

Primjena pohlepnog algoritma za redukciju dimenzije 1d elastičnih struktura

Račić, Vinka

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:191269>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-19**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Vinka Račić

**PRIMJENA POHLEPNOG ALGORITMA
ZA REDUKCIJU DIMENZIJE 1D
ELASTIČNIH STRUKTURA**

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Josip Tambača

Zagreb, srpanj, 2020

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Zahvaljujem se mentoru, prof. dr. sc. Josipu Tambači, na pomoći, susretljivosti i vremenu uloženom u izradi ovog rada.

Hvala prijateljima koji su me uvijek poticali i koji su studentske dane ispunili srećom i zabavom.

Hvala dečku koji je tijekom studiranja uvijek nosio dio mojih briga.

Najviše hvala roditeljima i obitelji na beskrajnom razumijevanju i podršci u svakom trenutku.

Sadržaj

Sadržaj	iv
Uvod	2
1 Metode redukcije baze	3
1.1 Kratki opis	3
1.2 Visokodimenzionalni model	5
1.3 Galerkinova projekcija na prostor V_{rb}	8
1.4 Procjenitelj pogreške	10
1.5 Offline/online faza	12
1.6 Pohlepna metoda	13
1.7 Opis algoritma	14
2 Euler-Bernoullijev model elastičnog štapa	16
3 Numerički primjeri	21
3.1 1. primjer	22
3.2 2. primjer	31
3.3 3. primjer	37
Bibliografija	41

Uvod

Korištenjem različitih metoda kao što su metoda konačnih elemenata, metoda konačnih volumena, spektralna metoda i druge, aproksimiraju se realni problemi u znanosti i tehnologiji. Većina takvih, obično se može opisati kombinacijom parcijalnih diferencijalnih jednažbi, koje ovise o parametrima koji opisuju njihovu geometrijsku konfiguraciju, fizička svojstva, rubne uvjete i slično.

Često je u praksi potrebno riješiti problem za mnogo različitih vrijednosti raznih parametara. To je posebno izraženo ako se radi na optimizaciji problema ili ako je potrebno postaviti mnogo upita u realnom vremenu. Tada visokodimenzionalni modeli postaju problematični zbog svoje memorijske i vremenske zahtjevnosti.

Dakle, zbog efikasnosti i brzine, javila se potreba za razvojem metoda koje služe za dobivanje modela smanjenog reda. One omogućuju brzo nalaženje rješenja zadanog problema za različite parametre, neovisno o dimenziji originalnog problema. Kombiniranjem rješenja dobivenih rješavanjem visokodimenzionalnog problema na nekom manjem skupu parametara, metode redukcije dimenzije formiraju novi sustav jednažbi, koji je puno manji u odnosu na početni, a time je i rješavanje problema brže i efikasnije.

Tema ovog rada je implementacija i testiranje pohlepno algoritma za redukciju dimenzije rubnog problema. Prije samog opisa algoritma, općenitu rubnu zadaću aproksimirat ćemo metodom konačnih elemenata. Analizirat ćemo slučaj kada je moguća afina dekompozicija problema s obzirom na ulazne parametre.

Promatrat ćemo Euler-Bernoullijev model elastičnog štapa i aproksimirati ga metodom konačnih elemenata, gdje će elementi biti hermitski kubni. Pokazat ćemo da možemo iskoristiti afinu dekompoziciju s obzirom na ulazne parametre koje smo odabrali, te da Euler-Bernoullijev model štapa zadovoljava pretpostavke koje omogućuju da problem bude reducibilan.

Algoritam je testiran na primjerima s različitim skupom ulaznih parametara i različitim brojem parametara, koji će u ovom radu odgovarati broju elemenata u metodi konačnih elemenata. Zanimat će nas i vrijednosti procjenitelja pogreške u svakom koraku pohlepne metode, jer će one biti kriterij po kojem reduciramo dimenziju početnog problema. Da bi provjerili točnost dobivenog rješenja na reduciranom prostoru, računat ćemo pogrešku na manjem skupu parametara. Usporedit ćemo i vrijeme potrebno za aproksimaciju modela

štapa metodom konačnih elemenata i rješavanjem reduciranog problema te vidjeti koje su razlike u točnosti i vremenskoj zahtjevnosti.

Poglavlje 1

Metode redukcije baze

Za probleme visokih dimenzija glavna ideja je pronaći bazu koju čine vektori rješenja visokodimenzionalnog modela, tako da oni što bolje opisuju sve druge vektore u danom prostoru.

Za redukciju dimenzije problema koristit će se offline/online strategija koja će biti opisana u nastavku.

Dvije metode koje se često koriste za rješavanje opisanog problema su prava ortogonalna dekompozicija (POD) i pohlepne metode na koje ćemo se fokusirati u ovom radu.

1.1 Kratki opis

Neka je $\mu \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^P$ označen ulazni vektor parametara, gdje je $\mathcal{P}$ skup parametara, a $P \geq 1$.

Neka je V vektorski prostor na kojem je definiran problem

$$A(\mu)u(\mu) = f(\mu). \quad (1.1)$$

Neka je $V_h \leq V$ konačnodimenzionalni potprostor prostora V takav da je $\dim V_h = N_h$. Metoda konačnih elemenata omogućuje nam da parametrizirani problem (1.1) promatramo na konačnodimenzionalnom potprostoru V_h . Sada se parametrizirani problem u prostoru V_h može zapisati u formi

$$A_h(\mu)u_h(\mu) = f_h(\mu), \quad (1.2)$$

gdje je $A_h(\mu) \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}$ matrica krutosti, $f_h(\mu) \in \mathbb{R}^{N_h}$ vektor desne strane i $u_h(\mu) \in \mathbb{R}^{N_h}$ vektor rješenja.

Nakon što je problem (1.2) reduciran i dobili smo model smanjenog reda, moguće je za bilo koji odabrani parametar $\mu \in \mathcal{P}$ u prostoru V_{rb} , gdje je $\dim V_{rb} \ll \dim V_h$, naći aproksimativno rješenje od (1.2). Ono je izraženo kao linearna kombinacija odabranih rješenja

visokodimenzionalnog problema koji odgovaraju određenim parametrima. Rješenja su birana ovisno o problemu i nazivamo ih baznim funkcijama.

Da bi reducirali problem (1.2) trebat će nam matrica $V_N \in \mathbb{R}^{N_h \times N}$, kojoj su stupci upravo rješenja visokodimenzionalnog problema (1.2) odabrana pomoću procjenitelja pogreške. Bitno je osigurati da stupci matrice V_N čine bazu, a to ćemo postići primjenom Gram-Schmidtova postupka. Matricu V_N nazivamo još i reducirana baza.

Procjenitelj, koji pokazuje koliko je dobra postignuta aproksimacija, ovisit će o nekoliko faktora, a među njima vrijedi istaknuti rezidual

$$r_h^N = r_h(V_N u_N(\mu); \mu), \quad (1.3)$$

gdje je $r_h(u_h; \mu) = f_h(\mu) - A_h(\mu)u_h(\mu)$ rezidual visokodimenzionalnog modela.

U prethodnoj definiciji (1.3), s $u_N(\mu)$ je označeno rješenje reduciranog problema dimenzije N , za neki parametar μ .

Kako bi dobili reducirani model iz visokodimenzionalnog modela zahtjevamo da je rezidual ortogonalan na potprostor razapet stupcima matrice V_N

$$V_N^T(f_h(\mu) - A_h(\mu)V_N u_N(\mu)) = 0. \quad (1.4)$$

Sada iz (1.2) koristeći prethodnu jednakost (1.4) dobivamo reducirani problem:

$$A_N(\mu)u_N(\mu) = f_N(\mu), \quad (1.5)$$

gdje je

$$A_N(\mu) = V_N^T A_h(\mu) V_N, \quad f_N(\mu) = V_N^T f_h(\mu), \quad (1.6)$$

za $A_N(\mu) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $f_N(\mu) \in \mathbb{R}^N$ i $u_N(\mu) \in \mathbb{R}^N$ reducirani vektor rješenja.

Prethodnu transformaciju matricom V_N zvat ćemo Galerkinova projekcija na prostor V_{rb} .

Offline/online strategija omogućava da jednom na skup i dugotrajan način (offline faza) izračunamo matricu V_N i onda za svaki novi parametar μ rješenje problema (1.5) možemo dobiti efikasno i brzo (online faza).

Prema prethodnom, za bilo koji novoodabrani parametar μ , u online fazi, aproksimirat ćemo rješenje $u_h(\mu)$ sa $V_N u_N(\mu)$.

Uvedimo još dvije važne oznake koje ćemo koristiti u nastavku.

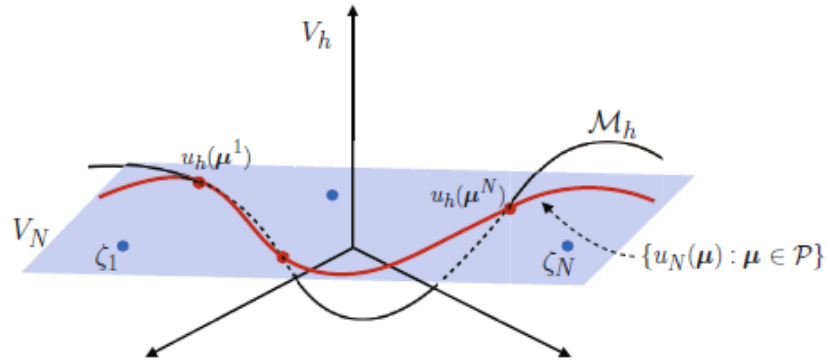
Stupci matrice V_N , koji su prikazani kao linearna kombinacija funkcija koje čine bazu u prostoru V_h , nazivaju se bazne funkcije i označavamo ih s $\{\zeta_1, \dots, \zeta_N\}$.

Prostor razapet stupcima matrice V_N definiran je s

$$V_{rb} = \text{span}\{\zeta_1, \dots, \zeta_N\} \quad (1.7)$$

i naziva se reducirani prostor.

Na slici 1.1 je s V_h označen prostor visokodimenzionalnog modela, a s V_N modela smanjenog reda. Prikazan je primjer gdje se promatra 1 parametar. Konačno rješenje je projekcija iz prostora V_h na prostor V_N



Slika 1.1: Shema metode

1.2 Visokodimenzionalni model

Za početak uvedimo nekoliko rezultata koji će biti korisni u nastavku.

Neka je V normiran prostor. Za bilinearnu formu $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ i linearni funkcional $f \in V'$ uvodimo varijacijski problem:

naći $u \in V$ tako da

$$a(u, v) = f(v), \quad v \in V. \quad (1.8)$$

Bilinearna forma $a(\cdot, \cdot)$ je neprekidna na $V \times V$ ako postoji konstanta $\gamma > 0$ tako da vrijedi:

$$|a(u, v)| \leq \gamma \|u\|_V \|v\|_V, \quad u, v \in V \quad (1.9)$$

i koercitivna ako postoji konstanta $\alpha > 0$ tako da

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad v \in V. \quad (1.10)$$

Pitanje rješivosti zadatke (1.8) riješeno je Lax-Milgramovom lemom.

Lema 1.2.1. *Neka je prostor V Hilbertov, $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna, koercitivna bilinearna forma na $V \times V$ i $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidan linearni funkcional na V . Tada, varijacijski problem (1.8) ima jedinstveno rješenje i ono zadovoljava sljedeću nejednakost:*

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V'}. \quad (1.11)$$

Iz koercitivnosti i neprekidnosti bilinearne forme $a(v, v)$, slijedi da je

$$\alpha \|v\|_V^2 \leq a(v, v) \leq \gamma \|v\|_V^2, \quad v \in V, \quad (1.12)$$

dakle a je skalarni produkt ekvivalentan normi na V .

Za diskretizacijski parametar $d > 0$ u konačnodimenzionalnom prostoru $V_h \subset V$, Galerkinovu aproksimaciju zadaće (1.8) zapisat ćemo kao:

naći $u_h \in V_h$ tako da

$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \quad v_h \in V_h. \quad (1.13)$$

Ovu zadaću ćemo zvati Galerkinova zadaća, dok ćemo rješenje u_h nazivati Galerkinova aproksimacija vektora u .

Označimo s $(\phi^j)_{j=1}^{N_h}$ bazu prostora V_h . Tada se vektor rješenja u_h može zapisati kao linearna kombinacija baznih funkcija $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \phi^i$. Slijedi da je rješenje (1.13) ekvivalentno rješenju sustava

$$A_h \alpha_h = f_h, \quad (1.14)$$

gdje se A_h i f_h mogu zapisati kao

$$(A_h)_{ij} = a(\phi^j, \phi^i), \quad (f_h)_i = f(\phi^i) \quad (\alpha_h)_i = \alpha_i \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N_h\}. \quad (1.15)$$

Sljedeća lema povezuje prethodne tvrdnje.

Lema 1.2.2. *Neka prostor V , bilinearna forma $a(\cdot, \cdot)$ i linearni funkcional $f(\cdot)$ zadovoljavaju pretpostavke Leme 1.2.1. Neka je $V_h \leq V$ zatvoren potprostor. Tada je $a(\cdot, \cdot)$ neprekidna na $V_h \times V_h$ s konstantom $\gamma_h \leq \gamma$ i koercitivna na V_h s konstantom $\alpha_h \geq \alpha$. Tada za svaki $h > 0$, diskretizirani problem (1.13) ima jedinstveno rješenje $u_h \in V_h$, a to rješenje zadovoljava nejednakost:*

$$\|u_h\|_V \leq \frac{1}{\alpha_h} \|f\|_{V'}. \quad (1.16)$$

Ako je $u \in V$ jedinstveno rješenje (1.8) sljedeća nejednakost je zadovoljena:

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\gamma}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (1.17)$$

Koercitivna konstanta α_h zanimat će nas u kasnijoj analizi procjenitelja i trebat ćemo najbolju moguću ocjenu pa je definiramo s

$$\alpha_h = \inf_{v_h \in V_h} \frac{a(v_h, v_h)}{\|v_h\|_V^2}, \quad (1.18)$$

gdje je s

$$\|v_h\|_V^2 = v^T \mathbb{X}_h v, \quad v_h \in V_h, \quad (1.19)$$

dana norma u prostoru V , $\mathbb{X}_h$ je simetrična pozitivno definitna matrica definirana s

$$(\mathbb{X}_h)_{i,j} = (\phi^i, \phi^j)_V, \quad (1.20)$$

a v je diskretni vektor skalara raspisa v_h u bazi $\{\phi^i, i = 1, \dots, N_h\}$.

