Rektifikabilni lukovi

Okić, Patricija

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:204487

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Patricija Okić

REKTIFIKABILNI LUKOVI

Diplomski rad

Zagreb, srpanj, 2020

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Patricija Okić

REKTIFIKABILNI LUKOVI

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, srpanj, 2020

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svom mentoru, izv. prof. dr. sc. Zvonku Iljazoviću na uloženom trudu, strpljenju i vremenu pri izradi diplomskog rada, tim više zbog brojnih izazova, uspješno savladanih, koje je sa sobom donijela trenutna pandemija. Također, zahvaljujem obitelji na podršci tijekom čitavog mog obrazovanja, a ovaj rad posvećujem ocu za kojeg bi voljela da je doživio završetak mog studiranja. Na kraju, najviše hvala Danijelu čija su ljubav i potpora upotpunile moj život i samo studiranje.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu će se proučavati pojmovi luka i duljine luka. Cilj rada je precizno definirati i dokazati razne činjenice vezane uz te pojmove. Diplomski rad podijeljen je na dva poglavlja, funkcije omeđene varijacije te lukovi i rektifikabilnost.

U prvom poglavlju ćemo definirati pojmove poput infimuma i supremuma, norme na $\mathbb{R}^n$, subdivizije segmenta, varijacije funkcije s obzirom na subdiviziju, funkcije omeđene varijacije za koju navodimo i neke primjere, otvorene kugle, omeđenog skupa i funkcije. Dokazat ćemo da je funkcija omeđene varijacije ujedno i omeđena funkcija, a da obrat te tvrdnje ne vrijedi, prikazat ćemo kroz nekoliko primjera. Na kraju poglavlja dokazat ćemo da je unija omeđenih skupova također omeđen skup.

U drugom poglavlju ćemo definirati neprekidnu funkciju, limes funkcije, niz, limes niza, podniz, omeđen i konvergentan niz te točku nakupljanja. Uspostavit ćemo vezu neprekidnosti funkcije i nizova. Dokazat ćemo jedinstvenost limesa niza i razne tvrdnje koje se tiču međuvrijednosti neprekidnih funkcija. Definirat ćemo strogo monotone funkcije i dokazati da je neprekidna injekcija definirana na segmentu strogo monotona funkcija. Proširit ćemo definicije neprekidnih funkcija i nizova na $\mathbb{R}^n$. Promatrat ćemo neprekidnost kompozicije neprekidnih funkcija, inverzne funkcije te zbroja i umnoška neprekidnih funkcija. Uvodimo pojam luka koji ćemo povezati s neprekidnom bijekcijom $f : [a, b] \longrightarrow X$ za $X \subseteq \mathbb{R}^n$ pri čemu su $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Proučit ćemo monotonost inverzne funkcije monotone bijekcije. Uvodimo pojam parametrizacije luka i rektifikabilnog luka za kojeg dokazujemo da ne ovisi o parametrizaciji luka. Na kraju, definiramo duljinu rektifikabilnog luka kao totalnu varijaciju njegove parametrizacije.

Poglavlje 1

Funkcije omeđene varijacije

1.1 Infimum i supremum

Definicija 1.1.1. *Neka je $M \subseteq \mathbb{R}$. Neka je $L \in \mathbb{R}$. Za L kažemo da je* ***gornja međa*** *skupa M ako za svaki $x \in M$ vrijedi $x \leqslant L$. Za podskup $M \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je* ***odozgo omeđen*** *ako ima bar jednu gornju među.*

Neka su $M \subseteq \mathbb{R}$ i $L \in \mathbb{R}$. Kažemo da je L ***supremum*** *skupa M ako je najmanja gornja međa od L, tj. ako je L gornja međa od M i za svaku gornju među L' od M vrijedi $L \leqslant L'$.*

Propozicija 1.1.2. *Neka je $M \subseteq \mathbb{R}$ te neka je L gornja međa od M. Tada je L supremum skupa M ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $x \in M$ takav da je $L - \varepsilon < x$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je L supremum od M. Neka je $\varepsilon > 0$. Pretpostavimo da ne postoji $x \in M$ takav da je $L - \varepsilon < x$. Tada za svaki $x \in M$ vrijedi $x \leqslant L - \varepsilon$. Iz ovoga slijedi da je $L - \varepsilon$ gornja međa skupa M. Ovo je kontradikcija s pretpostavkom da je L supremum od M, jer je L najmanja gornja međa. Stoga postoji $x \in M$ takav da je $L - \varepsilon < x$.

Pretpostavimo da za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $x \in M$ takav da je $L - \varepsilon < x$. Neka je L' gornja međa skupa M. Tvrdimo da je $L \leqslant L'$. Pretpostavimo suprotno, tj. $L' < L$. Definiramo $\varepsilon = L - L'$. Tada je $\varepsilon > 0$ pa iz pretpostavke slijedi da postoji $x \in M$ takav da je $L - \varepsilon < x$. Iz definicije broja ε slijedi da je $L' = L - \varepsilon$. Prema tome, $L' < x$ što je u kontradikciji s pretpostavkom da je L' gornja međa skupa M. Zaključujemo da je $L \leqslant L'$. Time smo dokazali da je L supremum skupa M. □

Uočimo da je supremum skupa, ako postoji, **jedinstven**. Naime, pretpostavimo da su L_1 i L_2 supremumi skupa M. Tada je L_1 supremum skupa M, a L_2 gornja međa skupa M. Iz definicije supremuma slijedi $L_1 \leqslant L_2$. Analogno dobivamo $L_2 \leqslant L_1$ pa je $L_1 = L_2$.

Supremum skupa M označavamo kao **sup** M.

Primjer 1.1.3. *Neka je $L \in \mathbb{R}$. Tada je L na trivijalan način gornja međa praznog skupa.*

Dakle, prazan skup je odozgo omeđen skup. Kada bi postojao L takav da je $L = sup\, \emptyset$, onda bi za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedilo da je $L \leqslant x$, jer je x gornja međa praznog skupa. To je očito nemoguće. Dakle, prazan skup nema supremum.

Prethodni primjer pokazuje da skup koji ima supremum mora biti neprazan. Nadalje, svaki skup koji ima supremum mora biti odozgo omeđen, jer je supremum ujedno i gornja međa. Dakle, svaki skup koji ima supremum mora biti neprazan i odozgo omeđen.

Obrat ove tvrdnje također vrijedi: svaki neprazan odozgo omeđen skup ima supremum. Za dokaz te činjenice trebamo tzv. **aksiom potpunosti** koji sad navodimo.

Aksiom potpunosti: Neka su S i T neprazni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $x \leqslant y$, za sve $x \in S$ i $y \in T$. Tada $\exists\, z \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leqslant z \leqslant y$ za sve $x \in S$ i $y \in T$.

Propozicija 1.1.4. *Neka je M neprazan odozgo omeđen skup. Tada M ima supremum.*

Dokaz. Neka je N skup svih gornjih međa od M. Tada je $N \neq \emptyset$ jer je M odozgo omeđen. Za $\forall x \in M$ i $\forall y \in N$ vrijedi $x \leqslant y$ jer je y gornja međa od M. Iz aksioma potpunosti slijedi da postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leqslant z \leqslant y$ za $\forall x \in M$ i $\forall y \in N$. Zbog prve nejednakosti, z je gornja međa od M. Iz druge nejednakosti slijedi da je z najmanja gornja međa od M. Dakle, z je supremum od M. □

Definicija 1.1.5. *Neka su $M \subseteq \mathbb{R}$ i $L \in \mathbb{R}$. Kažemo da je L* ***donja međa*** *od M ako je za $\forall x \in M$, $L \leqslant x$. Za skup koji ima bar jednu donju među kažemo da je* ***odozdo omeđen****.*

Neka su $M \subseteq \mathbb{R}$ i $L \in \mathbb{R}$. Kažemo da je L ***infimum*** *skupa M ako je L najveća donja međa od M, tj. ako je L donja međa od M i za svaku donju među L' od M vrijedi $L' \leqslant L$.*

Sljedeća propozicija se dokazuje analogno kao i za supremum.

Propozicija 1.1.6. *Neka je $M \subseteq \mathbb{R}$, L donja međa od M. Tada je L infimum skupa M ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $x \in M$ takav da je $x < L + \varepsilon$.*

Analogno supremumu i infimum skupa je **jedinstven**. Infimum skupa M označavamo kao **inf** M. Kao i u slučaju supremuma, zaključujemo da prazan skup nema infimum. Nadalje, svaki skup koji ima infimum mora biti neprazan i odozdo omeđen.

Propozicija 1.1.7. *Neka je M neprazan odozdo omeđen skup. Tada M ima infimum.*

Dokaz. Neka je N skup svih donjih međa od M. Vrijedi $N \neq \emptyset$. Za svaki $x \in N$ i za svaki $y \in M$ je $x \leqslant y$. Prema aksiomu potpunosti postoji z takav da je $x \leqslant z \leqslant y$, za svaki $x \in N$ i svaki $y \in M$. Iz ovoga lako zaključujemo da je z infimum skupa M. □

Definicija 1.1.8. *Neka je $M \subseteq \mathbb{R}$ te $a \in M$. Kažemo da je a* ***maksimum*** *skupa M ako je za $\forall x \in M$, $x \leqslant a$.*

Uočimo sljedeće: ako je a maksimum skupa M, onda je a supremum od M. Naime, iz definicije slijedi da je a gornja međa od M. Za svaku gornju među L od M vrijedi $a \leqslant L$ jer je $a \in M$.

Definicija 1.1.9. *Neka je $M \subseteq \mathbb{R}$ te $a \in M$. Kažemo da je a* ***minimum*** *skupa M ako je za $\forall x \in M$, $a \leqslant x$.*

Analogno maksimumu vidimo da i minimum skupa M mora biti infimum skupa M.

Primjer 1.1.10. *Neka je $M = \langle -\infty, 0 \rangle$. Tada je 0 supremum skupa M.*

Naime, očito je 0 gornja međa skupa M. Nadalje, pretpostavimo da je L gornja međa skupa M. Tvrdimo da je $0 \leqslant L$.

Pretpostavimo suprotno, tj. $L < 0$. Odaberimo $z \in \mathbb{R}$ takav da je $L < z < 0$. Slijedi, $z \in M$ pa je $z \leqslant L$ jer je L gornja međa od M, no to je u kontradikciji s $L < z$. Dakle, vrijedi $0 \leqslant L$, tj. 0 je supremum skupa M. Budući da $0 \notin M$, skup M nema maksimum.

1.2 Norma na $\mathbb{R}^n$

Definicija 1.2.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$. Definiramo*

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Za broj $\|x\|$ kažemo da je ***norma*** *vektora x.*

Propozicija 1.2.2. (**CAUCHY-SCHWARZ-BUNJAKOVSKI NEJEDNAKOST**)
Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$(x_1 y_1 + ... + x_n y_n)^2 \leqslant (x_1^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + ... + y_n^2).$$

Dokaz. Definirajmo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kao

$$f(t) = (x_1 + t y_1)^2 + ... + (x_n + t y_n)^2.$$

Za $\forall t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(t) = (x_1^2 + ... + x_n^2) + 2(x_1 y_1 + ... + x_n y_n)t + (y_1^2 + ... + y_n^2)t^2.$$

Možemo pretpostaviti da je $y_1^2 + ... + y_n^2 > 0$, inače je propozicija trivijalna.

