  $\| \|x\| \| \|_A = \|Ax\|, \forall x \in H$ .

Možemo konstruirati i 2-skalarni produkt povezan s  $[\cdot | \cdot]_A$  na sljedeći način:

$$[x, y | z]_A = (Ax | Ay) \|Az\|^2 - (Ax | Az) (Ay | Az),$$

kao i pripadnu 2- normu

$$\| \|x, y\| \| \|_A = [ \|Ax\|^2 \|Ay\|^2 - (Ax | Ay)^2 ]^{\frac{1}{2}}.$$

Budući da je  $A$  ograničen, imamo:

$$\| \|x\| \| \|_A = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| = \sqrt{\|A\|^2 \|x\|^2} = \sqrt{(x | x)_{\|A\|^2}} = \|x\|_{\|A\|^2}$$

i tada je  $[\cdot | \cdot]_A \leq (\cdot | \cdot)_{\|A\|^2}$ . Iskoristimo li ponovno teorem 3.2.3, zaključujemo da je

$$\| \|x, y\| \| \|_A \leq \|A\|^2 \|x, y\| \quad (3.15)$$

$\forall x, y \in H$ .

**Teorem 3.2.4.** Neka je  $(X, \|\cdot\|)$  unitarni prostor i neka su  $x, y, z \in X$  takvi da je  $x \neq y \neq z$ . Definiramo

$$\cos \theta = \frac{(x - y, y - z)}{\|x - y\| \|y - z\|} \quad (3.16)$$

za svaki  $\theta \in [0, \pi)$ .

Tada vrijedi:

$$A(x, y, z) = \frac{\|x - y\| \|y - z\| \sin \theta}{2}. \quad (3.17)$$

*Dokaz.* Po teoremu 3.1.2 znamo da u normiranom prostoru za sve  $a, b, c \in X$  vrijedi

$$A(a, b, c) = A(a - b, b - c, 0),$$

dok po teoremu 3.1.4 (2.) znamo da u svakom unitarnom prostoru je

$$A^2(w, u, 0) = \frac{1}{4}(\|w\|^2 \|u\|^2 - (w, u)^2),$$

za sve  $w, u \in X$ .

Sada imamo

$$\begin{aligned} A^2(y, x, z) &= A^2(x - y, y - z, 0) \\ &= \frac{1}{4}(\|x - y\|^2 \|y - z\|^2 - (x - y, y - z)^2). \end{aligned}$$

Iz 3.16 slijedi

$$(x - y, y - z) = \|x - y\| \|y - z\| \cos \theta,$$

primjenom te jednakosti dolazimo do

$$\begin{aligned} A^2(x, y, z) &= \frac{1}{4}[\|x - y\|^2 \|y - z\|^2 - (\|x - y\| \|y - z\| \cos \theta)^2] \\ &= \frac{1}{4}[\|x - y\|^2 \|y - z\|^2 (1 - \cos^2 \theta)] \\ &= \frac{1}{4}\|x - y\|^2 \|y - z\|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

čime je tvrdnja teorema dokazana. □

U nastavku poglavlja istaknut ćemo neka svojstva superaditivnosti i monotonosti Heronovog preslikavanja u unitarnim prostorima.

**Teorem 3.2.5.** *Neka su  $(\cdot | \cdot)_1, (\cdot | \cdot)_2$  dva skalarna produkta na  $X$  i neka je  $(\cdot | \cdot)_3 = (\cdot | \cdot)_1 + (\cdot | \cdot)_2$ . Tada za sve  $x, y, z \in X$  vrijedi:*

$$A_3(x, y, z) \geq A_1(x, y, z) + A_2(x, y, z), \quad (3.18)$$

pri čemu je  $A_i(x, y, z) = [s_i(s_i - a_i)(s_i - b_i)(s_i - c_i)]^{\frac{1}{2}}$ ,  $a_i = \|x - y\|_i$ ,  $b_i = \|x - z\|_i$ ,  $c_i = \|y - z\|_i$  i  $s_i = \frac{a_i + b_i + c_i}{2}$ ,  $i = 1, 2, 3$  iz čega slijedi da je Heronovo preslikavanje superaditivno kao preslikavanje koje ovisi o skalarnom produktu koji ga generira.