Sada iz (1.12) i (1.18) slijedi da je α_h najmanja svojstvena vrijednost u slučaju kada je A_h simetrična i definirana kao u (1.15).

Uvedimo sada slabu formulaciju problema ovisnog o parametru μ :
za dani $\mu \in \mathcal{P}$ naći rješenje $u(\mu) \in V$ tako da

$$a(u(\mu), v; \mu) = f(v; \mu), \quad v \in V. \quad (1.21)$$

Sada konačnodimenzijski problem možemo zapisati koristeći se (1.21):
za dani $\mu \in \mathcal{P}$ naći rješenje $u_h(\mu) \in V_h$ tako da

$$a(u_h(\mu), v_h; \mu) = f(v_h; \mu), \quad v_h \in V_h. \quad (1.22)$$

U nastavku pretpostavimo da je forma a koercitivna s konstantom koja ne ovisi o μ , tj. da $\exists \alpha_0$ tako da

$$\alpha(\mu) = \inf_{v \in V} \frac{a(v, v; \mu)}{\|v\|_V^2} \geq \alpha_0. \quad (1.23)$$

Kombinirajući neprekidnost i koercitivnost dolazimo do zaključka da za svaki $\mu \in \mathcal{P}$ vrijedi

$$\|u(\mu)\|_V \leq \frac{1}{\alpha(\mu)} \|f(\cdot; \mu)\|_{V'} \leq \frac{1}{\alpha_0} \|f(\cdot; \mu)\|_{V'}. \quad (1.24)$$

Koristeći se Galerkinovom aproksimacijom vektora u slijedi da je (1.22) ekvivalentno rješenju sustava (1.2) gdje je $(\phi^j)_{j=1}^{N_h}$ baza u V_h , a $A_h(\mu)$ i $f_h(\mu)$ se mogu zapisati kao:

$$(A_h(\mu))_{ij} = a(\phi^j, \phi^i; \mu), \quad f_h(\mu)_i = f(\phi^i; \mu), \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N_h\}. \quad (1.25)$$

Kada $A_h(\mu)$ i $f_h(\mu)$ ovise afino o parametrima možemo zapisati $A_h(\mu)$ i $f_h(\mu)$ na način

$$A_h(\mu) = \sum_{q=1}^{Q_a} Q_a^q(\mu) A_h^q, \quad f_h(\mu) = \sum_{q'=1}^{Q_f} Q_f^{q'}(\mu) f_h^{q'}, \quad (1.26)$$

gdje su matrice A_h^q i vektori $f_h^{q'}$ neovisni o μ . $\{Q_a^q\}_{q=1}^{Q_a}$ i $\{Q_f^{q'}\}_{q'=1}^{Q_f}$ su skupovi od Q_a , odnosno Q_f skalarnih funkcija $Q_a^q, Q_f^{q'}: \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$.

Ovo svojstvo u bitnom će ubrzati formiranje matrice krutosti i za visokodimenzijski model i za reducirani problem.

1.3 Galerkinova projekcija na prostor V_{rb}

Za dani $\mu \in \mathcal{P}$ u prostoru V_{rb} Galerkinova zadaća problema (1.21) glasi:
naći $u_N \in V_{rb}$ tako da

$$a(u_N(\mu), v_N; \mu) = f(v_N; \mu), \quad v_N \in V_{rb}. \quad (1.27)$$

Sljedeća lema rezultat je primjene Lax-Milgramove leme na (1.27).

Lema 1.3.1. *Ako vrijede pretpostavke Leme 1.2.2, za svaki $\mu \in \mathcal{P}$ problem (1.27) ima jedinstveno rješenje $u_N \in V_{rb}$ i to rješenje zadovoljava ocjenu*

$$\|u_N(\mu)\|_V \leq \frac{1}{\alpha_N(\mu)} \|f(\cdot; \mu)\|_{V'}, \quad (1.28)$$

gdje je

$$\alpha_N(\mu) = \inf_{v \in V_{rb}} \frac{a(v, v; \mu)}{\|v\|_V^2}. \quad (1.29)$$

Primijetimo, dok god je $V_{rb} \subset V_h$, iz Leme 1.2.2 vrijedi da je

$$\alpha_N(\mu) \geq \alpha_h(\mu), \quad \mu \in \mathcal{P} \quad (1.30)$$

gdje je

$$\alpha_h(\mu) = \inf_{v \in V_h} \frac{a(v, v; \mu)}{\|v\|_{V_h}^2} \quad (1.31)$$

konstanta koercitivnosti visokodimenzionalnog problema.

Galerkinova zadaća na prostoru V_{rb} dobro je postavljena ako vrijedi koercitivnost bilinearne forme $a(\cdot, \cdot; \mu)$ za svaki $\mu \in \mathcal{P}$ na $V_h \times V_h$. Tada je a koercitivna i na $V_{rb} \times V_{rb}$. Sa $(u, v)_\mu = a(u, v; \mu)$ označavamo skalarni produkt, a s $\|\cdot\|_\mu$ normu induciranu tim skalarnim produktom.

Oduzimanjem (1.27) od (1.22) dobije se

$$a(u_h(\mu) - u_N(\mu), v_N; \mu) = 0, \quad v_N \in V_{rb}. \quad (1.32)$$

U slučaju kada je problem simetričan i koercitivan, rješenje u_N reduciranog problema zapravo je Galerkinova projekcija vektora u_h na prostor V_{rb} . O tome govori i sljedeća propozicija:

Propozicija 1.3.2. *Ako je $a(\cdot, \cdot; \mu)$ simetrična i koercitivna bilinearna forma, onda rješenje $u_N(\mu) \in V_{rb}$ u (1.27) zadovoljava sljedeću jednakost:*

$$u_N(\mu) = \operatorname{argmin}_{v \in V_{rb}} \|u_h(\mu) - v\|_\mu^2. \quad (1.33)$$

Također, vrijedi i obrat, ako $u_N(\mu) \in V_N$ zadovoljava prethodnu propoziciju, onda rješava i (1.27).

Također, koristeći relaciju (1.30) iz prethodne leme slijedi:

$$\|u_N(\mu)\|_V \leq \frac{1}{\alpha_N(\mu)} \|f(\cdot; \mu)\|_{V'} \leq \frac{1}{\alpha_h(\mu)} \|f(\cdot; \mu)\|_{V'}, \quad \mu \in \mathcal{P}. \quad (1.34)$$

Zapišimo sada $u_N(\mu)$ kao linearnu kombinaciju baznih funkcija definiranih u (1.7). Vrijedi da je:

$$u_N(\mu) = \sum_{m=1}^N u_N^m(\mu) \zeta_m. \quad (1.35)$$

Uvrštavajući (1.35) u (1.27) za $v_N = \zeta_n, 1 \leq n \leq N$ sustav od N linearnih jednažbi dan je s

$$\sum_{m=1}^N a(\zeta_m, \zeta_n; \mu) u_N^m(\mu) = f(\zeta_n; \mu), \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}. \quad (1.36)$$

Ako s $A_N(\mu) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ označavamo matricu s elementima $(A_N(\mu))_{nm} = a(\zeta_m, \zeta_n; \mu)$, a sa $f_N(\mu) \in \mathbb{R}^N$ vektor s komponentama $(f_N(\mu))_n = f(\zeta_n; \mu)$, onda je (1.36) ekvivalentno linearnom sustavu (1.5).

Matrica A_h je za razliku od A_N rijetka, pa iako vrijedi da je dimenzija matrice A_N puno manja od dimenzije matrice A_h , računanje matrice A_N i vektora f_N i dalje uključuje operacije čija složenost ovisi i dimenziji N_h visokodimenzionalnog modela. Ključno je, ako vrijedi (1.26), iskoristiti afinu ovisnost bilinearne forme a i linearne forme f o parametru μ . To nas dovodi do sljedećih jednakosti:

$$A_N(\mu) = \sum_{q=1}^{Q_a} Q_a^q(\mu) A_N^q, \quad f_N(\mu) = \sum_{q'=1}^{Q_f} Q_f^{q'}(\mu) f_N^{q'}, \quad (1.37)$$

gdje su matrica (A_N^q) i vektor $(f_N^{q'})$ dani s

$$(A_N^q)_{nm} = a_q(\zeta_m, \zeta_n), \quad (f_N^{q'})_n = f_{q'}(\zeta_n) \quad \forall m, n \in \{1, \dots, N_h\} \quad (1.38)$$

i sve $q \in \{1, \dots, Q_a\}, q' \in \{1, \dots, Q_f\}$.

Dakle, ako bazne funkcije ζ_m pripadaju prostoru V_h , možemo računati reduciranu matricu i reducirani vektor iz odgovarajućih visokodimenzionalnih. Svaku reduciranu baznu

funkciju možemo prikazati kao linearnu kombinaciju funkcija $(\phi^i)_{i=1}^{N_h}$ koje čine bazu u prostoru V_h , pa slijedi da je

$$\zeta_m = \sum_{i=1}^{N_h} \zeta_m^{(i)} \phi^i, \quad \forall m \in \{1, \dots, N\}. \quad (1.39)$$

Dakle, matrica $V_N \in \mathbb{R}^{N_h \times N}$ čiji stupci sadrže koeficijente reduciranih baznih funkcija, definirana je s

$$(V_N)_{im} = \zeta_m^{(i)}, \quad \forall m \in \{1, \dots, N\}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N_h\}. \quad (1.40)$$

Slijedi da je za svaki $1 \leq m, n \leq N$

$$a_q(\zeta_m, \zeta_n) = \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j=1}^{N_h} \zeta_m^{(j)} a_q(\phi^j, \phi^i) \zeta_n^{(i)}, \quad f_{q'}(\zeta_n) = \sum_{i=1}^{N_h} f_{q'}(\phi^i) \zeta_n^{(i)} \quad (1.41)$$

U matricnoj formi transformacija iz prostora V_h u prostor V_N dana je s:

$$A_N^q = (V_N)^T A_h^q V_N, \quad f_N^{q'} = (V_N)^T f_h^{q'}, \quad (1.42)$$

gdje je

$$(A_h^q)_{ij} = a_q(\phi^j, \phi^i), \quad (f_h^{q'})_i = f_{q'}(\phi^i), \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}. \quad (1.43)$$

1.4 Procjenitelj pogreške

Procjenitelj pogreške uspoređuje rješenje reduciranog modela s rješenjem visokodimenzionalnog modela. Uloga procjenitelja je jamčiti pouzdanost i učinkovitost postupka. Preciznije, zanimaće nas razlika rješenja $u_N(\mu)$ i $u_h(\mu)$ za svaku novu vrijednost parametra $\mu \in \mathcal{P}$.

Želimo da procjenitelj bude takav da povećanjem reduciranog prostora V_{rb} , odnosno matrice V_N , procjena pogreške teži prema nuli istom brzinom kao i stvarna pogreška. Označimo s $e_h(\mu) = u_h(\mu) - u_N(\mu) \in V_h$ razliku između rješenja visokodimenzionalnog modela i reduciranog modela. Oduzimanjem (1.27) od (1.22) slijedi:

$$a(e_h(\mu), v) = f(v; \mu) - a(u_N(\mu), v; \mu), \quad v \in V_h. \quad (1.44)$$

Prethodna jednakost može se zapisati kao

$$a(e_h(\mu), v) = r(v; \mu), \quad v \in V_h, \quad (1.45)$$

pomoću reziduala visokodimenzionalnog problema primijenjenog na rješenje reduciranog problema.

Zbog neprekidnosti bilinearne forme $a(\cdot, \cdot; \mu)$ vrijedi da je

$$|r(v; \mu)| \leq \gamma_h(\mu) \|e_h(\mu)\|_V \|v\|_V, \quad v \in V_h. \quad (1.46)$$

Prema prethodnoj ocjeni i definiciji dualne norme slijedi

$$\|r(\cdot; \mu)\|_{V'_h} \leq \gamma_h(\mu) \|e_h(\mu)\|_V. \quad (1.47)$$

Iz definicije operatorske norme vrijedi

$$\|r(\cdot; \mu)\|_{V'_h} = \sup_{v \in V_h} \frac{|r(v; \mu)|}{\|v\|_V} \geq \frac{|r(e_h(\mu); \mu)|}{\|e_h(\mu)\|_V}, \quad (1.48)$$

pa iz (1.45) i koercitivnosti forme $a(\cdot, \cdot; \mu)$ imamo

$$\|r(\cdot; \mu)\|_{V'_h} \geq \frac{a(e_h(\mu), e_h(\mu); \mu)}{\|e_h(\mu)\|_V} \geq \alpha_h(\mu) \|e_h(\mu)\|_V. \quad (1.49)$$

Sada iz (1.47) i (1.49) slijedi

$$\frac{1}{\gamma_h(\mu)} \|r(\cdot; \mu)\|_{V'_h} \leq \|e_h(\mu)\|_V \leq \frac{1}{\alpha_h(\mu)} \|r(\cdot; \mu)\|_{V'_h}. \quad (1.50)$$

Ovime je postignuta ekvivalencija između norme pogreške i pripadajuće norme reziduala.

