Struktura Levyjevih procesa, subordinatori i primjene

Kralj, Tomislav

Struktura Levyjevih procesa, subordinatori i primjene

Kralj, Tomislav

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tomislav Kralj

STRUKTURA LÉVYJEVIH PROCESA, SUBORDINATORI I PRIMJENE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Zoran Vondraček

Zagreb, srpanj 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad prije svega posvećujem mami Dubravki, tati Dubravku, bratu Zvonimiru te djevojci Josipi. Hvala svim kolegama i prijateljima tijekom proteklih pet godina. Iskrene zahvale mentoru na strpljenju i na izvrsnom uzoru - kako u matematici, tako i osobno.

Sadržaj

Uvod

Kao uvod u razmatranja opisana u ovom radu, promotrimo jedan jednostavan primjer diskretno vremenskog slučajnog procesa. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te neka je $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ familija nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli definiranih na tom istom vjerojatnosnom prostoru. Definiramo proces $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ kao

$$X_0 = 0,$$
$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k, \ n \geq 1.$$

Proces $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ nazivamo slučajnom šetnjom na $\mathbb{R}$ te je ona jedna od prvih objekata koji se promatraju u teoriji slučajnih procesa.

Promotrimo koja osnovna svojstva ima slučajna šetnja. (*i*) Odmah je iz definicije jasno da proces kreće iz nule $\mathbb{P}$-g.s. (*ii*) Nadalje, kako su sve varijable $Y_n, n \in \mathbb{N}$ jednako distribuirane, za $m < n$ vrijedi sljedeće

$$X_n - X_m = \sum_{k=m+1}^{n} Y_k \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{n-m} Y_k = X_{n-m}$$

pa za slučajnu šetnju kažemo da ima stacionarne priraste. (*iii*) Konačno, za $r \leq m < n$ vrijedi da

$$X_r = \sum_{k=1}^{r} Y_k, \quad X_n - X_m = \sum_{k=m+1}^{n} Y_k,$$

a kako su varijable $Y_n, n \in \mathbb{N}$ međusobno nezavisne, to su međusobno nezavisne i X_r te $X_n - X_m$ pa za slučajnu šetnju kažemo da ima nezavisne priraste.

Lévyjevi procesi su neprekidno-vremenska generalizacija diskretnih slučajnih šetnji gdje od takvih procesa prirodno zahtijevamo nasljeđivanje svojstava (*i*), (*ii*), (*iii*). U prvom poglavlju uvodimo formalnu definiciju Lévyjevih procesa te s njima povezanih beskonačno djeljivih distribucija. Koristeći se osnovnim tehnikama u teoriji vjerojatnosti konstruiramo i dajemo tri najvažnija primjera Lévyjevih procesa: Poissonov točkovni proces, složen Poissonov proces te Brownovo gibanje.

U drugom poglavlju iskazujemo i dokazujemo fundamentalan teorem Lévy-Itôve dekompozicije. To činimo pažljivom konstrukcijom apstraktne Poissonove slučajne mjere te dalje prirodno gradimo teoriju.

U trećem poglavlju promatramo neopadajuće Lévyjeve procese, tzv. subordinatore. Uvodimo pojmove potencijalnih mjera i mjera obnavljanja te pomoću njih dokazujemo Dynkin-Lampertijevu asimptotiku.

U četvrtom poglavlju promatramo slučajne kompozicije i particije nenegativnih cijelih brojeva, tzv. kompozicijske strukture te primjenjujemo teoriju subordinatora na takve strukture.

Poglavlje 1

Lévyjevi procesi i osnovni primjeri

1.1 Lévyjevi procesi i beskonačno djeljive distribucije

Sada je na redu da matematički precizno izrečemo razmatranja iz uvoda. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Formalna definicija Lévyjevog procesa je sljedeća:

Definicija 1.1.1. *Slučajan proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ koji je definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nazivamo Lévyjevim procesom ako zadovoljava sljedeća svojstva*

(i) Trajektorije $t \mapsto X_t(\omega)$ su $\mathbb{P}$-g.s. neprekidne zdesna s limesima slijeva.

(ii) $X_0 = 0$ $\mathbb{P}$-g.s.

(iii) Za $0 \leq s \leq t$, slučajna varijabla $X_t - X_s$ je po distribuciji jednaka X_{t-s}.

(iv) Za $0 \leq s \leq t$, slučajna varijabla $X_t - X_s$ je nezavisna od familije $\{X_r : r \leq s\}$.

Iako je definicija Lévyjevog procesa prilično jasna i intuitivna, ona zapravo ne daje apsolutni pregled o bogatsvu klase koju čine takvi procesi. Talijanski matematičar De Finetti je 1929. godine uveo na prvi pogled jednu širu klasu *beskonačno djeljivih distribucija* i pokazao njihovu usku vezu s Lévyjevim procesima.

Definicija 1.1.2. *Kažemo da slučajna varijabla Y ima beskonačno djeljivu distribuciju ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli $Y_{1,n}, \dots, Y_{n,n}$ takvih da je*

$$Y \overset{d}{=} Y_{1,n} + \cdots + Y_{n,n}$$

pri čemu $\overset{d}{=}$ označava jednakost po distribuciji.

Prethodna se definicija mogla alternativno zadati preko zakona razdioba. Naime, kažemo da je zakon razdiobe μ_X slučajne varijable X *beskonačno djeljiv* ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji zakon razdiobe μ_n takav da je $\mu_X = \mu_n^{*n}$ pri čemu je μ_n^{*n} n-terostruka konvolucija zakona razdiobe μ_n.

Iz Definicije 1.1.1., svojstva (iii) i (iv) slijedi da za Lévyjev proces $(X_t)_{t\geq 0}$, proizvoljan indeks $t > 0$ i prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da

$$X_t = X_{t/n} + (X_{2t/n} - X_{t/n}) + \cdots + (X_t - X_{(n-1)t/n}) \tag{1.1}$$

pa je X_t beskonačno djeljiva distribucija. Uočimo sada povezanost Lévyjevog procesa i slučajne šetnje na $\mathbb{R}$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ fiksan. Ako se Lévyjev proces bilježi samo u diskretnim vremenskim trenucima $m/n, m \in \mathbb{N}_0$, slijedi da je proces $(X_{m/n})_{m\in\mathbb{N}_0}$ slučajna šetnja na $\mathbb{R}$.

Međutim, postavlja se sljedeće pitanje: ako je dana slučajna varijabla Y s beskonačno djeljivom distribucijom, postoji li Lévyjev proces $(X_t)_{t\geq 0}$ takav da X_t ima distribuciju kao i Y u nekom trenutku t, na primjer $t = 1$? Iako je odgovor na ovo pitanje afirmativan, on nije sasvim jednostavan te zahtjeva posebnu konstrukciju koju promatramo u drugom poglavlju.

1.2 Karakteristične funkcije

Izravan rad s funkcijama distribucija slučajnih procesa može biti jako težak. Stoga se koriste pripadne karakteristične funkcije koje općenito u teoriji vjerojatnosti predstavljaju vrlo snažan tehnički aparat za prelazak s apstraktnog vjerojatnosnog prostora na probleme kompleksne analize. Neka je μ neka vjerojatnosna mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Definicija 1.2.1. *Karakteristična funkcija od μ je preslikavanje $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definirano s*

$$\varphi(\theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x}\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \cos(\theta x)\mu(dx) + i\int_{\mathbb{R}} \sin(\theta x)\mu(dx). \tag{1.2}$$

Primjetimo kako je funkcija $\theta \mapsto e^{i\theta x}$ neprekidna te da vrijedi $|e^{i\theta x}| = 1$. Stoga je funkcija φ dobro definirana. Ako slučajna varijabla X ima zakon razdiobe μ s karakterističnom funkcijom φ, tada kažemo da je φ karakteristična funkcija slučajne varijable X. U tom slučaju možemo pisati

$$\varphi_X(\theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x}\mu(dx) = \mathbb{E}(e^{i\theta x}), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Promotrimo sada kako se karakteristične funkcije ponašaju na linearne transformacije slučajnih varijabli te na zbroj nezavisnih slučajnih varijabli. O tome govori sljedeća propozicija.

Propozicija 1.2.2. *Ako je X slučajna varijabla i $a, b \in \mathbb{R}$, tada vrijedi*

$$\varphi_{aX+b}(\theta) = e^{i\theta b}\varphi_X(a\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable, tada vrijedi

$$\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(\theta) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Dokaz. Za prvu jednakost imamo da

$$\varphi_{aX+b}(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta(aX+b)}) = e^{i\theta b}\mathbb{E}(e^{i\theta aX}) = e^{i\theta b}\varphi_X(a\theta),$$

dok za drugu jednakost koristimo činjenicu da je očekivanje produkta nezavisnih slučajnih varijabli jednako produktu njihovih očekivanja, pa je stoga

$$\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta(X_1+\cdots+X_n)}) = \mathbb{E}(\prod_{j=1}^{n} e^{i\theta X_j}) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}(e^{i\theta X_j}) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(\theta).$$

□

Uvodimo i pojam karakterističnog eksponenta slučajne varijable X s beskonačno djeljivim zakonom razdiobe μ_X. Za $\theta \in \mathbb{R}$ definiramo

$$\Psi(\theta) = -\ln \mathbb{E}(e^{i\theta X})$$

pa se u tom slučaju karakteristična funkcija može zapisati kao

$$\varphi(\theta) = e^{-\Psi(\theta)}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Jednostavno sada slijedi da X ima beskonačno djeljivu distribuciju ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji karakteristični eksponent Ψ_n nekog zakona razdiobe takav da

$$\Psi(\theta) = n\Psi_n(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Ono što se možemo zapitati jest koji su nužni i dovoljni uvjeti na karakterističnu funkciju da pripadna distribucija bude beskonačno djeljiva. O tome govori sljedeći teorem.

Teorem 1.2.3. *(Lévy-Hinčin) Zakon razdiobe μ_X realne slučajne varijable X je beskonačno djeljiv s karakterističnim eksponentom Ψ ako i samo ako postoji trojka (a, σ, Π) gdje je $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ i Π mjera koncentrirana na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ koja zadovoljava $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$ takva da*

$$\Psi(\theta) = \mathrm{i}a\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{\mathrm{i}\theta x} + \mathrm{i}\theta x \mathbf{1}_{(|x|<1)}\right) \Pi(\mathrm{d}x) \tag{1.5}$$

za svaki $\theta \in \mathbb{R}$.

Dokaz prethodnog teorema je tehnički i popriličn dugačak te se on može pronaći u [9] ili u [8] kao Teorem 14.9. Mjera Π se naziva Lévyjevom (karakterističnom) mjerom. Neka je sada Ψ_t karakteristični eksponent varijable X_t u Lévyjevom procesu $(X_t)_{t\geq 0}$. Koristeći relaciju (1.1) imamo da za svaka dva prirodna broja m, n vrijedi

$$m\Psi_1(\theta) = \Psi_m(\theta) = n\Psi_{m/n}(\theta)$$

pa stoga za svaki racionalni broj $t \in \mathbb{Q}_+$ vrijedi

$$\Psi_t(\theta) = t\Psi_1(\theta). \tag{1.6}$$

Ako je t iracionalan broj, uzmimo niz racionalnih brojeva $(t_n)_n$ takav da $t_n \searrow t$ kad $n \to \infty$. Kako proces $(X_t)_{t\geq 0}$ po definicijskom svojstvu (i) ima $\mathbb{P}$-g.s. zdesna neprekidne trajektorije, to implicira neprekidnost zdesna od $t \mapsto e^{-\Psi_t(\theta)}$ (lako se vidi koristeći teorem o dominiranoj konvergenciji). Dakle, slijedi da izraz (1.6) vrijedi za svaki $t \geq 0$. Stoga smo pokazali da Lévyjev proces ima svojstvo da

$$\mathbb{E}(e^{i\theta X_t}) = e^{-t\Psi(\theta)}, \quad \forall t \geq 0,$$

pri čemu $\Psi(\theta) := \Psi_1(\theta)$ definiramo kao karakteristični eksponent od X_1. Kako on u potpunosti određuje cijeli proces, njega zovemo karakterističnim eksponentom Lévyjevog procesa.

Sada iskažimo teorem koji je fundamentalan teorem o egzistenciji Lévyjevog procesa. Naime, on garantira da se iz beskonačno djeljive distribucije može generirati Lévyjev proces. To je svojevrsni obrat rezoniranja u prvom dijelu ovog poglavlja. Teorem u ovom trenutku ostavljamo bez dokaza, on će direktno slijediti iz konstrukcije u drugom poglavlju koja će dati detaljnije informacije o strukturi Lévyjevih procesa.

Teorem 1.2.4. *(Lévy-Hinčinova formula za Lévyjeve procese) Neka je $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ i neka je Π mjera koncentrirana na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ takva da $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$. Za tu trojku (a, σ, Π) i $\theta \in \mathbb{R}$ definirajmo*

$$\Psi(\theta) = \mathrm{i}a\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{\mathrm{i}\theta x} + \mathrm{i}\theta x \mathbf{1}_{(|x|<1)}\right) \Pi(\mathrm{d}x).$$

Tada postoji vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ na kojem postoji Lévyjev proces takav da mu je karakteristični eksponent Ψ.

1.3 Poissonovi procesi

U iduća dva potpoglavlja promatramo tri možda najbitnija primjera Lévyjevih procesa. To su Poissonov točkovni proces, složeni Poissonov proces te Brownovo gibanje.

Poissonov točkovni proces

Poissonov točkovni proces je najintuitivniji i najjednostavniji nedegenerirani slučajni proces. U praksi se koristi kao model za praćenje broja nezavisnih i istovjetnih događaja u nekom fizičkom prostoru, npr. broj prometnih nesreća na autocesti po dionicama ili slično. Formalna definicija je sljedeća.

Definicija 1.3.1. *Slučajan proces $(X_t)_{t\geq 0}$ na $\mathbb{R}$ je Poissonov točkovni proces s parametrom $\lambda > 0$ ako je on Lévyjev proces te ako za svaki $t > 0$ vrijedi da X_t ima Poissonovu distribuciju s parametrom λt.*

Promotrimo Poissonov zakon razdiobe s parametrom $\lambda > 0$. On je zadan s

$$\mu_\lambda(\{k\}) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0}(k)$$

Lako se vidi da je Poissonova razdioba beskonačno djeljiva jer vrijedi

$$\sum_{k\geq 0} e^{i\theta k}\mu_\lambda(\{k\}) = \sum_{k\geq 0} e^{i\theta k}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k\geq 0}\frac{(\lambda e^{i\theta})^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda e^{i\theta}} = e^{-\lambda(1-e^{i\theta})}$$
$$= \left(e^{-\frac{\lambda}{n}(1-e^{i\theta})}\right)^n$$

što znamo i od ranije jer je suma od n nezavisnih Poissonovih varijabli s parametrom $\frac{\lambda}{n}$ upravo Poissonova varijabla s parametrom λ. Stoga, možemo uzeti $a = \sigma = 0$ i $\Pi = \lambda\delta_1$ gdje je δ_1 Diracova mjera koncentirana u jedinici. Isto tako vrijedi $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)\lambda\delta_1(\mathrm{d}x) = \lambda < \infty$, pa prema Teoremu 1.2.4. postoji Lévyjev proces $(X_t)_{t\geq 0}$ takav da je karakterističan eksponent tog procesa $\Psi(\theta) = \lambda(1 - e^{i\theta})$ za $\theta \in \mathbb{R}$. Sada se lako vidi da X_t ima Poissonovu distribuciju s parametrom λt pa je $(X_t)_{t\geq 0}$ zaista Poissonov proces. Stoga, definicija ima smisla. Međutim, cilj ovog potpoglavlja je dati konstrukciju Poissonovog točkovnog procesa pomoću slučajne šetnje navedene u uvodu. To nam daje sljedeći teorem.

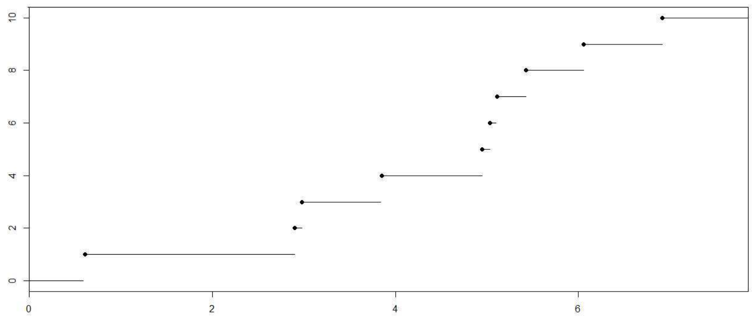
Teorem 1.3.2. *Neka je $(W_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ slučajna šetnja na $\mathbb{R}$ definirana na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takva da su $T_n = W_n - W_{n-1}$ nezavisne i jednako distribuirane varijable s eksponencijalnom distribucijom s parametrom $\lambda > 0$. Definiramo proces $(X_t)_{t\geq 0}$ na sljedeći način*

$$X_t(\omega) = n \Leftrightarrow W_n(\omega) \leq t < W_{n+1}(\omega) \tag{1.7}$$

Tada je proces $(X_t)_{t\geq 0}$ Poissonov točkovni proces s parametrom λ.

Dokaz. Primjetimo kako slučajna šetnja $(W_n)_n$ teži u beskonačnost gotovo sigurno. Naime, za prozivoljan t imamo da

$$\mathbb{P}(W_n \leq t) \leq \mathbb{P}(T_1 \leq t, \ldots, T_n \leq t) = (\mathbb{P}(T_1 \leq t))^n \to 0, \quad n \to \infty$$



Slika 1.1: Trajektorija Poissonovog točkovnog procesa

pa je $X_t(\omega)$ dobro definiran za gotovo svaki $\omega \in \Omega$. Primjetimo kako odmah imamo $X_0 = 0$ $g.s.$, pa proces zadovoljava uvjet (ii) iz definicije 1.1.1. Kako je W_n u suštini zbroj n nezavisnih i jednako distribuiranih varijabli s eksponencijalnom distribucijom s parametrom λ, slijedi da $W_n \sim \Gamma(n, \lambda)$. Odredimo sada distribuciju od X_t. Za $n \in \mathbb{N}_0$ imamo da

$$\mathbb{P}(X_t = n) = \mathbb{P}(W_n \leq t < W_{n+1}) = \mathbb{P}(W_n \leq t < W_n + T_{n+1}) = \mathbb{P}((W_n, T_{n+1}) \in A)$$

gdje definiramo $A := \{(x, y) : 0 \leq x \leq t < x + y\}$. Ključno je da su W_n i T_{n+1} nezavisni, pa slijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((W_n, T_{n+1}) \in A) &= \iint_A f_{W_n}(x) f_{T_{n+1}}(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \iint_A x^{n-1} e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^t x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathrm{d}x \int_{t-x}^{\infty} e^{-\lambda y} \mathrm{d}y = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

Stoga je $X_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$. Na sličan način kao i u prethodnom računu se pokaže da je

$$\mathbb{P}(W_{n+1} > t + s | X_t = n) = e^{-\lambda s} \tag{1.8}$$

za $t > 0, s \geq 0$. Za $m \geq 1$ označimo s $a := \mathbb{P}(W_n \leq t < W_{n+1})$ te uzmimo $s_1, \ldots, s_m \geq 0$. Vrijedi

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(W_{n+1} - t > s_1, T_{n+2} > s_2, \ldots, T_{n+m} > s_m | X_t = n) \\ &\quad = \mathbb{P}(W_n \leq t, W_{n+1} - t > s_1, T_{n+2} > s_2, \ldots, T_{n+m} > s_m)/a \\ &\quad = \mathbb{P}(W_n \leq t, W_{n+1} - t > s_1)\mathbb{P}(T_{n+2} > s_2, \ldots, T_{n+m} > s_m)/a \\ &\quad = \mathbb{P}(W_{n+1} - t > s_1 | X_t = n)\mathbb{P}(T_{n+2} > s_2, \ldots, T_{n+m} > s_m) \\ &\quad = \mathbb{P}(T_1 > s_1)\mathbb{P}(T_2 > s_2, \ldots, T_m > s_m) \\ &\quad = \mathbb{P}(T_1 > s_1, T_2 > s_2, \ldots, T_m > s_m)\end{aligned}$$

gdje smo u četvrtoj jednakosti koristili relaciju (1.8) te jednaku distribuiranost varijabli T_i. Dakle, slučajan vektor $(W_{n+1} - t, T_{n+2}, \dots, T_{n+m})$ uvjetno na $\{X_t = n\}$ ima istu distribuciju kao i $(T_1, \dots, T_m)$. Korištenjem te činjenice, imamo da

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_t = n, X_{t+s} - X_t = m) &= \mathbb{P}(X_t = n, X_{t+s} = n + m) \\
&= \mathbb{P}(X_t = n)\mathbb{P}(X_{t+s} = n + m | X_t = n) \\
&= \mathbb{P}(X_t = n)\mathbb{P}(W_{n+m} \le t + s < W_{n+m+1} | X_t = n) \\
&= \mathbb{P}(X_t = n)\mathbb{P}(W_m \le s < W_{m+1}) \\
&= \mathbb{P}(X_t = n)\mathbb{P}(X_s = m)
\end{aligned}$$

gdje smo događaj $\{W_{n+m} \le t + s < W_{n+m+1}\}$ zapisali kao

$$\{(W_{n+1} - t) + T_{n+2} + \cdots + T_{n+m} \le s < (W_{n+1} - t) + T_{n+2} + \cdots + T_{n+m+1}\}.$$

Zakon potpune vjerojatnosti nam daje da

$$\mathbb{P}(X_{t+s} - X_t = m) = \mathbb{P}(X_s = m)$$

pa proces zadovoljava uvjet (iii) iz definicije Lévyjevog procesa. Na sličan način dobivamo da za $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ vrijedi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} - X_{t_0} = n_1, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = n_k) \\
&\qquad = \mathbb{P}(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} = n_0 + n_1, \dots, X_{t_k} = n_0 + \cdots + n_k) \\
&\qquad = \mathbb{P}(X_{t_0} = n_0)\mathbb{P}(X_{t_1 - t_0} = n_1, \dots, X_{t_k - t_0} = n_1 + \cdots + n_k)
\end{aligned}$$

pa induktivno slijedi da

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} - X_{t_0} = n_1, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = n_k) \\
&\qquad = \mathbb{P}(X_{t_0} = n_0)\mathbb{P}(X_{t_1 - t_0} = n_1) \cdots \mathbb{P}(X_{t_k - t_{k-1}} = n_k) \\
&\qquad = \mathbb{P}(X_{t_0} = n_0)\mathbb{P}(X_{t_1} - X_{t_0} = n_1) \cdots \mathbb{P}(X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = n_k)
\end{aligned}$$

čime smo pokazali da proces ima nezavisne priraste, odnosno, da zadovoljava uvjet (iv) iz definicije 1.1.1. U konačnici, trajektorije procesa $(X_t)_t$ su step funkcije sa skokovima visine 1 koje su u točkama prekida neprekinde zdesna s limesima slijeva. Stoga je zadovoljen i uvjet (i). Time smo pokazali da je proces $(X_t)_t$ Poissonov točkovni proces. □

Složen Poissonov proces

Složen Poissonov proces je generalizacija Poissonovog točkovnog procesa u kojem visine skokova nisu deterministički jednake jedan, nego su one slučajne, nezavisne i jednako distribuirane. Prvo, uvodimo pojam složene Poissonove distribucije.