Vidimo da je f kvadratna funkcija, a iz definicije funkcije f slijedi $f(t) \geqslant 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Stoga je diskriminanta od f manja ili jednaka od 0, tj.

$$4(x_1y_1 + ... + x_ny_n)^2 \leqslant 4(x_1^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + ... + y_n^2),$$

iz čega slijedi tvrdnja propozicije. □

Propozicija 1.2.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi sljedeće:*

(1) $||x|| \geqslant 0$

(2) $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(3) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$

(4) $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$

Dokaz. Nije teško pokazati da vrijede tvrdnje (1) – (3).

Dokažimo tvrdnju (4).
Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$. Tada je (4) ekvivalentno s

$$||x + y||^2 \leqslant ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2,$$

odnosno s

$$(x_1 + y_1)^2 + ... + (x_n + y_n)^2 \leqslant x_1^2 + ... + x_n^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + y_1^2 + ... + y_n^2.$$

Sređivanjem izraza dobivamo da je posljednja nejednakost ekvivalentna s

$$x_1y_1 + ... + x_ny_n \leqslant ||x|| \cdot ||y||.$$

Ova nejednakost vrijedi jer iz propozicije 1.2.2. slijedi da je

$$|x_1y_1 + ... + x_ny_n| \leqslant ||x|| \cdot ||y||.$$

Time je propozicija dokazana. □

1.3 Varijacija funkcije

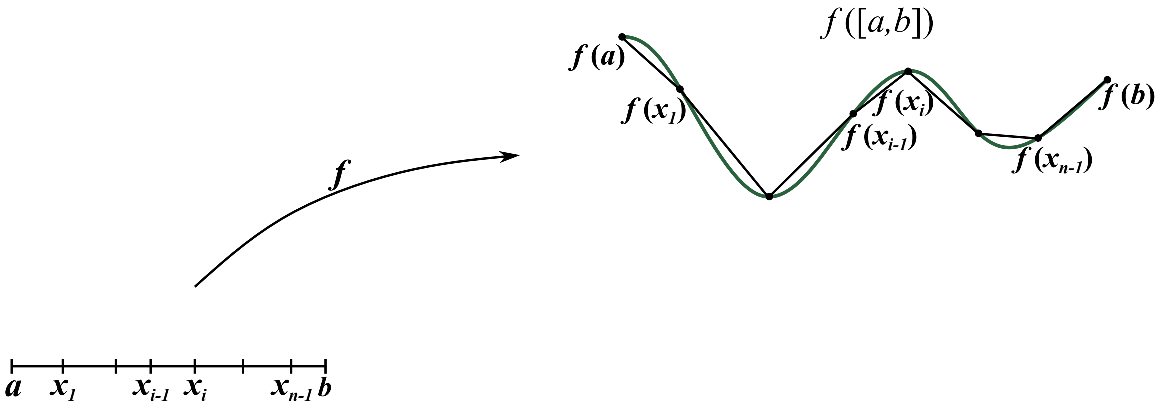
Definicija 1.3.1. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Za konačan niz realnih brojeva $x_0, ..., x_n$ kažemo da je* ***subdivizija*** *segmenta $[a, b]$ ako je*

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Definicija 1.3.2. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ funkcija. Neka je $x_0, ..., x_n$ subdivizija segmenta $[a, b]$. Definiramo*

$$V(f; x_0, ..., x_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \|f(x_{i+1}) - f(x_i)\|.$$

Za broj $V(f; x_0, ..., x_n)$ kažemo da je ***varijacija funkcije*** *f* ***s obzirom na subdiviziju*** *$x_0, ..., x_n$.*



Slika 1.1: Varijacija funkcije f s obzirom na subdiviziju $a = x_0, ..., x_n = b$

Primijetimo da je $V(f; x_0, ..., x_n) \geqslant 0$.

Definicija 1.3.3. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}$ te $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Kažemo da je f* ***funkcija omeđene varijacije*** *ako je skup*

$$\{V(f; x_0, ..., x_n) | x_0, ..., x_n \text{ subdivizija od } [a, b]\}$$

odozgo omeđen.

U tom slučaju definiramo $V(f)$ kao supremum tog skupa. Za $V(f)$ kažemo da je ***totalna varijacija*** *funkcije f.*

Primjer 1.3.4. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}$ te $c \in \mathbb{R}^n$. Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ funkcija definirana s $f(x) = c$, za svaki $x \in [a, b]$.*

Neka je $x_0, ..., x_n$ subdivizija segmenta $[a, b]$. Tada za svaki $i \in \{0, ..., n-1\}$ vrijedi $f(x_i) = f(x_{i+1})$. Stoga je $V(f; x_0, ..., x_n) = 0$ pa je

$$\{V(f; x_0, ..., x_n) | x_0, ..., x_n \text{ subdivizija od } [a, b]\} = \{0\}.$$

Prema tome, f je funkcija omeđene varijacije i $V(f) = 0$.

Primjer 1.3.5. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $x, y \in \mathbb{R}^n$. Neka je $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ funkcija definirana kao*

$$f(t) = (1-t)x + ty.$$

Neka je $t_0, ..., t_n$ subdivizija segmenta $[0, 1]$. Neka je $i \in \{0, ..., n-1\}$. Imamo:

$$\begin{aligned}
||f(t_{i+1}) - f(t_i)|| &= ||(1 - t_{i+1})x + t_{i+1}y - (1 - t_i)x - t_i y|| \\
&= ||(t_i - t_{i+1})x - (t_i - t_{i+1})y|| \\
&= ||(t_i - t_{i+1})(x - y)|| \\
&= |t_i - t_{i+1}| \cdot ||x - y|| \\
&= (t_{i+1} - t_i) \cdot ||x - y||.
\end{aligned}$$

Dakle, $||f(t_{i+1}) - f(t_i)|| = (t_{i+1} - t_i) \cdot ||x - y||$.
Stoga je

$$\begin{aligned}
V(f; t_0, ..., t_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} ||f(t_{i+1}) - f(t_i)|| \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \cdot ||x - y|| \\
&= ((t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + ... + (t_n - t_{n-1})) \cdot ||x - y|| \\
&= |t_n - t_0| \cdot ||x - y|| \\
&= (1 - 0) \cdot ||x - y|| \\
&= ||x - y||.
\end{aligned}$$

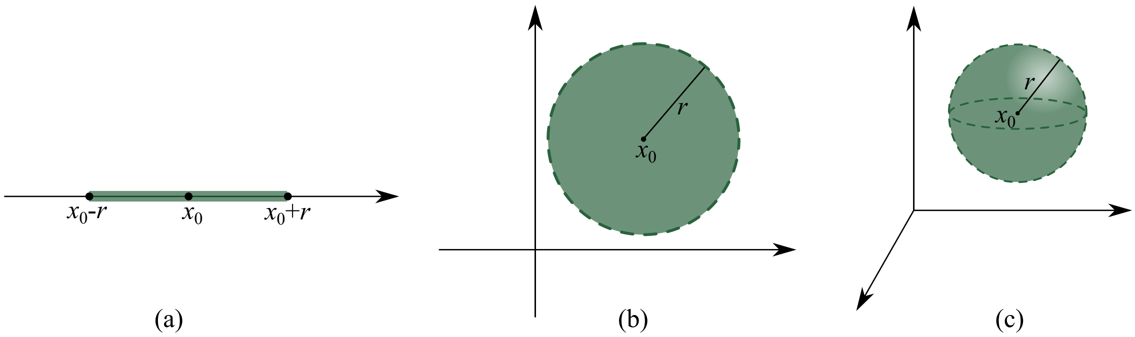
Dakle, $V(f; t_0, ..., t_n) = ||x - y||$.
Zaključujemo da je f funkcija omeđene varijacije te da je $V(f) = ||x - y||$.

1.4 Omeđene funkcije

Definicija 1.4.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$. Definiramo*

$$K(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}.$$

Za $K(x_0, r)$ kažemo da je ***otvorena kugla*** *u $\mathbb{R}^n$ oko x_0 radijusa r.*



Slika 1.2: Otvorena kugla u: (a) $\mathbb{R}$, (b) $\mathbb{R}^2$ i (c) $\mathbb{R}^3$.

Definicija 1.4.2. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Kažemo da je S* ***omeđen skup*** *u $\mathbb{R}^n$ ako postoje $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$ takvi da je*

$$S \subseteq K(x_0, r).$$

Propozicija 1.4.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Tada je S omeđen skup u $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako je skup $\{\|x - y\| \mid x, y \in S\}$ odozgo omeđen podskup od $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je S omeđen skup u $\mathbb{R}^n$. Tada postoje $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x_0, r)$. Neka su $x, y \in S$. Tada su $x, y \in K(x_0, r)$ pa je $\|x - x_0\| < r$ i $\|y - x_0\| < r$. Koristeći propoziciju 1.2.3. dobivamo:

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= \|x - x_0 + x_0 - y\| \leqslant \|x - x_0\| + \|x_0 - y\| \\
&= \|x - x_0\| + \|(-1) \cdot (y - x_0)\| \\
&= \|x - x_0\| + |-1| \cdot \|y - x_0\| \\
&= \|x - x_0\| + \|y - x_0\| < r + r = 2r.
\end{aligned}$$

Dakle, $\|x - y\| < 2r$. Zaključujemo da je $2r$ gornja međa skupa $\{\|x - y\| \mid x, y \in S\}$.

Pretpostavimo da je skup $\{\|x - y\| \mid x, y \in S\}$ odozgo omeđen. Odaberimo $L \in \mathbb{R}$ takav da je L gornja međa skupa $\{\|x - y\| \mid x, y \in S\}$. Ako je $S = \emptyset$, onda je S omeđen skup u $\mathbb{R}^n$ jer je S podskup svake otvorene kugle.

Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$. Odaberimo $a \in S$. Za sve $x, y \in S$ vrijedi

$$\|x - y\| \leqslant L$$

pa je posebno

$$\|a - a\| \leqslant L,$$

odnosno $0 \leqslant L$. Tvrdimo da je $S \subseteq K(a, L + 1)$.

Neka je $x \in S$. Zbog $x, a \in S$ vrijedi $\|x - a\| \leqslant L$ pa je

$$\|x - a\| < L + 1.$$

Prema tome, $x \in K(a, L + 1)$, tj. $S \subseteq K(a, L + 1)$. Dakle, S je omeđen skup u $\mathbb{R}^n$. □

Definicija 1.4.4. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, S skup te $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ funkcija. Kažemo da je f* ***omeđena funkcija*** *ako je $f(S)$ omeđen skup u $\mathbb{R}^n$.*

Propozicija 1.4.5. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ funkcija omeđene varijacije. Tada je f omeđena funkcija.*

Dokaz. Budući da je f funkcija omeđene varijacije, skup S je odozgo omeđen, gdje je

$$S = \{V(f; x_0, ..., x_n) \mid x_0, ..., x_n \text{ subdivizija od } [a, b]\}.$$

Neka je M gornja međa skupa S.