Zapišimo sada ponovno s

$$e_h(\mu) = u_h(\mu) - V_N u_N(\mu)$$

razliku rješenja visokodimenzionalnog modela i aproksimacije tog modela reduciranim, a s

$$r_h(u_N; \mu) = f_h(\mu) - A_h(\mu) V_N u_N(\mu)$$

rezidual. Vrijedi da je

$$A_h(\mu) e_h(\mu) = r_h(u_N; \mu).$$

Ako A_h nije singularna matrica, pogreška e_h može se zapisati kao

$$e_h(\mu) = A_h^{-1}(\mu) r_h(u_N; \mu). \quad (1.51)$$

U V -normi danoj s (1.19), uz matricu $\mathbb{X}_h$ definiranu s (1.20), množenjem (1.51) s $\mathbb{X}_h^{1/2}$ slijedi:

$$\mathbb{X}_h^{1/2} e_h(\mu) = \mathbb{X}_h^{1/2} A_h^{-1}(\mu) \mathbb{X}_h^{1/2} \mathbb{X}_h^{-1/2} r_h(u_N; \mu), \quad (1.52)$$

uz $\mathbb{X}_h^{1/2} \mathbb{X}_h^{-1/2} = \mathbb{I}$.

Slijedi da je

$$\|e_h(\mu)\|_V \leq \|\mathbb{X}_h^{1/2} A_h^{-1}(\mu) \mathbb{X}_h^{1/2}\|_2 \|r_h(u_N; \mu)\|_{V'},$$

odnosno

$$\|e_h(\mu)\|_V \leq \frac{1}{\sigma_{\min}(\mathbb{X}_h^{-1/2} A_h(\mu) \mathbb{X}_h^{-1/2})} \|r_h(u_N; \mu)\|_{V'},$$

gdje je $\sigma_{\min}(\mathbb{X}_h^{-1/2} A_h(\mu) \mathbb{X}_h^{-1/2})$ upravo najmanja svojstvena vrijednost $\alpha_h(\mu)$ matrice $A_h(\mu)$.

Najčešće pri optimizaciji ili problemu kontrole, od modela ne trebamo aproksimaciju rješenja modela, već samo aproksimaciju nekog funkcionala ovisnog o rješenju. Označimo taj funkcional sa

$$s(\mu) = l(u(\mu); \mu). \quad (1.53)$$

Sa $s: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ je dana veza između ulaznog parametra μ i vrijednosti koju optimiziramo, koja se definira pomoću funkcionala $l: V \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$.

Neka je sada za fiksni parametar μ , u_h rješenje sustava (1.22) i neka je

$$s_h(\mu) = l(u_h(\mu); \mu) \quad (1.54)$$

pripadajući funkcional.

Primijenjujući gornje pretpostavke na reducirani problem (1.27) definiramo funkcional na reduciranom problemu

$$s_N(\mu) = l(u_N(\mu); \mu). \quad (1.55)$$

Sada definiramo jedan mogući procjenitelj pogreške sa:

$$\eta(\mu, V_N) = \frac{\|r(\cdot; \mu)\|_{V_h'} \|l(\cdot; \mu)\|_{V_h'}}{\alpha_h(\mu) |s_N(\mu)|}. \quad (1.56)$$

1.5 Offline/online faza

Metoda redukcije dimenzije podijeljena je u dvije faze. Tijekom prve faze, nazvane offline, koja može biti jako duga, pretražuje se skup rješenja od (1.22) definiran s

$$\mathcal{M}_h = \{u_h(\mu) \in V_h : \mu \in \mathcal{P}\} \subset V_h. \quad (1.57)$$

Cilj je pohlepni algoritmom konstruirati reduciranu bazu V_N pomoću koje će se za bilo koji drugi parametar $\mu \in \mathcal{P}$ moći aproksimirati rješenje iz skupa $\mathcal{M}_h$ uz određenu točnost. Pretpostavljamo da vrijedi afina dekompozicija kao u (1.26), pa uvrštavanjem (1.26) u

$$A_N(\mu) = V_N^T A_h(\mu) V_N, \quad f_N(\mu) = V_N^T f_h(\mu), \quad (1.58)$$

sljedi:

$$A_N(\mu) = \sum_{q=1}^{Q_a} Q_a^q(\mu) V_N^T A_h^q V_N = \sum_{q=1}^{Q_a} Q_a^q(\mu) A_N^q, \quad (1.59)$$

$$f_N(\mu) = \sum_{q'=1}^{Q_f} Q_f^{q'}(\mu) V_N^T f_h^{q'} = \sum_{q'=1}^{Q_f} Q_f^{q'}(\mu) f_N^{q'}. \quad (1.60)$$

Ovime je omogućeno da u online fazi koja slijedi ne moramo računati Galerkinovu projekciju na prostor V_{rb} , čime problem više ne ovisi o dimenziji N_h visokodimenzionalnog problema.

Online faza obuhvaća formiranje matrice A_N i vektora f_N kao u (1.37), ovisno o parametru μ . Nakon toga je potrebno riješiti sustav $A_N(\mu)u_N(\mu) = f_N(\mu)$ te odrediti pogrešku

$$\|u_h(\mu) - V_N u_N(\mu)\|. \quad (1.61)$$

1.6 Pohlepna metoda

Ideja pohlepnih algoritama je u svakom koraku tražiti najbolje rješenje. Ovakav pristup ne osigurava da će algoritam pronaći globalni optimum, ali cijeli postupak čini puno bržim što nam je nekad dovoljno.

Pohlepna metoda dio je offline faze redukcije dimenzije, gdje vremenska zahtjevnost pohlepnog algoritma može biti puno manja u odnosu na druge algoritme. U svakom koraku metode birat ćemo novu baznu funkciju i potom je, nakon primjene Gram-Schmidtovog postupka, dodavati već postojećoj reduciranoj bazi.

Neka je u k -tom koraku, za neki $k \geq 1$ odabran skup parametara

$$S_k = \{\mu^1, \dots, \mu^k\}, \quad (1.62)$$

odgovarajući reducirani prostor

$$V_k = \text{span}\{u_h(\mu^1), \dots, u_h(\mu^k)\}, \quad (1.63)$$

gdje je $u_h(\mu^i)$ rješenje od (1.22) za parametar μ^i , $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ i ortonormirana baza

$$B = [\zeta_1 | \dots | \zeta_k] \in R^{N_h \times k}, \quad (1.64)$$

gdje je ζ_i kao u (1.39), za svaki $i \in \{1, \dots, k\}$.

Novi parametar koji određuje novu baznu funkciju ζ_{k+1} dan je s

$$\mu^{k+1} = \operatorname{argmax}_{\mu \in \mathcal{P}} \|u_h(\mu) - B u_h(\mu)\|_{V_h}. \quad (1.65)$$

U svakom koraku biti će odabran onaj parametar za kojeg je rješenje dobiveno korištenjem reduciranog problema dalo najveću grešku s obzirom na rješenje visokodimenzionalnog modela.

Nakon što smo postigli unaprijed definiranu točnost i dobili reduciranu bazu V_N potrebno je testirati rješenja reduciranog problema na nekom novom skupu parametara koji su slučajno odabrani. Na tom skupu ćemo odrediti i relativne pogreške funkcionala, što je i bio cilj.

1.7 Opis algoritma

Offline faza

Na početku algoritma dan je fino uzorkovan konačan skup parametara $\mu_{train} \subset \mathcal{P}$, maksimalan broj koraka algoritma i tolerancija pogreške. Iz μ_{train} u prvom koraku, slučajno biramo jedan vektor parametara, označen s $\mu^1 \in \mu_{train}$, te računamo pripadajuće rješenje $u_h(\mu^1)$. Gram-Schmidtovim postupkom dobije se prvi stupac matrice V_N , odnosno prva bazna funkcija ζ_1 .

Ako pretpostavimo da smo već odredili M baznih funkcija za neki $M \geq 1$, onda je kriterij odabira sljedećeg parametra μ^{M+1} dan s

$$\mu^{M+1} = \operatorname{argmax}_{\mu \in \mu_{train}} \eta(\mu, V_M). \quad (1.66)$$

Postupak se nastavlja dok M ne dođe do maksimalnog broja koraka ili $\max_{\mu \in \mu_{train}} \eta(\mu, V_M)$ ne padne ispod zadane tolerancije.

Za postizanje točnosti bitno je da skup parametara na kojem se gradi reducirana baza ima dovoljno finu raspodjelu te da ukupan broj parametara nije prevelik.

U nastavku je u Algoritmu 1 dan pseudokod algoritma koji nadopunjuje matricu V_N u svakom koraku.

Online faza

Na početku online faze poznata je matrica V_N te vektori i matrice A_N^q i $f_N^{q'}$ za $1 \leq q \leq Q_a$, odnosno $1 \leq q' \leq Q_f$. Za parametar μ rješavamo reducirani sustav $A_N(\mu)u_N(\mu) = f_N(\mu)$, gdje matrica A_N i vektor f_N slijede iz (1.58). Potom računamo prikaz vektora u_N u konačnodimenzionalnom prostoru V_h kao

$$u_N^h(\mu) = V_N u_N(\mu) \quad (1.67)$$

i vrijedi $\dim u_N \ll \dim u_N^h$. U Algoritmu 2 dan je pseudokod onilne faze.

Algoritam 1 Pohlepni algoritam**Input:** maksimalan broj iteracija $nMax$, kriterij zaustavljanja ϵ , skup parametara μ_{train} **Output:** matrica $V_N \in \mathbb{R}^{N_h \times N}$, vrijednost procjenitelja $max\eta$ po koracima

```

1:  $V = []$ 
2:  $N = 0, tol = \epsilon + 1$ 
3: while  $n < nMax$  and  $tol > \epsilon$  do
4:    $N \leftarrow N + 1$ 
5:    $u_h(\mu^N) = FE(A_h^q, f_h^{q'}, N, br\_elemenata)$ 
6:    $\zeta_N = GS(V, u_h(\mu^N))$ 
7:    $V = [V, \zeta_N]$ 
8:    $[A_{pr}, F_{pr}] = project(V, br\_elemenata, N)$ 
9:   for  $\mu \in \mu_{train}$  do
10:     $u_N(\mu) = RB(A_{pr}, f_{pr}, N, br\_elemenata, \mu)$ 
11:     $\eta_\mu = estimate(V, br\_elemenata, u_N(\mu), \mu)$ 
12:   end for
13:    $tol = max\eta$ 
14: end while

```

Algoritam 2 Rješavanje reduciranog sustava**Input:** parametar $\mu, A_N^q, f_N^{q'}, Q_a^q, Q_f^{q'}$ **Output:** rješenje reduciranog problema $u_N(\mu)$, vektor $u_N^h(\mu)$

```

1:  $A_N(\mu) = 0$ 
2:  $f_N(\mu) = 0$ 
3: for  $q = 1 : Q_a$  do
4:    $A_N(\mu) \leftarrow A_N(\mu) + Q_a^q(\mu)A_N^q$ 
5: end for
6: for  $q' = 1 : Q_f$  do
7:    $f_N(\mu) \leftarrow f_N(\mu) + Q_f^{q'}(\mu)f_N^{q'}$ 
8: end for
9: riješi sustav  $A_N(\mu)u_N(\mu) = f_N(\mu)$ 
10:  $u_N^h(\mu) = V_N u_N(\mu)$ 

```

Poglavlje 2

Euler-Bernoullijev model elastičnog štapa

Štap je elastično tijelo kod kojeg je dimenzija koja opisuje duljinu bitno veća od druge dvije. Općenito geometriju štapa možemo opisati parametrizacijom

$$\varphi: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \in [0, l], \quad (2.1)$$

gdje je l označena duljina štapa, i familijom poprečnih presjeka, vidi [1].

Za izotropni materijal svojstva materijala mogu se opisati s dva broja, tzv. Laméovim koeficijentima λ, μ ili u inženjerskoj literaturi s Youngovim modulom E i Poissonovim omjerom ν . Tada nas jednačbe ravnoteže sila i momenata te zakon ponašanja vode na model zakrivljenog štapa, vidi [2]. Kada je štap ravan i relevantna je samo poprečna deformacija onda je

$$\varphi(x) = (x, u(x), 0),$$

a funkcija

$$u: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$$

zadovoljava jednačbu:

$$(EIu'')'' = f. \quad (2.2)$$

U jednačbi (2.2), E predstavlja Youngov modul elastičnosti, I moment inercije poprečnog presjeka, u pomak, a f linijsku gustoću vanjske sile. Napomenimo da je za kvadratni poprečni presjek

$$I = \frac{1}{12}h^4,$$

gdje je h duljina stranice. Promatrat ćemo rubne zadatke za (2.2) uz rubne uvjete ukliještenog jednog i slobodnog drugog ili ukliještena oba kraja štapa. U prvom slučaju

rubni uvjeti dani su s

$$u(0) = u'(0) = 0 \quad (EIu'')(l) = (EIu'')'(l) = 0,$$

a u drugom

$$u(0) = u'(0) = u(l) = u'(l) = 0.$$

U nastavku ćemo, zbog jednostavnosti, promatrati slučaj kada je $l = 1$, te kada je lijevi kraj ukliješten, a desni slobodan. Standardna metoda za numeričku aproksimaciju rubnih zadaća je metoda konačnih elemenata (FEM). Za nju je potrebno formulirati problem u tzv. slabom/varijacijskom smislu.

U prostoru $V = \{v \in H^2(0, 1) : v(0) = v'(0) = 0\}$ slaba formulacija rubne zadaće (2.2) je:

naći $u \in V$ tako da

$$\int_0^1 EIu''v'' = \int_0^1 fv, \quad v \in V. \quad (2.3)$$

Prostor H^2 definiran je

$$H^2(0, 1) = \{u \in L^2(0, 1) : u' \in L^2(0, 1), u'' \in L^2(0, 1)\}, \quad (2.4)$$

gdje je $L^2(0, 1) = \{v : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} : v \text{ izmjeriva i } \int_0^1 v(x)^2 dx < \infty\}$, a norma na H^2 dana s

$$\|v\|_{H^2} = (\|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2 + \|v''\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.5)$$

Teorem 2.0.1. *Neka je $0 < I_{\min} = \min_{x \in [0, 1]} I(x)$. Tada zadaća (2.3) ima jedinstveno rješenje.*

Dokaz. Da bi dokazali teorem provjerit ćemo vrijede li pretpostavke Lax-Milgramove leme.