Definicija 1.3.3. *Neka je $N \sim Pois(\lambda)$ te neka je $\{\xi_i : i \in \mathbb{N}\}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli (nezavisnih i od N) s funkcijom distribuije F koja nema mase u nuli. Tada za slučajnu varijablu $Y = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$ kažemo da ima složenu Poissonovu distribuciju.*

Izračunajmo sada karakterističnu funkcija od Y iz gornje definicije. Koristeći zakon potpunog očekivanja, imamo da

$$\begin{aligned}\varphi_Y(\theta) &= \mathbb{E}\left(e^{\mathrm{i}\theta\sum_{i=1}^{N}\xi_i}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{\mathrm{i}\theta\sum_{i=1}^{N}\xi_i}\middle| N = n\right)\mathbb{P}(N = n)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{\mathrm{i}\theta\sum_{i=1}^{n}\xi_i}\middle| N = n\right)\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{\mathrm{i}\theta\sum_{i=1}^{n}\xi_i}\right)\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\\ &= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{{\varphi_{\xi_1}}^n(\theta)\cdot\lambda^n}{n!} = \exp\left(-\lambda(1-\varphi_{\xi_1}(\theta))\right) = \exp\left(-\lambda\int_{\mathbb{R}}(1-e^{i\theta x})F(\mathrm{d}x)\right).\end{aligned}$$

Sada vidimo da je Y beskonačno djeljiva distribucija gdje su $a = -\lambda\int_{0<|x|<1} xF(\mathrm{d}x)$, $\sigma = 0$ i $\Pi(\mathrm{d}x) = \lambda F(\mathrm{d}x)$. Sada dajemo definiciju složenog Poissonovog procesa.

Definicija 1.3.4. *Neka je $(N_t)_{t\geq 0}$ Poissonov proces s parametrom $\lambda > 0$ te neka je $\{\xi_i : i \in \mathbb{N}\}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli (nezavisnih i od procesa $(N_t)_{t\geq 0}$) s funkcijom distribucije F koja nema mase u nuli. Definirajmo proces $(X_t)_{t\geq 0}$ na sljedeći način*

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i, \quad t \geq 0.$$

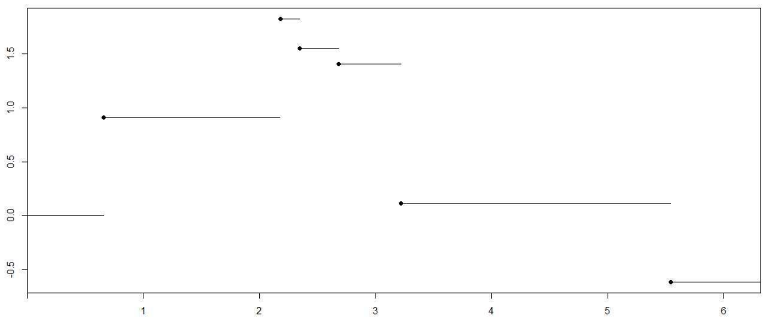
Tada taj proces nazivamo složenim Poissonovim procesom.

Slično kao i u prethodnom potpoglavlju pokazujemo konstrukciju složenog Poissonovog procesa pomoću Poissonovog točkovnog procesa i slučajne šetnje. Ona je dana sljedećim teoremom.

Teorem 1.3.5. *Neka je $(N_t)_{t\geq 0}$ Poissonov proces s parametrom $\lambda > 0$ te neka je $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ slučajna šetnja definirana na tom istom vjerojatnosnom prostoru. Neka su procesi $(N_t)_t$ i $(S_n)_n$ nezavisni te dodatno pretpostavimo kako je $\mathbb{P}(S_1 = 0) = 0$. Definirajmo proces $(X_t)_t$ s*

$$X_t(\omega) = S_{N_t(\omega)}(\omega). \tag{1.9}$$

Tada je $(X_t)_t$ složen Poissonov proces.



Slika 1.2: Trajektorija složenog Poissonovog procesa

Dokaz. Dokaz ovog teorema je sličan kao i dokaz Teorema 1.3.2. te ga ovdje ne navodimo. On se može pronaći u [9] kao dokaz Teorema 4.3. □

Pretpostavimo kako nas ne zanima samo broj automobilskih nesreća, nego nas zanima i njihov ukupan intezitet. Ako pretpostavimo kako su inteziteti nesreća slučajni, nezavisni i jednako distribuirani, tada ukupan intezitet nesreća upravo modeliramo složenim Poissonovim procesom. On će nam biti od ključne važnosti u drugom poglavlju.

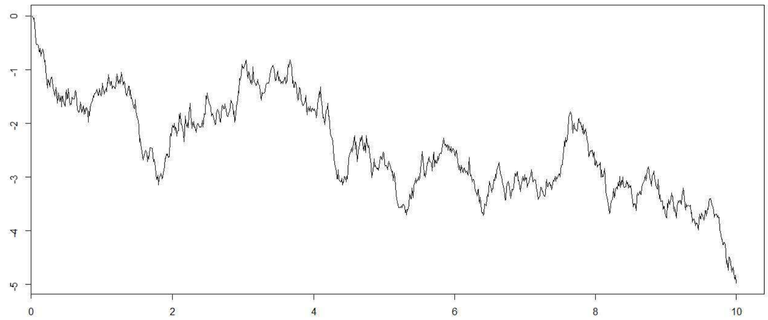
1.4 Brownovo gibanje

Brownovo gibanje ili Wienerov proces je, grubo rečeno, slučajni proces u kojem je pozicija u vremenu t opisana normalnom razdiobom. Višedimenzionalno Brownovo gibanje se često koristi kako bi se opisalo nasumično gibanje čestice. Definicija takvog procesa je sljedeća

Definicija 1.4.1. *Slučajni proces* $(X_t)_{t\geq 0}$ *na* $\mathbb{R}$ *definiran na nekom vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *se naziva Brownovo gibanje (bez drifta) ako je taj proces Lévyjev proces te ako* X_t *ima normalnu distribuciju s parametrima očekivanja* 0 *i varijance* ts^2 *za neki* $s > 0$*.*

Neka je $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Zakon razdiobe μ_Z jednak je

$$\mu_Z(\mathrm{d}x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x.$$



Slika 1.3: Trajektorija Brownovog gibanja

Karakterističnu funkciju od Z računamo na sljedeći način

$$\varphi_Z(\theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x}\mu_Z(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\theta x)^k}{k!}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$
$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^k}{k!}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} x^k e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \stackrel{(**)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!}\cdot\frac{(2k)!}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\theta^2}{2}\right)^k\cdot\frac{1}{k!} = e^{-\frac{\theta^2}{2}}$$

gdje smo u $(*)$ koristili teoreom o dominiranoj konvergenciji jer je podintegralna funkcija dominirana s

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{(i\theta x)^k}{k!}\right|e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\theta x|^k}{k!}e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{|\theta x|-\frac{x^2}{2}},$$

a to je integrabilna funkcija (po varijabli x) na $\mathbb{R}$. U $(**)$ smo koristili da standardna normalna distribucija ima neparne momente jednake nuli, a parne momente jednake $E(Z^{2k}) = (2k-1)!!$. Ako sada uzmemo $Y = sZ$, tada je $Y \sim \mathcal{N}(0, s^2)$, a po Propoziciji 1.2.2. imamo da

$$\varphi_Y(\theta) = \varphi_Z(s\theta) = e^{-\frac{s^2\theta^2}{2}} = \left(e^{-\frac{(\frac{s}{\sqrt{n}})^2\theta^2}{2}}\right)^n \tag{1.10}$$

pa vidimo da Y ima beskonačno djeljivu distribuciju gdje u Lévy-Hinčinovoj formuli uzimamo $a = 0$, $\sigma = s$ i $\Pi = 0$. Po Teoremu 1.2.4. postoji Lévyjev proces $(X_t)_t$ takav da X_1 ima distribuciju $\mathcal{N}(0, s^2)$. Stoga definicija 1.4.1. ima smisla. Međutim, treba napomenuti kako postoji i konstrukcija Brownovog gibanja na sličan način kao i u prethodnim primjerima. Ona se može pogledati u [8] kao Teorem 15.21. Promotrimo sada neka svojstva Brownovog gibanja. Prvo, navedimo jednu propoziciju koja nam za razne transformacije Brownovog gibanja garantira da je novodobiven proces opet Brownovo gibanje.

Propozicija 1.4.2. *Neka je $(X_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje. Tada je*

(i) proces $(-X_t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje.

(ii) za svaki $c > 0$ proces $(c^{-1/2}X_{ct})_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje.

(iii) proces $(Y_t)_{t\geq 0}$ definiran kao $Y_t = tX_{t^{-1}}$ za $t > 0$ i $Y_0 = 0$ Brownovo gibanje.

Dokaz. Vidi u [9] kao dokaz Teorema 5.4. □

Sljedeća dva teorema nam govore na koji način se ponašaju Brownova gibanja u graničnim slučajevima. Prvo razmatramo što se događa s Brownovim gibanjem kako vrijeme ide u beskonačnost.

Teorem 1.4.3. *Neka je $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva takav da $t_n \nearrow \infty$. Tada vrijedi*

(i) $\limsup_{n\to\infty} X_{t_n} = \infty \quad g.s.$

(ii) $\liminf_{n\to\infty} X_{t_n} = -\infty \quad g.s.$

Dokaz. Po prethodnoj propoziciji dio (ii), imamo da $X_{t_n} \overset{d}{=} t_n^{1/2}X(1)$. Stoga je za prozivoljan $K \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X_{t_n} > K) = \mathbb{P}(X(1) > t_n^{-1/2}K) \to \frac{1}{2}, \quad n \to \infty$$

zbog $t_n^{-1/2} \searrow 0$. Sada je

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} X_{t_n} > K) = \mathbb{E}(\limsup_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\{X_{t_n}>K\}}) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X_{t_n}>K\}}) = \frac{1}{2}$$

gdje smo koristili Fatouovu lemu. Kako to vrijedi za proizvoljan K, zbog monotonosti vjerojatnosti na padajuće događaje imamo

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} X_{t_n} = \infty) \geq \frac{1}{2}. \tag{1.11}$$

Sada, dodefinirajmo $t_0 = 0$ te označimo varijable $Z_n = X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$. Tada su tako definirane varijable Z_n međusobno nezavisne te možemo pisati $X_{t_n} = Z_1 + \cdots + Z_n$. Za proizvoljan $m \in \mathbb{N}$ imamo da

$$\left\{\limsup_{n\to\infty} X_{t_n} = \infty\right\} = \left\{\limsup_{n\to\infty}(X_{t_n} - X_{t_m}) = \infty\right\} \in \sigma(Z_{m+1}, Z_{m+2}, \dots)$$

pa je gornji događaj repni događaj jer ovisi o σ-algebri generiranoj varijablama Z_i od nekog mjesta pa nadalje. Prema Kolmogorovljevom zakonu 0-1 (vidi [8], Teorem 12.5.), vjerojatnost svakog repnog događaja je 0 ili 1. Zbog (1.11) nužno mora vrijediti

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} X_{t_n} = \infty) = 1$$

te smo time pokazali prvi dio ovog teorema. Dio (ii) se dokazuje sasvim analogno. □

Sljedeći pak teorem govori o ponašanju Brownovog gibanja za t-ove blizu nuli, odnosno, o vremenu prvog izlaska iz stanja 0. To vrijeme je gotovo sigurno jednako nuli, tj. Brownovo gibanje *odmah izlazi* iz stanja 0.

Teorem 1.4.4. *Neka su*

$$T_0(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) > 0\}$$
$$T_0'(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) < 0\}$$

za $\omega \in \Omega$ *(pri čemu uzimamo* $\inf \emptyset = \infty$*). Tada vrijedi* $T_0 = 0$ *g.s. i* $T_0' = 0$ *g.s.*

Dokaz. Uzmimo niz realnih brojeva $(t_n)_n$ takav da $t_n \searrow 0$. Prema Propoziciji 1.4.2. dio (iii) imamo da je proces $Y_t = tX_{t^{-1}}$ Brownovo gibanje. Stoga, vrijedi sljedeće

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} X_{t_n} > 0) = \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} t_n{}^{-1} X_{t_n} > 0) = \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} Y_{t_n^{-1}} > 0) = 1$$

gdje smo u posljednjoj jednakosti koristili prethodnu propoziciju, dio (i). Kako je X_{t_n} za beskonačno mnogo indeksa veći od nule gotovo sigurno, nužno je $T_0 = 0$ s vjerojatnosti jedan. Slično se pokazuje i druga tvrdnja. □

Pokažimo jednu vrlo interesantnu činjenicu o monotonosti trajektorija Brownovog gibanja. Naime, koji god interval $[a, b] \subset [0, \infty\rangle$ uzeli, s vjerojatnosti jedan trajektorije promatrane na tom intervalu neće biti monotone. Drugim riječima, gotovo sigurno sve trajektorije u proizvoljnom vremenskom intervalu imaju beskonačno mnogo lokalnih ekstrema.

Teorem 1.4.5. *Neka je* $[a, b] \subset [0, \infty\rangle$*. Tada je preslikavanje* $t \mapsto X_t(\omega)$ *nemonotono na tom intervalu gotovo sigurno.*

Dokaz. Neka je $[a, b] \subset [0, \infty\rangle$ te neka je $\Omega_0 \subseteq \Omega$ skup na kojem su trajektorije neprekidne zdesna s limesima slijeva (definicijsko svojstvo Lévyjevog procesa). Definirajmo

$$A^{[a,b]} = \{\omega \in \Omega_0 : X_t(\omega) \text{ je rastuća po } t \in [a, b]\}.$$

Želimo pokazati da je to skup vjerojatnosne mjere nula. Za $t_{n,k} = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ definirajmo

$$A_{n,k} = \{\omega \in \Omega_0 : X_{t_{n,k-1}}(\omega) \leq X_{t_{n,k}}(\omega)\} \in \mathcal{F}.$$

U tom slučaju imamo da se $A^{[a,b]}$ može zapisati kao

$$A^{[a,b]} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{n} A_{n,k} \in \mathcal{F}.$$

Primjetimo da znamo izračunati vjerojatnost događaja $A_{n,k}$. Naime, primjetimo kako je $t_{n,k} - t_{n,k-1} = \frac{b-a}{n}$, pa zbog definicijskih svojstava (*iii*) i (*iv*) Lévyjevog procesa imamo da

$$\mathbb{P}(A_{n,k}) = \mathbb{P}(X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}} \geq 0) = \mathbb{P}(X_{t_{n,k}-t_{n,k-1}} \geq 0) = \mathbb{P}(X_{\frac{b-a}{n}} \geq 0) = \frac{1}{2}$$

zbog toga što je $X_{\frac{b-a}{n}}$ normalno distribuirana slučajna varijabla s očekivanjem 0. Nadalje, zbog svojstva (iv) imamo da je familija događaja $\{A_{n,k} : k = 1, \dots, n\}$ nezavisna, pa je

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{n,k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_{n,k}) = \frac{1}{2^n}.$$

Iz toga slijedi da je $\mathbb{P}(A^{[a,b]}) = 0$. □

Vrlo se često u praksi promatraju nešto općenitija Brownova gibanja s driftom gdje je očekivanje varijable X_t jednako at za neki $a \in \mathbb{R}$. Takav proces je i dalje Lévyjev proces jer je pozicija u vremenu $t = 1$ opisana normalnom distribucijom $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ koja je beskonačno djeljiva distribucija. Lako se pokaže da je karakteristični eksponent takvog procesa

$$\Psi(\theta) = -ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2$$

pa je i ovdje Lévyjeva mjera Π identički jednaka nuli. Naravno, vrijedi i obratna tvrdnja: ako je Lévyjeva mjera identički jednaka nuli, tada je Lévyjev proces nužno Brownovo gibanje (s driftom). Ono što će u idućem poglavlju biti jasnije jest da je Lévyjeva mjera Π izvor diskontinuiteta u trajektorijama Lévyjevih procesa. Stoga su trajektorije gotovo sigurno neprekidne ako i samo ako $\Pi \equiv 0$. Time smo pokazali da je Brownovo gibanje (s driftom) jedini Lévyjev proces čije su trajektorije gotovo sigurno neprekidne.

Poglavlje 2

Lévy-Itôva dekompozicija

Prije daljnjih razmatranja, navedimo jednu vrlo važnu lemu koju ostavljamo bez dokaza.

Lema 2.0.1. *Neka su* $(X_t)_{t\geq 0}$ *i* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *dva nezavisna Lévyjeva procesa definirana na istom vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *s pripadnim karakterističnim eksponentima* Ψ_X *i* Ψ_Y*. Tada je proces* $(Z_t)_{t\geq 0}$ *definiran s* $Z_t := X_t + Y_t$ *također Lévyjev proces s pripadnim karakteristčnim eksponentom* $\Psi_Z(\theta) = \Psi_X(\theta) + \Psi_Y(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Glavni je cilj ovog poglavlja ustanoviti strukturu trajektorija Lévyjevih procesa. To ćemo napraviti tako što ćemo iskazati i dokazati jedan od glavnih rezultata ove teorije koji kaže da je općeniti Lévyjev proces suma tri nezavisna *generirajuća* Lévyjeva procesa gdje svaki od ta tri procesa ima drugačija svojstva. Promotrimo karakteristični eksponent naveden u Teoremu 1.2.4. On se nakon kraće reorganizacije može zapisati kao

$$\begin{aligned}\Psi(\theta) = \left\{\mathrm{i}a\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right\} &+ \left\{\Pi(\mathbb{R}\backslash(-1,1)) \int_{|x|\geq 1} \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{l}\theta x}\right) \frac{\Pi(\mathrm{d}x)}{\Pi(\mathbb{R}\backslash(-1,1))}\right\} \\ &+ \left\{\int_{0<|x|<1} \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x} + \mathrm{i}\theta x\right) \Pi(\mathrm{d}x)\right\}, \quad \theta \in \mathbb{R}\end{aligned} \tag{2.1}$$

za neke parametre $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ i Π mjeru na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ takvu da $\int_{\mathbb{R}} \left(1 \wedge x^2\right) \Pi(\mathrm{d}x) < \infty$. Primijetimo kako posljednji uvjet na Lévyjevu mjeru garantira kako je $\Pi(A) < \infty$ za svaki A Borelov takav da je $0 \in \mathrm{Int}A^c$. Specijalno je tako $\Pi(\mathbb{R} \setminus (-1,1)) \in [0, \infty)$. Ako je $\Pi(\mathbb{R} \setminus (-1,1)) = 0$, tada je druga zagrada u izrazu (2.1) jednaka nuli. Označimo te tri zagrade sa $\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}$ i $\Psi^{(3)}$. Vidimo kako je $\Psi^{(1)}$ karakteristični eksponent Brownovog gibanja s driftom $X^{(1)} = (X_t^{(1)})_{t\geq 0}$ definiranog s

$$X_t^{(1)} = \sigma B_t - at, \quad t \geq 0, \tag{2.2}$$

gdje je $(B_t)_t$ jedinično Brownovo gibanje bez drifta. Nadalje uočavamo kako je $\Psi^{(2)}$ karakteristični eksponent složenog Poissonovog procesa $X^{(2)} = (X_t^{(2)})_{t\geq 0}$ definiranog s

$$X_t^{(2)} = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i, \quad t \geq 0, \tag{2.3}$$

gdje je $(N_t)_t$ Poissonov točkovni proces s intezitetom $\Pi(\mathbb{R} \setminus (-1,1))$, a varijable $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ su nezavisne i jednako distribuirane sa zajedničkom razdiobom $\Pi(\mathrm{d}x)/\Pi(\mathbb{R} \setminus (-1,1))$ koncentriranom na $\Pi(\mathbb{R} \setminus (-1,1))$ (pri čemu uzimamo $X^{(2)} \equiv 0$ u slučaju kada je $\Pi(\mathbb{R} \setminus (-1,1)) = 0$).

U konačnici, dokaz egzistencije općenitog Lévyjevog procesa svodi se na dokaz egzistencije procesa $X^{(3)}$ s karakterističnim eksponentom $\Psi^{(3)}$. Primijetimo kako $\Psi^{(3)}$ možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}\Psi^{(3)}(\theta) &= \int_{0<|x|<1} \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x} + \mathrm{i}\theta x\right) \Pi(\mathrm{d}x) \\ &= \sum_{n\geq 0} \left\{ \lambda_n \int_{2^{-(n+1)}\leq|x|<2^{-n}} \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}\right) F_n(\mathrm{d}x) + \mathrm{i}\theta\lambda_n \left(\int_{2^{-(n+1)}\leq|x|<2^{-n}} x F_n(\mathrm{d}x) \right) \right\}\end{aligned} \tag{2.4}$$

gdje su $\lambda_n = \Pi\left(\left\{x : 2^{-(n+1)} \leq |x| < 2^{-n}\right\}\right)$ i $F_n(\mathrm{d}x) = \Pi(\mathrm{d}x)/\lambda_n$ pri čemu opet podrazumijevamo kako je n-ti integral jednak nuli u slučaju $\lambda_n = 0$. Iz (2.4) možemo naslutiti kako je $X^{(3)}$ superpozicija najviše prebrojivo mnogo složenih Poissonovih procesa s pripadnim intenzitetima i driftovima.

Sada smo spremni precizno iskazati Lévy-Itôvu dekompoziciju. Kao što i samo ime dekompozicije kaže, najveći su doprinos tom dijelu teorije dali francuski i japanski matematičari Lévy (1954) i Itô (1942) (vidi [6]).

Teorem 2.0.2. *(Lévy-Itôva dekompozicija) Neka su $a \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0$ i mjera Π koncentrirana na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ takva da*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(1 \wedge x^2\right) \Pi(\mathrm{d}x) < \infty.$$

Tada postoji vjerojatnosni prostor na kojem su definirana tri nezavisna Lévyjeva procesa $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ i $X^{(3)}$ gdje je $X^{(1)}$ Brownovo gibanje definirano s (2.2), $X^{(2)}$ je složen Poissonov proces definiran s (2.3), a $X^{(3)}$ je kvadratno integrabilan martingal s najviše prebrojivo mnogo skokova na proizvoljnom konačnom vremenskom intervalu, s veličinom skokova manjom od 1 po apsolutnoj vrijednosti te s karakterističnim eksponentom $\Psi^{(3)}$. Nadalje, proces $X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$ je Lévyjev proces s karakterističnim eksponentom koji je jednak

$$\Psi(\theta) = \mathrm{i}a\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{\mathrm{i}\theta x} + \mathrm{i}\theta x \mathbf{1}_{(|x|<1)}\right) \Pi(\mathrm{d}x), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Prema Teoremu 1.2.3. znamo da je svaka beskonačno djeljiva distribucija jednoznačno zadana s parametrima $a \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0$ i mjerom Π koncentiranom na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ takvom da $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$. Ono što Lévy-Itôva dekompozicija tvrdi jest da se iz svake beskonačno djeljive distribucije može generirati Lévyjev proces X takav da X_1 ima upravo tu bekonačno djeljivu distribuciju. Time smo pokazali kako je Teorem 1.2.4. direktna posljedica Lévy-Itôve dekompozicije.