Neka je $x \in [a, b]$, $x \neq a, b$. Tada je a, x, b subdivizija segmenta $[a, b]$ te je $\|f(x) - f(a)\| + \|f(b) - f(x)\|$ varijacija funkcije f s obzirom na tu subdiviziju. Stoga je

$$\|f(x) - f(a)\| + \|f(b) - f(x)\| \leqslant M$$

pa je

$$\|f(x) - f(a)\| < M + 1.$$

Slijedi da je $f(x) \in K(f(a), M + 1)$. Očito je $f(a) \in K(f(a), M + 1)$. Nadalje, vrijedi $f(b) \in K(f(a), M + 1)$ jer je a, b subdivizija segmenta $[a, b]$ pa je

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M < M + 1.$$

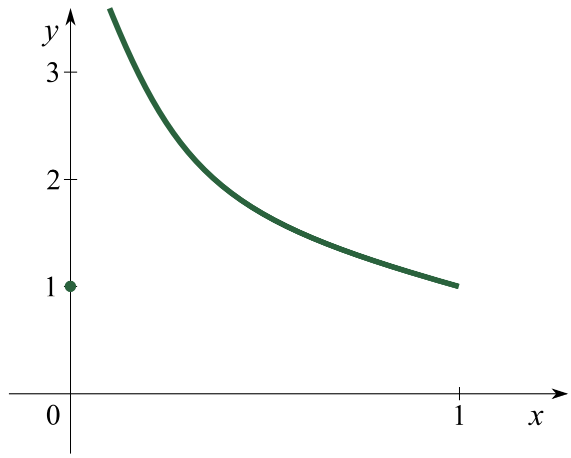
Dakle, $f(x) \in K(f(a), M + 1)$, za svaki $x \in [a, b]$ pa zaključujemo da je

$$f([a, b]) \subseteq K(f(a), M + 1).$$

Dakle, $f([a, b])$ je omeđen skup. □

Primjer 1.4.6. *Neka je* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkcija definirana kao:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \in \langle 0, 1] \\ 1, & x = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$



Slika 1.3: Graf funkcije f definirane izrazom (1.1).

Tvrdimo da je

$$f([0,1]) = [1, +\infty\rangle. \tag{1.2}$$

Ako je $x \in \langle 0, 1]$*, onda je* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *pa zbog* $x \leqslant 1$ *imamo* $1 \leqslant \dfrac{1}{x}$*, tj.*

$$f(x) \in [1, +\infty\rangle.$$

Ako je $x = 0$*, onda je očito* $f(x) \in [1, +\infty\rangle$*. Prema tome,*

$$f([0,1]) \subseteq [1, +\infty\rangle.$$

Obratno, neka je $y \in [1, +\infty\rangle$*. Tada je* $\dfrac{1}{y} \in \langle 0, 1]$ *te je* $f(\dfrac{1}{y}) = y$*. Dakle,* $y \in f([0,1])$*. Time smo pokazali da vrijedi (1.2).*

Skup $[1, +\infty\rangle$ *očito nije odozgo omeđen pa prema (1.2)* f *nije omeđena funkcija. Posebno,* f *nije funkcija omeđene varijacije.*

Primjer 1.4.7. *Neka je $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Vrijedi $f([0,1]) = \{0,1\}$. Očito je $\{0,1\} \subseteq K(0,2)$. Prema tome, $f([0,1])$ je omeđen skup, tj. f je omeđena funkcija.

Tvrdimo da f nije funkcija omeđene varijacije. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Za $i \in \{0,...,n\}$ definiramo $x_i = \frac{i}{n}$. Tada je

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = 1.$$

Neka je $i \in \{0,1,...,n-1\}$. Budući da je $x_i < x_{i+1}$, postoji $y_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takav da je $x_i < y_i < x_{i+1}$. Promotrimo konačan niz

$$x_0, y_0, x_1, y_1, ..., x_{n-1}, y_{n-1}, x_n.$$

To je subdivizija segmenta $[0,1]$ koju možemo zapisati u obliku $z_0, z_1, ..., z_{2n}$. Za svaki $i \in \{0,...,n\}$ očito vrijedi $x_i \in \mathbb{Q}$. Stoga za svaki $i \in \{0,...,2n-1\}$ vrijedi $z_i \in \mathbb{Q}$ i $z_{i+1} \notin \mathbb{Q}$ ili $z_i \notin \mathbb{Q}$ i $z_{i+1} \in \mathbb{Q}$. Stoga je

$$|f(z_{i+1}) - f(z_i)| = 1.$$

Prema tome, imamo

$$V(f; z_0, ..., z_{2n}) = \sum_{i=0}^{2n-1} |f(z_{i+1}) - f(z_i)| = \sum_{i=0}^{2n-1} 1 = 2n.$$

Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji subdivizija $z_0, ..., z_{2n}$ od segmenta $[0,1]$ takva da je $V(f; z_0, ..., z_{2n}) = 2n$.

Kada bi funkcija f bila omeđene varijacije, slijedilo bi da je skup $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ odozgo omeđen, što očito ne vrijedi. Prema tome, f nije funkcija omeđene varijacije.

Definicija 1.4.8. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Za $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiramo*

$$d(x,y) = \|x - y\|.$$

Broj $d(x,y)$ nazivamo ***udaljenost*** *točaka (vektora) x i y.*

Uočimo sljedeće: ako su $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$, onda je

$$K(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, x_0) < r\}.$$

Propozicija 1.4.9. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada za sve $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) $d(x, y) \geqslant 0$

(2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(3) $d(x, y) = d(y, x)$

(4) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

Dokaz. Tvrdnje (1) i (2) slijede iz tvrdnji (1) i (2) propozicije 1.2.3.
Dokažimo tvrdnju (3):
Koristeći tvrdnju (3) propozicije 1.2.3. dobivamo:

$$d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1) \cdot (x - y)\| = |-1| \cdot \|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y).$$

Dakle, vrijedi tvrdnja (3).
Dokažimo tvrdnju (4):
Koristeći tvrdnju (4) propozicije 1.2.3. dobivamo:

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

Dakle, vrijedi tvrdnja (4). □

Propozicija 1.4.10. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su S i T omeđeni skupovi u $\mathbb{R}^n$. Tada je $S \cup T$ omeđen skup u $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Budući da su S i T omeđeni, postoje $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ i $r, s > 0$ takvi da je

$$S \subseteq K(x_0, r) \quad \text{i} \quad T \subseteq K(y_0, s). \tag{1.3}$$

Uzmimo $R = d(x_0, y_0) + s + r$. Iz $r \leqslant R$ slijedi

$$K(x_0, r) \subseteq K(x_0, R). \tag{1.4}$$

Dokažimo da je $K(y_0, s) \subseteq K(x_0, R)$. Neka je $z \in K(y_0, s)$. Tada je $d(z, y_0) < s$ pa koristeći propoziciju 1.4.9. dobivamo:

$$d(z, x_0) \leqslant d(z, y_0) + d(y_0, x_0) < s + d(y_0, x_0) \leqslant R.$$

Dakle, $d(z, x_0) < R$ pa je $z \in K(x_0, R)$. Time smo dokazali da je

$$K(y_0, s) \subseteq K(x_0, R).$$

Iz ovoga, (1.3) i (1.4) slijedi $S \cup T \subseteq K(x_0, R)$. Time je propozicija dokazana. □

Poglavlje 2

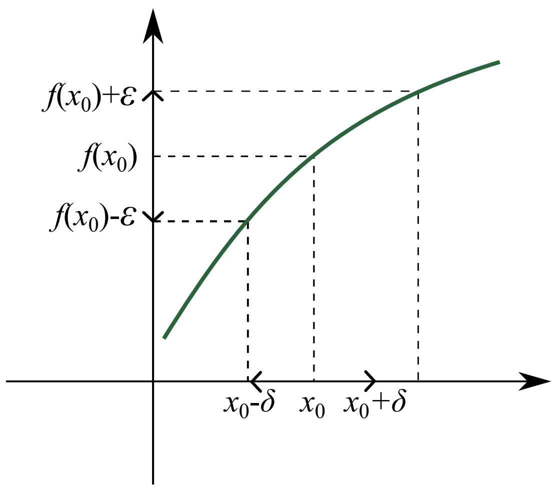
Lukovi i rektifikabilnost

2.1 Neprekidne funkcije

Definicija 2.1.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Neka je $x_0 \in S$. Kažemo da je funkcija f* ***neprekidna*** *u x_0 ako $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ takav da za $\forall x \in S$ vrijedi:*

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Kažemo da je funkcija f neprekidna na skupu S ako je neprekidna u svakoj točki $x_0 \in S$.



Slika 2.1: Graf neprekidne funkcije

Napomena 2.1.2. *Ako su* $u, v \in \mathbb{R}$ *i* $r > 0$*, onda je*

$$v \in \langle u - r, u + r\rangle \Leftrightarrow |v - u| < r.$$

To slijedi iz sljedećih ekvivalencija:

$$\begin{aligned} v \in \langle u - r, u + r\rangle &\Leftrightarrow u - r < v < u + r \quad / - u \\ &\Leftrightarrow -r < v - u < r \\ &\Leftrightarrow |v - u| < r. \end{aligned}$$

Stoga za funkciju $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *i* $x_0 \in S$ *vrijedi da je* f *neprekidna u* x_0 *ako i samo ako za* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ *takav da* $\forall x \in S$ *vrijedi:*

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \Rightarrow f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\rangle.$$

Definicija 2.1.3. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkcija,* $x_0 \in \mathbb{R}$ *i* $L \in \mathbb{R}$*. Kažemo da je* L ***limes funkcije*** f *u točki* x_0 *ako* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ *takav da za* $\forall x \in S$, $x \neq x_0$ *vrijedi:*

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Napomena 2.1.4. *Iz prethodne dvije definicije je jasno da vrijedi sljedeće:*

ako je $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkcija neprekidna u točki* x_0*, onda je* $f(x_0)$ *limes funkcije* f *u točki* x_0*.*

Napomena 2.1.5. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *te* $x_0 \in S$*. Pretpostavimo da je* $f(x_0)$ *limes funkcije* f *u točki* x_0*. Tada je* f *neprekidna u* x_0*.*

Naime, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ *takav da za* $\forall x \in S$, $x \neq x_0$ *vrijedi:*

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

No, očito je da prethodna implikacija vrijedi i za $x = x_0$*.*

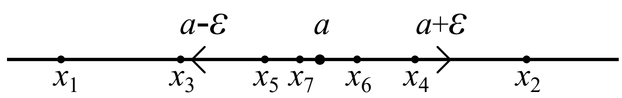
2.2 Nizovi i konvergencija

Definicija 2.2.1. *Neka je S skup. Za svaku funkciju iz $\mathbb{N}$ u S kažemo da je **niz** u S. Ako je x niz u S, tj. $x : \mathbb{N} \longrightarrow S$, onda za $n \in \mathbb{N}$ sa x_n označavamo $x(n)$. Niz x označavamo sa $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ili (x_n).*

Definicija 2.2.2. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da niz (x_n) teži ili konvergira prema a i pišemo $x_n \longrightarrow a$, ako za $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $\forall n \geqslant n_0$ vrijedi*

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

*Još kažemo da je a **limes niza** (x_n).*



Slika 2.2: Limes niza (x_n).

Primjer 2.2.3. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ definiran sa $x_n = \frac{1}{n}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da $x_n \longrightarrow 0$.*

Neka je $\varepsilon > 0$. Definirajmo $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$. Očito je $n_0 \in \mathbb{N}$. Neka je $n \geqslant n_0$. Tada je $n > \frac{1}{\varepsilon}$ pa je $\frac{1}{n} < \varepsilon$, odnosno $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$. Dakle, za svaki $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$|x_n - 0| < \varepsilon.$$

Prema tome, $x_n \longrightarrow 0$.