Prostor $(V, \|\cdot\|_{H^2})$ je Hilbertov. Za $B(u, v) = \int_0^1 EIu''v''$ vrijedi da je simetrična, bilinearna forma, a neprekidnost vrijedi iz

$$|B(u, v)| \leq c\|u''\|_{L^2}\|v''\|_{L^2} \leq c\|u\|_{H^2}\|v\|_{H^2}. \quad (2.6)$$

Funkcional $L(v) = \int_0^1 fv$ je linearan, a neprekidnost slijedi iz

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^2}\|v\|_{H^2}. \quad (2.7)$$

Preostaje provjeriti vrijedi li koercitivnost bilinearne forme B . Svojstvo ćemo dobiti primjenom Poincaréove nejednakosti

$$C_p\|v\|_{L^2} \leq \|v'\|_{L^2}, \quad \forall v \in \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = 0\}$$

dva puta za u i u' .

$$\begin{aligned}
 B(u, u) &= \int_0^1 EI(u'')^2 \geq EI_{\min} \|u''\|_{L^2}^2 \\
 &\geq \frac{1}{3} EI_{\min} \|u''\|_{L^2}^2 + \frac{2}{3} EI_{\min} C_p^2 \|u'\|_{L^2}^2 \\
 &\geq \frac{1}{3} EI_{\min} \|u''\|_{L^2}^2 + \frac{1}{3} EI_{\min} C_p^2 \|u'\|_{L^2}^2 + \frac{1}{3} EI_{\min} C_p^4 \|u\|_{L^2}^2 \\
 &\geq C \|u\|_{H^2}^2,
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

za $C = \min\{1, C_p^2, C_p^4\} \frac{1}{3} EI_{\min}$. $\square$

Za uočiti je da za kvadratni poprečni presjek uvjet iz teorema znači da niti u jednoj točki štapa poprečni presjek nije točka, što je prirodan uvjet. Sada možemo zapisati Galerkinovu aproksimaciju zadatke (2.3) na konačnodimenzijskom potprostoru $V_h \leq V$ za diskretizacijski parametar $d > 0$

naći $u_h \in V_h$ tako da

$$\int_0^1 EI u_h'' v_h'' = \int_0^1 f v_h, \quad v_h \in V_h. \tag{2.9}$$

Iz slabe formulacije (2.9) vidimo da su $u_h, v_h \in H^2$. Dakle, ako biramo funkcije u_h, v_h iz konačnodimenzijskog prostora konačnih elemenata, tada i bazne funkcije tog prostora moraju pripadati prostoru H^2 . Opisat ćemo slučaj u kojem je odabran prostor konačnih elemenata, gdje su elementi hermitski kubični.

Definiramo lokalne bazne funkcije na $\Omega = [0, 1]$. Neka je $N_1(\xi), \xi \in \Omega$ polinom 3. stupnja definiran s

$$N_1(\xi) = a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d, \tag{2.10}$$

uz uvjete u čvorovima

$$N_1(0) = 1, N_1(1) = 0, N_1'(0) = 0, N_1'(1) = 0. \tag{2.11}$$

Rješavanjem linearnog sustava dolazimo do prve lokalne bazne funkcije

$$N_1(\xi) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \tag{2.12}$$

a slično se dobiju i ostale

$$N_2(\xi) = \xi^3 - 2\xi^2 + \xi, \tag{2.13}$$

$$N_3(\xi) = -2\xi^3 + 3\xi^2, \tag{2.14}$$

$$N_4(\xi) = \xi^3 - \xi^2, \tag{2.15}$$

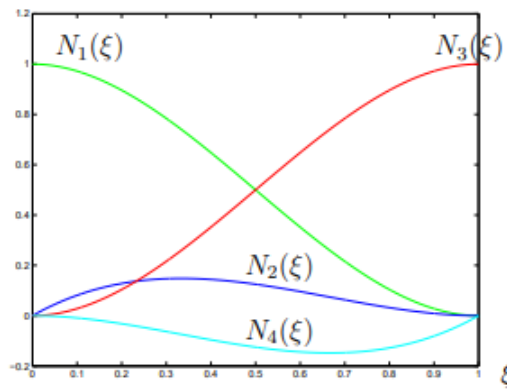
uz uvjete u čvorovima 0 i 1

$$N_2(0) = 0, N_2(1) = 0, N_2'(0) = 1, N_2'(1) = 0, \quad (2.16)$$

$$N_3(0) = 0, N_3(1) = 1, N_3'(0) = 0, N_3'(1) = 0, \quad (2.17)$$

$$N_4(0) = 0, N_4(1) = 0, N_4'(0) = 0, N_4'(1) = 1. \quad (2.18)$$

Na slici 2.1 vidimo prikaz lokalnih baznih funkcija s čvorovima 0 i 1.



Slika 2.1: $N_i(\xi)$, $i = 1, 2, 3, 4$

Sada ćemo lokalne bazne funkcije definirati na proizvoljnom intervalu $[x_l, x_r]$ koristeći funkciju $\zeta: [x_l, x_r] \rightarrow [0, 1]$ koja je definirana

$$\zeta(x) = \frac{x - x_l}{x_r - x_l}. \quad (2.19)$$

Neka su sa $\psi_i: [x_l, x_r] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$ definirane bazne funkcije na proizvoljnom intervalu $[x_l, x_r]$:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= N_1(\zeta(x)), & \psi_2(x) &= (x_r - x_l)(N_2(\zeta(x))), \\ \psi_3(x) &= N_3(\zeta(x)), & \psi_4(x) &= (x_r - x_l)(N_4(\zeta(x))). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Sada možemo definirati globalne bazne funkcije. Uvodimo particiju $\tau_h = \bigcup_{k=1}^{n-1}$ skupa $\Omega = [0, 1]$, gdje su s $e_k = [x_k, x_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ označeni elementi particije, a čvorovi su dani s

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1. \quad (2.21)$$

Za svaki elemenat e_k uvodimo oznaku $\psi_{k,i}: [x_k, x_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$, koja će označavati lokalne bazne funkcije definirane na elementu e_k . Dakle, vrijednosti od $\psi_{k,i}$

odgovarat će vrijednostima od ψ_i , skaliranim na određeni interval odgovarajućom funkcijom ζ . U svakom čvoru $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ bit će definirane dvije globalne bazne funkcije. Za x_1 definiramo

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= \begin{cases} 0, & x \notin [x_1, x_2], \\ \psi_{1,1}(x), & x \in [x_1, x_2], \end{cases} \\ \phi_2(x) &= \begin{cases} 0, & x \notin [x_1, x_2], \\ \psi_{1,2}(x), & x \in [x_1, x_2], \end{cases}\end{aligned}$$

za $x_k, k = 2, 3, \dots, n-1$ definiramo

$$\begin{aligned}\phi_{2k-1}(x) &= \begin{cases} 0, & x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}], \\ \psi_{k-1,3}(x), & x \in [x_{k-1}, x_k], \\ \psi_{k,1}(x), & x \in [x_k, x_{k+1}], \end{cases} \\ \phi_{2k}(x) &= \begin{cases} 0, & x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}], \\ \psi_{k-1,4}(x), & x \in [x_{k-1}, x_k], \\ \psi_{k,2}(x), & x \in [x_k, x_{k+1}], \end{cases}\end{aligned}$$

i za x_n definiramo

$$\begin{aligned}\phi_{2n-1}(x) &= \begin{cases} 0, & x \notin [x_{n-1}, x_n], \\ \psi_{n-1,3}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n], \end{cases} \\ \phi_{2n}(x) &= \begin{cases} 0, & x \notin [x_{n-1}, x_n], \\ \psi_{n-1,4}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}\end{aligned}$$

Prostor hermitskih kubičnih konačnih elemenata prema prethodnom dan je s

$$V_h(\Omega) = \text{span}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{2n-1}, \phi_{2n}\}. \quad (2.22)$$

Koristeći definiranu bazu, pomak u_h iz (2.9) može se zapisati kao $u_h = \sum_{i=1}^{2n} u_i \phi_i$. Sada (2.9) možemo zapisati kao

$$\sum_{j=1}^{2n} u_j \int_0^1 EI \phi_i'' \phi_j'' = \int_0^1 \phi_i f, \quad i = 1, \dots, 2n, \quad (2.23)$$

što je ekvivalentno rješavanju sustava

$$A_h u_h = f_h, \quad (2.24)$$

za

$$A_h = \left(\int_0^1 EI \phi_i'' \phi_j'' \right)_{i,j=1}^{2n}, \quad f_h = \left(\int_0^1 \phi_i f \right)_{i=1}^{2n}, \quad u_h = (u_j)_{j=1}^{2n}. \quad (2.25)$$

Poglavlje 3

Numerički primjeri

Jedna moguća primjena metoda redukcije dimenzije baze su optimizacije različitih vrsta koje mogu zahtijevati izračun aproksimacije modela puno puta. U ovom poglavlju, algoritam koji je opisan u prvom poglavlju, biti će primijenjen na modelu štapa. Iz drugog poglavlja imamo u vidu problem optimizacije oblika štapa s obzirom na njegovu debljinu uz zadanu količinu materijala od kojeg je napravljen. Stoga je duljina stranice kvadrata $h(x)$ na mjestu x zapravo parametar u problemu. U okviru metode konačnih elemenata zapravo će se raditi o konačno vrijednosti h , koji će biti parametri u modelu. Zanimat će nas koliko dobro će reducirani model aproksimirati vrijednost funkcional definiranog u (1.54). Također, promatrat ćemo i rješenja reduciranog i visokodimenzionalnog modela, ovisno o dimenziji reducirane baze. U primjerima koje ćemo promatrati, kriterij biranja reducirane baze bit će kvaliteta aproksimacije funkcionala (kao moguće funkcije cilja u optimizaciji)

$$s_h(\mu) = \int_0^l f(x; \mu) v(x) dx, \quad (3.1)$$

gdje l označava duljinu štapa, a f odgovara djelovanju sile teže, tj. oblika je $gA(x)$, gdje je $A(x)$ površina poprečnog presjeka, koja se u slučaju kvadratnog poprečnog presjeka računa s $A(x) = x^2$.

3.1 1. primjer

Promatramo redukciju dimenzije modela poprečnog pomaka štapa. Problem je definiran na domeni $\Omega = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Rubna zadaća koju rješavamo dana je s:

$$\begin{cases} (EIu'')''(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ (EIu'')(1) = (EIu'')'(1) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Rješavamo rubnu zadaću metodom konačnih elemenata za slučaj kada je broj elemenata jednak 50 i na svakom elementu variramo dva parametra. Parametri koje variramo su h i f , gdje h označava duljinu stranice kvadratnog poprečnog presjeka, a f poprečnu silu.

Slaba formulacija problema (3.19) dana je s

naći $u(\mu) \in V = H_0^2$ tako da

$$E \int_0^1 \frac{h(\mu)^4}{12} u''(\mu) v'' = \int_0^1 f(\mu) v, \quad v \in V. \quad (3.3)$$

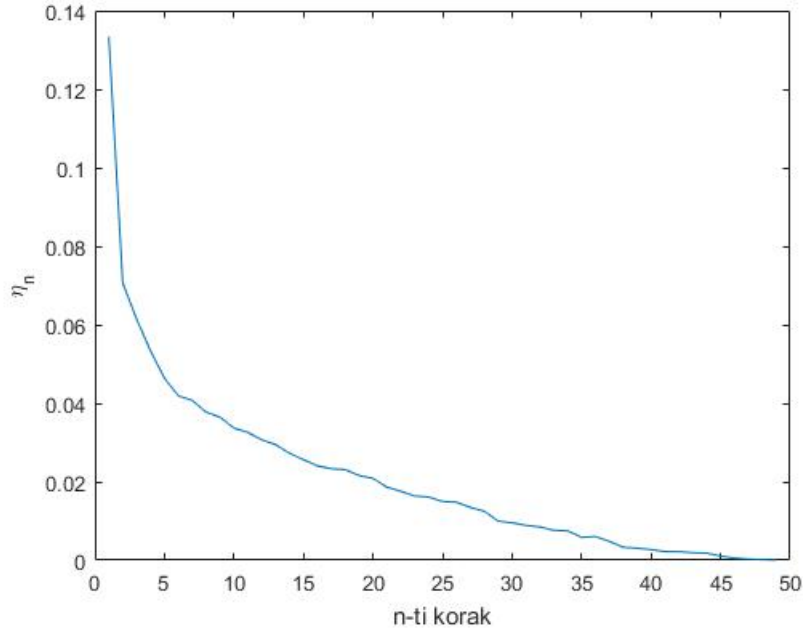
Parametri redukcije dimenzije za $i = 1, \dots, 50$ su upravo duljine stranice poprečnog presjeka na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$, a parametri za $i = 51, \dots, 100$, odgovaraju konstantnim silama na istom intervalu, tj μ_{51} je sila na $[x_0, x_1]$. Svaki od parametara $\mu_i, i = 1, \dots, 100$ može poprimiti 100 različitih vrijednosti. Time je definirana ulazna matrica parametara dimenzije 100×100 , koju pohlepni algoritam pretražuje tražeći reduciranu bazu. Moguće je primijeniti afinu dekompoziciju s obzirom na odabrane parametre uz oznake kao u (1.26):

$$\begin{aligned} Q_a^i(\mu) &= \frac{\mu_i^4}{12}, & a_i(u, v) &= E \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'' v'', & i &= 1, \dots, 50, \\ Q_f^i(\mu) &= \mu_i, & f_i(\mu) &= \int_{x_{i-51}}^{x_i-50} v, & i &= 51, \dots, 100. \end{aligned}$$

Promatramo čelični štap kojem je modul elastičnosti $E = 2 \cdot 10^{11} Pa$, a parametri su zadani sa

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{50}, \mu_{51}, \dots, \mu_{100}) \in P = [0.005, 0.01]^{50} \times [2, 4]^{50}. \quad (3.4)$$

Točnost koju želimo postići u ovom primjeru je 10^{-4} . Na slici 3.1 prikazane su vrijednosti procjenitelja ovisno o broju odabranih baznih funkcija. Možemo uočiti da je u prvih nekoliko koraka pad vrijednosti procjenitelja izraženiji. Iz definicije procjenitelja, koja je dana u (1.56), jasno je da je u prvih nekoliko koraka mogućnost aproksimacije rješenja visokodimenzionalnog modela reduciranim modelom mala, zbog malog broja baznih funkcija. Odatle su i vrijednosti procjenitelja velike u prvim koracima. Nakon samo 4 ili 5 koraka, krivulja blaže pada, što znači da su najkritičnije vrijednosti parametara uvrštene u reduciranu bazu V_N u prvih nekoliko koraka. Nakon 50 koraka željena točnost je postignuta.