2.1 Poissonova slučajna mjera

Poissonova slučajna mjera ključan je pojam potreban za opisati strukturu skokova Lévyjevog procesa. Prije no što damo definiciju općenite Poissonove slučajne mjere i proučimo njena svojstva, promotrimo jedan nešto konkretniji primjer. Neka je $(X_t)_{t\geq 0}$ složen Poissonov proces s driftom

$$X_t = at + \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i, \quad t \geq 0$$

gdje su $a \in \mathbb{R}$ i $\{\xi_i : i \in \mathbb{N}\}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa zajedničkom funkcijom distribucije F. Neka su $\{T_i : i \in \mathbb{N}\}$ vremena dolazaka Poissonovog procesa $N = (N_t)_{t\geq 0}$ s parametrom intenziteta $\lambda > 0$. Neka je $A \in \mathcal{B}[0,\infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ izmjerivi pravokutnik u $[0,\infty) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Promatramo preslikavanje

$$N(A) := \operatorname{card}\{i \geq 0 : (T_i, \xi_i) \in A\} = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{((T_i,\xi_i)\in A)} \tag{2.5}$$

koje broji koliko se događaja složenog Poissonovog procesa dogodilo u vremenu i prostoru određenom s A. Kako proces X ima najviše prebrojivo mnogo skokova u konačnom vremenskom intervalu, slijedi $N(A) < \infty$ *g.s.* za A izmjerivi pravokutnik u $[0,t) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Lako se pokaže da je $N(A)$ zaista slučajna varijabla. Sljedeća propozicija nam daje vrlo lijepa svojstva tako definiranih slučajnih varijabli.

Propozicija 2.1.1. *Neka je $k \geq 1$ te neka su $A_1, \ldots, A_k$ međusobno disjunktni skupovi u $\mathcal{B}[0,\infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Tada su slučajne varijable $N(A_1), \ldots, N(A_k)$ međusobno nezavisne s Poissonovim razdiobama s pripadnim parametrima $\lambda_i = \lambda \int_{A_i} \mathrm{d}t \times F(\mathrm{d}x)$, $i = 1, \ldots, k$. Nadalje, za gotovo svaki $\omega \in \Omega$ preslikavanje $N : \mathcal{B}[0,\infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ je mjera.*

Intuitivno, prethodna nam propozicija kaže da je distribucija broja točaka koje upadnu u vremensko-prostorni okvir određen skupom A Poissonova, te ako su dva takva okvira međusobno disjunktna, tada broj točaka koji upadne u prvi ne utječe na broj točaka koji upadnu u drugi.

Dokaz. Pretpostavimo kako se dogodilo $\{N_t = n\}$. Lako se pokaže da tada slučajni vektor $(T_1, \ldots, T_n)$ ima istu razdiobu kao uređeni slučajni uzorak iz uniformne distribucije na $[0, t]$. Kako su $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ općenito nezavisne i jednako distribuirane s distribucijom F (nezavisne i od vremena dolazaka po konstrukciji složenog Poissonovog procesa), uvjetno na događaj $\{N_t = n\}$ imamo da je zajednička razdioba slučajnih parova $\{(T_i, \xi_i) : i = 1, \ldots, n\}$ jednaka razdiobi n međusobno nezavisnih slučajnih parova sa zajedničkim zakonom razdiobe $t^{-1}\mathrm{d}s \times F(\mathrm{d}x)$ na $[0, t] \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ uređenih u vremenu. Stoga, za proizvoljni $A \in \mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ vrijedi kako uvjetno na $\{N_t = n\}$ slučajna varijabla $N(A)$ ima binomnu razdiobu s parametrom veličine n i vjerojatnosti uspjeha

$$\int_A t^{-1}\mathrm{d}s \times F(\mathrm{d}x).$$

Promotrimo sada slučajnu k-torku $(N(A_1), \ldots, N(A_k))$ gdje su $A_1, \ldots, A_k$ međusobno disjunktni iz $\mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Definiramo $A_0 := \{[0, t] \times \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \setminus \{A_1 \cup \ldots A_k\}$. Za izbor nenegativnih cijelih brojeva n_i, $i = 1, \ldots, k$, takvih da je $\sum_{i=1}^k n_i \leq n$ također definiramo $n_0 := n - \sum_{i=1}^k n_i$ i $\lambda_0 := \int_{A_0} \lambda \mathrm{d}s \times F(\mathrm{d}x) = \lambda t - \sum_i \lambda_i$. Sličnim se rezoniranjem kao i u slučaju samo jednog skupa A argumentira kako $(N(A_1), \ldots, N(A_k))$ uvjetno na $\{N_t = n\}$ ima multinomijalnu razdiobu

$$\mathbb{P}\left(N\left(A_1\right) = n_1, \ldots, N\left(A_k\right) = n_k | N_t = n\right) = \frac{n!}{n_0! n_1! \ldots n_k!} \prod_{i=0}^k \left(\frac{\lambda_i}{\lambda t}\right)^{n_i}.$$

Koristeći zakon potpune vjerojatnosti, dobivamo da

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N\left(A_1\right) = n_1, \ldots, N\left(A_k\right) = n_k) \\
&\quad = \sum_{n \geq \sum_{i=1}^k n_i} \mathbb{P}(N\left(A_1\right) = n_1, \ldots, N\left(A_k\right) = n_k | N_t = n)\, \mathbb{P}(N_t = n) \\
&\quad = \sum_{n \geq \sum_{i=1}^k n_i} \frac{n!}{n_0! n_1! \ldots n_k!} \prod_{i=0}^k \left(\frac{\lambda_i}{\lambda t}\right)^{n_i} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&\quad = \sum_{n \geq \sum_{i=1}^k n_i} \mathrm{e}^{-\lambda_0} \frac{(\lambda_0)^{\left(n - \sum_{i=1}^k n_i\right)}}{\left(n - \sum_{i=1}^k n_i\right)!} \left(\prod_{i=1}^k \mathrm{e}^{-\lambda_i} \frac{(\lambda_i)^{n_i}}{n_i!}\right) \\
&\quad = \prod_{i=1}^k \mathrm{e}^{-\lambda_i} \frac{(\lambda_i)^{n_i}}{n_i!}
\end{aligned}$$

te je time pokazano da su $N(A_1), \ldots, N(A_k)$ nezavisne slučajne varijable s Poissonovom distribucijom s pripadnim parametrima intenziteta λ_i kao iz tvrdnje propozicije.

Pretpostavimo sada kako nema vremenskog ograničenja $[0, t]$. Neka su $A_1, \dots, A_k$ proizvoljni međusobno disjunktni skupovi iz $\mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Tada se A_i može zapisati kao najviše prebrojiva unija međusobno disjunktnih vremensko ograničenih skupova. Koristeći činjenicu da prebrojiva suma međusobno nezavisnih Poissonovih varijabli također ima Poissonovu distribuciju s parametrom intenziteta koji je jednak sumi reda pojedinačnih parametara (pri čemu taj red može biti jednak ∞ pa je u tom slučaju prebrojiva superpozicija Poissonovih varijabli jednaka $+\infty$ gotovo sigurno), dobivamo rezultat i za proizvoljne međusobno disjuntkne skupove $A_i, i = 1, \dots, k$. U konačnici, posljednja tvrdnja propozicije da je N gotovo sigurno mjera slijedi odmah iz definicije jer je N gotovo sigurno brojeća mjera. □

Propozicija 2.1.1. navodi nas na apstraktnu definiciju Poissonove slučajne mjere te odmah vidimo kako preslikavanje N navedeno u toj propoziciji zadovoljava tu definiciju.

Definicija 2.1.2. *Neka je $(S, \mathcal{S}, \eta)$ σ-konačan prostor s mjerom te neka je $N : \mathcal{S} \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ preslikavanje takvo da je $\{N(A),\ A \in \mathcal{S}\}$ familija slučajnih varijabli definiranih na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada N nazivamo Poissonovom slučajnom mjerom na $(S, \mathcal{S}, \eta)$ (ili jednostavnije Poissonovm slučajnom mjerom na S s intenzitetom η) ako zadovoljava sljedeća tri uvjeta:*

(i) *za međusobno disjunktne $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$ varijable $N(A_1), \dots, N(A_k)$ su nezavisne,*

(ii) *za svaki $A \in \mathcal{S}$ varijabla $N(A)$ ima Poissonovu razdiobu s parametrom intenziteta $\eta(A) \in [0, \infty]$,*

(iii) *N je $\mathbb{P}$-gotovo sigurno mjera na izmjerivom prostoru $(S, \mathcal{S})$.*

Napomenimo samo kako u uvjetu (ii) podrazumijevamo ako $\eta(A) = 0$, tada je $N(A) = 0$ $g.s.$ ili ako $\eta(A) = \infty$, tada je $N(A) = \infty$ $g.s.$ Ono što nije apriori jasno jest postoji li Poissonova slučajna mjera na apstraktnom σ-konačnom prostoru s mjerom. Ispostavlja se kako ona zaista postoji, a dokaz te činjenice počiva na lemi koja je posljedica generaliziranog Kolmogorovljeva teorema o egzistenciji (vidjeti [8] kao Teorem 9.6. za slučaj u kojem je zadana suglasna familija funkcija distribucija).

Za preslikavanje $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{G})$ kažemo da je slučajni element ako je to preslikavanje izmjerivo u paru σ-algebri $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Pojmovi zakona razdioba i nezavisnosti slučajnih elemenata prirodno se poopćuju.

Lema 2.1.3. *Neka je dan niz vjerojatnosnih mjera η_i na izmjerivim prostorima $(E_i, \mathcal{G}_i),\ i \geq 1$. Tada postoji vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ na kojem je definiran niz nezavisnih slučajnih elemenata $X_i : \Omega \to E_i,\ i \geq 1$ takav da je zakon razdiobe od X_i upravo η_i.*

Sada smo spremni dokazati spomenutu egzistenciju Poissonove slučajne mjere. Mnoge detalje dokaza izostavljamo jer su veoma slični tehničkim detaljima dokazanima u uvodnoj propoziciji u ovom potpoglavlju.

Teorem 2.1.4. *Postoji Poissonova slučajna mjera N kao u Definiciji 2.1.2.*

Dokaz. Pretpostavimo za početak kako je $(S, \mathcal{S}, \eta)$ prostor konačne mjere, to jest $\eta(S) < \infty$. Prema Lemi 2.1.3. postoji vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ na kojem je definiran niz nezavisnih slučajnih elemenata $\{\hat{N}, v_1, v_2, \ldots\}$ gdje $\hat{N}$ ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\eta(S)$, a svaka od varijabli v_i ima zakon razdiobe $\eta(\mathrm{d}x)/\eta(S)$ na S. Za $A \in \mathcal{S}$ definiramo

$$N(A) := \sum_{i=1}^{\hat{N}} \mathbf{1}_{(v_i \in A)}.$$

Kako je $A \in \mathcal{S}$, tako su varijable $\mathbf{1}_{(v_i \in A)}$ $\mathcal{F}$-izmjerive, pa je tako i preslikavanje $N(A)$ slučajna varijabla.

Ako su $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{S}$ međusobno disjunktni, račun sličan kao i u Propoziciji 2.1.1. pokazuje da

$$\mathbb{P}(N(A_1) = n_1, \ldots, N(A_k) = n_k) = \prod_{i=1}^{k} \mathrm{e}^{-\eta(A_i)} \frac{\eta(A_i)^{n_i}}{n_i!}$$

gdje su $n_1, \ldots, n_k$ proizvoljni nenegativni cijeli brojevi. Sada je jasno da je ovako definirano preslikavanje N Poissonova slučajna mjera u smislu Definicije 2.1.2.

Promotrimo sada općeniti slučaj u kojem je $(S, \mathcal{S}, \eta)$ σ-konačan prostor s mjerom. Definicija σ-konačnog prostora podrazumijeva da postoji najviše prebrojiva particija $B_1, B_2, \ldots$ od S takva da $0 < \eta(B_i) < \infty$ za svaki $i \geq 1$. Definiramo mjere $\eta_i(\cdot) := \eta(\cdot \cap B_i)$ za $i \geq 1$. To su sve redom konačne mjere, pa po prvom dijelu ovog dokaza za svaki $i \geq 1$ postoji vjerojatnosni prostor $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$ na kojem postoji Poissonova slučajna mjera N_i na prostoru $(B_i, \mathcal{S} \cap B_i, \eta_i)$. Definiramo produktni vjerojatnosni prostor

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := \prod_{i \geq 1} (\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$$

te na njemu promatramo preslikavanje

$$N(\cdot) := \sum_{i \geq 1} \widetilde{N}_i(\cdot \cap B_i)$$

gdje je $\widetilde{N}_i(\cdot \cap B_i)$ proširenje preslikavanja $N_i(\cdot \cap B_i)$ na cijeli produktni prostor, $\widetilde{N}_i(\cdot \cap B_i)(\omega) := N_i(\cdot \cap B_i)(\omega_i)$. Radi kompaktnijeg zapisa, od sada pa nadalje podrazumijevamo takvo proširenje te ne koristimo nove oznake - jednostavnije pišemo $\widetilde{N}_i(\cdot \cap B_i) = N_i(\cdot \cap B_i)$. Koristeći Tonellijev teorem (vidi u [8] kao Teorem 10.16., dio (a)) imamo da za međusobno disjunktne skupove $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$ vrijedi

$$\begin{aligned} N\left(\bigcup_{j\geq 1} A_j\right) &= \sum_{i\geq 1} N_i\left(\bigcup_{j} A_j \cap B_i\right) = \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} N\left(A_j \cap B_i\right) \\ &= \sum_{j\geq 0}\sum_{i\geq 1} N\left(A_j \cap B_i\right) = \sum_{j\geq 0} N\left(A_j\right) \end{aligned}$$

pa je N $\mathbb{P}$-gotovo sigurno mjera. Za $A \in \mathcal{S}$ i $i \geq 1$ imamo da $N_i(A \cap B_i)$ ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\eta_i(A \cap B_i)$. Lako se pokaže da tada na produktnom vjerojatnosnom prostoru $N(A)$ ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\eta(A)$. Konačno, za $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{S}$ međusobno disjunktne imamo da je

$$\left\{N_i\left(A_j \cap B_i\right) : i = 1, 2, \dots \text{ i } j = 1, \dots, k\right\}$$

familija nezavisnih slučajnih varijabli pa su stoga i $N(A_1), \dots, N(A_k)$ nezavisne slučajne varijable. Time je pokazana egzistencija općenite Poissonove slučajne mjere. □

Za kraj ovog potpoglavlja, navedimo još dva korolara koji će nam biti korisni u daljnjoj konstrukciji.

Korolar 2.1.5. *Neka je N Poissonova slučajna mjera na $(S, \mathcal{S}, \eta)$. Tada je za svaki $A \in \mathcal{S}$ $N(\cdot \cap A)$ Poissonova slučajna mjera na $(S \cap A, \mathcal{S} \cap A, \eta(\cdot \cap A))$. Ako su $A, B \in \mathcal{S}$ disjunktni, tada su $N(\cdot \cap A)$ i $N(\cdot \cap B)$ nezavisne.*

Korolar 2.1.6. *Neka je N Poissonova slučajna mjera na $(S, \mathcal{S}, \eta)$. Tada je nosač od N $\mathbb{P}$-gotovo sigurno prebrojiv. Ako je $\eta(S) < \infty$, tada je nosač od N $\mathbb{P}$-gotovo sigurno konačan.*

2.2 Funkcionali Poissonove slučajne mjere

Neka je N Poissonova slučajna mjera na prostoru $(S, \mathcal{S}, \eta)$ opisana u prethodnom potpoglavlju. Kako je N $\mathbb{P}$-gotovo sigurno mjera na $(S, \mathcal{S})$, teorija integrala i mjere navodi nas da promatramo

$$\int_S f(x) N(\mathrm{d}x) \tag{2.6}$$

što je slučajna varijabla za izmjerivu funkciju $f : S \to [0, \infty)$ ili za izmjerivu funkciju $f : S \to \bar{\mathbb{R}}$ gdje je barem jedan od integrala funkcija f^+ ili f^- $\mathbb{P}$-gotovo sigurno konačan. Iz konstrukcije Poissonove slučajne mjere iz prethodnog potpoglavlja vidimo kako je slučajni integral (2.6) po distribuciji jednak

$$\sum_{x \in \Gamma} f(x) m_x$$

gdje je Γ nosač od N (koji je prema Korolaru 2.1.6. $\mathbb{P}$-gotovo sigurno prebrojiv pa gornji izraz ima smisla), a m_x kratnost točke x (koliko se puta Poissonova slučajna mjera realizirala u točki x). Ako je η mjera takva da nema masu niti u jednoj izoliranoj točki, tada je $m_x = 0$ ili $m_x = 1$ za $x \in S$.

Postavlja se pitanje pod kojim uvjetima slučajni integral (2.6) apsolutno konvergira. Kako je (2.6) slučajna varijabla, pitamo se koja je njena karakteristična funkcija te čemu su jednaki prvi i drugi moment (ako postoje). O tome govori sljedeći teorem.

Teorem 2.2.1. *Neka je N Poissonova slučajna mjera na $(S, \mathcal{S}, \eta)$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ $\mathcal{S}$-izmjeriva funkcija. Tada je*

$$X = \int_S f(x) N(\mathrm{d}x)$$

$\mathbb{P}$-gotovo sigurno apsolutno konvergentna ako i samo ako je

$$\int_S (1 \wedge |f(x)|) \eta(\mathrm{d}x) < \infty. \tag{2.7}$$

Nadalje, ako je uvjet (2.7) zadovoljen, tada je

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\right) = \exp\left\{ - \int_S \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}tf(x)}\right) \eta(\mathrm{d}x) \right\} \tag{2.8}$$

za proizvoljan $t \in \mathbb{R}$. Ako je $\int_S |f(x)| \eta(\mathrm{d}x) < \infty$, tada očekivanje od X postoji te je ono jednako

$$\mathbb{E}(X) = \int_S f(x) \eta(\mathrm{d}x). \tag{2.9}$$

Ako je $\int_S f(x)^2 \eta(\mathrm{d}x) < \infty$, tada postoji i drugi moment te je on jednak

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_S f(x)^2 \eta(\mathrm{d}x) + \left(\int_S f(x) \eta(\mathrm{d}x) \right)^2. \tag{2.10}$$

Dokaz. Dokaz provodimo tzv. Lebesgueovom indukcijom. Neka je f jednostavna funkcija

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i \, \mathbf{1}_{A_i}(x)$$

gdje su f_i realni brojevi i $A_i, i = 1, \dots, n$, međusobno disjunktni skupovi u $\mathcal{S}$ takvi da $\eta(A_1 \cup \cdots \cup A_n) < \infty$. U tom slučaju je

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i \, N(A_i)$$

što je $\mathbb{P}$-gotovo sigurno konačno jer $N(A_i)$ ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\eta(A_i)$ koji je konačan.

Ako je $Z \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, tada je za $\theta > 0$

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\theta Z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\theta k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \exp(-\lambda(1 - e^{-\theta}))$$

pa vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\theta X}\right) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\theta f_i N(A_i)}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\left(1 - \mathrm{e}^{-\theta f_i}\right) \eta\left(A_i\right)\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \left(1 - \mathrm{e}^{-\theta f_i}\right) \eta\left(A_i\right)\right) \end{aligned}$$

gdje prva jednakost slijedi iz činjenice da su A_i međusobno disjunktni skupovi (pa iz toga slijedi nezavisnost od $N(A_i)$), dok druga jednakost slijedi iz činjenice da $N(A_i)$ ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\eta(A_i)$. Kako je $1 - e^{-\theta f(x)} = 0$ za svaki $x \in (A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c$, vrijedi

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\theta X}\right) = \exp\left(-\int_S \left(1 - \mathrm{e}^{-\theta f(x)}\right) \eta\left(\mathrm{d}x\right)\right).$$

Neka je sada f proizvoljna nenegativna funkcija. Tada postoji neopadajući niz nenegativnih jednostavnih funkcija $(f_n)_{n \geq 0}$ takvih da je $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ η-skoro svuda. Kako je N $\mathbb{P}$-gotovo sigurno σ-konačna mjera, teorem o monotonoj konvergenciji implicira

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x) N(\mathrm{d}x) = \int f(x) N(\mathrm{d}x) = X$$

$\mathbb{P}$-gotovo sigurno. Za $\theta > 0$ vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\theta X}\right) &= \mathbb{E}\left(\exp\left\{-\theta\int_S f(x)N(\mathrm{d}x)\right\}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(\exp\left\{-\theta\int_S f_n(x)N(\mathrm{d}x)\right\}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\exp\left\{-\int_S\left(1-\mathrm{e}^{-\theta f_n(x)}\right)\eta(\mathrm{d}x)\right\}\\ &= \exp\left\{-\int_S\left(1-\mathrm{e}^{-\theta f(x)}\right)\eta(\mathrm{d}x)\right\}\end{aligned} \tag{2.11}$$

gdje smo u drugoj jednakosti primijenili teorem o dominiranoj konvergenciji (integrandi dominirani s $e^{-\theta}$ jer su f_n nenegativne, pa je i slučajni integral $\mathbb{P}$-gotovo sigurno nenegativan), dok smo u posljednjoj jednakosti koristili teorem o monotonoj konvergenciji.

Primijetimo kako je $\int_S\left(1-\mathrm{e}^{-\theta f(x)}\right)\eta(\mathrm{d}x)$ ili beskonačan za svaki $\theta > 0$ ili konačan za svaki $\theta > 0$. Tada je ili $X = \infty$ s vjerojatnosti jedan ili s vjerojatnosti strogo manjom od jedan (respektivno). Međutim, pokazuje se da je u drugom slučaju ta vjerojatnost jednaka nuli. Zaista, pretpostavimo kako je $\int_S\left(1-\mathrm{e}^{-\theta f(x)}\right)\eta(\mathrm{d}x) < \infty$ za svaki $\theta > 0$. Tada je $\left(1-\mathrm{e}^{-\theta f(x)}\right) \leq \left(1-\mathrm{e}^{-f(x)}\right)$ za svaki $x \in S$ i za svaki $\theta \in (0,1)$, pa po teoremu o dominiranoj konvergenciji imamo

$$\lim_{\theta\searrow 0}\int_S\left(1-\mathrm{e}^{-\theta f(x)}\right)\eta(\mathrm{d}x) = 0.$$

Primjenjujući teorem o dominiranoj konvergenciji još jednom, dobivamo

$$\mathbb{P}(X<\infty) = \lim_{\theta\searrow 0}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\theta X}\right) = \lim_{\theta\searrow 0}\exp\left\{-\int_S\left(1-\mathrm{e}^{-\theta f(x)}\right)\eta(\mathrm{d}x)\right\} = 1$$

pa je $\mathbb{P}(X=\infty) = 0$.