Lema 2.2.4. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ te neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, za $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada $x_n \longrightarrow x_0$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Prema primjeru 2.2.3. vrijedi $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geqslant n_0$ vrijedi $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, tj. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Iz pretpostavke leme slijedi

$$|x_n - x_0| < \varepsilon,$$

za svaki $n \geqslant n_0$. Dakle, $x_n \longrightarrow x_0$. $\square$

Teorem 2.2.5. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ te $x_0 \in S$. Tada je f neprekidna funkcija u x_0 ako i samo ako za svaki niz (x_n) u $\mathbb{R}$ takav da je $x_n \in S$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \longrightarrow x_0$ vrijedi $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna u x_0. Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ takav da je $x_n \in S$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \longrightarrow x_0$. Dokažimo da $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Prema definiciji neprekidnosti funkcije $\exists\, \delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Budući da $x_n \longrightarrow x_0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$|x_n - x_0| < \delta.$$

Iz (2.1) slijedi da za svaki $n \geqslant n_0$ vrijedi:

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Zaključujemo, $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$.

Pretpostavimo sad da za svaki niz (x_n) u $\mathbb{R}$ takav da je $x_n \in S$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \longrightarrow x_0$ vrijedi $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$. Dokažimo da je f neprekidna u x_0.

Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoji $x \in S$ takav da je $|x - x_0| < \delta$, ali

$$|f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\dfrac{1}{n} > 0$ pa slijedi da postoji $x_n \in S$ takav da

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad |f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon. \tag{2.2}$$

Time smo dobili niz (x_n) takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi (2.2). Iz leme 2.2.4., slijedi $x_n \longrightarrow x_0$. Iz pretpostavke slijedi da $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$. Stoga postoji n_0 takav da za svaki $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

što je u kontradikciji sa (2.2). Zaključujemo da je funkcija f neprekidna u x_0. □

Teorem 2.2.6. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ te $x_0, L \in \mathbb{R}$. Tada je L limes funkcije f u x_0 ako i samo ako za svaki niz realnih brojeva (x_n) takav da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i takav da $x_n \longrightarrow x_0$ vrijedi $f(x_n) \longrightarrow L$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je L limes funkcije f u x_0. Neka je (x_n) niz realnih brojeva takav da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \longrightarrow x_0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za $\forall x \in S$, $x \neq x_0$ vrijedi:

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \Rightarrow f(x) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle. \tag{2.3}$$

Zbog $x_n \longrightarrow x_0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$x_n \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle.$$

Prema (2.3) za svaki $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$f(x_n) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle.$$

Time smo dokazali da $f(x_n) \longrightarrow L$.

Pretpostavimo sad da za svaki niz realnih brojeva (x_n) takav da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i takav da $x_n \longrightarrow x_0$ vrijedi $f(x_n) \longrightarrow L$. Dokažimo da je L limes funkcije f.

Pretpostavimo suprotno, tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoji $x \in S$, $x \neq x_0$, za koji vrijedi:

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \quad \text{i} \quad f(x) \notin \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in S$, $x_n \neq x_0$ takav da je

$$x_n \in \langle x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \rangle \quad \text{i} \quad f(x_n) \notin \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle.$$

Dakle,

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n},$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa iz leme 2.2.4. slijedi $x_n \longrightarrow x_0$. Prema pretpostavci vrijedi $f(x_n) \longrightarrow L$, što je u kontradikciji s činjenicom da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(x_n) \notin \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle.$$

Dakle, L je limes funkcije f u x_0. $\square$

Propozicija 2.2.7. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Tada je S omeđen skup u $\mathbb{R}$ ako i samo ako je S omeđen odozgo i odozdo.*

Dokaz. Pretpostavimo da je S omeđen. Prema definiciji postoji $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$ takav da je $S \subseteq K(x_0, r)$. Vrijedi

$$K(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\} = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle.$$

Dakle, $S \subseteq \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle$. Očito je $x_0 - r$ donja, a $x_0 + r$ gornja međa od S. Dakle, S je omeđen odozgo i odozdo.

Pretpostavimo da je S omeđen odozgo i odozdo. Neka je M gornja međa od S, a N donja međa od S. Tada za svaki $x \in S$ vrijedi

$$N \leqslant x \leqslant M.$$

Dakle, za svaki $x \in S$ vrijedi

$$x \leqslant M \quad \text{i} \quad -x \leqslant -N.$$

Odaberimo $r > 0$ takav da je $r > M$ i $r > -N$. Tada za svaki $x \in S$ vrijedi

$$x < r \quad \text{i} \quad -x < r$$

pa je $|x| < r$, tj. $|x - 0| < r$. Stoga je $S \subseteq K(0, r)$. Dakle, S je omeđen skup u $\mathbb{R}$. □

Definicija 2.2.8. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva. Kažemo da je (x_n)* ***omeđen niz*** *ako je skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen u $\mathbb{R}$.*

Definicija 2.2.9. *Za niz realnih brojeva (x_n) kažemo da je* ***konvergentan*** *ako postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \longrightarrow a$.*

Primjer 2.2.10. *Neka je $S = \langle -\infty, 0]$. Neka je $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ bilo koja funkcija. Neka je $a = 1$ te neka je $L \in \mathbb{R}$. Tvrdimo da je L limes funkcije f u točki a.*

Neka je $\varepsilon > 0$. Definirajmo $\delta = \frac{1}{2}$. Tada ne postoji $x \in S$ takav da je $x \in \langle a - \delta, a + \delta\rangle$. Stoga, za svaki $x \in S$ takav da $x \neq a$ implikacija

$$x \in \langle a - \delta, a + \delta\rangle \Rightarrow f(x) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon\rangle$$

trivijalno vrijedi.

Dakle, svaki realan broj je limes funkcije f u točki a, što pokazuje da limes funkcije u točki ne mora biti jedinstven.

Definicija 2.2.11. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da je a* ***točka nakupljanja*** *skupa S ako za svaki $r > 0$ postoji $x \in S \setminus \{a\}$ takav da je*

$$|x - a| < r.$$

Uočimo sljedeće: a je točka nakupljanja skupa S ako i samo ako za svaki $r > 0$ vrijedi

$$K(a, r) \cap S \setminus \{a\} \neq \emptyset.$$

Propozicija 2.2.12. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $a \in \mathbb{R}$. Tada je a točka nakupljanja skupa S ako i samo ako postoji niz realnih brojeva (x_n) takvih da je $x_n \in S \setminus \{a\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takvih da $x_n \longrightarrow a$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je a točka nakupljanja skupa S. Prema definiciji za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in S \setminus \{a\}$ takav da je $|x_n - a| < \dfrac{1}{n}$. Na ovaj način smo konstruirali niz (x_n) za koji prema lemi 2.2.4. vrijedi $x_n \longrightarrow a$.

Pretpostavimo da postoji niz (x_n) takav da je $x_n \in S \setminus \{a\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \longrightarrow a$. Želimo dokazati da je a točka nakupljanja skupa S. Neka je $r > 0$. Budući da $x_n \longrightarrow a$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$x_n \in \langle a - r, a + r \rangle.$$

Posebno, vrijedi $x_{n_0} \in \langle a - r, a + r \rangle$, a očito je $x_{n_0} \in S \setminus \{a\}$. Dakle, a je točka nakupljanja skupa S. □

Propozicija 2.2.13. (Jedinstvenost limesa niza)
Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka su $u, v \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \longrightarrow u$ i $x_n \longrightarrow v$. Tada je $u = v$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $u \neq v$. Definirajmo $\varepsilon = \dfrac{|u - v|}{2}$. Očito je $\varepsilon > 0$. Tvrdimo da vrijedi

$$\langle u - \varepsilon, u + \varepsilon \rangle \cap \langle v - \varepsilon, v + \varepsilon \rangle = \emptyset. \tag{2.4}$$

Ako je $u < v$, onda je $\varepsilon = \dfrac{v - u}{2}$ pa slijedi

$$v - \varepsilon = u + \varepsilon$$

iz čega je jasno da vrijedi (2.4). Analogno dobivamo (2.4) za $u > v$.

Iz $x_n \longrightarrow u$ slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$x_n \in \langle u - \varepsilon, u + \varepsilon \rangle.$$

Iz $x_n \longrightarrow v$ slijedi da postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geqslant n_1$ vrijedi

$$x_n \in \langle v - \varepsilon, v + \varepsilon \rangle.$$

Neka je $n = \max\{n_0, n_1\}$. Tada vrijedi

$$x_n \in \langle u - \varepsilon, u + \varepsilon \rangle \quad \text{i} \quad x_n \in \langle v - \varepsilon, v + \varepsilon \rangle$$

što je u kontradikciji s (2.4). Dakle, $u = v$. □

Propozicija 2.2.14. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je a točka nakupljanja skupa S. Neka je $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Pretpostavimo da su $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je L_1 limes funkcije f u točki a te da je L_2 limes funkcije f u točki a. Tada je $L_1 = L_2$.*

Dokaz. Prema propoziciji 2.2.12. postoji niz realnih brojeva (x_n) takav da je $x_n \in S \setminus \{a\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te $x_n \longrightarrow a$. Iz teorema 2.2.6. slijedi

$$f(x_n) \longrightarrow L_1 \quad \text{i} \quad f(x_n) \longrightarrow L_2.$$

Prema propoziciji 2.2.13. slijedi $L_1 = L_2$. □

2.3 Međuvrijednosti neprekidnih funkcija

Propozicija 2.3.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija.*

(1) Pretpostavimo da je $x_0 \in S$ te da je f neprekidna u x_0. Tada je funkcija $-f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna u x_0.

(2) Pretpostavimo da je f neprekidna. Tada je funkcija $-f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna.

Dokaz. Dokažimo tvrdnju (1). Neka je funkcija $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna u $x_0 \in S$. Pretpostavimo suprotno, tj. funkcija $-f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ nije neprekidna u x_0. Tada prema napomeni 2.1.2. postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoji $x \in S$ za koji vrijedi:

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{i} \quad |-f(x) - (-f(x_0))| \geqslant \varepsilon. \tag{2.5}$$

Primjenom svojstava funkcije apsolutne vrijednosti slijedi:

$$\begin{aligned} |-f(x) - (-f(x_0))| &= |(-1)(f(x) - f(x_0))| \\ &= |-1| \cdot |f(x) - f(x_0)| \\ &= |f(x) - f(x_0)| \end{aligned}$$

pa u izrazu (2.5) vrijedi:

$$|f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon.$$

To je u kontradikciji s pretpostavkom da je funkcija f neprekidna u točki x_0 za koju prema definiciji 2.1.1. postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ takav da je $|x - x_0| < \delta$ vrijedi:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Dakle, funkcija $-f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ je neprekidna u x_0.

Dokaz tvrdnje (2) slijedi iz definicije 2.1.1. ako tvrdnju (1) primijenimo na svaku točku $x_0 \in S$. □

Propozicija 2.3.2. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u točki x_0. Neka je $y \in \mathbb{R}$.*

(1) Pretpostavimo da je $f(x_0) > y$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da je $f(x) > y$ za svaki $x \in S$ takav da je $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$.

(2) Pretpostavimo da je $f(x_0) < y$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da je $f(x) < y$ za svaki $x \in S$ takav da je $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$.

Dokaz. Dokažimo tvrdnju (1). Pretpostavimo da je $f(x_0) > y$. Uzmimo $\varepsilon = f(x_0) - y$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ takav da je $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ vrijedi $f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\rangle$, odnosno

$$f(x) \in \langle y, 2f(x_0) - y\rangle$$

pa vrijedi $f(x) > y$ što je i trebalo dokazati.