*Dokaz.* Uz gore navedene oznake slijedi:

$$\begin{aligned} A_i^2(x, y, z) &= A_i^2(x - y, y - z, 0) \\ &= \frac{1}{4}(\|x - y\|_i^2 \|y - z\|_i^2 - (x - y, y - z)_i^2) \\ &= \frac{1}{4}\|x - y, y - z\|_i^2. \end{aligned}$$

Tada je  $A_i(x, y, z) = \frac{1}{2}\|x - y, y - z\|_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , gdje je  $\|\cdot, \cdot\|_i$  kanonski zapis 2-norme generirane s skalarnim produktom  $(\cdot, \cdot)_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Koristeći teorem 3.2.1 u kojem smo dokazali da je preslikavanje  $\|\cdot, \cdot\|$  superaditivno kao preslikavanje koje ovisi o skalarnom produktu koji ga generira, dolazimo do zaključka da je nejednakost iskazana u teoremu istinita.  $\square$

Slično, promatrajući teorem 3.2.3 dolazimo do sljedećeg svojstva monotonosti:

**Teorem 3.2.6.** *Neka je  $(\cdot | \cdot)_2 > (\cdot | \cdot)_1$ . Tada za svaki  $x, y, z \in X$  vrijedi*

$$A_2(x, y, z) \geq A_1(x, y, z). \quad (3.19)$$

### 3.3 Superaditivnost i monotonost nekih funkcionala povezanih s 2-skalarnim produktom

Sada na prirodan način koristeći Cauchy - Bunjakovskoy- Schwartzovu nejednakost možemo definirati funkcional u ovisnosti o 2-skalarnom produktu  $(\cdot, \cdot | \cdot)$

$$\varphi((\cdot, \cdot | \cdot))(a, b, c) = \|a, c\| \|b, c\| - |(a, b | c)| \geq 0, \quad (3.20)$$

pri čemu su  $a, b, c \in X$  i  $\|\cdot, \cdot\|$  2-norma pridružena 2-skalarnom produktu  $(\cdot, \cdot | \cdot)$ .

U nastavku poglavlja istaknut ćemo neka svojstva superaditivnosti i monotonosti za preslikavanje  $\varphi(\cdot)$  kao preslikavanje ovisno o 2-skalarnom produktu  $(\cdot, \cdot | \cdot)$ .

**Teorem 3.3.1.** *Neka su  $(\cdot, \cdot | \cdot)_i : X^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dva 2-skalarna produkta na  $X$  ( $i = 1, 2$ ). Tada za sve  $a, b, c \in X$  vrijedi*

$$\varphi((\cdot, \cdot | \cdot)_1 + (\cdot, \cdot | \cdot)_2)(a, b, c) \geq \varphi((\cdot, \cdot | \cdot)_1)(a, b, c) + \varphi((\cdot, \cdot | \cdot)_2)(a, b, c). \quad (3.21)$$

*Preslikavanje  $\varphi(\cdot)$  je superaditivno kao preslikavanje ovisno o 2-skalarnom produktu koji ga generira.*

*Dokaz.* Prema Cauchy - Bunjakovsky - Schwarzovoj nejednakosti vrijedi

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} (z^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} \geq xz + yt \quad (3.22)$$

za sve  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ .

Prema definiciji 2-norme generirane s 2-skalarnim produktom vidi se da je

$$\varphi((\cdot, \cdot | \cdot)_1 + (\cdot, \cdot | \cdot)_2)(a, b, c) = (\|a, c\|_1^2 + \|a, c\|_2^2)^{\frac{1}{2}} (\|b, c\|_1^2 + \|b, c\|_2^2)^{\frac{1}{2}} - |(a, b | c)_1 + (a, b | c)_2|.$$

Sada, ako odaberemo  $x = \|a, c\|_1, y = \|a, c\|_2, z = \|b, c\|_1$  i  $t = \|b, c\|_2$  i uvrstimo u (3.22) dobivamo:

$$\begin{aligned} \varphi((\cdot, \cdot | \cdot)_1 + (\cdot, \cdot | \cdot)_2)(a, b, c) &\geq (\|a, c\|_1 \|b, c\|_1) + (\|a, c\|_2 \|b, c\|_2) - |(a, b | c)_1 + (a, b | c)_2| \\ &\geq (\|a, c\|_1 \|b, c\|_1) - |(a, b | c)_1| + (\|a, c\|_2 \|b, c\|_2) - |(a, b | c)_2| \\ &= \varphi((\cdot, \cdot | \cdot)_1)(a, b, c) + \varphi((\cdot, \cdot | \cdot)_2)(a, b, c) \end{aligned}$$

za sve  $a, b, c \in X$  i time je superaditivnost preslikavanja  $\varphi(\cdot)$  dokazana.  $\square$

Slično kao kod unitarnih prostora, imamo sljedeću definiciju:

**Definicija 3.3.2.** *Neka su  $(\cdot, \cdot | \cdot)_i : X^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dva 2-skalarna produkta na  $X$  ( $i = 1, 2$ ). Kažemo da je  $(\cdot, \cdot | \cdot)_2 > (\cdot, \cdot | \cdot)_1$  ako je  $\|a, b\|_2 > \|a, b\|_1$  za sve lineano nezavisne vektore  $a, b$  u  $X$ .*

Primjetimo, ako pretpostavimo da je  $(\cdot, \cdot | \cdot)_2 > (\cdot, \cdot | \cdot)_1$ , tada preslikavanje  $(\cdot, \cdot | \cdot)_{2,1} : X^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definiramo na sljedeći način:

$$(\cdot, \cdot | \cdot)_{2,1} = (\cdot, \cdot | \cdot)_2 - (\cdot, \cdot | \cdot)_1.$$

Preslikavanje  $(\cdot, \cdot | \cdot)_{2,1}$  je također 2-skalarni produkt na  $X$ .

**Teorem 3.3.3.** *Neka su  $(\cdot, \cdot | \cdot)_i : X^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dva 2-skalarna produkta na  $X$  ( $i = 1, 2$ ) takva da vrijedi  $(\cdot, \cdot | \cdot)_2 > (\cdot, \cdot | \cdot)_1$ . Tada za sve  $a, b, c \in X$  vrijedi*

$$\varphi((\cdot, \cdot | \cdot)_2)(a, b, c) \geq \varphi((\cdot, \cdot | \cdot)_1)(a, b, c), \quad (3.23)$$

*tj. preslikavanje  $\varphi(\cdot)$  je montono kao preslikavanje generirano 2-skalarnim produktom.*

*Dokaz.* Iz definicije  $(\cdot, \cdot | \cdot)_{2,1}$  slijedi da je  $(\cdot, \cdot | \cdot)_2 = (\cdot, \cdot | \cdot)_{2,1} + (\cdot, \cdot | \cdot)_1$ . Primjenom teorema 3.3.1 dobivamo:

$$\begin{aligned} \varphi((\cdot, \cdot | \cdot)_2)(a, b, c) &\geq \varphi((\cdot, \cdot | \cdot)_{2,1})(a, b, c) + \varphi((\cdot, \cdot | \cdot)_1)(a, b, c) \\ &\geq \varphi((\cdot, \cdot | \cdot)_1)(a, b, c) \end{aligned}$$

za sve  $a, b, c \in X$  i time je teorem dokazan.  $\square$

Definirajmo sada još jedan funkcional koji je prirodno povezan s 2-skalarnim produktom  $(\cdot, \cdot | \cdot)$  i ovisi o njemu:

$$\Phi((\cdot, \cdot | \cdot))(a, b, c) = [\|a, c\|^2 \|b, c\|^2 - (a, b | c)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (3.24)$$

pri čemu su  $a, b, c \in X$  i  $\|\cdot, \cdot\|$  odgovarajuća 2-norma pridružena 2-skalarnom produktu.