Dakle, pokazali smo da je $X < \infty$ ako i samo ako je $\int_S\left(1-\mathrm{e}^{-\theta f(x)}\right)\eta(\mathrm{d}x) < \infty$. Lako se pokaže ekvivalencija

$$\int_S\left(1-\mathrm{e}^{-\theta f(x)}\right)\eta(\mathrm{d}x) < \infty \Leftrightarrow \int_S (1\wedge f(x))\eta(\mathrm{d}x) < \infty, \tag{2.12}$$

pa vrijedi prva tvrdnja u slučaju nenegativne funkcije f. Nadalje, ako u jednakostima (2.11) zamijenimo θ s $\theta - \mathrm{i}\beta$ za $\beta \in \mathbb{R}$ i pustimo $\theta \searrow 0$ dobivamo i drugu tvrdnju za nenegativnu funkciju.

Sada pretpostavimo kako je f proizvoljna izmjeriva funkcija. Tada f možemo zapisati kao $f = f^+ - f^-$. Primijetimo kako u tom slučaju X možemo zapisati kao $X = X^+ - X^-$

gdje su

$$X^+ = \int_S f(x)N^+(\mathrm{d}x), \quad X^- = \int_S f(x)N^-(\mathrm{d}x)$$

i $N^+ = N(\cdot \cap \{f \geq 0\})$ te $N^- = N(\cdot \cap \{f < 0\})$. Prema Korolaru 2.1.5. znamo da su N^+ i N^- Poissonove slučajne mjere na S s intenzitetima $\eta(\cdot \cap \{f \geq 0\})$ i $\eta(\cdot \cap \{f < 0\})$ te da su one nezavisne. To implicira da su X^+ i X^- nezavisne varijable. U konačnici, X konvergira apsolutno $\mathbb{P}$-gotovo sigurno ako i samo ako X^+ i X^- obje konvergiraju apsolutno $\mathbb{P}$-gotovo sigurno te vidimo iz analize nenegativne f (zbog ekvivalencije (2.12)) da se to događa ako i samo ako

$$\int_S (1 \wedge |f(x)|)\eta(\mathrm{d}x) < \infty. \tag{2.13}$$

Time smo pokazali prvu tvrdnju ovog teorema za općenitu funkciju. Pretpostavimo sada kako je posljednji integral konačan. U tom slučaju, zbog nezavisnosti od X^+ i X^- i analize karakteristične funkcije za nenegativne f imamo da

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X}\right) =& \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X^+}\right)\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta X^-}\right) = \exp\left\{-\int_{\{f\geq 0\}}\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta f^+(x)}\right)\eta(\mathrm{d}x)\right\} \\ &\cdot \exp\left\{-\int_{\{f<0\}}\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta f^-(x)}\right)\eta(\mathrm{d}x)\right\} = \exp\left\{-\int_S\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta f(x)}\right)\eta(\mathrm{d}x)\right\}\end{aligned}$$

pa je time dokazana i druga tvrdnja za općenitu funkciju.

Dokaz treće i četvrte tvrdnje preskačemo jer je on vrlo sličan dokazu prve dvije tvrdnje - pokaže se tvrdnja prvo za jednostavne, zatim za nenegativne i na kraju za općenite izmjerive funkcije za koje su zadovoljeni uvjeti iz teorema. □

2.3 Kvadratno integrabilni martingali

Od sada pa nadalje promatramo konkretan prostor s mjerom $([0,\infty)\times\mathbb{R}, \mathcal{B}[0,\infty)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{d}t\times \Pi(\mathrm{d}x))$ gdje je Π mjera koncentrirana na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Promatramo slučajne integrale

$$\int_{[0,t]}\int_B xN(\mathrm{d}s\times\mathrm{d}x)$$

gdje je $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Glavna je ideja da iskoristimo Teorem 2.2.1. za ovaj konkretan slučaj. Sljedeća propozicija je svojevrsni obrat Propozicije 2.1.1. jer se ovdje pomoću Poissonove slučajne mjere generira složen Poissonov proces.

Propozicija 2.3.1. *Neka je N Poissonova slučajna mjera na* $([0,\infty)\times\mathbb{R}, \mathcal{B}[0,\infty)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{d}t\times \Pi(\mathrm{d}x))$ *gdje je* Π *mjera koncentrirana na* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *i neka je* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *takav da* $\Pi(B) \in (0,\infty)$. *Tada je slučajni proces* $(X_t)_{t\geq 0}$ *definiran s*

$$X_t = \int_{[0,t]}\int_B xN(\mathrm{d}s\times \mathrm{d}x), \quad t \geq 0 \tag{2.14}$$

složen Poissonov proces s intenzitetom $\Pi(B)$ *i distribucijom skokova* $\Pi(\mathrm{d}x)/\Pi(B)$ *koncentriranom na B.*

Dokaz. Prije svega, primijetimo kako je

$$t\int_B (1\wedge |x|)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$$

za svaki $t \geq 0$ jer se integrira ograničena funkcija na skupu konačne mjere. Stoga je prema prvom dijelu Teorema 2.2.1. integral zadan s (2.14) $\mathbb{P}$-gotovo sigurno apsolutno neprekidan. Kako je $\Pi(B) < \infty$, prema Korolaru 2.1.6. slijedi da se X_t može zapisati kao suma u konačno mnogo točaka. Iz tog razloga proces $(X_t)_{t\geq 0}$ ima trajektorije koje su zdesna neprekidne s limesima slijeva. Nadalje, za $0 \leq s < t < \infty$ vrijedi

$$X_t - X_s = \int_{(s,t]}\int_B xN(\mathrm{d}s\times \mathrm{d}x)$$

što je nezavisno od familije $\{X_u : u \leq s\}$ jer su u tom slučaju intervali $[0,u]$ i $(s,t]$ međusobno disjunktni. Također, iz drugog dijela Teorema 2.2.1. slijedi da za $\theta\in\mathbb{R}$ vrijedi

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X_t}\right) = \exp\left\{-t\int_B\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}\right)\Pi(\mathrm{d}x)\right\}. \tag{2.15}$$

Kako $(X_t)_{t\geq 0}$ ima nezavisne priraste, tada vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(X_t-X_s)}\right) &= \frac{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X_t}\right)}{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X_s}\right)}\\ &= \exp\left(-(t-s)\int_B\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}\right)\Pi(\mathrm{d}x)\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X_{t-s}}\right)\end{aligned}$$

pa vidimo da su prirasti stacionarni. Dakle, $(X_t)_{t\geq 0}$ je Lévyjev proces. Iz (2.15) uočavamo kako Lévy-Hinčinov eksponent procesa $(X_t)_{t\geq 0}$ odgovara eksponentu složenog Poissonovog procesa s intenzitetom $\Pi(B)$ i distribucijom skokova $\Pi(\mathrm{d}x)/\Pi(B)$ koncentriranom na B. Time smo pokazali kako je $(X_t)_{t\geq 0}$ složen Poissonov proces s pripadnim parametrima iz iskaza propozicije. □

Sada uvodimo pojam neprekidno vremenskog martingala. Jednostavno rečeno, to su procesi koji imaju svojstvo da najbolje što možemo reći o stanju u budućnosti jest da će ono biti jednako kao i sadašnje stanje. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ filtrirani prostor. Formalna definicija je sljedeća.

Definicija 2.3.2. *Kažemo da je proces* $(X_t)_{t\geq 0}$ $\mathbb{P}$*-martingal u odnosu na filtraciju* $\mathbb{F}$ *ako je*

(i) za svaki $t \geq 0$ X_t $\mathcal{F}_t$*-izmjeriva,*

(ii) za svaki $t \geq 0$ X_t *integrabilna,*

(iii) za sve $s \leq t$ *vrijedi*

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s.$$

Kažemo da je martingal kvadratno integrabilan ako su varijable $X_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ za svaki $t \geq 0$. Sljedeća propozicija daje konstrukciju složenog Poissonovog procesa s driftom koji je martingal.

Propozicija 2.3.3. *Neka je N Poissonova slučajna mjera na* $([0,\infty)\times\mathbb{R}, \mathcal{B}[0,\infty)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{d}t\times \Pi(\mathrm{d}x))$ *gdje je* Π *mjera koncentrirana na* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *i neka je* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *takav da* $\Pi(B) \in (0,\infty)$. *Pretpostavimo dodatno kako je* $\int_B |x|\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$. *Tada je složeni Poissonov proces s driftom* $(M_t)_{t\geq 0}$ *definiran s*

$$M_t = \int_{[0,t]}\int_B xN(\mathrm{d}s\times\mathrm{d}x) - t\int_B x\Pi(\mathrm{d}x), \quad t \geq 0$$

$\mathbb{P}$*-martingal s obzirom na filtraciju*

$$\mathcal{F}_t = \sigma(N(A) : A \in \mathcal{B}[0,t]\times\mathcal{B}(\mathbb{R})), \quad t > 0 \tag{2.16}$$

gdje možemo uzeti $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. *Nadalje, ako je dodatno* $\int_B |x|^2\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$, *tada je* $(M_t)_{t\geq 0}$ *kvadratno integrabilan martingal.*

Dokaz. U duhu prethodne propozicije je jasno da je $(M_t)_{t\geq 0}$ složen Poissonov proces koji je adaptiran s obzirom na filtraciju $(\mathcal{F} : t \geq 0)$. Za $t > 0$ vrijedi

$$\mathbb{E}\left(|M_t|\right) \leq \mathbb{E}\left(\int_{[0,t]}\int_B |x|N(\mathrm{d}s\times\mathrm{d}x) + t\int_B |x|\Pi(\mathrm{d}x)\right),$$

a kako je $\int_B |x|\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$, tada je prema Teoremu 2.2.1. izraz s desne strane konačan. Koristeći činjenicu da $(M_t)_{t\geq 0}$ ima stacionarne i nezavisne priraste, za $0 \leq s \leq t < \infty$

vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(M_t - M_s | \mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(M_{t-s}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\int_{[s,t]}\int_B xN(\mathrm{d}s\times \mathrm{d}x)\right) - (t-s)\int_B x\Pi(\mathrm{d}x) = 0\end{aligned}$$

gdje smo u posljednjoj jednakosti ponovno koristili treći dio Teorema 2.2.1. Time smo pokazali da je $(M_t)_{t\geq 0}$ martingal.

Pretpostavimo sada kako je $\int_B |x|^2\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$. Tada je

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left(M_t + t\int_B x\Pi(\mathrm{d}x)\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\int_{[0,t]}\int_B xN(\mathrm{d}s\times \mathrm{d}x)\right)^2\right)\\ &= t\int_B x^2\Pi(\mathrm{d}x) + t^2\left(\int_B x\Pi(\mathrm{d}x)\right)^2 < \infty\end{aligned}$$

pa iz toga slijedi da je i $\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$. □

Postavlja se prirodno pitanje: kakve Borel izmjerive skupove B možemo promatrati u gore navedenim propozicijama. Na primjer, bez obzira na izbor mjere Π možemo promatrati skupove oblika $B_\varepsilon := (-1,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,1)$ za neki $\varepsilon \in (0,1)$ jer je u tom slučaju $0 \in \mathrm{Int}A^c$. Međutim, ne možemo direktno promatrati skup $B = (-1,0)\cup(0,1)$. Naime, ako uzmemo

$$\Pi(\mathrm{d}x) = \mathbf{1}_{x>0}x^{-\frac{5}{2}}\mathrm{d}x + \mathbf{1}_{x<0}|x|^{-\frac{5}{2}}\mathrm{d}x$$

lako se pokaže da je u tom slučaju $\int_B |x|\Pi(\mathrm{d}x) = \infty$ iako $\int_B x^2\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$. Ono što je sljedeći cilj jest ustanoviti ponašanje martingala generiranih skupovima B_ε u graničnom slučaju kada $\varepsilon \searrow 0$. Prije toga važno je podsjetiti se nekih osnovnih svojstava prostora kvadratno integrabilnih martingala.

Neka je $T > 0$ fiksan. Promatramo filtrirani prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t^* : t \in [0,T]\}, \mathbb{P})$ gdje je $\{\mathcal{F}_t^* : t \in [0,T]\}$ potpuna filtracija (svaka σ-algebra sadrži sve $\mathcal{F}$-izmjerive skupove $\mathbb{P}$-mjere nula) i zdesna neprekidna u smislu $\mathcal{F}_t^* = \bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s^*$.

Definicija 2.3.4. *Neka je $T > 0$ fiksan. Definiramo $\mathcal{M}_T^2 = \mathcal{M}_T^2(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t^* : t \in [0,T]\}, \mathbb{P})$ kao skup svih kvadratno integrabilnih martingala definiranih u konačnom vremenskom periodu* $[0,T]$.

Zbog gore navedenih pretpostavki na filtraciju $\{\mathcal{F}_t^* : t \geq 0\}$ imamo da je svaki kvadratno integrabilni martingal (s obzirom na tu filtraciju) $\mathbb{P}$-gotovo sigurno jednak martingalu čije su trajektorije gotovo sigurno neprekidne zdesna s limesima slijeva (vidjeti [7] pod VI, T4). O strukturi prostora $\mathcal{M}_T^2$ govori sljedeća propozicija.

Propozicija 2.3.5. *$\mathcal{M}_T^2$ je Hilbertov prostor s obzirom na skalarni produkt $\langle X, Y\rangle = \mathbb{E}(X_T Y_T)$.*

Napomena 2.3.6. *Kako bismo u prethodnoj propoziciji zaista dobili Hilbertov prostor, u suštini promatramo klase ekvivalencije kvadratno integrabilnih martingala. Naime, za dva martingala X i Y definirana u konačnom vremenskom periodu $[0, T]$ (na istom vjerojatnosnom prostoru) ćemo reći da su ekvivalentni ako je skup $\{\omega \in \Omega : \exists t \in [0, T] \text{ t.d. } X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$ izmjeriv i mjere nula. Međutim, taj detalj u dokazu propozicije zanemarujemo, ali valja ga imati na umu.*

Dokaz. Lagano se provjeri da je preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{M}_T^2 \times \mathcal{M}_T^2 \to \mathbb{R}$ zaista skalarni produkt. Jedina činjenica koja nije toliko očigledna jest stroga pozitivna definitnost. Naime, ako je $M \in \mathcal{M}_T^2$ takav da $\langle M, M\rangle = 0$, tada je prema Doobovoj maksimalnoj nejednakosti

$$0 \leq \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq T} M_s^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(M_T^2\right) = 0$$

iz čega slijedi $\sup_{0\leq s\leq T} M_s^2 = 0$ $\mathbb{P}$-gotovo sigurno. Kako za M možemo uzeti reprezentaciju u kojoj ima zdesna neprekidne trajektorije, tada je nužno $M_t = 0$ $\mathbb{P}$-gotovo sigurno za svaki $t \in [0, T]$.

Jedina netrivijalna činjenica koja se zaista mora pokazati je potpunost. Neka je stoga $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u $\mathcal{M}_T^2$, to jest neka za njega vrijedi

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbb{E}\left[(M_T^m - M_T^n)^2\right]^{1/2} = 0.$$

Međutim, tada je i niz slučajnih varijabli $(M_T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$. Kako je taj prostor potpun, postoji $M_T \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ takav da

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[(M_T^n - M_T)^2\right]^{1/2} = 0.$$

Generiramo martingal M pomoću slučajne varijable M_T na način

$$M_t := \mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_t^*), \quad t \in [0, T]$$

te uzmemo njegovu verziju gdje su trajektorije gotovo sigurno neprekidne zdesna (što je opet moguće zbog spomenutih pretpostavki na filtraciju). Odmah iz definicije je jasno kako je $\|M^n - M\| \to 0$ (gdje kao i obično uzimamo normu generiranu gore navedenim skalarnim produktom) te prema Jensenovoj nejednakosti vrijedi

$$\mathbb{E}\left(M_t^2\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(M_T|\mathcal{F}_t^*\right)^2\right) \leq \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(M_T^2|\mathcal{F}_t^*\right)\right) = \mathbb{E}\left(M_T^2\right) < \infty$$

jer je $M_T \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$. Dakle, $\mathcal{M}_T^2$ je uistinu Hilbertov prostor. $\square$

Sada smo spremni iskazati i dokazati najvažniji teorem ovog potpoglavlja.

Teorem 2.3.7. *Neka je N Poissonova slučajna mjera kao u Propoziciji 2.3.3. i neka je* $\int_{(-1,1)} x^2\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$. *Za* $\varepsilon \in (0,1)$ *definiramo martingal*

$$M_t^\varepsilon := \int_{[0,t]} \int_{B_\varepsilon} xN(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x) - t \int_{B_\varepsilon} x\Pi(\mathrm{d}x), \quad t \geq 0$$

gdje je $B_\varepsilon = (-1,-\varepsilon) \cup (\varepsilon, 1)$ *te neka je filtracija* $(\mathcal{F}_t^*)_{t\geq 0}$ *upotpunjenje filtracije navedene u (2.16) (to jest* $\mathcal{F}_t^* = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$*). Tada postoji martingal* $(M_t)_{t\geq 0}$ *sa sljedećim svojstvima:*

(i) za svaki $T > 0$ *postoji niz realnih brojeva* $(\varepsilon_n^T)_{n\in\mathbb{N}}$ *sa svojstvom* $\varepsilon_n^T \searrow 0$ *takav da*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq s\leq T} \left(M_s^{\varepsilon_n^T} - M_s\right)^2 = 0\right) = 1,$$

(ii) $(M_t)_{t\geq 0}$ *je adaptiran s obzirom na filtraciju* $(\mathcal{F}_t^*)_{t\geq 0}$,

(iii) trajektorije su $\mathbb{P}$*-gotovo sigurno neprekidne zdesna s limesima s lijeva,*

(iv) ima $\mathbb{P}$*-gotovo sigurno najviše prebrojivo mnogo skokova na intervalu* $[0,T]$ *te*

(v) ima stacionarne i nezavisne priraste.

Ukratko rečeno, Teorem 2.3.7. tvrdi da postoji Lévyjev proces koji je martingal s najviše prebrojivo mnogo skokova u svakom konačnom vremenskom intervalu te da za svaki $T > 0$ niz martingala M_t^ε konvergira uniformno gotovo sigurno na $[0,T]$ (na odgovarajućem podnizu).

Dokaz. (i) Neka je $0 < \eta < \varepsilon < 1$ te $T > 0$. Promatramo pripadne martingale M^η i M^ε. Slično kao i u dokazu Propozicije 2.3.3. dobivamo

$$\mathbb{E}\left(\left(M_T^\varepsilon - M_T^\eta\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\left\{\int_{[0,T]} \int_{\eta\leq|x|<\varepsilon} xN(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x)\right\}^2\right) = T \int_{\eta\leq|x|<\varepsilon} x^2\Pi(\mathrm{d}x).$$

Kako je $\int_{(-1,1)} x^2\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$, tako je za neki izbor η i ε izraz s desne strane proizvoljno malen. Dakle, $\{M^\varepsilon, \varepsilon \in (0,1)\}$ je Cauchyjeva familija u $\mathcal{M}_T^2$. Kako smo pokazali da je to Hilbertov prostor, iz toga slijedi da postoji $M = (M_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{M}_T^2$ takav da

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|M^\varepsilon - M\| = 0.$$

Doobova maksimalna nejednakost implicira da

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le T}(M_s - M_s^\varepsilon)^2\right) \le 4\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left((M_T - M_T^\varepsilon)^2\right) = 0 \tag{2.17}$$

Pokažimo sada kako granični martingal M ne ovisi o T. Zaista, pretpostavimo kako ovisi te s M^T označimo granični martingal u ovisnosti o T. Tada je za $0 < T' < T$ slično kao i u (2.17)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le T'}\left(M_s^\varepsilon - M_s^{T'}\right)^2\right) = 0,$$

a isto tako vrijedi i

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le T'}\left(M_s^\varepsilon - M_s^{T}\right)^2\right] \le \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le T}\left(M_s^\varepsilon - M_s^{T}\right)^2\right] = 0$$

gdje je navedena nejednakost posljedica skupovne inkluzije. Vrijedi da

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le T'}\left(M_s^{T'} - M_s^{T}\right)^2\right)^{1/2} \le \mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le T'}\left(M_s^{\varepsilon} - M_s^{T'}\right)^2\right)^{1/2} + \mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le T'}\left(M_s^{\varepsilon} - M_s^{T}\right)^2\right)^{1/2}$$

gdje smo koristili osnovne nejednakosti sa supremumima te nejednakost Minkowskog. Ako pustimo $\varepsilon \to 0$, tada desna strana teži u 0, pa stoga i lijeva. Dakle, procesi M^T i $M^{T'}$ su ekvivalentni kvadratno integrabilni martingali. Kako su T' i T bili proizvoljni, granični martingal M zaista ne ovisi o izboru konačnog vremena $T > 0$.

Iz (2.17) vidimo da

$$\sup_{0\le s\le T}(M_s - M_s^\varepsilon)^2 \longrightarrow 0 \quad (L^1)$$

kada $\varepsilon \to 0$. Konvergencija u L^1 povlači konvergenciju po vjerojatnosti, pa gore navedeni niz konvergira k nuli i po vjerojatnosti. Kako konvergencija po vjerojatnosti povlači egzistenciju podniza koji konvergira gotovo sigurno, tada postoji podniz $(\varepsilon_n^T)_{n\in\mathbb{N}}$, $\varepsilon_n^T \searrow 0$ takav da

$$\lim_{\varepsilon_n^T\searrow 0}\sup_{0\le s\le T}\left(M_s^{\varepsilon_n^T} - M_s\right)^2 = 0$$

$\mathbb{P}$-gotovo sigurno.

(*ii*) Za $0 < t < T$ je slučajna varijabla $M_t^{\varepsilon_n^T}$ $\mathcal{F}_t^*$-izmjeriva. Prema (*i*), niz $(M_t^{\varepsilon_n^T})_n$ konvergira gotovo sigurno k M_t, pa je stoga i M_t $\mathcal{F}_t^*$-izmjeriva.

(*iii*) Kako su trajektorije procesa M^ε gotovo sigurno neprekidne zdesna s limesima slijeva, gotovo sigurno uniformna konvergencija na konačnom vremenskom intervalu povlači da i granični proces M također ima takve trajektorije. Zaista, ako promatramo prostor zdesna neprekidnih funkcija s limesima slijeva $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ (označimo taj skup s RCLL(f)) i metriku na tom prostoru $d(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$, tada teorija metričkih prostora pokazuje da je (RCLL$(f), d$) zatvoren metrički prostor.

(iv) Prema Korolaru 2.1.6. znamo da je nosač od N gotovo sigurno najviše prebrojiv. Nadalje, kako mjera $\mathrm{d}t \times \Pi(\mathrm{d}x)$ nema mase u izoliranim točkama, N gotovo sigurno u svim izoliranim točkama postiže vrijednosti 0 ili 1. Kako svaki skok procesa $(M_t)_{t\geq 0}$ odgovara nekoj točki u nosaču od N, iz toga slijedi da M ima najviše prebrojivo mnogo skokova na $[0,T]$.