Dokažimo tvrdnju (2). Pretpostavimo da je $f(x_0) < y$. Uzmimo $\varepsilon = y - f(x_0)$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ takav da je $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ vrijedi $f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\rangle$, odnosno

$$f(x) \in \langle 2f(x_0) - y, y\rangle$$

pa vrijedi $f(x) < y$ što je i trebalo dokazati. □

Teorem 2.3.3. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, te neka je $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je $y \in \mathbb{R}$ takav da je $f(a) < y < f(b)$. Tada postoji $x \in [a, b]$ takav da je $f(x) = y$.*

Dokaz. Definirajmo

$$S = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leqslant y\}.$$

Očito je $a \in S$ pa je S neprazan skup. Kako je b gornja međa skupa S, S je odozgo omeđen skup. Prema propoziciji 1.1.4. svaki neprazan odozgo omeđen skup ima supremum, stoga skup S ima supremum koji ćemo označiti sa z.

Kako je z ujedno i gornja međa skupa S te je $a \in S$, vrijedi $a \leqslant z$. S druge strane, b je gornja međa skupa S, a z je najmanja gornja međa skupa S pa vrijedi $z \leqslant b$. Iz $a \leqslant z \leqslant b$ slijedi $z \in [a, b]$. Tvrdimo da je $f(z) = y$.

Pretpostavimo da je $f(z) > y$. Prema propoziciji 2.3.2. postoji $\delta > 0$ takva da je $f(x) > y$ za svaki $x \in [a, b]$ takav da je $x \in \langle z - \delta, z + \delta\rangle$. Iz propozicije 1.1.2. slijedi da postoji $x \in S$ takav da je $z - \delta < x$. Kako je z supremum skupa S slijedi da je $x \leqslant z$ pa za $\delta > 0$ vrijedi $x < z + \delta$. Iz $z - \delta < x < z + \delta$ slijedi $x \in \langle z - \delta, z + \delta\rangle$. Iz ovoga i činjenice da je $x \in [a, b]$ slijedi

$$f(x) > y.$$

S druge strane, iz činjenice da je $x \in S$ slijedi

$$f(x) \leqslant y.$$

Time smo došli do kontradikcije. Dakle, $f(z) > y$ ne vrijedi.

Pretpostavimo sada da je $f(z) < y$. Prema propoziciji 2.3.2. postoji $\delta > 0$ takva da je $f(x) < y$ za svaki $x \in [a, b]$ takav da je $x \in \langle z - \delta, z + \delta\rangle$. Kako vrijedi $f(z) < y < f(b)$, odnosno $f(z) \neq f(b)$, slijedi da je $z \neq b$, u suprotnom se ne bi radilo o funkciji. Iz ovoga i činjenice da je z najmanja gornja međa slijedi $z < b$. Iz očite nejednakosti $z < z + \delta$ za $\delta > 0$ i $z < b$ slijedi

$$z < \min\{z + \delta, b\}.$$

Odaberimo $x \in \mathbb{R}$ takav da je $z < x < \min\{z + \delta, b\}$. Iz $z < x$ za $\delta > 0$ slijedi $z - \delta < x$. Kako također vrijedi $x < z + \delta$, imamo $x \in \langle z - \delta, z + \delta\rangle$. Kako je $a \leqslant z < x$ i $x < b$, slijedi $x \in [a, b]$. Sada iz $x \in \langle z - \delta, z + \delta\rangle$ i $x \in [a, b]$ slijedi

$$f(x) < y,$$

odnosno po definiciji skupa S je $x \in S$. No, to je zbog $z < x$ u kontradikciji s činjenicom da je z supremum skupa S kojem x pripada.

Kako su pretpostavke $f(z) > y$ i $f(z) < y$ dovele do kontradikcije, zaključujemo da vrijedi

$$f(z) = y. \tag{2.6}$$

Sada samo zamijenimo z u jednakosti (2.6) s x. Dakle, postoji $x \in [a, b]$ takav da je $f(x) = y$. □

Korolar 2.3.4. *Neka su $a,\ b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je $y \in \mathbb{R}$ takav da je $f(a) > y > f(b)$. Tada postoji $x \in [a,b]$ takav da je $f(x) = y$.*

Dokaz. Kako je funkcija $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna, prema propoziciji 2.3.1. je neprekidna i funkcija $-f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Iz pretpostavke korolara slijedi $-f(a) < -y < -f(b)$, tj.

$$(-f)(a) < -y < (-f)(b)$$

pa iz teorema 2.3.3. slijedi da postoji $x \in [a,b]$ takav da je

$$(-f)(x) = -y,$$

odnosno $-f(x) = -y$. Dakle, $f(x) = y$. □

Propozicija 2.3.5. *Neka su S i T neprazni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $S \subseteq T$ te neka je $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je $f|_S : S \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija.*

Dokaz. Kako je funkcija $f|_S : S \longrightarrow \mathbb{R}$ restrikcija funkcije $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ slijedi da je $D_{f|_S} \subset D_f$ te je $f(x) = f|_S(x)$ za svaki $x \in D_{f|_S}$. Funkcija $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ je neprekidna na skupu T ako je neprekidna u svakoj točki $x_0 \in T$. Kako je $S \subseteq T$, funkcija f je neprekidna i u svakoj točki $x_0 \in S$ pa uz

$$f(x) = f|_S(x) \quad \text{i} \quad f(x_0) = f|_S(x_0)$$

u definiciji neprekidnosti funkcije f slijedi da je i funkcija $f|_S : S \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna. □

Lema 2.3.6. *Neka su $a,\ b \in \mathbb{R}$, $a < b$, te neka je $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je f injekcija te da je $f(a) < f(b)$. Tada za svaki $x \in [a,b]$ takav da je $a < x < b$ vrijedi $f(a) < f(x) < f(b)$.*

Dokaz. Pretpostavimo $f(x) \leqslant f(a)$. Funkcija f je injekcija pa iz $x \neq a$ slijedi $f(x) \neq f(a)$. Stoga vrijedi $f(x) < f(a)$. Promotrimo restrikciju funkcije f, funkciju $f|_{[x,b]} : [x,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Kako je funkcija f neprekidna, prema propoziciji 2.3.5. je neprekidna i njena restrikcija $f|_{[x,b]}$. Iz $f(x) < f(a) < f(b)$ prema teoremu 2.3.3. postoji $z \in [x,b]$ takav da je

$$f(z) = f(a). \tag{2.7}$$

Zbog $a < x$ i $x \leqslant z$ je $a < z$, odnosno $a \neq z$. Sada po definiciji injektivnosti funkcije slijedi

$$f(a) \neq f(z)$$

što je u kontradikciji s tvrdnjom (2.7). Dakle, $f(a) < f(x)$.

Sada pretpostavimo $f(b) \leqslant f(x)$. Funkcija f je injekcija pa iz $b \neq x$ slijedi $f(b) \neq f(x)$. Stoga vrijedi $f(b) < f(x)$. Promotrimo restrikciju funkcije f, funkciju $f|_{[a,x]} : [a, x] \longrightarrow \mathbb{R}$. Kako je funkcija f neprekidna, prema propoziciji 2.3.5. je neprekidna i njena restrikcija $f|_{[a,x]}$. Iz $f(a) < f(b) < f(x)$ prema teoremu 2.3.3. postoji $v \in [a, x]$ takav da je

$$f(v) = f(b). \tag{2.8}$$

Zbog $x < b$ i $v \leqslant x$ je $v < b$, odnosno $v \neq b$. Sada po definiciji injektivnosti funkcije slijedi

$$f(v) \neq f(b)$$

što je u kontradikciji s tvrdnjom (2.8). Dakle, $f(x) < f(b)$.

Prema tome, vrijedi $f(a) < f(x) < f(b)$ čime je dokazana tvrdnja leme. □

2.4 Strogo monotone funkcije

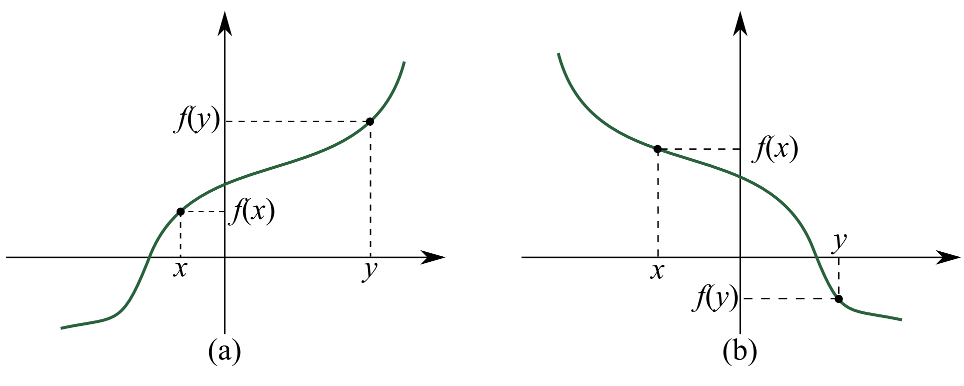
Definicija 2.4.1. *Neka su S, $T \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \longrightarrow T$.*
Kažemo da je f ***strogo rastuća funkcija*** *ako za sve $x, y \in S$ takve da je $x < y$ vrijedi*

$$f(x) < f(y).$$

Kažemo da je f ***strogo padajuća funkcija*** *ako za sve $x, y \in S$ takve da je $x < y$ vrijedi*

$$f(x) > f(y).$$

Za funkciju f kažemo da je ***strogo monotona*** *ako je f strogo rastuća ili strogo padajuća.*



Slika 2.3: Graf strogo rastuće (a) i strogo padajuće (b) funkcije.

Teorem 2.4.2. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, te neka je $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna injekcija. Tada je f strogo monotona funkcija.*

Dokaz. Kako je $a < b$, odnosno $a \neq b$, prema definiciji injektivnosti funkcije vrijedi

$$f(a) \neq f(b).$$

Pretpostavimo $f(a) < f(b)$. Neka su $x, y \in [a,b]$ takvi da je $x < y$. Tvrdimo da je $f(x) < f(y)$.

Za $x = a$ ili $y = b$ iz leme 2.3.6. slijedi $f(a) < f(y) < f(b)$ ili $f(a) < f(x) < f(b)$, odnosno $f(x) < f(y)$.

Za $a < x$ i $y < b$ imamo $a < x < y < b$. Sada za $x \in [a,b]$ takav da je $a < x < b$ prema lemi 2.3.6. slijedi:

$$f(a) < f(x) < f(b).$$

Iz $x < y < b$ slijedi $y \in [x,b]$. Prema lemi 2.3.6. slijedi:

$$f(x) < f(y) < f(b),$$

odnosno $f(x) < f(y)$.

Dakle, u slučaju $f(a) < f(b)$ za $a < b$, funkcija f je prema definiciji 2.4.1. strogo rastuća funkcija.

U slučaju $f(a) > f(b)$ promatramo funkciju $-f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Ta funkcija je neprekidna te vrijedi

$$-f(a) < -f(b),$$

čime smo ovaj slučaj sveli na prethodni u kojem smo pokazali da je funkcija strogo monotona, preciznije strogo rastuća. Dakle, $-f$ je strogo rastuća funkcija pa slijedi da je f strogo padajuća.

Dakle, za $a < b$ vrijedi

$$f(a) < f(b) \quad \text{ili} \quad f(a) > f(b),$$

odnosno funkcija f je strogo rastuća ili strogo padajuća pa je po definiciji 2.4.1. strogo monotona funkcija, što je i trebalo dokazati. □

2.5 Neprekidnost i nizovi u $\mathbb{R}^n$

Definicija 2.5.1. *Neka su $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ te neka je $f : A \longrightarrow B$ funkcija. Neka je $x_0 \in A$. Kažemo da je funkcija f* ***neprekidna u točki*** *x_0 ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in A$ vrijedi sljedeća implikacija:*

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Za funkciju f kažemo da je ***neprekidna*** *ako je f neprekidna u x_0 za svaki $x_0 \in A$.*

Uočimo da se ovako definiran pojam neprekidnosti (u točki) podudara s ranije definiranim pojmom neprekidnosti (u točki) u slučaju kada je $S \subseteq \mathbb{R}$ i $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$.