Slijedi svojstvo superaditivnosti za preslikavanje  $\Phi$ .

**Teorem 3.3.4.** *Neka su  $(\cdot, \cdot | \cdot)_i : X^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dva 2-skalarna produkta na  $X$  ( $i = 1, 2$ ). Tada je*

$$\Phi((\cdot, \cdot | \cdot)_1 + (\cdot, \cdot | \cdot)_2)(a, b, c) \geq \Phi((\cdot, \cdot | \cdot)_1)(a, b, c) + \Phi((\cdot, \cdot | \cdot)_2)(a, b, c) \quad (3.25)$$

za sve  $a, b, c \in X$ , tj. preslikavanje  $\Phi(\cdot)$  je superaditivno kao preslikavanje koje ovisi o 2-skalarnom produktu koji ga generira.

*Dokaz.* Za sve  $a, b, c \in X$  vrijedi:

$$\begin{aligned} & \Phi^2((\cdot, \cdot | \cdot)_1 + (\cdot, \cdot | \cdot)_2)(a, b, c) \\ &= (\|a, c\|_1^2 + \|a, c\|_2^2)(\|b, c\|_1^2 + \|b, c\|_2^2) - [(a, b | c)_1 + (a, b | c)_2]^2 \\ &= \|a, c\|_1^2 \|b, c\|_1^2 - [(a, b | c)_1]^2 + \|a, c\|_2^2 \|b, c\|_2^2 - [(a, b | c)_2]^2 \\ &+ \|a, c\|_1^2 \|b, c\|_2^2 - 2(a, b | c)_1 (a, b | c)_2 + \|a, c\|_2^2 \|b, c\|_1^2 \\ &= \Phi^2((\cdot, \cdot | \cdot)_1)(a, b, c) + \Phi^2((\cdot, \cdot | \cdot)_2)(a, b, c) \\ &+ \|a, c\|_1^2 \|b, c\|_2^2 - 2(a, b | c)_1 (a, b | c)_2 + \|a, c\|_2^2 \|b, c\|_1^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Promotrimo li sada nejednakost  $(mn - pq)^2 \geq (m^2 - p^2)(n^2 - q^2)$  koja vrijedi za sve  $m, n, p, q \in \mathbb{R}$  i uvrstimo li u nju  $m = \|a, c\|_1 \|b, c\|_1$ ,  $n = \|a, c\|_2 \|b, c\|_2$ ,  $p = (a, b | c)_1$  i  $q = (a, b | c)_2$  dobivamo:

$$\begin{aligned} & (\|a, c\|_1^2 \|b, c\|_1^2 - (a, b | c)_1^2)(\|a, c\|_2^2 \|b, c\|_2^2 - (a, b | c)_2^2) \\ & \leq (\|a, c\|_1 \|b, c\|_1 \|a, c\|_2 \|b, c\|_2 - (a, b | c)_1 (a, b | c)_2)^2 \end{aligned}$$

što nas dovodi do

$$2[(\|a, c\|_1^2 \|b, c\|_1^2 - (a, b | c)_1^2)q, (\|a, c\|_2^2 \|b, c\|_2^2 - (a, b | c)_2^2)]^{\frac{1}{2}} \leq 2(\|a, c\|_1 \|b, c\|_1 \|a, c\|_2 \|b, c\|_2 - (a, b | c)_1 (a, b | c)_2). \quad (3.27)$$

Propozicija 1.1.2 povlači da je  $\|a, c\|_i \|b, c\|_i \geq (a, b | c)_i$  za  $i = 1, 2$ .