Slika 3.1: Vrijednost procjenitelja po koracima algoritma

Pogledajmo sada i pogreške u normi $\|\cdot\|_2$ u svakom koraku algoritma. Promatramo pomak i vrijednost funkcionala kojeg smo definirali u (3.1), a pogreške su dane s

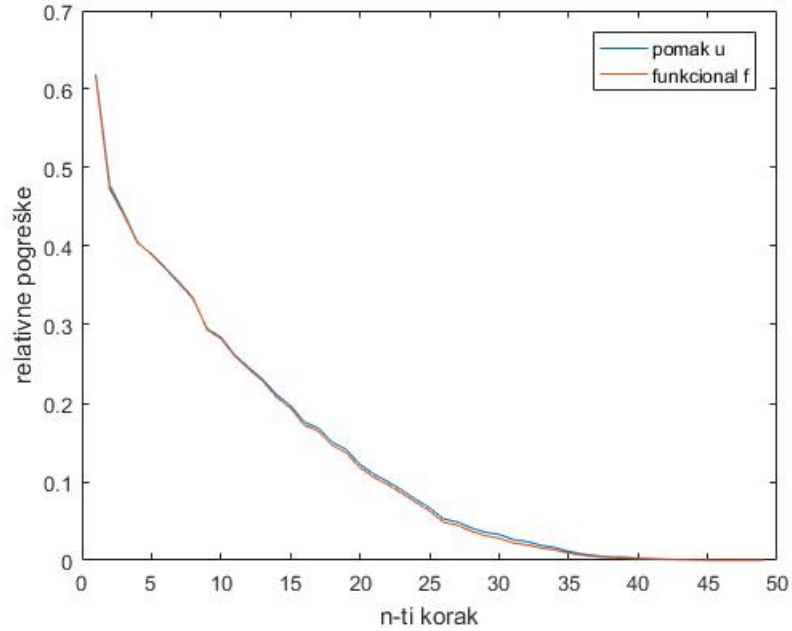
$$error_u = \|u_h - u_{rb}\|_2, \quad error_f = \|f_h u_h - V_N f_h u_{rb}\|_2, \quad (3.5)$$

$$rel_u = \frac{error_u}{\|u_h\|_2}, \quad rel_f = \frac{error_f}{\|f_h u_h\|_2}. \quad (3.6)$$

Na proizvoljnom skupu parametara, koji sadrži 25 slučajno generiranih vektora danih s $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{100}) \in P$, u svakom pojedinom koraku računa se prosjek pogrešaka koji će biti prikazan na sljedećim slikama.

Na slici 3.2, prikazane su relativne pogreške vrijednosti funkcionala i pomaka s obzirom na broj odabranih baznih funkcija. U posljednjih nekoliko koraka algoritma relativna pogreška vrijednosti funkcionala nešto je manja od pogreške rješenja rubne zadaće. To vrijedi zbog definiranja procjenitelja na način da je kriterij biranja reducirane baze upravo što bolja aproksimacija funkcionala danog u (3.1).

U tablici 3.1, dane su i vrijednosti relativnih pogrešaka u normi $\|\cdot\|_2$ za rješenje i vrijednost funkcionala iz (3.1), dobivene na skupu parametara koji se sastoji od 25 slučajno odabranih vektora $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{100}) \in P = [0.005, 0.01]^{50} \times [2, 4]^{50}$.



Slika 3.2: Relativna pogreška vrijednosti funkcionala i pomaka po koracima

korak	rel_u	rel_f
1	0.6227	0.6153
2	0.4952	0.4982
5	0.3618	0.3627
20	0.1385	0.1333
30	0.0322	0.0291
40	0.0026	0.0021

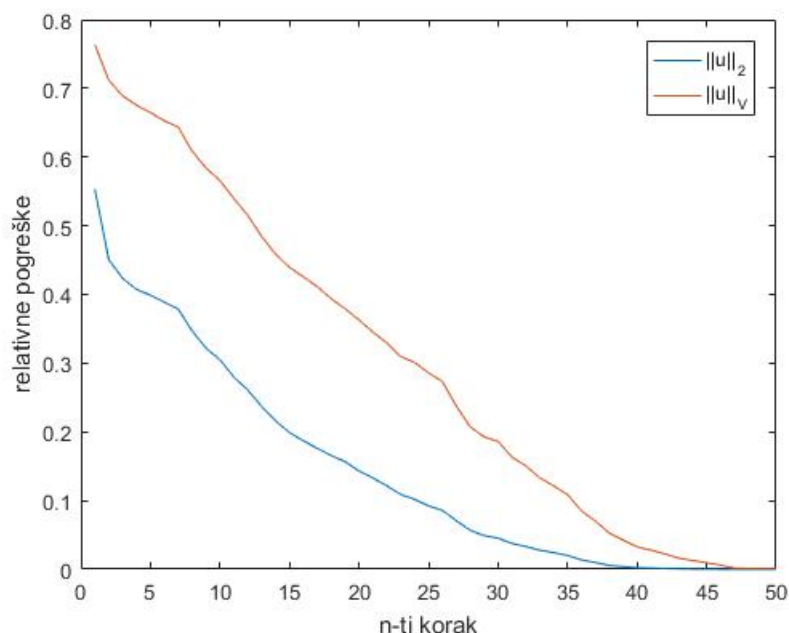
Tablica 3.1: Pogreške na skupu parametara

Promotrit ćemo i pogreške definirane u normi $\|\cdot\|_V$ i dane s

$$Verror_u = \|u_h - u_{rb}\|_V, \quad Vrel_u = \frac{Verror_u}{\|u_h\|_V}, \quad (3.7)$$

Na slici 3.3 vidimo prikaz relativne pogreške rješenja u normi $\|\cdot\|_2$ i normi $\|\cdot\|_V$.

Nakon što je offline faza algoritma završila, testiramo algoritam na proizvoljnom skupu parametara, kako bi provjerili koliko je baza V_N dobra za bilo koji odabir parametara iz početnog intervala.



Slika 3.3: Pogreške u različitim normama

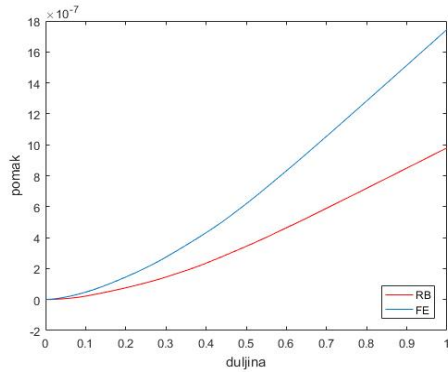
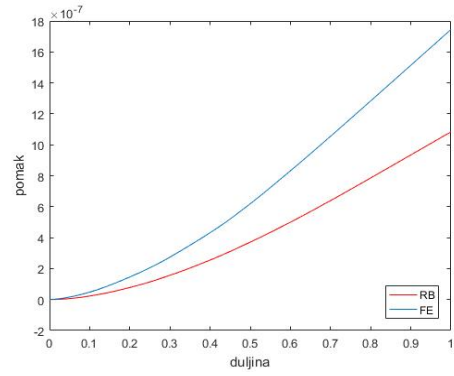
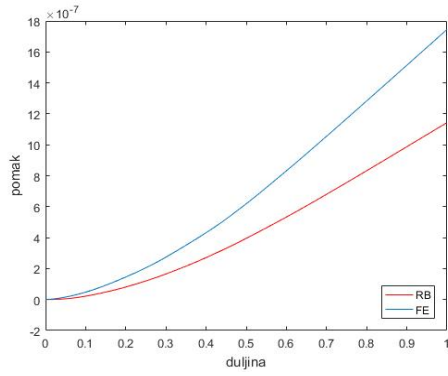
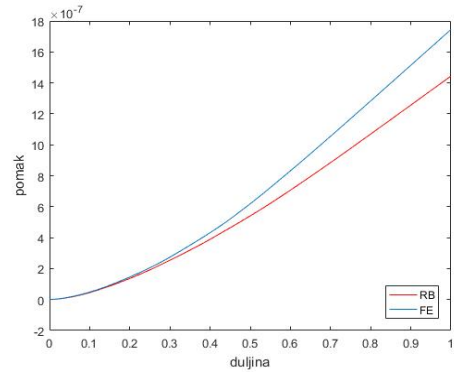
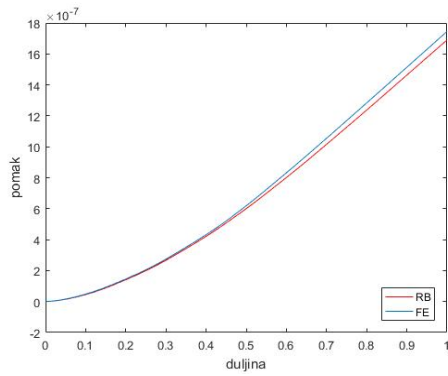
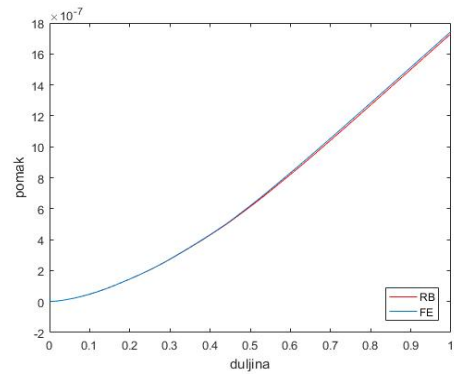
Neka je dan proizvoljan vektor parametara

$$a = [0.0055, 0.0088, 0.0064, 0.0081, 0.0067, 0.0085, 0.0063, 0.0088, 0.0084, 0.0079, \\ 0.0095, 0.0072, 0.0067, 0.0071, 0.0062, 0.0084, 0.009, 0.008, 0.0078, 0.0064, \\ 0.0094, 0.0053, 0.0053, 0.0084, 0.0079, 0.0059, 0.0056, 0.0075, 0.0091, 0.0095, \\ 0.0074, 0.0057, 0.0065, 0.01, 0.0078, 0.0065, 0.0079, 0.0075, 0.0093, 0.0091, \\ 0.0073, 0.0059, 0.0065, 0.0079, 0.009, 0.0071, 0.0062, 0.0054, 0.0062, 0.0075]$$

(3.8)

i vektor parametara b , koji bilježi djelovaje sile teže ovisno o poprečnim presjecima odabranim u a . Dakle, definirali smo vektor dimenzije 100, u kojem svaka od prvih 50 komponenti odgovara duljini stranice pravokutog poprečnog presjeka štapa, dok svaka od 50 preostalih komponenti definira djelovanje sile teže po elementima.

Na slici 3.4 dano je rješenje dobiveno rješavanjem reduciranog problema i metodom konačnih elemenata. U 46. koraku algoritma, postiže se zadana točnost za vrijednost funkcionala i rješenje te slijedi da je $\text{rel}_f = 1.1 \cdot 10^{-5}$, i $\text{rel}_u = 1.4 \cdot 10^{-5}$.

(a) $n = 1$ (b) $n = 2$ (c) $n = 5$ (d) $n = 20$ (e) $n = 30$ (f) $n = 40$

Slika 3.4: Pomak štapa reduciranog i visokodimenzionalnog modela s obzirom na dimenziju reducirane baze V_N

Vidimo da se točnost rješenja, za odabrani parametar, koju smo promatrali na slici 3.4, postiže za približno isto koraka kao što je slučaj kod skupa parametara na kojem testiramo točnost po završetku offline faze. U slučaju da smo izabrali vektor parametara za testiranje, koji je već element reducirane baze V_N ili se može dobiti linearnom kombinacijom baznih funkcija, ne bi mogli analizirati algoritam po koracima jer bi odmah postigli definiranu točnost.

Pogledat ćemo i koliko je rješavanje reduciranog problema brže od rješavanja visokodimenzionalnog problema, te koliko traju offline i online faze metode redukcije dimenzije.