Propozicija 2.5.2. *Neka su $n, m, k \in \mathbb{N}$, neka su $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $C \subseteq \mathbb{R}^k$ te neka su $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ funkcije. Pretpostavimo da je $x_0 \in A$ te da je f neprekidna u x_0 i g neprekidna u $f(x_0)$. Tada je funkcija $g \circ f$ neprekidna u x_0.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je funkcija g neprekidna u $f(x_0)$ po definiciji 2.5.1. postoji $\delta' > 0$ takav da za svaki $y \in B$ vrijedi:

$$\|y - f(x_0)\| < \delta' \;\Rightarrow\; \|g(y) - g(f(x_0))\| < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Kako je funkcija f neprekidna u x_0 po definiciji 2.5.1. postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in A$ vrijedi:

$$\|x - x_0\| < \delta \;\Rightarrow\; \|f(x) - f(x_0)\| < \delta'. \tag{2.10}$$

Neka je $x \in A$ takav da je $\|x - x_0\| < \delta$. Tada je po (2.10)

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \delta'.$$

Kako je B kodomena funkcije f, za $x \in A$ vrijedi $f(x) \in B$. Za $y = f(x)$ prema (2.9) vrijedi:

$$\|g(f(x)) - g(f(x_0))\| < \varepsilon.$$

Ovime smo za svaki $x \in A$ dokazali da vrijedi:

$$\|x - x_0\| < \delta \;\Rightarrow\; \|g(f(x)) - g(f(x_0))\| < \varepsilon.$$

Dakle, dokazali smo da je funkcija $g \circ f$ neprekidna u x_0. □

Korolar 2.5.3. *Neka su $n, m, k \in \mathbb{N}$, neka su $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $C \subseteq \mathbb{R}^k$ te neka su $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ neprekidne funkcije. Tada je $g \circ f : A \longrightarrow C$ neprekidna funkcija.*

Definicija 2.5.4. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Neka je (x_i) niz u $\mathbb{R}^n$ te $a \in \mathbb{R}^n$. Kažemo da niz (x_i)* ***teži*** *ili* ***konvergira*** *prema a i pišemo $x_i \longrightarrow a$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $i \geqslant i_0$ vrijedi*

$$\|x_i - a\| < \varepsilon.$$

Uočimo da se gornja definicija podudara s definicijom 2.2.2 konvergencije niza u slučaju $n = 1$, tj. u slučaju niza u $\mathbb{R}$.

Propozicija 2.5.5. *Neka su $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ te $f : A \longrightarrow B$. Neka je $x_0 \in A$ te neka je (x_i) niz u $\mathbb{R}^n$ takav da je $x_i \in A$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ te takav da $x_i \longrightarrow x_0$. Pretpostavimo da je f neprekidna u x_0. Tada $f(x_i) \longrightarrow f(x_0)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna u x_0. Neka je (x_i) niz u $\mathbb{R}^n$ takav da je $x_i \in A$, za svaki $i \in \mathbb{N}$ te takav da $x_i \longrightarrow x_0$. Dokažimo da $f(x_i) \longrightarrow f(x_0)$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Prema definiciji neprekidnosti funkcije postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in A$ vrijedi:

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon. \tag{2.11}$$

Kako $x_i \longrightarrow x_0$, postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $i \geqslant i_0$ vrijedi $\|x_i - x_0\| < \delta$. Iz (2.11) slijedi da za svaki $i \geqslant i_0$ vrijedi:

$$\|f(x_i) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Zaključujemo, $f(x_i) \longrightarrow f(x_0)$. □

2.6 Podnizovi

Definicija 2.6.1. *Za funkciju $p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ kažemo da je* ***strogo rastuća*** *ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$p(n) < p(n + 1).$$

Lema 2.6.2. *Neka je $p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija.*

(1) Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $m \in \mathbb{N}$ takav da je $m > n$ vrijedi $p(n) < p(m)$.

(2) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n \leqslant p(n)$.

Dokaz. Dokažimo tvrdnju (1). Kako je $m > n$, pri čemu su $m, n \in \mathbb{N}$, vrijedi $m = n + k$, za $k \in \mathbb{N}$. Dokazat ćemo da tada vrijedi $p(n) < p(n + k)$, odnosno $p(n) < p(m)$, koristeći matematičku indukciju po m.

BAZA: Za $k = 1$ imamo $m = n + 1$. Sada po definiciji 2.6.1. iz $p(n) < p(n + 1)$ slijedi:

$$p(n) < p(m),$$

a to je upravo ono što smo trebali dokazati. Dakle, tvrdnja (1) vrijedi za $m = n + 1$.

Pretpostavimo sada da za neki $m = n + k$, pri čemu je $k \in \mathbb{N}$, vrijedi $p(n) < p(m)$.

KORAK: Provjerit ćemo vrijedi li tvrdnja za $m = n + k + 1$. Po pretpostavci indukcije vrijedi $p(n) < p(n + k)$. Također, iz definicije 2.6.1. slijedi $p(n + k) < p(n + k + 1)$. Prema tome imamo:

$$p(n) < p(n + k) < p(n + k + 1),$$

odnosno za $m = n + k + 1$:

$$p(n) < p(m),$$

što je i trebalo dokazati. Dakle, tvrdnja (1) vrijedi za $m = n + k + 1$.

Dokazali smo da tvrdnja vrijedi za $m = n+1$ te da ako tvrdnja vrijedi za neki $m = n+k$, onda vrijedi i za $m = n+k+1$. Po principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja

$$p(n) < p(m)$$

vrijedi za svaki $m \in \mathbb{N}$ takav da je $m > n$.

Dokažimo sada tvrdnju (2) koristeći matematičku indukciju po n.

BAZA: Za $n = 1$ treba pokazati da vrijedi $1 \leqslant p(1)$. Kako po definiciji funkcije p vrijedi $p(n) \in \mathbb{N}$, slijedi da je

$$p(n) \geqslant 1,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema tome, za $n = 1$ vrijedi $p(1) \geqslant 1$, što je i trebalo pokazati. Dakle, tvrdnja (2) vrijedi za $n = 1$.

Pretpostavimo sada da tvrdnja (2) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.

KORAK: Provjerit ćemo vrijedi li tvrdnja za $n + 1 \in \mathbb{N}$. Po pretpostavci indukcije vrijedi $n \leqslant p(n)$. Također, kako je $n + 1 > n$ za $n \in \mathbb{N}$ prema tvrdnji (1) slijedi $p(n) < p(n + 1)$. Prema tome imamo:

$$n < p(n + 1).$$

Opet, $p(n) \in \mathbb{N}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa je i $p(n + 1) \in \mathbb{N}$. Dakle, za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$n + 1 \leqslant p(n + 1).$$

U suprotnom bi vrijedilo $n+1 > p(n+1)$, tj.

$$n < p(n+1) < n+1,$$

za $n \in \mathbb{N}$. No, to bi značilo da broj $n+1$ nije sljedbenik broja n što je nemoguće, a o tome više možete pronaći u [2]. Dakle, tvrdnja (2) vrijedi za $n+1 \in \mathbb{N}$.

Dokazali smo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$ te da ako tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, onda vrijedi i za $n+1 \in \mathbb{N}$. Po principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja

$$n \leqslant p(n)$$

vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

Definicija 2.6.3. *Neka je S skup te neka su (x_n) i (y_n) nizovi u S. Kažemo da je (y_n)* ***podniz*** *od (x_n) ako postoji strogo rastuća funkcija $p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ takva da je $y_n = x_{p(n)}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza koji se može pronaći u [1].

Teorem 2.6.4. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ te neka su $a,\ b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a \leqslant x_n \leqslant b$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada postoje podniz (y_n) od (x_n) i $c \in [a, b]$ takvi da $y_n \longrightarrow c$.*

Lema 2.6.5. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te (x_i) niz u $\mathbb{R}^n$ i $a \in \mathbb{R}^n$ tako da je*

$$\|x_i - a\| < \frac{1}{i}$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$. Tada $x_i \longrightarrow a$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Prema primjeru 2.2.3. vrijedi $\frac{1}{i} \longrightarrow 0$ pa postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $i \geqslant i_0$ vrijedi

$$\left|\frac{1}{i} - 0\right| < \varepsilon,$$

tj. $\frac{1}{i} < \varepsilon$. Iz pretpostavke leme slijedi

$$\|x_n - a\| < \varepsilon,$$

za svaki $i \geqslant i_0$. Dakle, prema definiciji 2.5.4. slijedi $x_i \longrightarrow a$. □

Uočimo sljedeće: ako je (x_i) niz u $\mathbb{R}^n$ te $a \in \mathbb{R}^n$, onda $x_i \longrightarrow a$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $i \geqslant i_0$ vrijedi

$$x_i \in K(a, \varepsilon).$$

Propozicija 2.6.6. *Neka je (x_i) niz u $\mathbb{R}^n$ te neka su $u, v \in \mathbb{R}^n$ takvi da $x_i \longrightarrow u$ i $x_i \longrightarrow v$. Tada je $u = v$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno da je $u \neq v$. Definirajmo $\varepsilon = \dfrac{\|u - v\|}{2}$. Tvrdimo da vrijedi:

$$K(u, \varepsilon) \cap K(v, \varepsilon) = \emptyset. \tag{2.12}$$

Pretpostavimo suprotno, odnosno

$$K(u, \varepsilon) \cap K(v, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Neka je $z \in K(u, \varepsilon) \cap K(v, \varepsilon)$ pa vrijedi:

$$d(z, u) < \varepsilon \quad \text{i} \quad d(z, v) < \varepsilon.$$

Prema (3) iz propozicije 1.4.9. vrijedi

$$d(u, z) < \varepsilon.$$

Sada zbrojimo $d(u, z)$ i $d(z, v)$ te koristeći (4) iz propozicije 1.4.9. dobivamo:

$$d(u, v) \leqslant d(u, z) + d(z, v) < 2\varepsilon,$$

odnosno $d(u, v) < 2\varepsilon$, što je u kontradikciji s definicijom od ε, tj. $2\varepsilon = d(u, v)$. Dakle, vrijedi tvrdnja (2.12).

Iz $x_i \longrightarrow u$ slijedi da postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $i \in \mathbb{N}$ takav da je $i \geqslant i_0$ vrijedi

$$\|x_i - u\| < \varepsilon.$$

Iz $x_i \longrightarrow v$ slijedi da postoji $i_1 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $i \in \mathbb{N}$ takav da je $i \geqslant i_1$ vrijedi

$$\|x_i - v\| < \varepsilon.$$

Neka je $i = \max\{i_0, i_1\}$. Tada vrijedi:

$$\|x_i - u\| < \varepsilon \quad \text{i} \quad \|x_i - v\| < \varepsilon,$$

odnosno

$$x_i \in K(u, \varepsilon) \cap K(v, \varepsilon)$$

što je u kontradikciji s tvrdnjom (2.12). Dakle, $u = v$. □

2.7 Neprekidnost inverzne funkcije

Teorem 2.7.1. *Neka su a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, te neka je $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ te da je $f : [a, b] \longrightarrow X$ neprekidna bijekcija. Tada je funkcija $f^{-1} : X \longrightarrow [a, b]$ neprekidna.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$. Pretpostavimo da f^{-1} nije neprekidna funkcija u x_0. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoji $x \in X$ takav da je

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \text{i} \quad \|f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)\| \geqslant \varepsilon.$$

Za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $\dfrac{1}{i} > 0$ pa slijedi da postoji $x_i \in X$ takav da je

$$\|x_i - x_0\| < \frac{1}{i} \quad \text{i} \quad \|f^{-1}(x_i) - f^{-1}(x_0)\| \geqslant \varepsilon. \tag{2.13}$$

Tako smo dobili niz (x_i) u $\mathbb{R}^n$ takav da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi (2.13).