Konačno, ako promotrimo sljedeću nejednakost

$$\begin{aligned} 2(\|a, c\|_1 \|b, c\|_1 \|a, c\|_2 \|b, c\|_2 - (a, b | c)_1 (a, b | c)_2) & \leq \|a, c\|_1^2 \|b, c\|_2^2 - 2(a, b | c)_1 (a, b | c)_2 \\ & + \|a, c\|_2^2 \|b, c\|_1^2 \end{aligned}$$

i (3.28) imamo:

$$\|a, c\|_1^2 \|b, c\|_2^2 - 2(a, b | c)_1 (a, b | c)_2 + \|a, c\|_2^2 \|b, c\|_1^2 \geq 2\Phi((\cdot, \cdot | \cdot)_1)(a, b, c)\Phi((\cdot, \cdot | \cdot)_2)(a, b, c).$$

Stoga, ako iskoristimo jednakost (3.27) dobivamo:

$$\begin{aligned} & \Phi^2((\cdot, \cdot | \cdot)_1 + (\cdot, \cdot | \cdot)_2)(a, b, c) \\ & \geq \Phi^2((\cdot, \cdot | \cdot)_1)(a, b, c) + \Phi^2((\cdot, \cdot | \cdot)_2)(a, b, c) \\ & \quad + 2\Phi((\cdot, \cdot | \cdot)_1)(a, b, c)\Phi((\cdot, \cdot | \cdot)_2)(a, b, c) \end{aligned}$$

za sve  $a, b, c \in X$ , čime smo dokazali traženu nejednakost.  $\square$

**Teorem 3.3.5.** *Neka su dana dva 2-skalarna produkta za koja vrijedi  $(\cdot, \cdot | \cdot)_2 > (\cdot, \cdot | \cdot)_1$ , tada je*

$$\Phi((\cdot, \cdot | \cdot)_2)(a, b, c) \geq \Phi((\cdot, \cdot | \cdot)_1)(a, b, c), \quad (3.28)$$

za sve  $a, b, c \in X$ , to jest preslikavanje  $\Phi(\cdot)$  je rastuće na klasi 2-skalarnih produkata definiranih na  $X$ .

Koristeći rezultate poglavlja 3.2 i svojstvo monotonosti preslikavanja  $\varphi$  i  $\Phi$  dolazimo do sljedećih nejednakosti:

1) Neka je  $A : H \rightarrow H$  pozitivan operator na Hilbertovom prostoru  $(H, (\cdot | \cdot))$  nad poljem realnih brojeva  $\mathbb{R}$ . Pretpostavimo da  $A$  zadovoljava sljedeću nejednakost:

$$(Ax | x) > m\|x\|^2,$$

za svaki  $x \in H \setminus \{0\}$ ,  $m > 0$ . Tada je

$$\begin{aligned} & [(Ax | x)(Az | z) - (Ax | z)^2]^{\frac{1}{2}} [(Ay | y)(Az | z) - (Ay | z)^2]^{\frac{1}{2}} - |(Ax | y)(Az | z) - (Ax | z)(Ay | z)| \\ & \geq m^2\{[\|x\|^2\|z\|^2 - (x, z)^2]^{\frac{1}{2}}[\|y\|^2\|z\|^2 - (y, z)^2]^{\frac{1}{2}} - |(x | y)\|z\|^2 - (x | z)(y | z)\} > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(Ax | x)(Az | z) - (Ax | z)^2][(Ay | y)(Az | z) - (Ay | z)^2] - |(Ax | y)(Az | z) - (Ax | z)(Ay | z)|^2 \\ & \geq m^4\{[\|x\|^2\|z\|^2 - (x | z)^2][\|y\|^2\|z\|^2 - (y | z)^2] - |(x | y)\|z\|^2 - (x | z)(y | z)\} \geq 0 \end{aligned}$$

za sve  $x, y, z \in H$ .

### 3.4 Heronovo preslikavanje u 2-normiranom prostoru

U ovom poglavlju prikazat ćemo Heronovo preslikavanje u vektorskom 2-normiranom prostoru na sličan način kao u poglavlju 3.3.