(v) Za $0 \leq u \leq v \leq s \leq t \leq T$ i $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ imamo da

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1(M_v - M_u)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2(M_t - M_s)}\right) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(e^{i\theta_1\left(M_v^{\varepsilon_n^T} - M_u^{\varepsilon_n^T}\right)} e^{i\theta_2\left(M_t^{\varepsilon_n^T} - M_s^{\varepsilon_n^T}\right)}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1 M_{v-u}^{\varepsilon_n^T}}\right)\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2 M_{t-s}^{\varepsilon_n^T}}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1 M_{v-u}}\right)\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2 M_{t-s}}\right)
\end{aligned}$$

pri čemu smo u drugoj i četvrtoj jednakosti koristili teorem o dominiranoj konvergenciji, a u trećoj jednakosti smo koristili da $M^{\varepsilon_n^T}$ ima nezavisne i stacionarne priraste. Iz gornjeg računa vidimo da M ima nezavisne i stacionarne priraste. □

2.4 Dokaz dekompozicije

Sada smo spremni dokazati Lévy-Itôvu dekompoziciju.

Dokaz Teorema 2.0.2. Kao što smo napomenuli u potpoglavlju 1.4., postoji vjerojatnosni prostor na kojem je definirano Brownovo gibanje $X^{(1)}$ kao u (2.2) za neki $a \in \mathbb{R}$ i $\sigma \geq 0$. Označimo taj prostor s $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$.

Neka je sada mjera Π kao u iskazu Lévy-Itôve dekompozicije. Prema Teoremu 2.1.4., postoji Poissonova slučajna mjera N na $([0,\infty)\times\mathbb{R}, \mathcal{B}[0,\infty)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{d}t\times\Pi(\mathrm{d}x))$. Možemo definirati proces $X^{(2)}$ s

$$X_t^{(2)} = \int_{[0,t]}\int_{|x|\geq 1} xN(\mathrm{d}s\times\mathrm{d}x), \quad t \geq 0$$

koji je prema Propoziciji 2.3.1. složen Poissonov proces s intenzitetom $\Pi(\mathbb{R}\setminus(-1,1))$ i distribucijom skokova $\Pi(\mathrm{d}x)/\Pi(\mathbb{R}\setminus(-1,1))$ koncentriranom na $\mathbb{R}\setminus(-1,1)$. Jasno je da smo ovdje pretpostavili kako je $\Pi(\mathbb{R}\setminus(-1,1)) > 0$. Ako je kojim slučajem $\Pi(\mathbb{R}\setminus(-1,1)) = 0$, tada za $X^{(2)}$ uzimamo proces koji je identički jednak nuli.

Za $0 < \varepsilon < 1$ definiramo familiju procesa $X^{(3,\varepsilon)}$ s

$$X_t^{(3,\varepsilon)} = \int_{[0,t]} \int_{\varepsilon \le |x| < 1} xN(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x) - t \int_{\varepsilon \le |x| < 1} x\Pi(\mathrm{d}x), t \ge 0$$

koji su prema Propoziciji 2.3.3. složeni Poissonovi procesi s driftom i martingali s obzirom na filtraciju zadanu s (2.16). Koristeći Teorem 2.2.1. može se lako pokazati da je karakteristični eksponent procesa $X^{(3,\varepsilon)}$ jednak

$$\Psi^{(3,\varepsilon)}(\theta) = \int_{\varepsilon \le |x| < 1} \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x} + \mathrm{i}\theta x\right) \Pi(\mathrm{d}x)$$

za $\theta \in \mathbb{R}$. Ako pretpostavimo kako je $\int_{(-1,1)} x^2 \Pi(\mathrm{d}x) < \infty$, tada prema Teoremu 2.3.7. znamo kako postoji Lévyjev proces $X^{(3)}$ koji je kvadratno integrabilni martingal definiran na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$ prema kojem procesi $X^{(3,\varepsilon)}$ konvergiraju uniformno na $[0, T]$ (konvergiraju uniformno na odgovarajućem podnizu $(\varepsilon_n^T)_n$). I ovdje smo pretpostavili da je $\Pi((-1, 1)) > 0$ jer u suprotnom uzimamo $X^{(3)}$ kao proces koji je identički jednak nuli. Jasno je kako je karakteristični eksponent procesa $X^{(3)}$ dan s

$$\Psi^{(3)}(\theta) = \int_{|x|<1} \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x} + \mathrm{i}\theta x\right) \Pi(\mathrm{d}x)$$

za $\theta \in \mathbb{R}$. Kako su $[0, t] \times (-1, 1)$ i $[0, t] \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ disjunktni za svaki $t > 0$, prema Korolaru 2.1.5. procesi $X^{(2)}$ i $X^{(3)}$ su nezavisni.

U konačnici, definiramo vjerojatnosni prostor

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := (\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1) \times (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$$

te na njega proširimo procese $X^{(1)}, X^{(2)}$ i $X^{(3)}$. Jasno je iz konstrukcije da su ta tri procesa međusobno nezavisna. Definiramo proces X s

$$X := X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$$

koji je prema Lemi 2.0.1. također Lévyjev proces s karakterističnim eksponentom

$$\begin{aligned}\Psi(\theta) &= \Psi^{(1)}(\theta) + \Psi^{(2)}(\theta) + \Psi^{(3)}(\theta)\\ &= \mathrm{i}a\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x} + \mathrm{i}\theta x \mathbf{1}_{(|x|<1)}\right) \Pi(\mathrm{d}x)\end{aligned}$$

te smo time dokazali Lévy-Itôvu dekompoziciju. □

Poglavlje 3

Subordinatori

3.1 Procesi ograničene varijacije i subordinatori

Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija te neka je $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Za particiju P segmenta $[a, b]$, $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b\}$ definiramo varijaciju funkcije f na particiji P kao

$$V(f, a, b, P) = \sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \,. \tag{3.1}$$

Sada želimo definirati varijaciju na segmentu $[a, b]$. Ideja je uzimati sve finije i finije particije P segmenta $[a, b]$ te definirati varijaciju na segmentu kao limes varijacija na particijama. Formalna definicija je sljedeća:

Definicija 3.1.1. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ te neka je zadana norma na skupu svih particija $\|P\| := \max_{1 \le i \le k} |t_i - t_{i-1}|$. Varijacija funkcije f na segmentu $[a, b]$ se definira kao*

$$V(f, a, b) := \lim_{\|P\| \to 0} V(f, a, b, P)$$

gdje je $V(f, a, b, P)$ kao u (3.1). Za f kažemo da je ograničene varijacije na segmentu $[a, b]$ ukoliko je gornji limes konačan, a ako je limes beskonačan kažemo da je f neograničene varijacije.

Važno je istaknuti jednu vrlo važnu činjenicu. Naime, ako je funkcija f monotona na $[a, b]$ (nerastuća ili neopadajuća), tada vrijedi

$$V(f, a, b) = |f(b) - f(a)| \,.$$

Dakle, svaka monotona funkcija ima ograničenu varijaciju.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te neka je $X = (X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces definiran na tom prostoru. Neka je $T > 0$ fiksan. Za particiju $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = T\}$ promatramo

$$V(X, T, P) := \sum_{i=1}^{k} \left| X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right|. \tag{3.2}$$

Primjetimo kako $V(X, T, P)$ nije općenito konstantan jer ovisi o $\omega \in \Omega$ te je on slučajna varijabla jer je Borel-izmjeriva funkcija slučajnih varijabli $X_{t_0}, \ldots, X_{t_k}$. Sada uvodimo definiciju varijacije procesa X.

Definicija 3.1.2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, neka je $X = (X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces definiran na tom prostoru te neka je $T > 0$ fiksan. Kažemo da proces X ima varijaciju na segmentu $[0, T]$ ukoliko donji limes postoji $\mathbb{P}$-g.s. te ju definiramo kao*

$$V(X, T) := \varliminf_{\|P\| \to 0} V(X, T, P) \ \mathbb{P}\text{-}g.s.$$

gdje je $V(X, T, P)$ kao u (3.2). Kažemo da proces X ima ograničenu varijaciju na segmentu $[0, T]$ ako je ona $\mathbb{P}$-g.s. konačna.

Promotrimo sada koji su nužni i dovoljni uvjeti da bi općeniti Lévyjev proces X zadan Lévy-Hinčinovom trojkom (a, σ, Π) imao ograničenu varijaciju na segmentu $[0, T]$. Prema Lévy-Itôvoj dekompoziciji, proces X možemo rastaviti kao $X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$ gdje je $X^{(1)}$ Brownovo gibanje s parametrima $a \in \mathbb{R}$ i $\sigma \geq 0$, $X^{(2)}$ složen Poissonov proces te $X^{(3)}$ granični martingal. Poznata je činjenica kako netrivijalno Brownovo gibanje $(\sigma > 0)$ ima neograničenu varijaciju (vidjeti u [5] komentar ispod Problema 5.12.). Stoga, kada bi kod X parametar σ bio strogo veći od nula, tada bi taj proces imao neograničenu varijaciju. Dakle, nužno je $\sigma = 0$. Nadalje, lako se pokaže da proizvoljan složeni Poissonov proces ima ograničenu varijaciju (jer složen Poissonov proces na svakom konačnom vremenskom intervalu ima $\mathbb{P}$-g.s. konačan broj skokova, a jednostavno je za pokazati da je njegova varijacija jednaka zbroju apsolutnih visina skokova).

Ako se podsjetimo kako je definiran proces $X^{(3)}$, prirodno se zapitati pod kojim uvjetima na mjeru Π postoji

$$\int_{[0,t]} \int_{0 \leq |x| < 1} x N(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x)$$

te da vrijedi

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{[0,t]} \int_{\varepsilon \leq |x| < 1} x N(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x) = \int_{[0,t]} \int_{0 \leq |x| < 1} x N(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x)$$

$\mathbb{P}$-gotovo sigurno. Teorem 2.2.1. kaže da je nužan i dovoljan uvjet $\int_{0<|x|<1} |x|\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$. Stoga se $X^{(3)}$ može zapisati kao

$$X_t^{(3)} = \int_{[0,t]} \int_{|x|<1} xN(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x) - t \int_{|x|<1} x\Pi(\mathrm{d}x)$$

za $t \geq 0$. Nadalje, $X^{(3)}$ je u tom slučaju ograničene varijacije ako i samo ako $\int_{0<|x|<1} |x|\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$. Time smo pokazali sljedeću propoziciju.

Propozicija 3.1.3. *Lévyjev proces X zadan Lévy-Hinčinovom trojkom (a, σ, Π) ima ograničenu varijaciju ako i samo ako $\sigma = 0$ i*

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge |x|)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty. \tag{3.3}$$

Primijetimo kako nam konačnost integrala u (3.3) dozvoljava da se u tom slučaju karakteristični eksponent može zapisati kao

$$\Psi(\theta) = -\mathrm{i}d\theta + \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}\right) \Pi(\mathrm{d}x), \tag{3.4}$$

gdje je $d \in \mathbb{R}$ definiran u terminima konstante a i Lévyjeve mjere Π kao

$$d = -\left(a + \int_{|x|<1} x\Pi(\mathrm{d}x)\right).$$

Dakle, ako je X Lévyjev proces ograničene varijacije, tada se on može zapisati kao

$$X_t = dt + \int_{[0,t]} \int_{\mathbb{R}} xN(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}x), \quad t \geq 0. \tag{3.5}$$

Izraz (3.5) navodi nas na sljedeću propoziciju.

Propozicija 3.1.4. *Lévyjev proces X je složen Poissonov proces s driftom ako i samo ako je $\sigma = 0$ i $\Pi(\mathbb{R}) < \infty$.*

Dokaz. Neka je X složen Poissonov proces s driftom. Tada sličnim računom kao u prvom poglavlju vidimo da je karakteristični eksponent takvog procesa oblika kao u (3.4) gdje je dodatno $\Pi(\mathbb{R}) < \infty$. Obratno, ako je $\sigma = 0$ i ako je Π konačna mjera, tada Propozicija 2.3.1. daje konstrukciju traženog složenog Poissonovog procesa s driftom. □

Sada uvodimo formalnu definiciju subordinatora koji čine vrlo bogatu i važnu klasu Lévyjevih procesa.

Definicija 3.1.5. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te neka je $X = (X_t)_{t\geq 0}$ slučajni proces definiran na tom vjerojatnosnom prostoru. Za X kažemo da je (regularni) subordinator ako je on Lévyjev proces te ako vrijedi $\mathbb{P}(X_t \geq 0) = 1$ za svaki $t \geq 0$.*

O subordinatorima valja razmišljati kao o Lévyjevjevim procesima koji mogu poprimiti samo nenegativne vrijednosti. Iz Definicije 1.1.1. odmah je jasna sljedeća karakterizacija subordinatora.

Propozicija 3.1.6. *Slučajni proces X je subordinator ako i samo ako je on Lévyjev proces s $\mathbb{P}$-gotovo sigurno neopadajućim trajektorijama.*

Dokaz. Tvrdnja automatski slijedi iz relacije

$$\mathbb{P}(X_t \geq X_s) = \mathbb{P}(X_t - X_s \geq 0) = \mathbb{P}(X_{t-s} \geq 0)$$

za $0 \leq s \leq t$. □

Zbog prethodne propozicije svaki subordinator ima ograničenu varijaciju. Postavlja se pitanje: koji dodatan uvjet trebamo postaviti kako bi proces ograničene varijacije bio subordinator. Odgovor nam daje sljedeća propozicija.

Propozicija 3.1.7. *Lévyjev proces X je subordinator ako i samo ako $\Pi(-\infty, 0) = 0$, $\int_{(0,\infty)}(1 \wedge x)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$, $\sigma = 0$ te $d = -\left(a + \int_{(0,1)} x\Pi(\mathrm{d}x)\right) \geq 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo kako je X subordinator. Tada je nužno $\Pi(-\infty, 0) = 0$ (ne smije postojati mogućnost za negativne skokove). Nadalje, X prema prethodnom razmatranju ima ograničenu varijaciju, pa je prema Propoziciji 3.1.3 $\int_{(0,\infty)}(1 \wedge x)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$, $\sigma = 0$ te se lako vidi da je $d \geq 0$ iz (3.4).

Pretpostavimo sada kako vrijede uvjeti iz propozicije. Tada iz dokaza Lévy-Itôve dekompozicije je jasno da pripadni Lévyjev proces ima samo nenegativne skokove. Kako je dodatno $\int_{(0,\infty)}(1 \wedge x)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$, $\sigma = 0$ te $d \geq 0$, jasno je iz izraza (3.5) da proces X ima nenegativne trajektorije. Dakle, X je subordinator. □

Sada uvodimo pojam ubijenog subordinatora. To su subordinatori koji se do slučajnog trenutka ponašaju kao regularni subordinatori, a nakon tog trenutka se apsorbiraju u stanje ∂ koje nazivamo *grobljem*. Formalna definicija je sljedeća:

Definicija 3.1.8. *Neka je Y subordinator te neka je $\mathbf{e}_\eta$ eksponencijalno distribuirana slučajna varijabla s parametrom $\eta > 0$ nezavisna od Y. Tada proces X definiran s*

$$X_t = \begin{cases} Y_t, & \text{ako } t < \mathbf{e}_\eta \\ \partial, & \text{ako } t \geq \mathbf{e}_\eta \end{cases}$$

nazivamo ubijenim subordinatorom.

Ponekad za X kažemo da je po distribuciji jednak subordinatoru Y ubijenom s intenzitetom η. Ako proširimo prethodnu definiciju za $\eta = 0$, dobivamo $\mathbf{e}_\eta = \infty$ gotovo sigurno, pa regularne subordinatore možemo smatrati posebnom vrstom ubijenih subordinatora.

U prvom poglavlju uveli smo pojam karakteristične funkcije koja je svojevrsna transformacija vjerojatnosne mjere. Ono što se pokazuje jest da je kod subordinatora korisno promatri Laplaceovu transformaciju.

Definicija 3.1.9. *Neka je μ mjera na $[0,\infty)$. Laplacova transformacija mjere μ je preslikavanje*

$$\mathcal{L}\mu(\theta) = \int_{[0,\infty)} e^{-\theta x}\mu(dx)$$

za $\theta \geq \theta_0 := \inf\left\{\theta \in \mathbb{R} : \int_{[0,\infty)} e^{-\theta x}\mu(dx) < \infty\right\}$.

Primijetimo kako je u slučaju konačne mjere gore navedeni θ_0 konačan te kako vrijedi $\theta_0 \leq 0$. Ako nenegativna slučajna varijabla X ima zakon razdiobe μ, tada možemo pisati

$$\mathcal{L}\mu(\theta) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\theta X}).$$

U praksi se vrlo često radi s Laplaceovim eksponentom koji je analogon karakterističnog eksponenta navedenog u prvom poglavlju. Naime, Laplaceov eksponent slučajne varijable X se definira kao preslikavanje $\theta \mapsto \Phi(\theta)$ za koje vrijedi

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\theta X}) = \mathrm{e}^{-\Phi(\theta)}$$

za sve $\theta \geq \theta_0$. Primijetimo kako je u tom slučaju $\Phi(\theta) = -\ln \mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\theta X})$.

Ako je $X = (X_t)_{t\geq 0}$ subordinator, tada se slično kao i u prvom poglavlju pokazuje da je cijeli proces jedinstveno zadan s Laplaceovim eksponentom od X_1 te da vrijedi $\Phi_t(\theta) = t\Phi_1(\theta)$. U tom slučaju pišemo $\Phi := \Phi_1$ te ga nazivamo Laplaceovim eksponentom subordinatora X. Primjetimo kako za ubijeni subordinator X te za $\theta \geq 0$ vrijedi

$$\Phi(\theta) = -\ln \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\theta X_1}\right) = -\ln \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\theta Y_1}\mathbf{1}_{\{\mathbf{e}_\eta > 1\}}\right) = \eta - \ln \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\theta Y_1}\right) = \eta + \Psi(i\theta)$$

gdje je Ψ karakteristični eksponent subordinatora Y, a treća jednakost je jednostavna posljedica jednakosti

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\theta Y_1}\mathbf{1}_{\{\mathbf{e}_\eta > 1\}}\right) = \frac{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\theta Y_1}|\mathbf{e}_\eta > 1)}{\mathbb{P}(\mathbf{e}_\eta > 1)} = \frac{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\theta Y_1})}{\mathrm{e}^{-\eta}}.$$

Korištenjem Lévy-Hinčinove formule za Y danom u (3.4) dobivamo da je Laplaceov eksponent ubijenog subordinatora X jednak

$$\Phi(\theta) = \eta + d\theta + \int_{(0,\infty)} \left(1 - \mathrm{e}^{-\theta x}\right)\Pi(\mathrm{d}x)$$

gdje su $d \geq 0$ i Π takva da $\int_{(0,\infty)}(1 \wedge x)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$.

3.2 Potencijalne mjere i mjere obnavljanja

Neka je X ubijen subordinator te neka je $q \geq 0$. Tada se na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ definira q-potencijalna mjera (u oznaci $U^{(q)}$) u diferencijalnoj formi kao

$$U^{(q)}(\mathrm{d}x) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt}\mathbf{1}_{(X_t \in \mathrm{d}x)}\mathrm{d}t\right) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt}\mathbb{P}\left(X_t \in \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t.$$

Ako je $q = 0$ jednostavno pišemo $U^{(0)} = U$. O q-potencijalnoj mjeri treba razmišljati kao o mjeri koja daje očekivano (diskontirano) vrijeme koje ubijen subordinator X provede u određenom prostornom intervalu. Jednostavno se pokaže kako je q-potencijalna mjera ubijenog subordinatora (ubijenog s intenzitetom $\eta > 0$) jednaka $(q + \eta)$-potencijalnoj mjeri početnog regularnog subordinatora. Nadalje, za svaki $q \geq 0$, $(q + \eta)U^{(q)}$ je vjerojatnosna mjera na $([0, \infty), \mathcal{B}[0, \infty))$ te je preslikavanje $x \mapsto U^{(q)}(x) := U^{(q)}[0, x]$ za $x \geq 0$ zdesna neprekidno.

Potencijalne mjere imat će ključnu ulogu u analizi vremena prijelaza subordinatora iznad određenog stanja. Stoga u ovom poglavlju promatramo svojstva potencijalnih mjera te na koji način su povezane s mjerama obnavljanja.

Definicija 3.2.1. *Neka je F funkcija distribucije koncentrirana na* $[0, \infty)$. *Tada se mjera V na* $([0, \infty), \mathcal{B}[0, \infty))$ *definirana u diferencijalnom obliku kao*

$$V(\mathrm{d}x) = \sum_{k\geq 0} F^{*k}(\mathrm{d}x)$$

naziva mjerom obnavljanja distribucije F.

Podsjetimo se, F^{*k} označava k-terostruku konvoluciju distribucije F, pri čemu je F^{*0} Diracova mjera koncentrirana u 0. Koristimo sličnu notaciju $V(x) := V[0, x]$, pa za V ponekad kažemo da je funkcija obnavljanja.

Za podskup realnih brojeva A kažemo da je rešetkast (eng. lattice) ako se može zapisati kao $A = \{a + nh : n \in \mathbb{N}_0\}$ za neke $a \geq 0$ i $h > 0$. Nadalje, za funkciju $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kažemo da je direktno Riemann integrabilna ako gornje i donje Riemannove sume na cijeloj neograničenoj domeni konvergiraju prema istom konačnom limesu. Sada iskazujemo fundamentalni teorem u teoriji obnavljanja, ali dokaz preskačemo. On se može pogledati u [3].

Teorem 3.2.2. *(Teorem obnavljanja) Neka je V funkcija obnavljanja kao i ranije te dodatno pretpostavimo kako je* $\mu = \int_{(0,\infty)} xF(\mathrm{d}x) < \infty$.

(i) Ako F nema rešetkast nosač, tada za sve $y > 0$ vrijedi

$$\lim_{x\nearrow\infty}\{V(x + y) - V(x)\} = \frac{y}{\mu}.$$

(ii) Ako F nema rešetkast nosač i ako je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ direktno Riemann integrabilna funkcija, tada

$$\lim_{x \nearrow \infty} \int_0^x h(x-y)V(\mathrm{d}y) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty h(y)\mathrm{d}y.$$

(iii) Bez ikakve restrikcije na nosač od F vrijedi

$$\lim_{x \nearrow \infty} \frac{V(x)}{x} = \frac{1}{\mu}.$$

Zanima nas na koji način su povezane q-potencijalna mjera generirana subordinatorom i mjera obnavljanja. Odnos je dan sljedećom propozicijom.