Neka je $y_i = f^{-1}(x_i)$, za $i \in \mathbb{N}$. Time smo definirali niz realnih brojeva (y_i) takav da je za svaki $i \in \mathbb{N}$

$$a \leqslant y_i \leqslant b.$$

Iz teorema 2.6.4. i definicije 2.6.3. slijedi da postoje strogo rastuća funkcija $p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ i $c \in [a, b]$ takvi da

$$y_{p(i)} \longrightarrow c. \tag{2.14}$$

Iz propozicije 2.5.5. slijedi da

$$f(y_{p(i)}) \longrightarrow f(c).$$

No, prema definiciji niza (y_i), vrijedi $f(y_{p(i)}) = x_{p(i)}$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Prema tome, vrijedi:

$$x_{p(i)} \longrightarrow f(c). \tag{2.15}$$

Iz (2.13) za svaki $i \in \mathbb{N}$ slijedi da je

$$\|x_{p(i)} - x_0\| < \frac{1}{p(i)}.$$

Iz tvrdnje (2) leme 2.6.2. slijedi $i \leqslant p(i)$, odnosno $\dfrac{1}{i} \geqslant \dfrac{1}{p(i)}$. Sada imamo

$$\|x_{p(i)} - x_0\| < \frac{1}{i}.$$

Iz leme 2.6.5. slijedi:

$$x_{p(i)} \longrightarrow x_0. \tag{2.16}$$

Iz (2.15) i (2.16) prema propoziciji 2.6.6. slijedi da je $f(c) = x_0$. Stoga je $c = f^{-1}(x_0)$ pa iz (2.13) za svaki $i \in \mathbb{N}$ slijedi:

$$\|f^{-1}(x_i) - c\| \geqslant \varepsilon.$$

Dakle, $\|y_i - c\| \geqslant \varepsilon$, za svaki $i \in \mathbb{N}$ pa posebno za $p(i) \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\|y_{p(i)} - c\| \geqslant \varepsilon,$$

odnosno prema definiciji 2.5.4. niz $(y_{p(i)})$ ne konvergira prema c, što je u kontradikciji s tvrdnjom (2.14).

Zaključujemo da je funkcija $f^{-1} : X \longrightarrow [a, b]$ neprekidna u x_0 za svaki $x_0 \in X$, odnosno funkcija $f^{-1} : X \longrightarrow [a, b]$ je neprekidna. □

Propozicija 2.7.2. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ te $x_0 \in X$. Pretpostavimo da su $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcije neprekidne u točki x_0. Tada je funkcija $f + g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna u x_0.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Iz činjenice da je f neprekidna u x_0 slijedi da postoji $\delta_1 > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$\|x - x_0\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nadalje, iz činjenice da je g neprekidna u x_0 slijedi da postoji $\delta_2 > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$\|x - x_0\| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definirajmo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tada za svaki $x \in X$ vrijedi

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{2.17}$$

Koristeći definiciju i svojstvo komutativnosti zbroja funkcija f i g te nejednakost trokuta za apsolutnu vrijednost, za svaki $x \in X$ vrijedi:

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| &= |f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))| \\ &= |(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))| \\ &\leqslant |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|, \end{aligned}$$

odnosno

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| \leqslant |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|. \tag{2.18}$$

Sada iskoristimo (2.18) u (2.17) te dobivamo da postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi
$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |(f + g)(x) - (f + g)(x_0)| < \varepsilon,$$
a to znači da je funkcija $f + g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna u x_0, što je i trebalo dokazati. □

Napomena 2.7.3. *Neka su $n, m \in \mathbb{N}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ te $x_0 \in X$.*

(1) Neka je $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ funkcija definirana sa $f(x) = x$ za svaki $x \in X$. Tada je f neprekidna funkcija.

Naime, za $\varepsilon > 0$ definiramo $\delta = \varepsilon$ pa za svaki $x \in X$ vrijedi

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x - x_0\| < \varepsilon.$$

Sada po definiciji funkcije f vrijedi

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon,$$

a to znači da je funkcija f neprekidna u svakoj točki $x_0 \in X$. Dakle, funkcija f je neprekidna.

(2) Neka je $y_0 \in \mathbb{R}^m$ te neka je $g : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funkcija definirana sa $g(x) = y_0$ za svaki $x \in X$. Tada je g neprekidna funkcija.

Naime, za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$\|x - x_0\| < \delta \;\Rightarrow\; 0 = \|y_0 - y_0\| < \varepsilon.$$

Sada po definiciji funkcije g vrijedi

$$\|x - x_0\| < \delta \;\Rightarrow\; 0 = \|g(x) - g(x_0)\| < \varepsilon$$

pa je funkcija g neprekidna u svakoj točki $x_0 \in X$. Dakle, funkcija g je neprekidna.

Propozicija 2.7.4. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ te $x_0 \in X$. Pretpostavimo da je $c \in \mathbb{R}$ te da je $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u točki x_0. Tada je funkcija $c \cdot f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna u x_0.*

Dokaz. Za $c = 0$ imamo

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x) = 0 \cdot f(x) = 0.$$

Kako je $c \cdot f$ konstantna funkcija, prema (2) iz napomene 2.7.3. funkcija $c \cdot f$ je neprekidna u točki x_0.

Pretpostavimo da je $c \neq 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta' > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$\|x - x_0\| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{|c|}. \tag{2.19}$$

Ako desnu nejednakost iz (2.19) pomnožimo s $|c| > 0$ i primijenimo svojstva apsolutne vrijednosti dobivamo

$$|(c \cdot f)(x) - (c \cdot f)(x_0)| < \varepsilon.$$

Sada postoji $\delta = \delta' > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |(c \cdot f)(x) - (c \cdot f)(x_0)| < \varepsilon,$$

a to znači da je funkcija $c \cdot f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna u x_0 što je i trebalo dokazati. □

Napomena 2.7.5. *Neka su $n, m \in \mathbb{N}$ te neka su $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Neka je $x_0 \in X$ te neka je $f : X \longrightarrow Y$.*

Neka je $g : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funkcija definirana za svaki $x \in X$ kao

$$g(x) = f(x).$$

Tada prema definiciji 2.5.1. očito vrijedi da je f neprekidna u x_0 ako i samo ako je g neprekidna u x_0.

Iz ovoga slijedi da je f neprekidna ako i samo ako je g neprekidna.

2.8 Lukovi

Definicija 2.8.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Za X kažemo da je* ***luk*** *u $\mathbb{R}^n$ ako postoje a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, i neprekidna bijekcija $f : [a, b] \longrightarrow X$.*

Propozicija 2.8.2. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Tada je X luk ako i samo ako postoji neprekidna bijekcija $f : [0, 1] \longrightarrow X$.*

Dokaz. Ako postoji neprekidna bijekcija $f : [0, 1] \longrightarrow X$, onda je X očito luk.

Pretpostavimo da je X luk. Tada postoje a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, i neprekidna bijekcija $f : [a, b] \longrightarrow X$. Definirajmo $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sa

$$\varphi(x) = (b - a)x + a$$

za svaki $x \in [0, 1]$.

Za svaki $x \in [0,1]$ vrijedi
$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$
pri čemu su funkcije φ_1 i φ_2 definirane kao
$$\varphi_1(x) = (b-a)x \quad \text{i} \quad \varphi(x) = a.$$
Funkcija φ_1 je neprekidna prema propoziciji 2.7.4., dok smo za konstantnu funkciju φ_2 već ranije rekli da je neprekidna prema (2) iz napomene 2.7.3. Sada je prema propoziciji 2.7.2. funkcija φ neprekidna.

Vrijedi $\varphi(0) = a$ i $\varphi(1) = b$. Promotrimo sad što se događa za $x \in \langle 0,1\rangle$.
Iz $x > 0$ dobivamo sljedeće:
$$\begin{aligned} & x > 0 \ / \cdot (b-a) > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (b-a)x > 0 \ / + a \\ \Leftrightarrow \quad & (b-a)x + a > a \\ \Leftrightarrow \quad & \varphi(x) > a. \end{aligned} \tag{2.20}$$
Iz $x < 1$ dobivamo sljedeće:
$$\begin{aligned} & x < 1 \ / \cdot (b-a) > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (b-a)x < b-a \ / + a \\ \Leftrightarrow \quad & (b-a)x + a < b \\ \Leftrightarrow \quad & \varphi(x) < b. \end{aligned} \tag{2.21}$$
Iz (2.20) i (2.21) slijedi
$$\varphi(x) \in \langle a,b\rangle$$
za $x \in \langle 0,1\rangle$, odnosno
$$\varphi([0,1]) \subseteq [a,b]\,.$$
Sada promatramo što se događa za $y \in [a,b]$:
$$\begin{aligned} & a \leqslant y \leqslant b \ / - a \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \leqslant y - a \leqslant b - a \ / : (b-a) \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \leqslant \frac{y-a}{b-a} \leqslant 1. \end{aligned}$$
Supstituiramo $x = \dfrac{y-a}{b-a}$ pa očito slijedi
$$y = (b-a)x + a.$$

Kako je zbog supstitucije $x \in [0,1]$, prema definiciji funkcije φ slijedi

$$y = \varphi(x).$$

Prema tome, vrijedi

$$[a,b] \subseteq \varphi([0,1]).$$

Zaključujemo da je

$$\varphi([0,1]) = [a,b]\,.$$

Lako se pokaže da za $x_1, x_2 \in [0,1]$ vrijedi

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Dakle, funkcija φ je injekcija.

Definirajmo funkciju $\psi : [0,1] \longrightarrow [a,b]$ sa

$$\psi(x) = \varphi(x).$$

Prema napomeni 2.7.5. vrijedi da je ψ neprekidna funkcija. Kako je φ injekcija te je $\varphi([0,1]) = [a,b]$, funkcija ψ je bijekcija.

Definirajmo funkciju $g : [0,1] \longrightarrow X$ sa

$$g = f \circ \psi.$$

Funkcija g je bijekcija kao kompozicija bijekcija, a iz korolara 2.5.3. slijedi da je i neprekidna.