Visokodimenzionalni model		Model smanjenog reda	
Dimenzija FE problema	102	Dimenzija RB problema	50
Broj afinih komponenti Q_a	50	Omjer dimenzija	2 : 1
Broj afinih komponenti Q_f	50	Vrijeme offline faze	100s
Rješavanje FE uz formiranje A_h i f_h	6ms	Vrijeme online faze	3ms
Rješavanje sustava FE	0.1ms	Rješavanje sustava RB	0.04ms

Tablica 3.2: Usporedba visokodimenzionalnog i reduciranog modela

Konstantna f

Prethodni primjer sada ćemo analizirati za slučaj kada sila f nije varijabilna, već vrijedi $f = 4$. Pogledat ćemo dva slučaja, u prvom ćemo imati 50 parametara takvih da vrijedi

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{50}) \in P = [0.005, 0.01]^{50}, \quad (3.9)$$

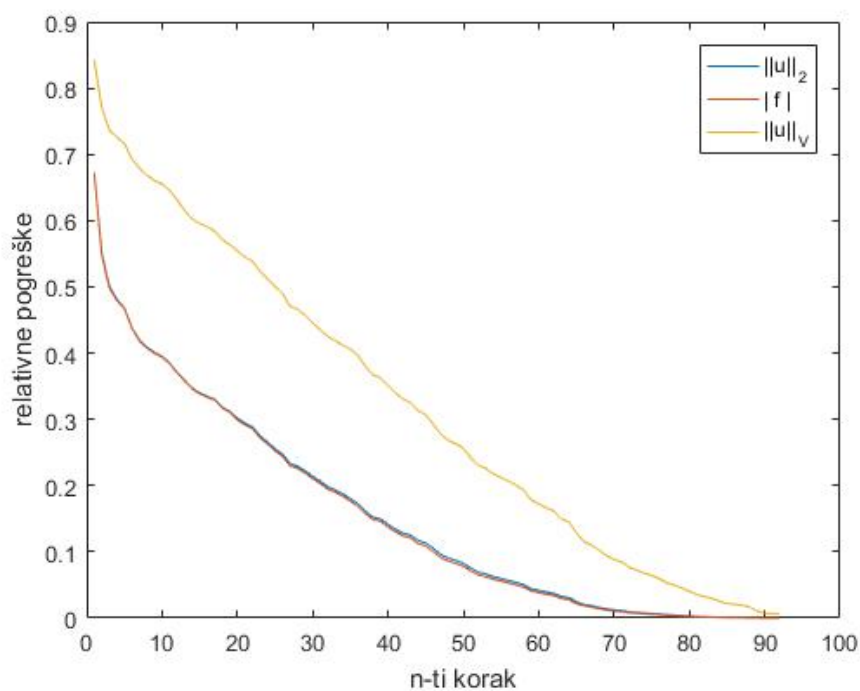
a u drugom 100, te će parametri biti dani s

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{100}) \in P = [0.005, 0.01]^{100}. \quad (3.10)$$

U slučaju (3.9) i uz pretpostavku da je dimenzija visokodimenzionalnog problema ovako mala, razlike u aproksimaciji rješenja i vrijednosti funkcionala u usporedbi s primjerom u kojem je sila varijabilna nisu zamjetne. Jedina prednost reduciranog modela postiže se pri formiranju vektora f_h u visokodimenzionalnom modelu. Tada korištenjem affine dekompozicije ubrzavamo svako rješavanje modela metodom konačnih elemenata, te time i skraćujemo trajanje offline faze metode redukcije dimenzije. Kasnije ćemo u Primjeru 2 proučiti detaljnije neke razlike visokodimenzionalnih modela u slučaju kada je sila varijabilna i kada to nije.

Pogledajmo sada zanimljiviji slučaj kada vrijedi (3.10), odnosno kada smo povećali dimenziju u metodi konačnih elemenata sa 102 na 202. Zanima nas kako će to utjecati na redukciju dimenzije baze.

Točnost rješenja postignuta je u 92. koraku algoritma te vrijednost procjenitelja iznosi $\eta_n = 1.5 \cdot 10^{-5}$. Na slici 3.5 vidimo prikaz pogrešaka u različitim normama.



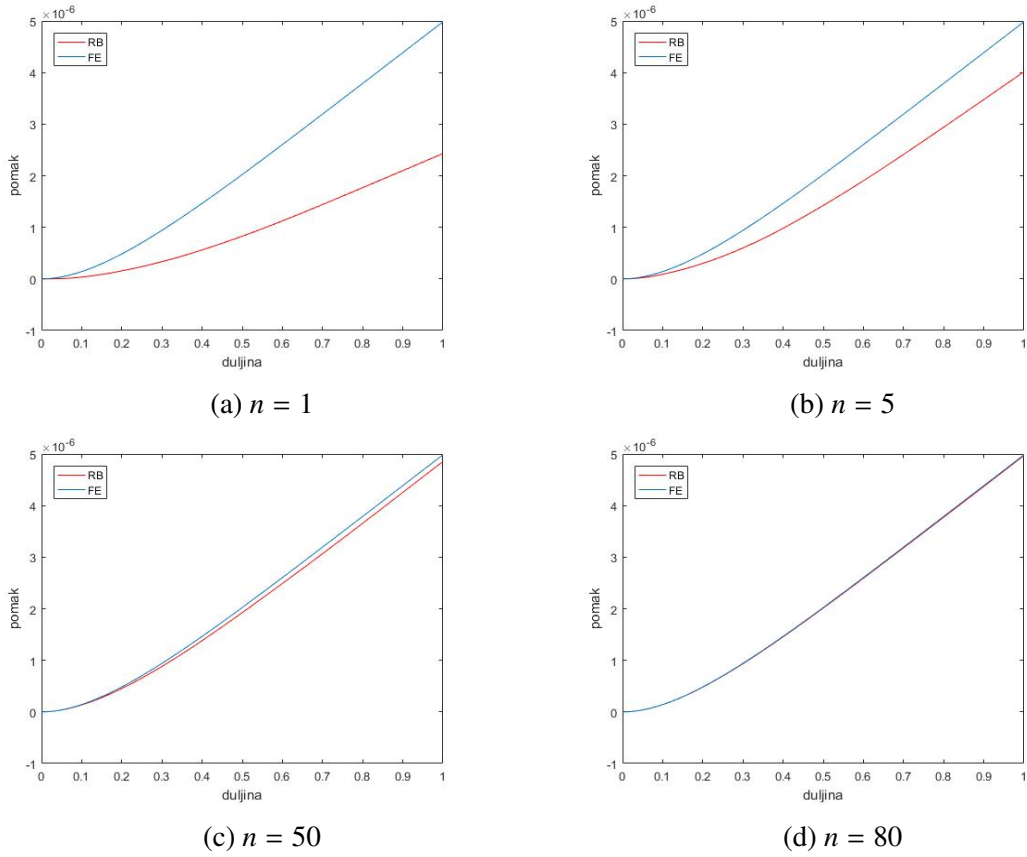
Slika 3.5: Relativne pogreške po koracima

U sljedećoj tablici dane su i vrijednosti pogrešaka za pojedine korake algoritma, a pogreške su računate, kao i u primjeru s varijabilnom silom, na skupu od 25 vektora parametara

korak	rel_u	rel_f	Vrel_u
1	0.7221	0.7521	0.8758
2	0.5656	0.5694	0.7876
5	0.4496	0.4522	0.7082
30	0.2100	0.2072	0.45
50	0.0797	0.0755	0.257
85	0.0011	0.0001	0.0231

Tablica 3.3: Pogreške na skupu parametara

Slično kao na slici 3.4, za slučajno odabran parametar $\mu \in P = [0.005, 0.01]^{100}$ prikazujemo aproksimaciju rješenja visokodimenzionalnog modela reduciranim.



Slika 3.6: Pomak štapa reduciranog i visokodimenzionalnog modela s obzirom na dimenziju reducirane baze V_N

U tablici 3.4 dana je usporedba dvaju modela.

Visokodimenzionalni model		Model smanjenog reda	
Dimenzija FE problema	202	Dimenzija RB problema	92
Broj afinih komponenti Q_a	100	Omjer dimenzija	2.2 : 1
Broj afinih komponenti Q_f	0	Vrijeme offline faze	29.5min
Rješavanje FE uz formiranje A_h i f_h	12ms	Vrijeme online faze	11ms
Rješavanje sustava FE	0.2ms	Rješavanje sustava RB	0.1ms

Tablica 3.4: Usporedba visokodimenzionalnog i reduciranog modela

Analizom iste rubne zadaće i variranjem broja parametara možemo zaključiti da u slučaju kada je dimenzija visokodimenzionalnog modela mala, varijabilnost sile ne doprinosi bržem postizanju definirane točnosti.

Tablica 3.5 nam daje usporedbu modela različitih dimenzija, ali istog broja parametara.

	$\mu = [0.005, 0.01]^{50} \times [2, 4]^{50}$	$\mu = [0.005, 0.01]^{100}$
Dimenzija FE problema	102	202
Broj afinih komponenti Q_a	50	100
Broj afinih komponenti Q_f	50	0
Rješavanje FE uz formiranje A_h i f_h	6ms	12ms
Dimenzija RB problema	50	92
Vrijeme offline faze	100s	29.5min
Vrijeme online faze	3ms	11ms

Tablica 3.5: Broj parametara = 100

Povećanje dimenzije visokodimenzionalnog modela čimbenik je koji uz broj parametara najviše utječe na trajanje offline faze redukcije dimenzije. U svakom koraku pohlepnog algoritma potrebno je sastaviti onoliko matrica A_h i vektora f_h visokodimenzionalnog modela koliko ima mogućih vrijednosti parametra na svakom elementu. To je u našem slučaju 100, pa čak i na malim dimenzijama koje analiziramo, slijedi razlika od nekoliko minuta u trajanju offline faze. Također, razlika se vidi i u trajanju online faze, što slijedi iz različitih dimenzija reduciranog problema koje smo dobili. Na temelju ove usporedbe zaključujemo da se povećanjem broja parametara i dimenzije visokodimenzionalnog problema povećava i dimenzija reducirane baze, dok samim povećavanjem broja parametara to ne mora biti slučaj.

3.2 2. primjer

U drugom primjeru zadajemo manji broj parametara. Također, smanjujemo i diskretizacijski parametar d u metodi konačnih elemenata, što rezultira većim brojem elemenata. Rubna zadaća definirana je na $\Omega = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ i dana s

$$\begin{cases} (EIu'')''(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ u(1) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Slaba formulacija problema (3.11) kao i u prethodnom primjeru glasi naći $u(\mu) \in V = H_0^2$ tako da

$$E \int_0^1 \frac{h(\mu)^4}{12} u''(\mu) v'' = \int_0^1 f(\mu) v \quad v \in V. \quad (3.12)$$

U ovom primjeru broj elemenata u metodi konačnih elemenata biti će 100, a broj parametara 40. Parametri koje variramo ponovno će biti kao i u 1. primjeru h i f , ali sada ih nećemo varirati na svim elementima već samo na prvih 10 i posljednjih 10 elemenata štapa. Konstanta E u ovom primjeru je $E = 2 \cdot 10^{10}$.

Dakle, za $a(u, v)$ će vrijediti

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \sum_{j=1}^{100} \int_{x_{j-1}}^{x_j} E \frac{h^4}{12} u'' v'' \\ &= \sum_{j=1}^{10} E \frac{\mu_j^4}{12} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u'' v'' + \sum_{j=11}^{90} \int_{x_{j-1}}^{x_j} E \frac{0.01^4}{12} u'' v'' + \sum_{j=91}^{100} E \frac{\mu_{j-80}^4}{12} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u'' v'' \end{aligned} \quad (3.13)$$

i za $f(v)$

$$\begin{aligned} f(v) &= \sum_{j=1}^{100} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f v \\ &= \sum_{j=1}^{10} \mu_{j+20} \int_{x_{j-1}}^{x_j} v + \sum_{j=11}^{90} \int_{x_{j-1}}^{x_j} 4v + \sum_{j=91}^{100} \mu_{j-60} \int_{x_{j-1}}^{x_j} v \end{aligned} \quad (3.14)$$

Moguće je primijeniti afinu dekompoziciju s obzirom na odabrane parametre:

$$\begin{aligned} Q_a^i(\mu) &= \frac{\mu_i^4}{12}, & a_i(u, v) &= E \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'' v'', & i &= 1, \dots, 10, \\ Q_a^i(\mu) &= \frac{\mu_i^4}{12}, & a_i(u, v) &= E \int_{x_{i+79}}^{x_{i+80}} u'' v'', & i &= 11, \dots, 20, \end{aligned}$$

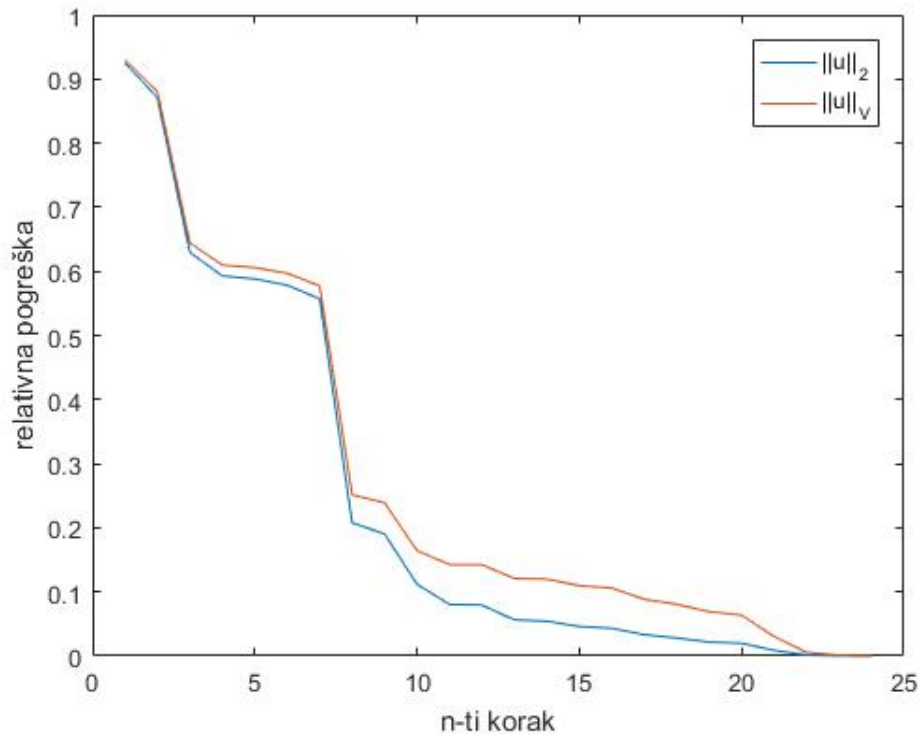
$$\begin{aligned}
Q_a^0(\mu) &= \sum_{j=11}^{90} \int_{x_{j-1}}^{x_j} E \frac{0.01^4}{12} u'' v'', \\
Q_f^i(\mu) &= \mu_i, \quad f_i(v) = \int_{x_{i-21}}^{x_{i-20}} v, \quad i = 21, \dots, 30, \\
Q_f^i(\mu) &= \mu_i, \quad f_i(v) = \int_{x_{i+59}}^{x_{i+60}} v, \quad i = 31, \dots, 40, \\
Q_f^0(\mu) &= \sum_{j=11}^{90} \int_{x_{j-1}}^{x_j} 4v.
\end{aligned}$$

Dakle, ako parametri čine vektor u kojem prvih 10 komponenti odgovara vrijednostima od h na prvih 10 elemenata, a drugih 10 komponenti sadrži vrijednosti od h na posljednjih 10 konačnih elemenata, te analogo vrijedi i za silu, onda su parametri zadani sa

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{20}, \mu_{21}, \dots, \mu_{40}) \in P = [0.005, 0.05]^{20} \times [2, 4]^{20}, \quad (3.15)$$

a svaki od njih može poprimiti 100 različitih vrijednosti iz definiranih intervala.