Propozicija 3.2.3. *Neka je X regularni subordinator, neka je zadana funkcija distribucije F s $F(x) = U^{(1)}(x)$ (gdje je $U^{(1)}$ 1-potencijalna mjera generirana subordinatorom X) i neka je V mjera obnavljanja generirana funkcijom distribucije F. Tada je $V(\mathrm{d}x)$ jednaka mjeri $\delta_0(\mathrm{d}x) + U(\mathrm{d}x)$ na $[0, \infty)$.*

Dokaz. Za $\theta > 0$ korištenjem Tonellijevog teorema dobivamo

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-\theta x} U^{(1)}(\mathrm{d}x) &= \int_0^\infty \mathrm{d}t \cdot \mathrm{e}^{-t} \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-\theta x} \mathbb{P}\left(X_t \in \mathrm{d}x\right) \\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}t \cdot \mathrm{e}^{-(1+\Phi(\theta))t} = \frac{1}{1+\Phi(\theta)}\end{aligned}$$

gdje je Φ Laplaceov eksponent od X te smo u zadnjoj jednakosti koristili da je $\Phi(\theta) > 0$. Na sličan način računamo i Laplaceovu transformaciju mjere V pa za $\theta > 0$ imamo

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-\theta x} V(\mathrm{d}x) &= \sum_{k \geq 0} \left(\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-\theta x} U^{(1)}(\mathrm{d}x) \right)^k \\ &= \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{1+\Phi(\theta)} \right)^k = \frac{1}{1-(1+\Phi(\theta))^{-1}} = 1 + \frac{1}{\Phi(\theta)}\end{aligned}$$

gdje smo koristili da je $1/(1+\Phi(\theta)) < 1$.

S druge pak strane, na vrlo sličan način izračunamo Laplaceovu transformaciju mjere $\delta_0(\mathrm{d}x) + U(\mathrm{d}x)$ te se pokaže da je ona također jednaka $1 + 1/\Phi(\theta)$. Kako je operator Laplaceove transformacije injektivan (vidjeti [10]), nužno je da su mjere $V(\mathrm{d}x)$ i $\delta_0(\mathrm{d}x) + U(\mathrm{d}x)$ jednake. □

Prethodna propozicija sugerira kako će teorem obnavljanja biti uključen nešto kasnije kada ćemo promatrati asimptotsko ponašanje od U. Specijalno, kao korolar teorema obnavljanja dobivamo

Korolar 3.2.4. *Neka je X regularan subordinator takav da* $\mu := \mathbb{E}(X_1) < \infty$.

(i) Ako U nema rešetkasti nosač, tada je za $y > 0$

$$\lim_{x \nearrow \infty} \{U(x+y) - U(x)\} = \frac{y}{\mu}$$

(ii) Bez ograničenja na nosač od U vrijedi

$$\lim_{x \nearrow \infty} \frac{U(x)}{x} = \frac{1}{\mu}$$

Dokaz. Primijetimo kako je

$$\mu = \int_{[0,\infty)} xU^{(1)}(\mathrm{d}x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\mathbb{E}\,(X_t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty t\mathrm{e}^{-t}\mathbb{E}\,(X_1)\,\mathrm{d}t = \mathbb{E}\,(X_1)$$

te kako U ima isti nosač kao i $U^{(1)}$. Sada tvrdnja direktno slijedi kao posljedica Teorema 3.2.2. □

Od interesa nam je promotriti na koji način potencijalne mjere nasljeđuju nosač od generirajućeg subordinatora. Može se pokazati da potencijalna mjera ima rešetkast nosač u slučaju kada je X složen Poissonov subordinator. Sljedeći nam teorem daje odgovor na to pitanje.

Teorem 3.2.5. *Neka je X ubijen subordinator s pripadnom Lévyjevom mjerom* Π.

(i) Ako je $\Pi(0,\infty) = \infty$*, tada za sve* $q \geq 0$, $U^{(q)}$ *nema atoma.*

(ii) Ako je $\Pi(0,\infty) < \infty$ *i* Π *nema rešetkast nosač, tada za sve* $q \geq 0$, $U^{(q)}$ *nema rešetkast nosač.*

(iii) Ako je $\Pi(0,\infty) < \infty$ *i* Π *ima rešetkast nosač, tada za sve* $q \geq 0$, $U^{(q)}$ *ima jednak rešetkast nosač.*

Dokaz. (i) Podsjetimo se definicije od $U^{(q)}$

$$U^{(q)}(\mathrm{d}x) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt}\mathbf{1}_{(X_t \in \mathrm{d}x)}\mathrm{d}t\right).$$

Kako X ima neopadajuće trajektorije, tako se atom pojavljuje u nekoj točki $x > 0$ ako i samo ako X s pozitivnom vjerojatnosti ostane u stanju x u nekom vremenskom intervalu (t_1, t_2) gdje su $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$. Međutim, kako je $\Pi(0,\infty) = \infty$, pokazuje se da je takvo nešto nemoguće jer je u tom slučaju skup vremena skokova subordinatora X gotovo sigurno gust u $[0,\infty)$.

(*ii*) i (*iii*) Kako je $\Pi(0,\infty)<\infty$, pretpostavimo kako je X složen Poissonov subordinator s pripadnom distribucijom skokova F i intenzitetom $\lambda>0$ koji je ubijen s intenzitetom $\eta\geq 0$. Tada je, kao što je pokazano u prvom poglavlju, $\Pi=\lambda F$. Uvjetovanjem na broj skokova do trenutka $t>0$ imamo da

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_t\in \mathrm{d}x\right) &= \sum_{k\geq 0}\mathbb{P}\left(X_t\in \mathrm{d}x|N_t=k\right)\mathbb{P}(N_t=k)\\ &= \sum_{k\geq 0}\mathrm{e}^{-\eta t}F^{*k}(\mathrm{d}x)\cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}=\mathrm{e}^{-\eta t}\sum_{k\geq 0}\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}F^{*k}(\mathrm{d}x)\end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti koristili da, uvjetno da se do trenutka t dogodilo k skokova, distribucija pozicije procesa X jednaka k-terostrukoj konvoluciji od F (ukoliko je proces još uvijek živ). Sada imamo da

$$\begin{aligned}U^{(q)}(\mathrm{d}x) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt}\mathbb{P}\left(X_t\in \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}F^{*k}(\mathrm{d}x)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda+q+\eta)t}(\lambda t)^k\mathrm{d}t=\frac{\rho}{\lambda}\sum_{k\geq 0}\rho^k F^{*k}(\mathrm{d}x)\end{aligned}$$

gdje smo, radi kompaktnijeg zapisa, definirali $\rho=\frac{\lambda}{\lambda+\eta+q}$. Druga i treća tvrdnja teorema sada proizlaze iz prethodnog izraza za $U^{(q)}$. Naime, ako F nema rešetkast nosač, tada ga nema niti F^{*k} za bilo koji $k\geq 1$, pa ga nema niti $U^{(q)}$. S druge strane, ako F ima rešetkast nosač, tada ga ima i F^{*k} za bilo koji $k\geq 1$. (Zbroj k nezavisnih varijabli s rešetkastim nosačem također ima rešetkast nosač). □

Za kraj ovog potpoglavlja, primjetimo jednu vrlo bitnu činjenicu koja slijedi iz prethodnog teorema. Naime, jasno se vidi da skaliranje Lévyjeve mjere $\Pi\mapsto c\Pi$ za neki $c>0$ ne utječe na egzistenciju atoma u potencijalnoj mjeri.

3.3 Procesi obnavljanja, prebačaj i podbačaj

Neka je F funkcija distribucije koncentrirana na $(0,\infty)$ te pretpostavimo kako imamo niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli $(\xi_i)_{i\geq 1}$ s funkcijom distribucije F. Za svaki $k\geq 1$ definiramo $T_k=\sum_{i=1}^k\xi_i$. Tada se proces obnavljanja definira na sljedeći način.

Definicija 3.3.1. *Neka su F, $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i $(T_k)_{k\geq 1}$ kao gore. Proces obnavljanja je slučajni proces $N=(N_x)_{x\geq 0}$ definiran kao*

$$N_x=\sup\{i:T_i\leq x\}$$

za svaki $x \geq 0$.

Varijable $(\xi_i)_i$ ponekad nazivamo međuvremenima obnavljanja, a varijable T_i trenucima obnove. Primijetimo u slučaju kada je $F \sim \text{Expo}(\lambda)$, da je tada N ništa drugo nego Poissonov točkovni proces.

Promotrimo sada vezu subordinatora i procesa obnavljanja. Pretpostavimo kako je $X = (X_t)_{t\geq 0}$ složen Poissonov proces s intenzitetom $\lambda > 0$ i nenegativnim skokovima koji imaju zajedničku funkciju distribucije F. Tada je projekcija grafa $t \mapsto X_t(\omega)$ na vertikalnu (prostornu) os upravo proces obnavljanja. Primijetimo da tako generiran proces obnavljanja zanemaruje činjenicu koliko vremena subordinator provodi u nekom stanju x, a veličine skokova od X postaju njegova međuvremena obnavljanja.

Neka je $(N_x)_{x\geq 0}$ proces obnavljanja generiran pomoću složenog Poissonovog subordinatora te uzmimo $(T_k)_{k\geq 1}$ kao gore. Dodatno definiramo $T_0 = 0$. Neka je $x > 0$ neko stanje. Slučajna varijabla $T_{N_x+1} - x$ označava koliko je još vremena ostalo do iduće obnove iz perspektive stanja x (gledanje u budućnost). S druge pak strane, varijabla $x - T_{N_x}$ označava koliko je već vremena prošlo od prethodne obnove iz perspektive stanja x (gledanje u prošlost).

Prisjetimo se kako je vrijeme zaustavljanja (vrijeme prvog prolaska preko stanja x) definirano s

$$\tau_x^+ = \inf\{t > 0 : X_t > x\}.$$

Tada se prebačaj prvog prolaska preko stanja x definira kao $X_{\tau_x^+} - x$, odnosno za koliku veličinu skoka proces X preskoči stanje x. Podbačaj prvog prolaska preko stanja x definira se kao $x - X_{\tau_x^+-}$, odnosno koliko je proces X bio udaljen od stanja x prije nego li ga je preskočio. Lako se vidi da za tako definirane varijable vrijedi

$$X_{\tau_x^+} - x = T_{N_x+1} - x, \quad x - X_{\tau_x^+-} = x - T_{N_x} \tag{3.6}$$

jer je prostorna komponenta procesa X upravo vremenska komponenta generiranog procesa obnavljanja.

Ono što nas zanima jest distribucija prebačaja i podbačaja te ćemo u idućem poglavlju promatrati njihova asimptotska svojstva. Prije no što iskažemo distribuciju prebačaja i podbačaja u slučaju općenitog subordinatora, pokazat ćemo specijalnu verziju za složene Poissonove subordinatore jer možemo vrlo efikasno iskoristiti relaciju (3.6) i teoriju procesa obnavljanja.

Lema 3.3.2. *Neka je N proces obnavljanja s međuvremenima obnavljanja s distribucijom F te neka je V mjera obnavljanja generirana s F. Tada vrijedi sljedeće.*

(i) Za $u > 0$ i $0 \leq y \leq x$ vrijedi

$$\mathbb{P}\left(T_{N_x+1} - x \in \mathrm{d}u, x - T_{N_x} \in \mathrm{d}y\right) = V(x - \mathrm{d}y)F(\mathrm{d}u + y). \tag{3.7}$$

(ii) Pretpostavimo kako F generira integrabilnu slučajnu varijablu s očekivanjem μ. Tada za $u > 0$ i $y > 0$ vrijedi

$$\lim_{x \nearrow \infty} \mathbb{P}\left(T_{N_x+1} - x > u, x - T_{N_x} > y\right) = \frac{1}{\mu} \int_{u+y}^{\infty} \bar{F}(z) \mathrm{d}z$$

gdje je $\bar{F}(z) = 1 - F(z)$.

Dokaz. (i) Za $k \geq 0$ vrijedi $\{N_x = k\} = \{T_k \leq x < T_{k+1}\}$. Stoga vrijedi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(T_{N_x+1} - x > u, x - T_{N_x} > y, N_x = k) = \mathbb{P}\left(T_{k+1} - x > u, x - T_k > y, T_k \leq x \leq T_{k+1}\right) \\
&\quad = \mathbb{P}\left(T_{k+1} > x + u, T_k < x - y, T_k \leq x < T_{k+1}\right) = \mathbb{P}\left(T_k + \xi_{k+1} - x > u, x - T_k > y\right) \\
&\quad = \int_{[0,x-y)} \mathbb{P}\left(\xi_{k+1} > x - v + u, x - y > v\right) F^{*k}(\mathrm{d}v) = \int_{[0,x-y)} F^{*k}(\mathrm{d}v) \bar{F}(x - v + u).
\end{aligned}$$

gdje smo u trećoj jednakosti iskoristili

$$\begin{aligned}
\{T_{k+1} > x + u\} &\subset \{T_{k+1} > x\} \\
\{T_k < x - y\} &\subset \{T_k \leq x\}.
\end{aligned}$$

Koristeći zakon potpune vjerojatnosti te zamjenom varijabli $z = x - y$ dobivamo

$$\mathbb{P}\left(T_{N_x+1} - x > u, x - T_{N_x} > y\right) = \int_{(y,x]} V(x - \mathrm{d}z) \bar{F}(z + u)$$

što je točno u iskazu prvog dijela leme u diferencijalnom obliku.

(ii) Koristimo prvi dio ove leme. Za $u > 0$ i $0 \leq y < x$ imamo da

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T_{N_x+1} - x > u, x - T_{N_x} \geq y\right) &= \int_{(u,\infty)} \int_{[0,x-y)} V(\mathrm{d}v) F(x - v + \mathrm{d}\theta) \\
&= \int_{(0,\infty)} F(\mathrm{d}t) \int_{[0,x)} V(\mathrm{d}v) \mathbf{1}_{(t > u+x-v)} \mathbf{1}_{(v \in [0,x-y])} \\
&= \int_{(0,\infty)} F(\mathrm{d}t) \int_{[0,x)} V(\mathrm{d}v) \mathbf{1}_{(v > u+x-t)} \mathbf{1}_{(v \in [0,x-y])}
\end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti napravili zamjenu varijabli $t = \theta + x - v$. Uveli smo indikatore kako bismo osigurali da $v \geq \max(u + x - t, 0)$ te $u + x - t \leq x - y$.

Sada integracijom dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{N_x+1} - x > u, x - T_{N_x} \geq y) = \\ &= \int_{(0,\infty)} F(\mathrm{d}t)\{\max(V(x-y) - V(u+x-t), 0)\}\mathbf{1}_{(t\geq u+y)} \\ &= \int_{(u+y,\infty)} F(\mathrm{d}t)\{V(x-y) - V(u+x-t)\}\mathbf{1}_{(t<u+x)} \\ &+ \int_{(u+x,\infty)} F(\mathrm{d}t)V(x-y).\end{aligned}$$

Koristeći Teorem 3.2.2., dio (*iii*), dobivamo da za svaki $\varepsilon > 0$ i dovoljno veliki x

$$\int_{(u+x,\infty)} F(\mathrm{d}t)V(x-y) \leq \frac{1+\varepsilon}{\mu}\int_{(u+x,\infty)} tF(\mathrm{d}t) \longrightarrow 0$$

kada $x \to \infty$ zbog pretpostavke $\mu = \int_{(0,\infty)} tF(\mathrm{d}t) < \infty$.

Pretpostavimo kako je X složen Poissonov subordinator s jediničnim intenzitetom te distribucijom skokova F. Tada za taj subordinator vrijedi

$$\mathbb{E}(\tau_x^+) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\tau_x^+ > t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathbb{P}(X_t \leq x)\,\mathrm{d}t = V(x)$$

gdje je druga jednakost posljedica skupovne jednakosti $\{\tau_x^+ > t\} = \{X_t \leq x\}$, a treća jednakost slijedi iz

$$\int_0^\infty \mathbb{P}(X_t \leq x)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \int_0^x \mathbb{P}(X_t \in \mathrm{d}s)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \int_0^\infty \mathbb{P}(X_t \in \mathrm{d}s)\,\mathrm{d}t = \int_0^x U(\mathrm{d}s) = U(x)$$

te iz činjenice da za složen Poissonov subordinator vrijedi (pogledati dokaz Teorema 3.2.5.)

$$U(x) = \frac{\rho}{\lambda}\sum_{k\geq 0}\rho^k F^{*k}(x) = \sum_{k\geq 0} F^{*k}(x) = V(x)$$

gdje za X specijalno uzimamo da $q = \eta = 0$ te imamo $\lambda = 1$. Ako primijenimo jako Markovljevo svojstvo na τ_x^+ (pogledati [2], poglavlje 1.2.), dobivamo da

$$V(x+y) = \mathbb{E}\left(\tau_{x+y}^+\right) = \mathbb{E}\left(\tau_x^+ + \mathbb{E}_{X_{\tau_x^+}}\left(\tau_{x+y}^+\right)\right) \leq \mathbb{E}(\tau_x^+) + \mathbb{E}\left(\tau_y^+\right) = V(x) + V(y),$$

to jest subaditivnost funkcije V. Sada, imamo da $V(x-y) - V(u+x-t) \leq V(t-u-y)$, pa neprekidnost zdesna od V i Teorem 3.2.2., dio (*iii*), daju kako je integrand $F(\mathrm{d}t)\{V(x-y) -$

$V(u+x-t)\}\mathbf{1}_{(t<u+x)}$ dominiran s $tF(\mathrm{d}t)$. Kako je $\int_{(0,\infty)} tF(\mathrm{d}t) < \infty$, teorem o dominiranoj konvergenciji zajedno s Teoremom 3.2.2., dio (i), daju

$$\lim_{x\nearrow\infty} \int_{(u+y,\infty)} F(\mathrm{d}t)\{V(x-y) - V(u+x-t)\}\mathbf{1}_{(t<u+x)}$$
$$= \frac{1}{\mu}\int_{(u+y,\infty)} (t-u-y)F(\mathrm{d}t) = \frac{1}{\mu}\int_{u+y}^{\infty} \bar{F}(t)\mathrm{d}t$$

gdje je druga jednakost posljedica parcijalne integracije. □

Želja nam je sada proširiti Lemu 3.3.2. na općenite ubijene subordinatore. Međutim, tu se javljaju razni problemi. Prvo, za razliku od složenog Poissonovog subordinatora, općeniti subordinator može biti ubijen prije nego što uopće dođe do nekog stanja x. Stoga je za očekivati kako prebačaj općenito može poprimiti vrijednost ∞ s pozitivnom vjerojatnosti. Nadalje, ako je $\Pi(0,\infty) = \infty$, tada će u svakom konačnom vremenskom intervalu biti beskonačno mnogo skokova. I treće, ako distribucija skokova F ne isključuje masu u izoliranim točkama, tada se s pozitivnom vjerojatnosti može dogoditi da subordinator preskoči neko stanje tako da ga u stvari pogodi. Takav slučaj se naziva *puzanje* preko fiksnog stanja, ali ga u ovom radu nećemo promatrati.

Pokazuje se da za općeniti ubijen subordinator vrijedi vrlo slična tvrdnja kao prvi dio prethodne leme. Stoga je sljedeći teorem proširenje prvog dijela prethodne leme.

Teorem 3.3.3. *Neka je X ubijen subordinator. Tada za $u > 0$ i $y \in [0,x]$ vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(X_{\tau_x^+} - x \in \mathrm{d}u, x - X_{\tau_x^+-} \in \mathrm{d}y\right) = U(x-\mathrm{d}y)\Pi(y+\mathrm{d}u). \tag{3.8}$$

Dokaz. Pretpostavimo kako su f i g pozitivne, neprekidne i ograničene funkcije. Dodatno pretpostavimo kako je $f(0) = f(\infty) = 0$. Posljednji uvjet na funkciju f osigurava da je produkt $f\left(X_{\tau_x^+} - x\right) g\left(x - X_{\tau_x^+-}\right)$ strogo pozitivan ako i samo ako X prilikom prvog prelaska preko stanja x isti strogo preskoči prije trenutka njegova ubijanja. Stoga možemo zapisati očekivanje od $f\left(X_{\tau_x^+} - x\right) g\left(x - X_{\tau_x^+-}\right)$ u terminima pripadne Poissonove slučajne mjere. Pretpostavimo kako je ubijen subordinator X po distribuciji jednak regularnom subordinatoru Y koji je ubijen s intenzitetom $\eta \geq 0$. U tom slučaju je

$$\mathbb{E}\left(f\left(X_{\tau_x^+} - x\right) g\left(x - X_{\tau_x^+-}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\int_{[0,\infty)} \int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-\eta t}\phi(t,\theta)N(\mathrm{d}t \times \mathrm{d}\theta)\right)$$

gdje definiramo funkciju $(t,\theta) \mapsto \phi(t,\theta)$ s

$$\phi(t,\theta) = \mathbf{1}_{(Y_{t-} \leq x)}\mathbf{1}_{(Y_{t-}+\theta > x)} f\left(Y_{t-} + \theta - x\right) g\left(x - Y_{t-}\right).$$

Ideja da iskoristimo kompenzacijsku formulu navedenu u Teoremu 4.4. u [6]. Lako se vidi da funkcija ϕ zadovoljava sve tri pretpostavke navedenog teorema, pa imamo

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,x]} g(y) \int_{(0,\infty)} f(u)\mathbb{P}\left(X_{\tau_x^+} - x \in \mathrm{d}u, x - X_{\tau_x^+ -} \in \mathrm{d}y\right) \\
&\qquad = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \mathrm{d}t \cdot \mathrm{e}^{-\eta t} \mathbf{1}_{(Y_{t-} \leq x)} g\left(x - Y_{t-}\right) \int_{(x - Y_{t-}, \infty)} f\left(Y_{t-} + \theta - x\right) \Pi(\mathrm{d}\theta)\right) \\
&\qquad = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \mathrm{d}t \cdot \mathrm{e}^{-\eta t} \mathbf{1}_{(Y_t \leq x)} g\left(x - Y_t\right) \int_{(x - Y_t, \infty)} f\left(Y_t + \theta - x\right) \Pi(\mathrm{d}\theta)\right) \\
&\qquad = \int_{[0,x]} g(x-z) \int_{(x-z,\infty)} f(z + \theta - x)\Pi(\mathrm{d}\theta) \int_0^\infty \mathrm{d}t \cdot \mathrm{e}^{-\eta t}\mathbb{P}\left(Y_t \in \mathrm{d}z\right) \\
&\qquad = \int_{[0,x]} g(x-z) \int_{(x-z,\infty)} f(z + \theta - x)\Pi(\mathrm{d}\theta) U(\mathrm{d}z) \\
&\qquad = \int_{[0,x]} g(y) \int_{(0,\infty)} f(u)\Pi(\mathrm{d}u + y) U(x - \mathrm{d}y)
\end{aligned}$$

gdje posljednja jednakost slijedi iz zamjene varijabli $y = x - z$ te zatim $u = \theta - y$. Kako su f i g bile proizvoljne funkcije (iako s nekim pretpostavkama), imamo iz prethodnih jednakosti

$$\mathbb{P}\left(X_{\tau_x^+} - x \in \mathrm{d}u, x - X_{\tau_x^+ -} \in \mathrm{d}y\right) = \Pi(\mathrm{d}u + y)U(x - \mathrm{d}y)$$

te je time pokazana tražena tvrdnja. □

Pokažimo da Lema 3.3.2 zaista slijedi iz prethodnog teorema. Zaista, za složen Poissonov subordinator imamo da $U(\mathrm{d}x) = 1/\lambda V(\mathrm{d}x)$ na $(0, \infty)$ te isto tako vrijedi $\Pi(\mathrm{d}x) = \lambda F(\mathrm{d}x)$, pa je stoga $U(x - \mathrm{d}y)\Pi(\mathrm{d}u + y) = V(x - \mathrm{d}y)F(u + \mathrm{d}y)$. Ako uzmemo $f(\cdot) = \mathbf{1}_{(\cdot > u)}$ i $g(\cdot) = \mathbf{1}_{(\cdot > y)}$ dobivamo tvrdnju Leme 3.3.2 iz prethodnog teorema.