Dakle, postoji neprekidna bijekcija $f : [0,1] \longrightarrow X$. □

Propozicija 2.8.3. *Ako je funkcija $f : S \longrightarrow T$ strogo rastuća (strogo padajuća) bijekcija, onda je njena inverzna funkcija $f^{-1} : T \longrightarrow S$ također strogo rastuća (strogo padajuća).*

Dokaz. Neka je $f : S \longrightarrow T$ strogo rastuća bijekcija te neka su $y_1, y_2 \in T$ takvi da je $y_1 < y_2$. Tada zbog bijektivnosti postoje $x_1, x_2 \in S$ takvi da je

$$x_1 = f^{-1}(y_1) \quad \text{i} \quad x_2 = f^{-1}(y_2).$$

Iz $f(x_1) = f(f^{-1}(y_1))$ i $f(x_2) = f(f^{-1}(y_2))$ slijedi

$$f(x_1) = y_1 \quad \text{i} \quad f(x_2) = y_2.$$

Tvrdimo da vrijedi $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Pretpostavimo suprotno, odnosno da je $f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2)$, tj. $x_1 \geqslant x_2$. Kako je funkcija f po pretpostavci strogo rastuća, prema definiciji strogo rastuće funkcije slijedi

$$x_1 > x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2),$$

odnosno $y_1 > y_2$. No, to je u kontradikciji s pretpostavkom $y_1 < y_2$. Prema tome vrijedi

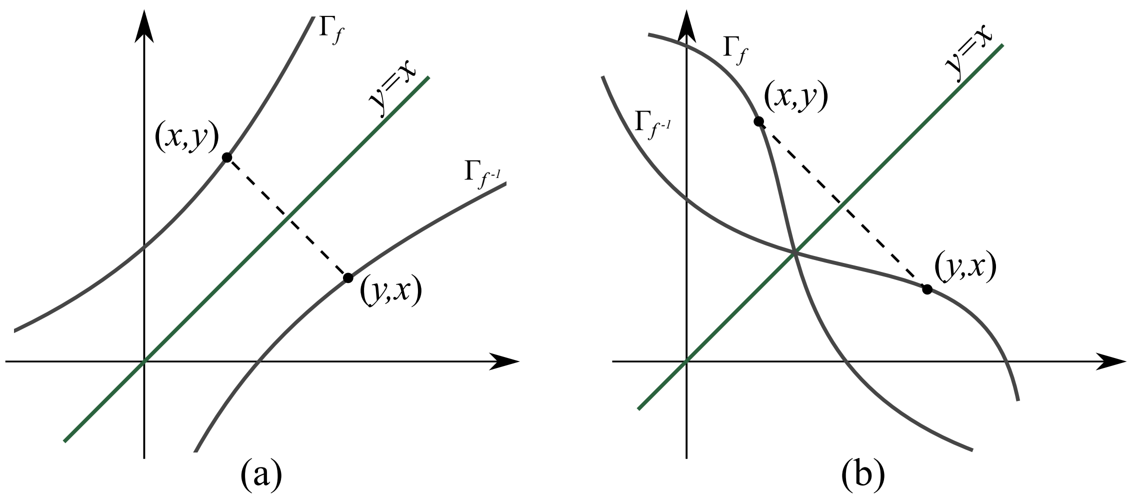
$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2),$$

odnosno inverzna funkcija $f^{-1} : T \longrightarrow S$ je strogo rastuća funkcija.

Analogno se pokazuje za slučaj kada je funkcija $f : S \longrightarrow T$ strogo padajuća bijekcija da je njena inverzna funkcija $f^{-1} : T \longrightarrow S$ strogo padajuća. □

Napomena 2.8.4. *Primijetimo na slici 2.4 da je graf inverzne funkcije f^{-1} simetričan grafu funkcije f s obzirom na pravac $y = x$, kada se radi o strogo rastućoj funkciji* (*a*) *ili strogo padajućoj funkciji* (*b*).

Na ovoj se slici jasno vidi da vrijedi tvrdnja propozicije 2.8.3.



Slika 2.4: Grafovi funkcije f i njene inverzne funkcije f^{-1} kada je funkcija f strogo rastuća (a) ili strogo padajuća (b).

2.9 Rektifikabilnost lukova

Propozicija 2.9.1. *Neka su* a, b, a', $b' \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $a < b$ *i* $a' < b'$. *Neka je* $\varphi : [a, b] \longrightarrow [a', b']$ *strogo monotona bijekcija.*

Pretpostavimo da su $g : [a', b'] \longrightarrow \mathbb{R}$ *i* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkcije takve da je* $f = g \circ \varphi$ *te da je* g *funkcija omeđene varijacije. Tada je i* f *funkcija omeđene varijacije te je*

$$V(f) = V(g).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija φ strogo rastuća te neka je $x_0, x_1, ..., x_k$ proizvoljna subdivizija segmenta $[a, b]$. Definirajmo

$$y_j := \varphi(x_j) \in [a', b'], \quad j = 0, ..., k.$$

Dobili smo subdiviziju $y_0, y_1, ..., y_k$ segmenta $[a', b']$. Tada je

$$\begin{aligned} V(f; x_0, ..., x_n) &= \sum_{j=0}^{k-1} \|f(x_{j+1}) - f(x_j)\| \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \|g(\varphi(x_{j+1})) - g(\varphi(x_j))\| \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \|g(y_{j+1}) - g(y_j)\| \leqslant V(g). \end{aligned}$$

Prema tome, funkcija f je funkcija omeđene varijacije i vrijedi

$$V(f) \leqslant V(g). \tag{2.22}$$

Kako je φ strogo rastuća funkcija, prema propoziciji 2.8.3. funkcija φ^{-1} je također strogo rastuća. Vrijedi

$$g = f \circ \varphi^{-1}$$

pa se analogno pokaže da je

$$V(g) \leqslant V(f). \tag{2.23}$$

Iz izraza (2.22) i (2.23) slijedi tvrdnja teorema, odnosno

$$V(f) = V(g).$$

Pretpostavimo sada da je funkcija φ strogo padajuća te neka je subdivizija segmenta $[a, b]$ definirana kao u slučaju kad je funkcija φ strogo rastuća. Definirajmo

$$y_j := \varphi(x_{k-j}) \in [a', b'], \quad j = 0, ..., k.$$

Dobili smo subdiviziju $y_0, y_1, ..., y_{k-1}, y_k$ segmenta $[a', b']$. Sada se, na analogan način slučaju kada je funkcija φ strogo rastuća, pokaže da vrijedi:

$$V(f) \leqslant V(g). \tag{2.24}$$

U ovom slučaju je, zbog propozicije 2.8.3, inverzna funkcija $\varphi^{-1} : [a', b'] \longrightarrow [a, b]$ strogo padajuća bijekcija pa se, analogno slučaju kad je funkcija φ^{-1} strogo rastuća, pokaže da je

$$V(g) \leqslant V(f). \tag{2.25}$$

Iz izraza (2.24) i (2.25) slijedi tvrdnja teorema, odnosno

$$V(f) = V(g).$$

□

Definicija 2.9.2. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je X luk u $\mathbb{R}^n$. Neka su a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te $f : [a, b] \longrightarrow X$ neprekidna bijekcija. Tada za f kažemo da je* ***parametrizacija luka*** *X.*

Iz definicije luka jasno je da svaki luk ima parametrizaciju.

Teorem 2.9.3. *Neka je X luk u $\mathbb{R}^n$ te neka su $f : [a, b] \longrightarrow X$ i $g : [a', b'] \longrightarrow X$ parametrizacije od X. Tada postoji strogo monotona bijekcija $\varphi : [a, b] \longrightarrow [a', b']$ takva da je*

$$f = g \circ \varphi.$$

Dokaz. Prema teoremu 2.7.1. funkcija $g^{-1} : X \longrightarrow [a', b']$ je neprekidna. Iz korolara 2.5.3. slijedi da je funkcija

$$g^{-1} \circ f : [a, b] \longrightarrow [a', b']$$

neprekidna. Kao kompozicija bijekcija, funkcija $g^{-1} \circ f$ je bijekcija.

Neka je $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$h(x) = (g^{-1} \circ f)(x),$$

za svaki $x \in [a, b]$. Prema napomeni 2.7.5., funkcija h je neprekidna funkcija. Očito je h injektivna funkcija kao kompozicija injekcija.

Iz teorema 2.4.2. slijedi da je h strogo monotona funkcija. Jasno je da je onda i $g^{-1} \circ f$ strogo monotona funkcija.

Označimo

$$\varphi = g^{-1} \circ f.$$

Imamo da je $\varphi : [a, b] \longrightarrow [a', b']$ strogo monotona bijekcija te je

$$g \circ \varphi = g \circ (g^{-1} \circ f),$$

tj.

$$f = g \circ \varphi.$$

□

Definicija 2.9.4. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je X luk u $\mathbb{R}^n$. Kažemo da je X* ***rektifikabilan luk*** *u $\mathbb{R}^n$ ako postoji parametrizacija $f : [a, b] \longrightarrow X$ od X takva da je f funkcija omeđene varijacije.*

Teorem 2.9.5. *Neka je X rektifikabilan luk u $\mathbb{R}^n$. Tada za svaku parametrizaciju f od X vrijedi da je f funkcija omeđene varijacije.*

Nadalje, ako su f_1 i f_2 bilo koje parametrizacije od f, onda je

$$V(f_1) = V(f_2).$$

Dokaz. Budući da je X rektifikabilan luk, postoji parametrizacija $g : [a', b'] \longrightarrow X$ takva da je g funkcija omeđene varijacije.

Neka je $f : [a, b] \longrightarrow X$ parametrizacija od X. Iz teorema 2.9.3. slijedi da postoji strogo monotona bijekcija $\varphi : [a, b] \longrightarrow [a', b']$ takva da je

$$f = g \circ \varphi.$$

Iz propozicije 2.9.1. slijedi da je f funkcija omeđene varijacije. Nadalje, propozicija 2.9.1. također povlači da je

$$V(f) = V(g).$$

Ako su sada f_1 i f_2 dvije parametrizacije od X, onda je

$$V(f_1) = V(g) \quad \text{i} \quad V(f_2) = V(g)$$

pa je

$$V(f_1) = V(f_2),$$

što je i trebalo dokazati. □

Definicija 2.9.6. *Neka je X rektifikabilan luk u $\mathbb{R}^n$. Odaberimo bilo koju parametrizaciju $f : [a, b] \longrightarrow X$. Tada je f funkcija omeđene varijacije te za broj $V(f)$ kažemo da je* ***duljina luka*** *X.*

Uočimo da je funkcija f iz definicije 2.9.6. prema teoremu 2.9.5. funkcija omeđene varijacije pa definicija 2.9.6. ne ovisi o izboru parametrizacije f.

Bibliografija

[1] S. Mardešić, *Matematička analiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

[2] B. Pavković i D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[3] A. Protulipac, *Elementarni aspekti diferencijabilnosti*, diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, 2018.

[4] K. Tkalec, *Potpunost i njene posljedice*, diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, 2016.

[5] Š. Ungar, *Matematička analiza 4*, skripta.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavani su pojmovi luka i duljine luka. Kroz dva poglavlja iskazana je i dokazana temeljna teorija nužna za razumijevanje spomenutih pojmova uz nekoliko primjera. Sam rektifikabilan luk je definiran kao luk čija je parametrizacija ujedno i funkcija omeđene varijacije, dok je njegova duljina jednaka totalnoj varijaciji njegove parametrizacije. Konačno, navodimo kako duljina luka ne ovisi o izboru parametrizacije luka.

Summary

In this thesis, we studied the concepts of arc and arc length. Basic theory that is necessary for understanding the mentioned concepts is presented and proven with a few examples, through two chapters. The rectifiable arc itself is defined as an arc whose parametrisation is also a function of bounded variation, while its length is equal to the total variation of its parametrisation. Finally, we state that the length of an arc does not depend on the choice of arc parametrisation.

Životopis

Rođena sam 30. siječnja 1994. godine u Varaždinu. Nakon završetka osnovne škole u Svetom Đurđu upisujem Prvu gimnaziju Varaždin koju završavam 2012. godine. Iste godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički 2014. godine. Na istom fakultetu 2017. godine upisujem diplomski studij Matematika, smjer: nastavnički.