Algoritam staje u 24. koraku kada procjenitelj poprima vrijednost manju od 10^{-4} . Na sljedećoj slici dan je prikaz relativnih pogrešaka rješenja u različitim normama.



Slika 3.7: Relativna pogreška rješenja po koracima

Primijetimo da povećanje intervala nad kojim gradimo reduciranu bazu, konkretno s $[0.005, 0.01]$ na $[0.005, 0.05]$, rezultira time da se i početna relativna pogreška povećava. Ako usporedimo sliku 3.7 i sliku 3.3 očito je povećanje pogreške u normi $\|\cdot\|_2$ na slici 3.7.

U tablici 3.6, dane su relativne pogreške za pomak i vrijednost funkcionala ovisno o koraku algoritima i o normi u kojoj računamo pogrešku. Posebno su idvojeni koraci 3 i 8 u kojima se bilježi nagli pad pogreške. U koraku 15 najbolje se vide razlike među normama.

korak	rel_u	rel_f	$Vrel_u$
1	0.9254	0.9253	0.9309
3	0.6297	0.6298	0.6553
7	0.5573	0.5564	0.5774
8	0.2079	0.2114	0.2514
15	0.0461	0.0497	0.1097
24	0.00002	0.00002	0.00001

Tablica 3.6: Pogreške na skupu od 25 vektora parametara

Ponovno uspoređujemo reducirani i visokodimenzionalni problem, te trajanje offline i online faza metode redukcije dimenzije.

Visokodimenzionalni model		Reducirani model	
Dimenzija FE problema	202	Dimenzija RB problema	23
Broj afinih komponenti Q_a	20	Omjer dimenzija	8.7 : 1
Broj afinih komponenti Q_f	20	Vrijeme offline faze	8min
Rješavanje FE uz formiranje A_h i f_h	12ms	Vrijeme online faze	8ms
Rješavanje sustava FE	0.1ms	Rješavanje sustava RB	0.03ms

Tablica 3.7: Usporedba visokodimenzionalnog i reduciranog modela

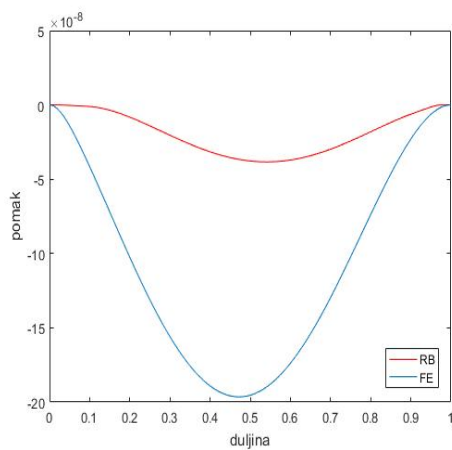
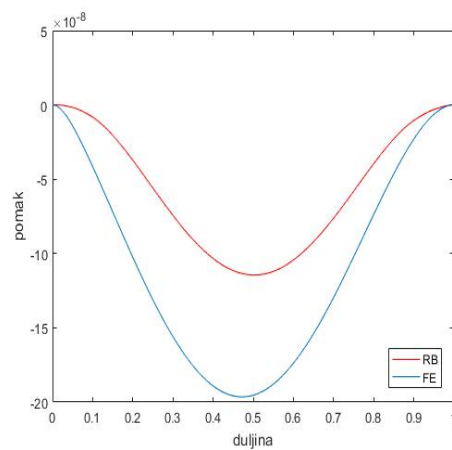
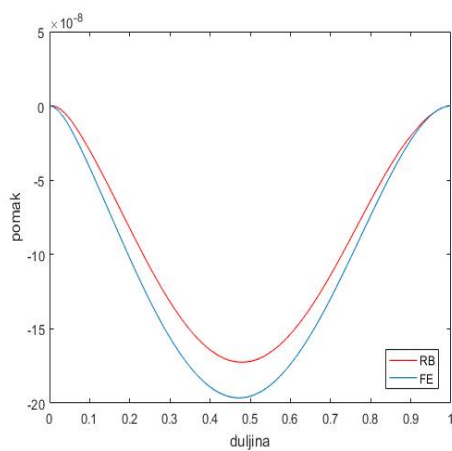
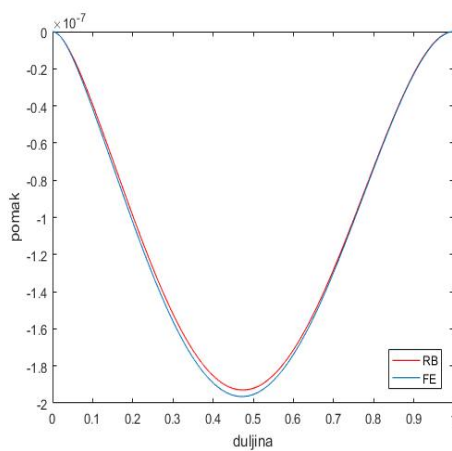
Zaključujemo da je u usporedbi s prvim primjerom efikasnost i ušteda algoritima bolja kada je broj parametara manji, čak i kada se broj elemenata u metodi konačnih elemenata povećava.

Sada biramo 1 konkretan primjer za testiranje i prikazujemo rješenja obaju modela. Parametri su dani s

$(\mu_1, \dots, \mu_{10}) = [0.005, 0.0056, 0.0061, 0.0067, 0.0072, 0.0078, 0.0083, 0.0089, 0.0094, 0.01]$
za prvih 10 elemenata, te s

$(\mu_{11}, \dots, \mu_{20}) = [0.01, 0.0094, 0.0089, 0.0083, 0.0078, 0.0072, 0.0067, 0.0061, 0.0056, 0.005]$
za posljednjih 10 elemenata. Sile su kao i u prvom primjeru takve da opisuju djelovanje sile teže na svakom pojedinom elementu.

Veće pogreške u početnim koracima pohlepne metode vidljive su i na slici 3.4 (a) i (b).

(a) $n = 1$ (b) $n = 5$ (c) $n = 12$ (d) $n = 18$

Slika 3.8: Pomak štapa reduciranog i visokodimenzionalnog modela s obzirom na broj baznih funkcija

Konstantna f

Za usporedbu ćemo analizirati i slučaj kada sila nije varijabilna i vrijedi da je $f = 4$ konstantna poprečna sila. Dakle, ovdje imamo 20 parametara definiranih s

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{20}) \in P = [0.005, 0.05]^{20}, \quad (3.16)$$

odnosno variramo samo vrijednosti h na krajevima štapa. Broj vrijednosti koje pojedini parametar može poprimiti je i dalje 100, kao i broj elemenata.

Nakon 29. koraka vrijednost procjenitelja manja je od 10^{-4} . U tablici 3.8, bilježe se pogreške modela s 20 parametara u koracima u kojima smo promatrali istu zadaću za 40 parametara.

korak	rel_u	rel_f	Vrel_u
1	0.8965	0.8969	0.9231
3	0.398	0.4002	0.6037
7	0.1829	0.1849	0.4611
8	0.1758	0.1776	0.4543
15	0.048	0.0459	0.1794
24	0.0005	0.0001	0.0102

Tablica 3.8: Pogreške za $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{40}) \in P = [0.005, 0.01]^{20}$

U ovom primjeru variranjem vrijednosti sile, za postizanje unaprijed definirane točnosti potrebno je manje koraka nego u slučaju kada je sila konstantna. Razlika je vidljiva u aproksimaciji rješenja. Naime u primjeru s konstantnom silom, pogreška u početnim koracima algoritma brže se približava definiranoj točnosti 10^{-4} , ali ipak za postizanje iste treba više koraka nego kada variramo i silu. Ako uzmemo u obzir prvi i drugi primjer vidimo da je kod manjih dimenzija broj odabranih baznih funkcija jednak u slučaju kad je sila varijabilna i kada nije. Međutim u slučaju kada se interval vrijednosti parametara povećava i dimenzija visokodimenzionalnog modela raste, bolju aproksimaciju brže dobijemo kada variramo i silu.

Pogledajmo sada kako broj mogućih vrijednosti koje parametri mogu poprimiti utječe na postizanje definirane točnosti.

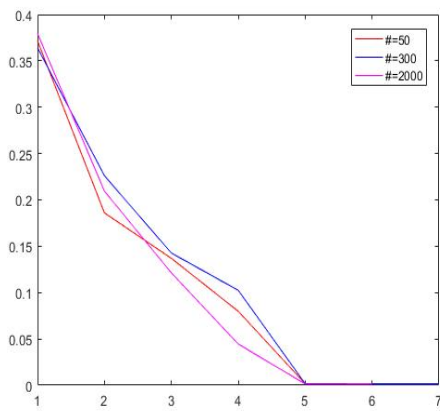
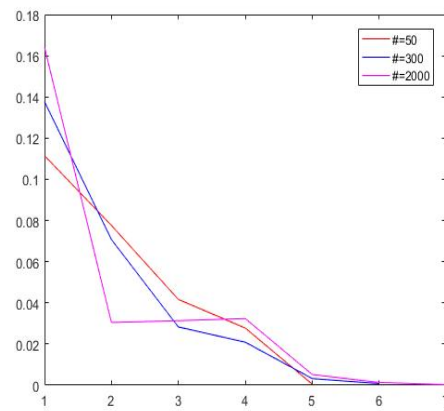
Promatrali smo visokodimenzionalni model u kojem je broj elemenata jednak 50, odnosno $\dim V_h = 102$. Prema prethodnom zaključku da na manjim dimenzijama varijabilnost sile ne utječe na postizanje točnosti, variramo samo parametre koji određuju poprečni presjek u rubnim elementima štapa. Dakle, parametri su dani s

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{10}) \in P = [0.005, 0.01]^{10}, \quad (3.17)$$

od kojih $(\mu_1, \dots, \mu_5)$ odgovara duljinama stranice poprečnog presjeka na 5 početnih elemenata štapa, a $(\mu_6, \dots, \mu_{10})$ na posljednjih 5, od 50 elemenata na koliko je štap podijeljen. Vrijednosti koje parametri mogu poprimiti definiramo sa

$$\mu_i = (\mu_i^1, \dots, \mu_i^n), i = 1, \dots, 10 \quad (3.18)$$

gdje je $n \in \{50, 300, 2000\}$. Pogreške smo računali na testnom skupu od 30 proizvoljnih vektora parametara. Na slici 3.9, dan je prikaz relativne pogreške rješenja u normi $\|\cdot\|_2$, te vrijednost procjenitelja.

(a) Relativna pogreška $\|u\|_2$ (b) Procjenitelj η_n Slika 3.9: $n \in \{50, 300, 2000\}$

Iz prethodnog grafa zaključujemo da povećanjem vrijednosti koje parametri poprimaju na pojedinom elementu relativne greške padaju brže, ali postizanje točnosti ne ovisi o broju spomenutih vrijednosti. Na slici 3.9 (b) vidimo da procjenitelj brže pronalazi reduciranu bazu kada broj vrijednosti koje parametrima mogu biti dodijeljene nije prevelik. Također, skup na kojem testiramo točnost reducirane baze, ne mora biti prevelik da bi dobili prikaz relativne pogreške koji realno prikazuje koliko je odabrana reducirana baza V_N dobra za prikaz bilo kojeg rješenja dobivenog odabirom parametra iz P .