Nakon generalizacije prvog dijela Leme 3.3.2, možemo se zapitati što je s generalizacijom drugog dijela. Zaista, vrijedi sljedeći teorem kojeg ovdje samo iskazujemo, no dokaz je adaptacija dokaza drugog dijela navedene leme uz pomoć Korolara 3.2.4.

Teorem 3.3.4. *Neka je X regularni subordinator s konačnim očekivanjem $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ te pretpostavimo kako U nema rešetkasti nosač. Tada za $u > 0$ i $y \geq 0$ u smislu slabe konvergencije mjera vrijedi*

$$\lim_{x \nearrow \infty} \mathbb{P}\left(X_{\tau_x^+} - x \in \mathrm{d}u, x - X_{\tau_x^+ -} \in \mathrm{d}y\right) = \frac{1}{\mu}\mathrm{d}y\Pi(y + \mathrm{d}u).$$

Napomena 3.3.5. *Neka su $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ konačne mjere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Kažemo da niz mjera $(\mu_n)_{n\geq 1}$ slabo konvergira prema mjeri μ ako vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \int f \mathrm{d}\mu_n = \int f \mathrm{d}\mu$$

za svaku realnu, ograničenu, neprekidnu funkciju f. Pokazuje se kako se slaba konvergencija mjera može okarakterizirati na razne načine, više o tome u [8] kao Teorem 13.12.

3.4 Dynkin-Lampertijeva asimptotika

U ovom potpoglavlju promatramo granično ponašanje zajedničke distribucije relativnog prebačaja i podbačaja. Kako bismo to uspješno analizirali, ispostavlja se kako ključnu ulogu imaju spora varijacija te s njima povezani tauberijanski teoremi.

Definicija 3.4.1. *Za funkciju $f : [0,\infty) \to (0,\infty)$ kažemo da regularno varira u nuli s indeksom $\rho \in \mathbb{R}$ ako za svaki $\lambda > 0$ vrijedi*

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^{\rho}.$$

Ako prethodni limes vrijedi kada $x \nearrow \infty$, tada za f kažemo da regularno varira u beskonačnosti s indeksom ρ. Ako je $\rho = 0$, tada za f kažemo da varira sporo u nuli (ili u beskonačnosti).

Nije teško za pokazati da se svaka regularno varirajuća funkcija f može zapisati u obliku

$$f(x) = x^{\rho} L(x)$$

gdje je L neka sporo varirajuća funkcija. Kako je bilo koja funkcija koja ima strogo pozitivan i konačan limes u beskonačnosti sporo varirajuća u beskonačnosti, vidimo da je klasa regularno varirajućih funkcija neprazna.

Uvodimo notaciju $f \sim g$ ako $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = 1$ za neki naznačeni $a \in [-\infty,\infty]$, to jest ako f i g imaju *slično* granično ponašanje u nekoj zadanoj točki. Neka je U neka mjera na $[0,\infty)$ te s $\mathcal{L}U$ označimo njenu Laplaceovu transformaciju. Sljedeća dva teorema nam daju vezu između graničnog ponašanja U i njezine Laplaceove transformacija $\mathcal{L}U$ preko sporo varirajuće funkcije L.

Teorem 3.4.2. *Neka je L sporo varirajuća funkcija u beskonačnosti, $\rho \in [0,\infty)$ i U mjera na $[0,\infty)$. Tada je ekvivalentno:*

(i) $\mathcal{L}U(\theta) \sim \theta^{-\rho} L(1/\theta)$ *kada* $\theta \searrow 0$.

(ii) $U(x) \sim x^{\rho} L(x)/\Gamma(1+\rho)$ *kada* $x \nearrow \infty$.

Ako je mjera U apsolutno neprekidna u odnosu na Lebesgueovu mjeru, tada s u možemo označiti njezinu gustoću (Radon-Nikodymovu derivaciju) . Za funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kažemo da je završno monotona na svojoj domeni ako postoji neki $M > 0$ takav da je ona monotona na $(-\infty, -M)$ te na (M, ∞). Sljedeći teorem daje sličnu tvrdnju kao i onaj prethodni, samo sada umjesto U promatramo njezinu gustoću u.

Teorem 3.4.3. *Neka je L sporo varirajuća funkcija u beskonačnosti, $\rho \in (0, \infty)$ i U mjera na $[0, \infty)$ koja ima završno monotonu gustoću u. Tada je ekvivalentno:*

(i) $\mathcal{L}U(\theta) \sim \theta^{-\rho} L(1/\theta)$ *kada* $\theta \searrow 0$.

(ii) $u(x) \sim x^{\rho-1} L(x)/\Gamma(\rho)$ *kada* $x \nearrow \infty$.

Prisjetimo se kako je gama funkcija poopćenje faktorijela te da za nju vrijedi $\Gamma(1+\rho) = \rho\Gamma(\rho)$. Stoga je Teorem 3.4.3. prirodna posljedica Teorema 3.4.2. Intuitivno govoreći, asimptotika *derivacije* od U je slična asimptotici derivacije funkcije s kojom U ima slično ponašanje u beskonačnosti (naravno, pod uvjetom da U ima gustoću te da je ona završno monotona). Vrlo slično vrijedi i sljedeći korolar.

Korolar 3.4.4. *Izjave Teorema 3.4.2. i Teorema 3.4.3. su i dalje istinite ako zamijenimo $\theta \to \infty$ u (i) te $x \to 0$ u (ii).*

Prethodna dva teorema i korolar nećemo dokazivati, ali njihovi se dokazi mogu pronaći u [6] pod oznakama Theorem 5.13. i Theorem 5.14.

Sada smo konačno spremni iskazati Dynkin-Lampertijev teorem. On naime kaže da je za asimptotsko ponašanje zajedničke razdiobe relativnog prebačaja i podbačaja dovoljno pretpostaviti regularnu varijaciju pripadnog Laplaceovog eksponenta subordinatora.

Teorem 3.4.5. *Neka je X subordinator s Laplaceovim eksponentom Φ koji regularno varira u nuli (ili u beskonačnosti) s indeksom $\alpha \in (0, 1)$. Tada, u smislu slabe konvergencije mjera, vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_{\tau_x^+} - x}{x} \in \mathrm{d}u, \frac{x - X_{\tau_x^+ -}}{x} \in \mathrm{d}y\right) \longrightarrow \frac{\alpha \sin \pi\alpha}{\pi}(1-y)^{\alpha-1}(y+u)^{-\alpha-1}\mathrm{d}y\mathrm{d}u \tag{3.9}$$

za $u > 0$ i $y \in [0, 1)$ kada $x \nearrow \infty$ (ili $x \searrow 0$).

Lako se iz (3.9) pokaže da je konvergencija marginalnih razdioba jednaka

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_{\tau_x^+} - x}{x} \in \mathrm{d}u\right) \to \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} u^{-\alpha}(1+u)^{-1}\mathrm{d}u$$

za $u \geq 0$ te

$$\mathbb{P}\left(\frac{x - X_{\tau_x^+ -}}{x} \in \mathrm{d}y\right) \to \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} y^{-\alpha}(1-y)^{\alpha-1}\mathrm{d}y$$

za $y \geq 0$ u smislu slabe konvergencije kada $x \nearrow \infty$ (ili $x \searrow 0$). Ovi limesi se ponekad nazivaju generaliziranim zakonom arkus sinusa gdje je klasičan zakon arkus sinusa specijalan slučaj za $\alpha = 1/2$.

Prije nego što dokažemo Teorem 3.4.5., pokažimo neka svojstva regularno varirajućeg Laplaceovog eksponenta subordinatora. Korištenjem teorema o dominiranoj konvergenciji lako se pokaže da je Φ diferencijabilna beskonačno mnogo puta i striktno konkavna. Dodatno imamo $\Phi'(0+) = \mathbb{E}(X_1) \in (0, \infty]$, $\Phi(0) = 0$ te $\Phi(\infty) = -\ln \mathbb{P}(X_1 = 0)$. Iz zadnje jednakosti vidimo da je $\Phi(\infty) < \infty$ ako i samo ako je X složen Poissonov subordinator. Pokaže se da također vrijedi i

$$\lim_{\theta \nearrow \infty} \frac{\Phi(\theta)}{\theta} = d$$

gdje je d parametar drifta subordinatora.

Ako Φ regularno varira u nuli s indeksom $\alpha \in \mathbb{R}$, tada $\Phi(0) = 0$ nužno implicira $\alpha \geq 0$. Ako je $\mathbb{E}(X_1) < \infty$, tada je pak $\Phi(\theta)/\theta \sim \mathbb{E}(X_1)$ kada $\theta \searrow 0$, pri čemu nužno imamo $\alpha = 1$. S druge strane, ako je $\mathbb{E}(X_1) = \infty$, tada $\Phi(\theta)/\theta$ teži u beskonačnost kada $\theta \searrow 0$, stoga je nužno $\alpha < 1$. U svakom slučaju imamo da je nužno $\alpha \in [0, 1]$.

Pretpostavimo sada kako Φ regularno varira u beskonačnosti s indeksom $\alpha \in \mathbb{R}$. Kako je $\Phi(\infty) > 0$, opet imamo $\alpha \geq 0$. Nadalje, kako $\Phi(\theta)/\theta$ teži prema konstanti d kako $\theta \nearrow \infty$, nužno slijedi $\alpha \leq 1$. U svakom slučaju i ovdje imamo da je $\alpha \in [0, 1]$.

Prije nego što dokažemo Teorem 3.4.5., dokažimo prvo jednu pomoćnu tvrdnju. Prisjetimo se kako je U potencijalna mjera generirana subordinatorom.

Lema 3.4.6. *Neka subordinator X ima Laplaceov eksponent Φ koji regularno varira u nuli (ili u beskonačnosti) s indeksom $\alpha \in [0, 1]$. Tada za sve $\lambda > 0$ vrijedi*

(i) $U(\lambda x)\Phi(1/x) \to \lambda^{\alpha}/\Gamma(1 + \alpha)$ *kada* $x \nearrow \infty$ *(ili* $x \searrow 0$*),*

(ii) ako je $\alpha \in [0, 1)$*, tada* $\Pi(\lambda x, \infty)/\Phi(1/x) \to \lambda^{-\alpha}/\Gamma(1 - \alpha)$ *kada* $x \nearrow \infty$ *(ili* $x \searrow 0$*).*

Dokaz. (*i*) Vrijedi da U ima sljedeću Laplaceovu transformaciju

$$\mathcal{L}U(q) = \int_{[0,\infty)} e^{-qx} U(dx) = \frac{1}{\Phi(q)}.$$

Pretpostavimo da Φ regularno varira u nuli s indeksom $\alpha \in [0, 1]$. To znači da $\Phi(\theta) \sim \theta^{\alpha} L(1/\theta)$ kako $\theta \searrow 0$ gdje je L sporo varirajuća u beskonačnosti. To možemo izreći i ovako: $1/\Phi(1/x) \sim x^{\alpha}/L(x)$ kada $x \nearrow \infty$. Lako se pokaže da je funkcija $1/L$ i dalje sporo varirajuća u beskonačnosti, pa Teorem 3.4.2. implicira da $U(x) \sim x^{\alpha}/(L(x)\Gamma(1 + \alpha))$ kada $x \nearrow \infty$. Sada dobivamo

$$U(\lambda x)\Phi\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{L(x)}{x^{\alpha}} \cdot \frac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha}}{L(\lambda x)\Gamma(1 + \alpha)} \to \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(1 + \alpha)}$$

jer je L sporo varirajuća funkcija. Slično se pokaže i za slučaj kada je Φ regularno varirajuća u beskonačnosti.

(ii) Lako se pokaže da

$$\frac{\Phi(\theta)}{\theta} = d + \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-\theta x}\Pi(x,\infty)\mathrm{d}x$$

pa vidimo da je $\frac{\Phi(\theta)}{\theta}$ u biti Laplaceova transformacija mjere $d\delta_0(\mathrm{d}x) + \Pi(x,\infty)\mathrm{d}x$. Pretpostavimo i ovdje kako Φ regularno varira u nuli s indeksom $\alpha \in [0,1)$. Stoga imamo da $\Phi(\theta)/\theta \sim \theta^{-(1-\alpha)}L(1/\theta)$ za neku funkciju L koja sporo varira u beskonačnosti. Teorem 3.4.3. sada implicira da $\Pi(x,\infty) \sim x^{-\alpha}L(x)/\Gamma(1-\alpha)$, pa se slično kao i u računu u dijelu (i) pokaže da

$$\frac{\Pi(\lambda x,\infty)}{\Phi(1/x)} \to \frac{\lambda^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

te je time pokazana tvrdnja (ii). Slično se pokaže i za slučaj kada je Φ regularno varirajuća u beskonačnosti. □

Primijetimo kako u drugom dijelu prethodne leme zahtjev $\alpha \in [0,1)$ implicira $d = 0$. U slučaju strogo pozitivnog drifta imali bismo $\alpha = 1$. Sada smo konačno spremni dokazati Teorem 3.4.5.

Dokaz. Dajemo dokaz za slučaj kada $x \nearrow \infty$. Dokaz za $x \searrow 0$ je vrlo sličan ovom. Krećemo od tvrdnje Teorema 3.3.3., pa za $\theta \in (0,1]$ i $\phi > 0$ imamo da

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_{\tau_x^+} - x}{x} \in \mathrm{d}\phi, \frac{x - X_{\tau_x^+ -}}{x} \in \mathrm{d}\theta\right) = U(x(1-\mathrm{d}\theta))\Pi(x(\theta+\mathrm{d}\phi)).$$

Stoga, za $0 < a < b < 1$ i $c > 0$ vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{X_{\tau_x^+} - x}{x} > c, \frac{x - X_{\tau_x^+ -}}{x} \in (a,b)\right) &= \int_{(a,b)} \Pi(x(\theta+c),\infty)U(x(1-\mathrm{d}\theta)) \\ &= \int_{(1-b,1-a)} \frac{\Pi(x(1-\eta+c),\infty)}{\Phi(1/x)} U(x\mathrm{d}\eta)\Phi(1/x)\end{aligned} \tag{3.10}$$

gdje je druga jednakost jednostavna zamjena varijabli $\theta = 1-\eta$. Iz prethodne leme, dijela (i), imamo da

$$U(x\mathrm{d}\eta)\Phi(1/x) \longrightarrow \eta^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}\eta}{\Gamma(\alpha)}$$

u smislu slabe konvergencije. Iz dijela (*ii*) te iste leme imamo da

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\Pi(x(1-\eta+c),\infty)}{\Phi(1/x)} = \frac{(1-\eta+c)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Kako je $\Pi(x(1-\eta+\phi),\infty)$ monotona u η, može se pokazati da je gornja konvergencija uniformna na $(1-b, 1-a)$. Stoga desna strana u relaciji (3.10) konvergira prema

$$\int_{(1-b,1-a)} \frac{(1-\eta+c)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\eta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{d}\eta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_{(a,b)} (\theta+c)^{-\alpha}(1-\theta)^{\alpha-1}\mathrm{d}\theta$$

kada $x \nearrow \infty$, a to je ekvivalentno

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_{\tau_x^+}-x}{x} \in \mathrm{d}u, \frac{x-X_{\tau_x^+-}}{x} \in \mathrm{d}y\right) \longrightarrow \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}(y+u)^{-\alpha-1}(1-y)^{\alpha-1}\mathrm{d}y\mathrm{d}u$$

u smislu slabe konvergencije. Konačno, ako iskoristimo svojstvo gama funkcije $1/(\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)) = (\sin\pi\alpha)/\pi$, dobivamo

$$\lim_{x \nearrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_{\tau_x^+}-x}{x} \in \mathrm{d}u, \frac{x-X_{\tau_x^+-}}{x} \in \mathrm{d}y\right) = \frac{\alpha\sin\pi\alpha}{\pi}(y+u)^{-\alpha-1}(1-y)^{\alpha-1}\mathrm{d}y\mathrm{d}u$$

te je time dokazan Dynkin-Lampertijev teorem. □

Poglavlje 4

Regenerativne strukture

U ovom posljednjem poglavlju promatramo tzv. kompozicijske i particijske strukture. Dajemo osnovne alate kako ih možemo konstruirati, a jedan od njih su i subordinatori.

4.1 Konstrukcija uređene kutije

Kao uvod u daljnja razmatranja valja se podsjetiti nekih osnovnih pojmova iz područja kombinatorike. *Kompozicija* nenegativnog cijelog broja n je uređeni niz $\lambda^o = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ nenegativnih cijelih brojeva takvih da $|\lambda^o| := \sum_j \lambda_j = n$. O kompoziciji treba razmišljati kao o nizu n loptica gdje između svake dvije može stajati zid te se na taj način tvori jedna kompozicija. *Uređena kompozicija* cijelog broja n dodatno enumerira loptice brojevima od 1 do n.

Ako zanemarimo poredak u kompoziciji $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ dobivamo *particiju* $\lambda^\downarrow$ nenegativnog cijelog broja $|\lambda|$. Kažemo da u tom slučaju kompozicija $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ ima oblik particije $\lambda^\downarrow$.

Definicija 4.1.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Slučajna kompozicija nenegativnog cijelog broja n je preslikavanje κ_n iz Ω u skup svih mogućih kompozicija broja n. Slučajna particija nenegativnog cijelog broja n je preslikavanje π_n iz Ω u skup svih mogućih particija broja n.*

Primijetimo kako u prethodnoj definiciji nije potrebno zahtijevati izmjerivost navedenih preslikavanja jer su skupovi u kodomeni konačni, pa su sva preslikavanja izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}$ i partitivni skup svih kompozicija/particija broja n.

Postoji mnogo načina na koji možemo konstruirati slučajne particije ili kompozicije, no u ovom radu promatramo tzv. konstrukciju uređene kutije. Neka je $\mathcal{R}$ slučajan zatvoren podskup od $[0, 1]$. Relativni komplement $\mathcal{R}^c = (0, 1) \setminus \mathcal{R}$ je otvoreni skup u $(0, 1)$, pa postoji njegova kanonska reprezentacija u obliku prebrojive unije međusobno disjunktnih otvorenih intervala koje nazivamo *raskoracima* od $\mathcal{R}$. Neka su $U_1, U_2, \ldots$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s uniformnom distribucijom na $(0,1)$, nezavisne i od $\mathcal{R}$. Točke U_i grupiramo u klastere na sljedeći način: U_i i U_j pripadaju istom klasteru ako se realiziraju u istom raskoraku od $\mathcal{R}$. Ako se kojim slučajem U_i realizira u $\mathcal{R}$, U_i tvori jedinični klaster sam sa sobom. Za $n \in \mathbb{N}_0$ prebrojimo s lijeva na desno koliko ima varijabli $U_1, \ldots, U_n$ u svakom klasteru te na taj način formiramo slučajnu kompoziciju κ_n.

Kako bi bila malo jasnija gornja konstrukcija promotrimo jedan konkretan primjer. Ako κ_6 poprimi vrijednost $(3,1,2)$, to znači da su se tri varijable od $U_1, \ldots, U_6$ realizirale u istom raskoraku na taj način tvoreći klaster, jedinični klaster koji je nastao tako da se, ili jedna od $U_1, \ldots, U_6$ realizirala u jednom raskoraku, ili se neka U_j realizirala u $\mathcal{R}$, te ako postoje dvije U_j u istom raskoraku.

U regularnom slučaju $\mathcal{R}$ ima Lebesgueovu mjeru jednaku nuli $\mathbb{P}$-g.s., pa je $U_j \in \mathcal{R}$ događaj vjerojatnosti nula. U neregularnom slučaju $\mathcal{R}$ može imati strogo pozitivnu Lebesgueovu mjeru s nekom pozitivnom vjerojatnosti.

Ako s j označimo lopticu koja odgovara varijabli U_j dobivamo slučajnu uređenu particiju K_n broja n. Ovako definirana slučajna uređena particija je izmjenjiva, u smislu da permutacija oznaka loptica ne mijenja distribuciju od K_n. Stoga, sve uređene particije broja n koje odgovaraju istoj neuređenoj kompoziciji nužno imaju istu vjerojatnost. Ako u K_n izuzmemo lopticu s oznakom n, dobivamo neku uređenu particiju broja $n-1$. Na taj način vidimo da je niz $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ konzistentan. Takva konzistentnost se prirodno poopćuje na niz $(\kappa_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definicija 4.1.2. *Niz slučajnih kompozicija $(\kappa_n)_{n=1}^{\infty}$ se naziva kompozicijskom strukturom ako vrijedi sljedeće: za svaki $n > 1$ uvjetno na $\kappa_n = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ slučajna kompozicija κ_{n-1} ima istu distribuciju kao i kompozicija koja se dobije tako da se u $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ dio λ_j reducira za 1 s vjerojatnosti λ_j/n.*

Glavni rezultat ovog potpoglavlja je sljedeći teorem o egzistenciji (i jedinstvenosti) slučajnog zatvorenog skupa $\mathcal{R}$ koji generira zahtijevanu kompozicijsku strukturu. Teorem navodimo bez dokaza, a ideja se može vidjeti u [4] pod oznakom Theorem 2.2.

Teorem 4.1.3. *Za svaku kompozicijsku strukturu $\kappa = (\kappa_n)_{n=1}^{\infty}$ postoji jedinstvena distribucija slučajnog zatvorenog skupa $\mathcal{R}$ koja generira kompozicijsku strukturu κ u smislu konstrukcije uređene kutije.*

Definiramo kompozicijsku vjerojatnosnu funkciju (oznaka CPF iz eng. *composition probability function*) p° kompozicijske strukture κ kao

$$p^\circ(\lambda^\circ) := \mathbb{P}(\kappa_n = \lambda^\circ), \quad |\lambda^\circ| = n, \ n = 1, 2, \ldots$$

Za fiksni n to je upravo distribucija slučajne kompozicije κ_n. Konzistencija kompozicijske strukture implicira jednakost

$$p^\circ(\lambda^\circ) = \sum_{\mu^\circ} c(\lambda^\circ, \mu^\circ)\, p^\circ(\mu^\circ) \tag{4.1}$$

gdje μ° prolazi svim mogućim oblicima uređenih particija broja $n+1$ koji se mogu dobiti tako da dodamo jedinicu u neki λ_j u uređenu particiju oblika λ°, a $c(\lambda^\circ, \mu^\circ)$ označava pripadnu vjerojatnost prelaska s μ° na λ°.