Neka je  $(X, \|\cdot\|)$  2-normirani prostor. Za proizvoljne vektore  $x, y, z, t \in X$  definiramo

$$A(x, y, z | t) = [s(s-a)(s-b)(s-c)]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.29)$$

pri čemu je  $a = \|x - y, t\|$ ,  $b = \|x - z, t\|$ ,  $c = \|y - z, t\|$  i  $s = \frac{a+b+c}{2}$ .

Neka od svojstava su sljedeća:

1.  $A(px, py, pz | t) = p^2 A(x, y, z | t)$ , za svaki realan broj  $p$ ,
2.  $A(x+u, y+u, z+u | t) = A(x, y, z | t)$ ,  $\forall u \in X$ ,
3.  $A(x, y, z | t) = A(x-y, y-z, 0 | t)$ .

Neka je  $(X, (\cdot, \cdot | \cdot))$  2-unitarni prostor i neka je  $\|\cdot, \cdot\|$  odgovarajuća 2-norma generirana 2-skalarnim produktom  $(\cdot, \cdot | \cdot)$ . Tada, koristeći slične argumente kao u teoremu 3.1.4, dobivamo:

$$[A(x, y, 0 | t)]^2 = \frac{1}{4} [\|x, t\|^2 \|y, t\|^2 - (x, y | t)^2] \quad (3.30)$$

za svaki  $x, y, t \in X$ .

**Teorem 3.4.1.** *Neka je  $(X, (\cdot, \cdot | \cdot))$  2-unitarni prostor i neka su vektori  $x, y, z, t \in X$  linearno nezavisni u  $X$ . Definiramo*

$$\cos \phi = \frac{(x-y, y-z | t)}{\|x-y, t\| \|y-z, t\|}$$

za sve  $\phi \in [0, \pi)$ . Tada  $A$  možemo prikazati na sljedeći način:

$$A(x, z, y | t) = \frac{\|x-y, t\| \|y-z, t\| \sin \phi}{2}. \quad (3.31)$$

*Dokaz.* Promotrimo li sljedeću jednakost  $A(x, y, z | t) = A(x-y, y-z, 0 | t)$  i iskoristimo li tvrdnju (3.31) dobivamo:

$$\begin{aligned} A^2(x, y, z | t) &= A^2(x-y, y-z, 0 | t) \\ &= \frac{1}{4} [\|x-y, t\|^2 \|y-z, t\|^2 - (x-y, y-z | t)^2] \end{aligned}$$

Iz tvrdnje teorema slijedi

$$(x - y, y - z | t) = \cos\phi \|x - y, t\| \|y - z, t\|.$$

Iskoritimo li tu jednakost dobivamo:

$$\begin{aligned} A^2(x, y, z | t) &= \frac{1}{4} [\|x - y, t\|^2 \|y - z, t\|^2 - \|x - y, t\|^2 \|y - z, t\|^2 \cdot \cos^2\phi] \\ &= \frac{1}{4} [\|x - y, t\|^2 \|y - z, t\|^2 (1 - \cos^2\phi)] \\ &= \frac{1}{4} \|x - y, t\|^2 \|y - z, t\|^2 \cdot \sin^2\phi \end{aligned}$$

čime je tvrdnja teorema dokazana. □

Istaknimo još neka svojstva superaditivnosti i monotonosti Heronovnog preslikavanja na 2-unitarnom prostoru.

**Teorem 3.4.2.** *Neka su  $(\cdot, \cdot | \cdot)_1, (\cdot, \cdot | \cdot)_2$  dva 2-skalarna produkta na  $X$  i neka je  $(\cdot, \cdot | \cdot)_3 = (\cdot, \cdot | \cdot)_1 + (\cdot, \cdot | \cdot)_2$ . Tada vrijedi:*

$$A_3(x, y, z | t) \geq A_1(x, y, z | t) + A_2(x, y, z | t)$$

za svaki  $x, y, z \in X$ , pri čemu je  $A_i(x, y, z) = [s_i(s_i - a_i)(s_i - b_i)(s_i - c_i)]^{\frac{1}{2}}$ ,  $a_i = \|x - y, t\|_i$ ,  $b_i = \|x - z, t\|_i$ ,  $c_i = \|y - z, t\|_i$  i  $s_i = \frac{a_i + b_i + c_i}{2}$ , za  $i = 1, 2, 3$ , pa je Heronovo preslikavanje superaditivno kao funkcija ovisna o 2-skalarnom produktu koji ju generira.