3.3 3. primjer

U posljednjem primjeru testirali smo algoritam na zadaći

$$\begin{cases} (EIu'')''(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ (EIu'')(1) = (EIu'')'(1) = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

koja je aproksimirana sa 200 konačnih elemenata, Dakle $\dim V_h = 402$, a broj parametara odgovara broju konačnih elemenata u rubnih 35 elemenata štapa, kao što smo zadali u primjeru 2. Točnost koju zahtijevamo je 10^{-3} . Variramo ponovno vrijednosti h i f tako da vrijedi

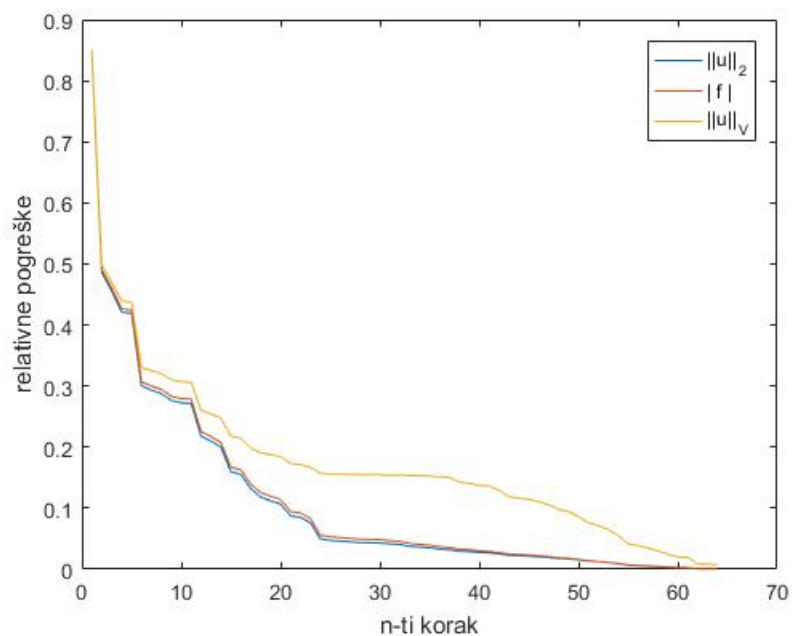
$$\begin{aligned} a(u, v) &= \sum_{j=1}^{200} \int_{x_{j-1}}^{x_j} E \frac{h^4}{12} u'' v'' \\ &= \sum_{j=1}^{35} E \frac{\mu_j^4}{12} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u'' v'' + \sum_{j=36}^{165} \int_{x_{j-1}}^{x_j} E \frac{0.005^4}{12} u'' v'' + \sum_{j=166}^{200} E \frac{\mu_{j-130}^4}{12} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u'' v'' \end{aligned} \quad (3.20)$$

i za $f(v)$

$$\begin{aligned} f(v) &= \sum_{j=1}^{200} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f v \\ &= \sum_{j=1}^{35} \mu_{j+70} \int_{x_{j-1}}^{x_j} v + \sum_{j=36}^{165} \int_{x_{j-1}}^{x_j} 1.9 v + \sum_{j=166}^{200} \mu_{j-60} \int_{x_{j-1}}^{x_j} v \end{aligned} \quad (3.21)$$

Primjenom afine dekompozicije s obzirom na odabrane parametre dobije se

$$\begin{aligned} Q_a^i(\mu) &= \frac{\mu_i^4}{12}, & a_i(u, v) &= E \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'' v'', & i &= 1, \dots, 35, \\ Q_a^i(\mu) &= \frac{\mu_i^4}{12}, & a_i(u, v) &= E \int_{x_{i+129}}^{x_{i+130}} u'' v'', & i &= 36, \dots, 70, \\ Q_a^0(\mu) &= \sum_{j=36}^{165} \int_{x_{j-1}}^{x_j} E \frac{0.005^4}{12} u'' v'', \\ Q_f^i(\mu) &= \mu_i, & f_i(v) &= \int_{x_{i-71}}^{x_{i-70}} v, & i &= 71, \dots, 105, \\ Q_f^i(\mu) &= \mu_i, & f_i(v) &= \int_{x_{i+59}}^{x_{i+60}} v, & i &= 106, \dots, 140, \\ Q_f^0(\mu) &= \sum_{j=36}^{165} \int_{x_{j-1}}^{x_j} 1.9 v. \end{aligned}$$



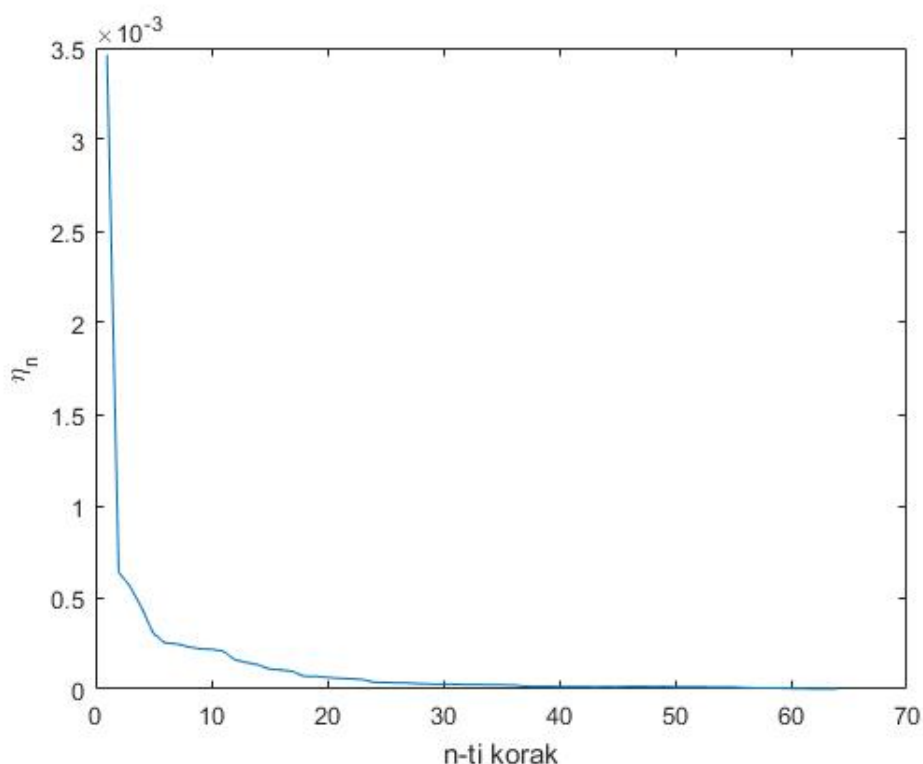
Slika 3.10: Vrijednost pogreške po koracima algoritma

Kretanje vrijednosti pogreške, ovisno o dimenziji reduciranog problema i normi u kojoj je promatramo, vidljiva je na slici 3.10, dok su te vrijednosti i dane u tablici 3.9:

korak	rel_u	rel_f	Vrel_u
1	0.8477	0.8491	0.851
2	0.4859	0.4907	0.4984
5	0.4188	0.4242	0.4371
6	0.3004	0.3071	0.3305
23	0.0765	0.0836	0.167
24	0.0497	0.0558	0.1572
40	0.0278	0.0304	0.137

Tablica 3.9: Pogreške na skupu parametara

Kao što je vrijedilo i prije, vrijednost procjenitelja u prvih nekoliko koraka bilježi zamjetniji pad, a to možemo vidjeti i na slici 3.11. U 67. koraku je definirana točnost 10^{-4} postignuta.

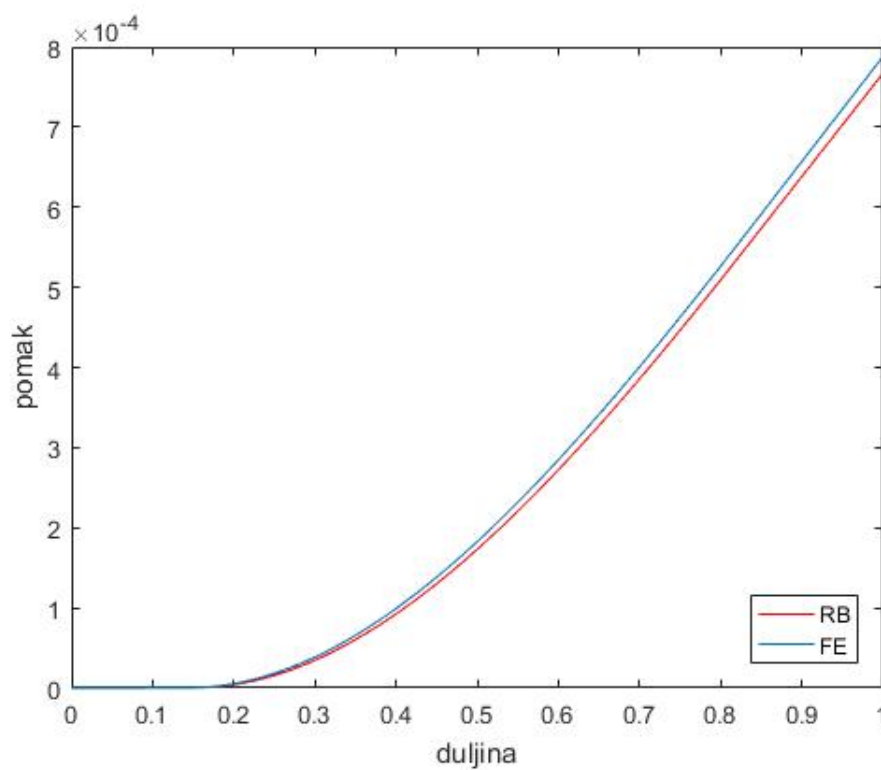


Slika 3.11: Vrijednost procjenitelja po koracima algoritma

Trajanje offline faze algoritma je 2.8h, a rješavanje visokodimenzionalnog problema uz formiranje matrice A_h i vektora f_h iziskuje 40ms. Dimenzija problema smanjena je s 402 na 67. Vrijeme potrebno za formiranje i rješavanje reduciranog problema, odnosno vrijeme online faze, iznosi 23ms.

Na posljednjoj slici možemo vidjeti rješenje dobiveno metodom konačnih elemenata i njegovu aproksimaciju reduciranom bazom. Za slučajno odabran vektor parametara $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{70}) \in [0.005, 0.09]^{70}$ koji sadrži duljine stranica h na prvih i posljednjih 35 elemenata štapa, te određuje vektor djelovanja sile teže $\mu = (\mu_{71}, \dots, \mu_{140})$ ovisno o površini poprečnog presjeka štapa, dan je prikaz nakon 50 koraka algoritma.

Možemo zaključiti da je pohlepna metoda, uz procjenitelj definiran s (1.56), efikasnija kada je broj parametara manji od broja konačnih elemenata u visokodimenzionalnom modelu. U svim primjerima vrijednosti pogreške rješenja i vrijednosti funkcionala približno



Slika 3.12: Usporedba rješenja visokodimenzijskog i reduciranog problema

su jednake. U nekim slučajevima pokazalo se da je, zbog kriterija biranja reducirane baze, pogreška funkcionala manja od pogreške rješenja. Međutim, ako je dostignuta tolerancija za pogrešku rješenja, sigurno će vrijediti i da je funkcional dovoljno dobro aproksimiran.

Bibliografija

- [1] Ibrahim Aganović i Krešimir Veselić, *Jednadžbe matematičke fizike*, Školska knjiga, 1985.
- [2] S. S. Antman, *Nonlinear Problems of elasticity, Second edition.*, Applied Mathematical Sciences, 107., Springer, 2005.
- [3] Jan S Hesthaven, Gianluigi Rozza, Benjamin Stamm et al., *Certified reduced basis methods for parametrized partial differential equations*, sv. 590, Springer, 2016.
- [4] Jan S Hesthaven, Benjamin Stamm i Shun Zhang, *Efficient greedy algorithms for high-dimensional parameter spaces with applications to empirical interpolation and reduced basis methods*, ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis **48** (2014), br. 1, 259–283.
- [5] Young W Kwon i Hyochoong Bang, *The finite element method using MATLAB*, CRC press, 2018.
- [6] Alfio Quarteroni, Andrea Manzoni i Federico Negri, *Reduced basis methods for partial differential equations: an introduction*, sv. 92, Springer, 2015.
- [7] Gianluigi Rozza, Dinh Bao Phuong Huynh i Anthony T Patera, *Reduced basis approximation and a posteriori error estimation for affinely parametrized elliptic coercive partial differential equations*, Archives of Computational Methods in Engineering **15** (2007), br. 3, 1.
- [8] Tzin Shaun Wang, *A Hermite cubic immersed finite element space for beam design problems*, Disertacija, Virginia Tech, 2005.

Sažetak

Metode redukcije baze koriste se za smanjenje reda visokodimenzionalnog modela pretraživanjem njegova konačnog skupa rješenja. Na manjem skupu parametara, koji određuju visokodimenzionalni model, pohlepnim algoritmom gradi se reducirana baza, kojoj se u svakom koraku algoritma dodaje jedan od vektora rješenja visokodimenzionalnog modela. Cilj je iz početnog problema dobiti reducirani model, čija je dimenzija puno manja u odnosu na dimenziju visokodimenzionalnog modela. Tada se za svaki parametar iz skupa nad kojim se reducirana baza gradi, može brzo i efikasno izračunati rješenje koje aproksimira rješenje visokodimenzionalnog problema do na definiranu točnost.

U prvom poglavlju opisana je teorijska pozadina metode i pohlepni algoritam koji se koristi. U drugom poglavlju formuliramo Euler-Bernoullijev model elastičnog štapa i metodu konačnih elemenata koju koristimo za aproksimaciju štapa u konačnodimenzionalnom prostoru. U trećem poglavlju dani su numerički primjeri i primjene metode redukcije dimenzije na modelu poprečnog pomaka štapa.

Summary

Reduced basis methods are used to reduce the order of high-fidelity problem by searching a finite set of high-fidelity solutions. The greedy algorithm iteratively assembles reduced basis by adding one high-fidelity solution in each step. The algorithm is applied on small set of parameters, which determine a high-fidelity model. The aim is to get a model whose dimension is much smaller than initial problem dimension. A solution that approximates the high-fidelity solution can be calculated quickly and efficiently for each parameter within a parameter set, for a prescribed tolerance.

The first chapter presents a theoretical background and a greedy algorithm that is used. The second chapter formulates Euler-Bernoulli beam problem and finite element method which is used for high-fidelity approximation of elastic beam. The third chapter presents numerical examples and the application of greedy algorithm for the construction of reduced basis spaces.

Životopis

Rođena sam 26. rujna 1995. godine u Splitu. U Starom Gradu sam završila osnovnu školu i osnovnu glazbenu školu. Nakon toga upisujem IV. gimnaziju Marko Marulić u Splitu i srednju glazbenu školu. Godine 2014. upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički na Prirodoslovo-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, koji završavam 2017. godine. Iste godine upisujem diplomski studij Primijenjena matematika na istom fakultetu.