Ako zanemarimo poredak dijelova u kompozicijskoj strukturi κ dobivamo particijsku strukturu $\pi = (\pi_n)_{n=1}^\infty$ gdje π_n ima oblik κ_n. Lako se pokaže da particijska struktura zadovoljava sličnu konzistenciju kao i kompozicijska struktura u Definiciji 4.1.2. Particijska vjerojatnosna funkcija (oznaka PPF iz eng. *partition probability function*) p se definira kao

$$p\left(\lambda^\downarrow\right) := \mathbb{P}\left(\pi_n = \lambda^\downarrow\right), \quad \left|\lambda^\downarrow\right| = n, n = 1, 2, \ldots$$

gdje p zadovoljava sličnu rekurzivnu relaciju kao p° u (4.1).

4.2 Regenerativne kompozicijske strukture

Neka je $\kappa = (\kappa_n)_n$ kompozicijska struktura. Definicijsko svojstvo konzistencije kaže da se κ_n može dobiti kao reducirana kopija od κ_{n+1}. To svojstvo proširujemo u sljedećoj definiciji.

Definicija 4.2.1. *Kompozicijska struktura $\kappa = (\kappa_n)_n$ naziva se regenerativnom kompozicijskom strukturom ako za sve $1 \leq m \leq n$ vrijedi sljedeće svojstvo izbacivanja: uvjetno na informaciju da je prvi dio od κ_n jednak m, izbacivanjem prvog dijela iz κ_n dobiva se ostatak koji je po distribuciji jednak κ_{n-m}.*

Slična definicija se može primjeniti i na slučajnu uređenu particiju $K = (K_n)_n$ pri čemu moramo prenumerirati loptice u skladu s rastućom bijekcijom ostatka numeracije i skupa $\{1, \ldots, n-m\}$.

Označimo s F_n prvi dio od κ_n te označimo s $q(n:m)$ njegovu distribuciju

$$q(n:m) := \sum_{|\lambda^\circ|=n, \lambda_1=m} p^\circ(\lambda^\circ).$$

Odmah iz definicije slijedi da je κ regenerativna kompozicijska struktura ako i samo ako njezina CPF ima sljedeći produktni oblik

$$p^\circ(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \prod_{j=1}^{k} q\left(\Lambda_j : \lambda_j\right), \tag{4.2}$$

gdje je $\Lambda_j = \lambda_j + \cdots + \lambda_k$ za $1 \leq j \leq k$. Skup $q = (q(n : m), 1 \leq m \leq n)$ nazivamo *dekremencijskom matricom* kompozicijske strukture κ. Kako je p° jedinstveno određena iz q, dekremencijska matrica u potpunosti određuje distribucije od κ_n te distribucije od pripadnih slučajnih uređenih particija K.

Za danu regenerativnu kompozicijsku strukturu κ neka $\pi = (\pi_n)_n$ označava pripadnu particijsku strukturu (vrijedi $\pi_n = \kappa_n^{\downarrow}$). Za particiju $\lambda^{\downarrow}$ broja n i za svaki $m \in \lambda^{\downarrow}$ definiramo *jezgru izbacivanja*

$$d\left(\lambda^{\downarrow}, m\right) = \mathbb{P}\left(F_n = m | \pi_n = \lambda^{\downarrow}\right)$$

koja daje vjerojatnost da je prvi dio slučajne kompozicije κ_n jednak m uvjetno na informaciju da kompozicija ima oblik $\lambda^{\downarrow}$. Svojstvo izbacivanja regenerativne kompozicijske strukture κ implicira da PPF particijske strukture π zadovoljava

$$p\left(\lambda^{\downarrow}\right) d\left(\lambda^{\downarrow}, m\right) = q(n : m) p\left(\lambda^{\downarrow} \setminus \{m\}\right)$$

gdje se distribucija prvog dijela F_n, $q(n : \cdot)$, može izraziti u terminima jezgre izbacivanja

$$q(n : m) = \sum_{\{\lambda^{\downarrow} : |\lambda^{\downarrow}| = n, m \in \lambda^{\downarrow}\}} d\left(\lambda^{\downarrow}, m\right) p\left(\lambda^{\downarrow}\right).$$

Sada ćemo promatrati dva načina na koji možemo konstruirati slučajan zatvoren skup $\mathcal{R}$. To su konstrukcija *lomljenja štapića* i konstrukcija pomoću subordinatora.

Konstrukcija lomljenja štapića

Neka su $(W_i)_{i \geq 1}$ nezavisne kopije neke slučajne varijable W s nosačem na $(0, 1]$. Ideja je sljedeća: štapić jedinične duljine prelomimo na slučajnom mjestu određenom s prvom kopijom od W u dva dijela. Lijevi dio *zamrznemo*, dok desni dio štapića shvatimo kao štapić jedinične duljine te ga opet prelomimo u skladu s drugom kopijom od W te se na taj način postupak iterira dalje u beskonačnost.

Ako s Y_k, $k \geq 1$ označimo točke u kojima smo prelomili originalni štapić, vrijedi sljedeće

$$Y_k = 1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - W_i), \quad k \geq 1$$

gdje dodatno definiramo $Y_0 = 0$. Jasno je da je $0 < Y_k < 1$ za sve $k \geq 1$ te je niz $(Y_k)_k$ neopadajuć $\mathbb{P}$-g.s. Zato uzimamo $\mathcal{R} = \cup_{k=1}^{\infty} \{Y_k\}$, pa stoga imamo vrlo praktičnu strukturu raskoraka $\mathcal{R}^c = \cup_{k=0}^{\infty} (Y_k, Y_{k+1})$.

Ako je $\mathbb{P}(W = 1) > 0$, tada s vjerojatnosti jedan kad-tad odaberemo završnu točku na štapiću, pa je točaka prijeloma konačno mnogo gotovo sigurno. U suprotnom je broj točaka prebrojiv gotovo sigurno te se one gotovo sigurno gomilaju prema desnom rubu štapića. Iz induktivne konstrukcije skupa $\mathcal{R}$ vrijedi sljedeće regenerativno svojstvo

$$\frac{(\mathcal{R} \cap [Y_1, 1]) - Y_1}{1 - Y_1} \stackrel{d}{=} \mathcal{R}, \tag{4.3}$$

to jest, ako skaliramo skup $\mathcal{R}$ samo na dio desno od prvog prijeloma te adekvatno normiramo dobivamo po distribuciji početni skup.

Neka je sada $\kappa = (\kappa_n)_n$ kompozicijska struktura dobivena iz $\mathcal{R}$. Ako interval $(0, Y_1)$ sadrži barem jedan U_j, tada je prvi dio kompozicije κ_n jednak broju U_j-ova koji su upali u taj interval. U suprotnom, uvjetno na Y_1 svi U_j-ovi su iz uniformne distribucije na $[Y_1, 1]$. Zajedno s (4.3) imamo da

$$q(n : m) = \binom{n}{m} \mathbb{E}\left(W^m (1 - W)^{n-m}\right) + \mathbb{E}(1 - W)^n q(n : m)$$

pa je zakon veličine prvog dijela u kompoziciji κ_n jednak

$$q(n : m) = \frac{\binom{n}{m} \mathbb{E}\left(W^m (1 - W)^{n-m}\right)}{\mathbb{E}\left(1 - (1 - W)^n\right)}$$

za $m = 1, \dots, n$.

Gornja konstrukcija je poznatija pod nazivom *Bernoullijevo sito*. Krećemo od n loptica. U prvom koraku izaberemo i fiksiramo W te označimo ili ne označimo svaku lopticu s vjerojatnosti W nezavisno jednu od druge. Sve koje smo označili uzimamo da čine prvi dio u kompoziciji te ih više ne koristimo dalje u postupku. Ako kojim slučajem nije bila označena niti jedna loptica, korak zanemarujemo te procesuiramo dalje. U sljedećem koraku opet izaberemo i fiksiramo W te nastavljamo dalje postupak sve dok ne potrošimo sve loptice. Kako je $W > 0$ $\mathbb{P}$-g.s. jasno je da ovakav postupak završava u konačno mnogo koraka.

Uzmimo sada jednu konkretnu razdiobu za W. Pretpostavimo kako W ima beta distribuciju s parametrima $\gamma, \theta > 0$, tj. neka je distribucija zadana s

$$\nu(\mathrm{d}x) = \frac{x^{\gamma-1}(1 - x)^{\theta-1}\mathrm{d}x}{\mathrm{B}(\gamma, \theta)}$$

gdje je s $\mathrm{B}(\cdot, \cdot)$ označena beta funkcija. Za takav specifičan izbor distribucije od W dobivamo pojednostavljenje izraza za dekremencijsku matricu

$$q(n : m) = \binom{n}{m} \frac{(\gamma)_m (\theta)_{n-m}}{(\gamma + \theta)_n - (\theta)_n}, \quad 1 \leq m \leq n.$$

gdje je $(z)_k = z(z-1)\cdots(z-k+1)$. Pretpostavimo dodatno da je $\gamma = 1$. Tada se dekremencijska matrica svodi na

$$q(n:m) = \binom{n}{m}\frac{(\theta)_{n-m}m!}{(\theta+1)_{n-1}n}.$$

Uvrštavanjem u (4.2) dobivamo da je CPF jednaka

$$p^{\circ}_{0,\theta}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k) = \frac{\theta^k n!}{(\theta)_n}\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{\Lambda_j}. \tag{4.4}$$

Kompozicijska struktura s kompozicijskom vjerojatnosnom funkcijom jednakom kao u (4.4) poznatija je pod nazivom Ewensova regenerativna kompozicijska struktura.

Konstrukcija pomoću subordinatora

Primijetimo kako smo u konstrukciji lomljenja štapića imali lijepo svojstvo da se raskoraci mogu poredati s lijeva na desno: $(0,Y_1),(Y_1,Y_2),\ldots$ Međutim, tome ne mora uvijek biti slučaj, točke od $\mathcal{R}$ mogu se gomilati oko nule pa nemamo direktno svojstvo (4.3).

Za dani zatvoreni $\mathcal{R}\subseteq[0,1]$ definiramo *desnu* točku u odnosu na $x\in[0,1]$ kao $Z_x := \min\{\mathcal{R}\cap[x,1]\}$, to jest, desni rub raskoraka u kojem se x nalazi. U idućoj definiciji proširujemo regenerativno svojstvo skupa.

Definicija 4.2.2. *Za slučajan zatvoren $\mathcal{R}\subset[0,1]$ kažemo da je multiplikativno regenerativan (m-regenerativan) ako vrijedi:*

(i) Z_x je nezavisan od $(1-Z_x)^{-1}((\mathcal{R}\cap[Z_x,1])-Z_x)$,

(ii) Uvjetno na $Z_x<1$ vrijedi sljedeća distribucijska jednakost

$$\frac{(\mathcal{R}\cap[Z_x,1])-Z_x}{1-Z_x}\overset{d}{=}\mathcal{R}$$

za svaki $x\in[0,1)$.

Za m-regenerativan $\mathcal{R}$, svojstvo izbacivanja generiranog κ dobivamo ako promotrimo raskorak u kojem se nalazi $U_{(1,n)} = \min(U_1,\ldots,U_n)$. Tada je $q(n:\cdot)$ distribucija rednog broja najveće uređene statistike koja se zadnja realizirala u tom raskoraku.

Neka je $(S_t)_{t\geq 0}$ (ubijen) subordinator jedinstveno zadan s parametrima drifta $d\geq 0$ i Lévyjevom mjerom $\tilde{\nu}$ pomoću Laplaceovog eksponenta

$$\Phi(\theta) = \rho d + \int_{(0,\infty]}\left(1-e^{-\theta x}\right)\tilde{\nu}(\mathrm{d}x).$$

Neka je $\tilde{\mathcal{R}} = \overline{\{S_t : t \geq 0\}}$ zatvarač slike subordinatora. Zbog nezavisnosti i stacionarnosti prirasta od $(S_t)_{t\geq 0}$ slijedi da je $\tilde{\mathcal{R}}$ regenerativan. Naime, ako za $y > 0$ promatramo njegovu pripadnu desnu točku Z_y, uvjetno na $Z_y < \infty$, slučajan skup $\left(\tilde{\mathcal{R}} - Z_y\right) \cap [0, \infty]$ je jednako distribuiran kao i $\tilde{R}$ te je nezavisan od $[0, Z_y] \cap \tilde{R}$ i Z_y. Može se pokazati da vrijedi i obrat: svaki regenerativan skup je zatvorena slika nekog subordinatora gdje je taj subordinator jedinstveno zadan s parametrima $(d, \tilde{\nu})$ do na množenje pozitivnim realnim brojem.

Proces $(1 - \exp(-S_t), t \geq 0)$ nazivamo *multiplikativnim subordinatorom.* To je jasno neopadajući proces te s $\mathcal{R} = 1 - \exp(-\tilde{\mathcal{R}})$ označimo njegovu sliku. Kako je $\tilde{\mathcal{R}}$ regenerativan, slijedi da je $\mathcal{R}$ m-regenerativan.

Kako vrijeme prolazi, multiplikativan subordinator prolazi od 0 do 1. Stoga je prirodno transformirati Lévyjevu mjeru $\tilde{\nu}$ u multiplikativnu verziju ν na $(0, 1]$ pomoću preslikavanja $y \mapsto 1 - e^{-y}$. Mjera ν je neprekidno-vremenski analogon postupka korištenog u konstrukciji lomljenja štapića: ako je duljina preostalog dijela štapića jednaka z, tada lomimo dio dugačak $z(1 - x)$ s intenzitetom $\nu(\mathrm{d}x)$.

U nastavku mjeru ν nazivamo Lévyjevom mjerom (kada nema dvosmislenosti s originalnom Lévyjevom mjerom). U tom slučaju Laplaceov eksponent možemo zapisati kao

$$\Phi(\theta) = \theta d + \int_0^1 \left(1 - (1 - x)^\theta\right) \nu(\mathrm{d}x). \tag{4.5}$$

Za $1 \leq m \leq n$ uvodimo binomne momente od ν

$$\Phi(n : m) = \binom{n}{m} \int_0^1 x^m (1 - x)^{n-m} \nu(\mathrm{d}x) + \mathbf{1}_1(m) n d$$

gdje je $\mathbf{1}_1(m)$ jednak jedan ako i samo ako $m = 1$ (u suprotnom je jednak nuli). Iz definicije od $\Phi(n : m)$ jasno se vidi da vrijedi $\Phi(n) = \sum_{m=1}^n \Phi(n : m)$.

Interpretacija je sljedeća: sjetimo se kako $\Phi(\theta)$ predstavlja intenzitet s kojim subordinator prolazi kroz (slučajnu) razinu, eksponencijalno distribuiranu s intenzitetom θ nezavisnu od $(S_t)_{t\geq 0}$. Slično, $\Phi(n)$ je intenzitet s kojim multiplikativan subordinator prolazi kroz $U_{(1,n)}$ te $\Phi(n : m)$ predstavlja intenzitet s kojim multiplikativan subordinator prolazi od razine ispod $U_{(1,n)}$ do neke razine između $U_{(m,n)}$ i $U_{(m+1,n)}$. Stoga, događaj u kojem prvi prolazak kroz $U_{(1,n)}$ obuhvati točno m od n razina određenih s uniformnim varijablama U_j je jednak događaju da je prvi dio kompozicije κ_n jednak točno m pa imamo

$$q(n : m) = \frac{\Phi(n : m)}{\Phi(n)} \tag{4.6}$$

što je generalna reprezentacija dekremencijske matrice regenerativne kompozicijske strukture određene s m-regenerativnim skupom.

Primjer 4.2.3. *U slučaju $d = 0$ i konačne Lévyjeve mjere $\tilde{\nu}$ znamo da je pripadni subordinator zapravo složen Poissonov proces bez drifta. Ako skaliramo ν na vjerojatnosnu mjeru, u tom slučaju je slika pripadnog multiplikativnog subordinatora skup točaka dobiven konstrukcijom lomljenja štapića gdje W ima zakon razdiobe ν.*

Pokazuje se da vrijedi i obrat prethodnih razmatranja: svaka se regenerativna kompozicijska struktura može generirati iz konstrukcije uređene kutije pomoću slike multiplikativnog subordinatora.

Teorem 4.2.4. *Neka je κ proizvoljna regenerativna kompozicijska struktura. Tada postoji jedinstveni multiplikativni subordinator određen parametrima drifta $d \geq 0$ i Lévyjeve mjere ν koji generira κ pomoću konstrukcije uređene kutije.*

Napomena 4.2.5. *Jedinstvenost u prethodnom teoremu podrazumijeva jedinstvenost do na pozitivnu multiplikativnu konstantu parametara.*

Dokaz. Konzistencija i regenerativno svojstvo implicira da je prvih n redova minore $(q(n' : \cdot), n' \leq n)$ jedinstveno određeno zadnjim redom od $q(n : \cdot)$ preko formula

$$q\left(n' : m'\right) = \frac{q_0\left(n' : m'\right)}{1 - q_0\left(n' : 0\right)}, \quad 1 \leq m' \leq n' \tag{4.7}$$

gdje je $q_0(n' : \cdot)$ zadan s

$$q_0\left(n' : m'\right) = \sum_{m=1}^{n} q(n : m) \frac{\binom{n-m}{n'-m'} \cdot \binom{m}{m'}}{\binom{n}{n'}}, \quad 0 \leq m' \leq n'. \tag{4.8}$$

O κ_n treba razmišljati kao o postavljanju F_n loptica u kutiju označenu s B te $n - F_n$ loptica u preostale kutije. Formula u (4.8) daje distribuciju broja loptica preostalih u B nakon što smo slučajno izvadili $n - n'$ loptica pri čemu smo uzeli u obzir mogućnost $m' = 0$ u slučaju da u potpunosti ispraznimo B. Formula u (4.7) kaže da je distribucija od $F_{n'}$ jednaka distribuciji broja loptica koje su ostale u B uvjetno na to da je barem jedna loptica preostala.

Ako u (4.7) uvrstimo $n' = n - 1$ dobivamo

$$\frac{q(n : m)}{1 - q(n+1 : 1)/(n+1)} = \frac{m+1}{n+1} q(n+1 : m+1) + \frac{n+1-m}{n+1} q(n+1 : m),$$

a zamjenom $q(n : m) = \Phi(n : m)/\Phi(n)$ te korištenjem $\Phi(n) = \sum_{m=1}^{n} \Phi(n : m)$ dobivamo linearnu rekurziju

$$\Phi(n : m) = \frac{m+1}{n+1} \Phi(n+1 : m+1) + \frac{n-m+1}{n+1} \Phi(n+1 : m).$$

Iteriranjem te rekurzije unazad dobivamo da

$$\Phi(n:m) = \binom{n}{m} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{j+1} \binom{m}{j} \Phi(n-m+j), \quad 1 \leq m \leq n.$$

Kako je $\Phi(n : m) \geq 0$, to je niz $(\Phi(n))_n$ potpuno alternirajući, to jest, njegove iterirajuće razlike također imaju alternirajuće predznake. Iz toga slijedi da je niz $(\Phi(n+1) - \Phi(n))_n$ u potpunosti monoton, pa prema Hausdorffovom teoremu o momentima (vidjeti [1], poglavlje 4.) postoji konačna mjera na $[0, 1]$ čiji su momenti upravo $\Phi(n)$.

Iz toga slijedi izraz (4.5) za nenegativne cijele brojeve θ za neke parametre $d \geq 0$ i mjeru ν. Međutim, (4.5) vrijedi i za proizvoljni $\theta > 0$ zbog jedinstvenosti interpolacije. $\square$

Bibliografija

[1] D. D. Ang, R. Gorenflo, V. K. Le i D. D. Trong, *Moment theory and some inverse problems in potential theory and heat conduction*, Springer, 2004.

[2] J. Bertoin, *Lévy processes*, Cambridge university press, Cambridge, 1996.

[3] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, sv. 2, John Wiley & Sons, 2008.

[4] A. V. Gnedin, *Regeneration in random combinatorial structures*, Probability Surveys **7** (2010), 105–156.

[5] I. Karatzas i S. E. Shreve, *Brownian motion*, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer, 1998.

[6] A. E. Kyprianou, *Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[7] P. A. Meyer, *Probability and potentials*, Blaisdell Pub. Co., 1966.

[8] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 1987.

[9] K. Sato, *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, Cambridge university press, Cambridge, 1999.

[10] J. L. Schiff, *The Laplace transform: theory and applications*, Springer Science & Business Media, 2013.

Sažetak

U ovom radu promatramo Lévyjeve procese, subordinatore te primjene u regenerativnim strukturama. U prvom poglavlju uvodimo formalnu definiciju Lévyjevih procesa te s njima povezanih beskonačno djeljivih distribucija. Uvodimo karakteristične funkcije te iskazujemo osnovni teorem o karakterističnom eksponentu beskonačno djeljive distribucije. Konstruiramo i dajemo tri najvažnija primjera Lévyjevih procesa: Poissonov točkovni proces, složen Poissonov proces te Brownovo gibanje.

U drugom poglavlju iskazujemo i dokazujemo fundamentalan teorem Lévy-Itôve dekompozicije. To činimo konstrukcijom apstraktne Poissonove slučajne mjere te integracijom odgovarajućih determinstičkih funkcija s obzirom na Poissonovu slučajnu mjeru.

U trećem poglavlju promatramo neopadajuće Lévyjeve procese, tzv. subordinatore. Uvodimo pojmove potencijalnih mjera i mjera obnavljanja. Promatramo vezu subordinatora i procesa obnavljanja te dokazujemo asimptotiku relativnog prebačaja i podbačaja.

U četvrtom poglavlju promatramo slučajne kompozicije i particije nenegativnih cijelih brojeva, tzv. kompozicijske strukture te koristimo teoriju subordinatora kako bismo izgradili takve strukture.

Summary

In this master's thesis, we study Lévy processes, subordinators and their applications in random combinatorial structures. In the first chapter we introduce formal definition of Lévy processes and infinitely divisible distributions that are related to them. Characteristic functions are widely implemented in this thesis. Therefore, we state basic theorem about the characteristic exponent of infinitely divisible distribution. Three most important examples of Lévy processes are given: Poisson point process, compound Poisson process and Brownian motion.

Lévy-Itô decomposition is the essential topic of second chapter. We prove that theorem using construction that involves Poisson random measures and integration of non-random functions with respect to Poisson random measure.

In third chapter we investigate non-decreasing Lévy processes, subordinators. Introducing potential measures and renewal measures, we examine the connection between subordinators and renewal processes and we prove the asymptotic behaviour of relative overshoot and undershoot.

Random composition and partition structures represent key concepts of the concluding chapter. Subordinator theory is used to construct regenerative composition structures.

Životopis

Rođen sam 8. listopada 1996. godine u Karlovcu. Nakon završene osnovne škole, 2011. godine upisujem Gimnaziju Karlovac, prirodoslovno-matematički smjer, koju završavam s odličnim uspjehom 2015. godine. Te iste godine upisujem na matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu preddiplomski smjer matematike koji završavam 2018. godine kada upisujem diplomski studij financijske i poslovne matematike.

Tijekom preddiplomskog i diplomskog studija držao sam demonstrature iz kolegija: Kombinatorna i diskretna matematika, Algebarske strukture, Modeli geometrije i Mjera i integral. Moja područja interesa u matematici su teorija vjerojatnosti i statistika, kao i njihova primjena u financijama i sličnim područjima. U slobodno vrijeme rekreativno se bavim sportom - trčanje, biciklizam i teretana.