*Dokaz.* Uz gore navedene oznake imamo:

$$\begin{aligned} A_i^2(x, y, z | t) &= A_i^2(x - y, y - z, 0 | t) \\ &= \frac{1}{4} [\|x - y, t\|_i^2 \|y - z, t\|_i^2 - (x - y, y - z | t)_i^2] \\ &= \frac{1}{4} \|x - y, t\|_i^2 \|y - z, t\|_i^2 \end{aligned}$$

Iz toga slijedi

$$A_i(x, y, z | t) = \frac{1}{2} \|x - y, t\|_i \|y - z, t\|_i$$

$i = 1, 2, 3$ , gdje je  $\|\cdot, \cdot\|_i$  kanonski zapis 2-norme generirane 2-skalarnim produktom  $(\cdot, \cdot | \cdot)$ . Koristeći teorem 3.2.1 u kojem smo pokazali da je  $\|\cdot, \cdot\|$  superaditivno dolazimo do nejednakosti našeg teorema. Time je teorem dokazan. □

**Teorem 3.4.3.** *Neka je  $(\cdot, \cdot | \cdot)_2 > (\cdot, \cdot | \cdot)_1$ , tada vrijedi*

$$A_2(x, y, z | t) \geq A_1(x, y, z | t)$$

*za svaki  $x, y, z, t \in X$ , pa je Heronovo preslikavanje rastuće kao funkcija koja ovisi o 2-skalarnom produktu koji ga generira.*

# Bibliografija

- [1] Y. J. Cho, P. C. S. Lin, S. S. Kim, A. Misiak, *Theory of 2-inner product spaces*, Nova Sci. Publ. Inc., New York, 2001.
- [2] S.S. Dragomir, Y.J. Cho and S.S. Kim, *Superadditivity and monotonicity of 2-norms generated by inner products and related results*, *Soochow J. Math.* 24(1)(1998), 13-32.
- [3] R. Malcheski, K. Anevska, S. Malcheski, *Some characterizations of 2-inner product*, *Mat. Bilten* 41(2016), 5-11 .
- [4] A. White, Y.J. Cho and S.S. Kim, *Heron's formula in inner product spaces*, *Demonstratio Math*, 31(1)(1998), 97 - 102.



# Sažetak

U ovom diplomskom radu definirali smo 2-skalarni produkt odnosno 2-unitarni prostor. Dokazana su svojstva 2-skalarnog produkta te neke od karakterizacija. Definirana je i pripadna 2-norma, te su također iskazana i dokazana neka njena svojstva. U zadnjem poglavlju definirano je Heronovo preslikavanje u unitarnim prostorima te u 2-normiranom prostoru. Navedene su neke primjene Heronovog preslikavanja. Također je prikazano svojstvo superaditivnosti i monotonosti nekih funkcionala povezanih s 2-skalarnim produktom.

# Summary

In this thesis, we define 2-inner product and 2-inner product space. The properties of the 2-inner product and some of the characterizations are proved. Also we define the corresponding 2-norm and 2-normed space and prove some of its properties.

The last chapter is devoted to Heron's mapping in an inner space and in a 2-normed space. Some applications of Heron's mapping are described. We also show superadditivity and monotonicity for some functionals associated with 2-inner products.

# Životopis

Moje ime je Mihaela Hitrec. Rođena sam 5. srpnja 1994. godine u Zagrebu. Osnovnu školu završila sam u Zlataru u Krapinsko - Zagorskoj županiji. Potom sam u Srednjoj školi Zlatar upisala opću gimnaziju. Srednjoškolsko obrazovanje završila sam 2013. godine te u srpnju iste godine upisala preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija upisala sam i diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer nastavnički, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.