

# Tok mikropolarnog fluida

---

**Vuleta, Antonia**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:069059>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-15**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



# Tok mikropolarnog fluida

---

**Vuleta, Antonia**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:069059>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-06-18**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Antonia Vuleta

**TOK MIKROPOLARNOG FLUIDA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
Prof.dr.sc. Igor Pažanin

Zagreb, srpanj, 2020

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Deo gratias.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Izvod jednadžbi i rubni uvjet</b>	<b>3</b>
1.1 Kinematika . . . . .	3
1.2 Dinamika . . . . .	7
1.3 Mikropolarni fluidi . . . . .	12
<b>2 Primjeri egzaktnih rješenja</b>	<b>19</b>
2.1 Poiseuilleov tok između dvije paralelne ravnine . . . . .	19
2.2 Couetteov tok između dvije paralelne ravnine . . . . .	31
<b>Bibliografija</b>	<b>39</b>

# Uvod

Poznato je da se svaki fluid sastoji od mnoštva molekula koje su međusobno odvojene prazninama, pa je samo matematičko modeliranje fluida, uzimajući u obzir navedeno svojstvo, izrazito složeno. Zbog toga se u klasičnoj mehanici fluida promatra idealizirani fluid, tj. kontinuum, koji pretpostavlja da su čestice unutar materijala neprekidno distribuirane i ispunjavaju čitavo područje u kojem se nalaze.

Klasični Navier-Stokesov model koji opisuje gibanje fluida zanemaruje mikrogibanje i mikrodeformaciju svake njegove pojedine čestice. Stoga Navier-Stokesov model nije primjenjiv kod modeliranja pojedinih fluida poput tekućih kristala, polimera, krvi i slično. Upravo modeli navedenih primjera moraju uzeti u obzir i samu mikrostrukturu kako bi rezultat imao smisla. Da bi mogli opisati ponašanje takvih fluida, trebamo teoriju koja uzima u obzir geometriju, deformaciju i unutrašnje kretanje svake materijalne čestice zasebno. U okviru mehanike kontinuuma pojavilo se nekoliko teorija koje proučavaju izloženu problematiku. U ovom radu proučavat ćemo upravo fluide s mikrostrukturom, oslanjajući se na teoriju mikropolarnih fluida koju uvodi A.C.Eringen<sup>1</sup>([4]), a koju obrađuje Grzegorz Lukaszewicz ([6]).

Fizikalno gledajući, mikropolarni fluide mogu predstavljati fluide koji se sastoje od krutih, nasumično orijentiranih čestica u viskoznom fluidu gdje je deformacija tih čestica zanemarena. Opisano predstavlja bitnu generalizaciju Navier-Stokesovog modela i otvara novo polje potencijanih primjena uključujući velik broj kompleksnih fluida. Istaknut ćemo i nekoliko općenitih svojstava ovog modela koje ga čine korisnim kako u teorijskim istraživanjima tako i u primjenama.

Atraktivnost modela mikropolarnog fluida proizlazi iz činjenice da je to upravo značajno, ali i jednostavno poopćenje klasičnog Navier-Stokesovog modela. Rješenja ovog modela pripadaju istom prostoru funkcija kao u  $N-S^2$  modelu. U taj već poznat model uvodi se novo vektorsko polje, koje sadrži informacije o orijentaciji i deformaciji točke na mikrorazini. Uvodimo zapravo jednu novu (vektorsku) jednadžbu koja dolazi od zakona očuvanja angularnog momenta. Brojna istraživanja su pokazala da rješenja tokova mikropolarnih fluida bolje opisuju ponašanje realnih fluida (npr. krvi) nego rješenje klasičnog N-S mo-

---

<sup>1</sup>1921-2009, znanstvenik rođen u Turskoj, živio i radio u Americi.

<sup>2</sup>Koristimo kraticu N-S koja predstavlja Navier-Stokesov model.

dela, i to posebno kada karakteristične dimenzije toka postanu malene (npr. dijametar cijevi).

Mikropolarni fluidi pripadaju klasi fluida s nesimetričnim tenzorom naprezanja, i kao takve ih zovemo općenitije polarnim fluidima dok ćemo fluide koji su promatrani u klasičnoj mehanici kontinuuma zvati običnim fluidima. U ovom radu izvest ćemo jednadžbe za mikropolarni fluid i opisati rubne uvjete nakon čega ćemo prikazati i neke primjere egzaktnih rješenja. Jednadžbe gibanja ćemo izvesti iz zakona očuvanja i jednadžbe kontinuiteta za mikropolarne fluide koristeći se izvorima [6] i [2], te pokazati njihovu sličnost s običnim fluidima. Ovime ćemo se baviti u Poglavlju 1.

Zakon sačuvanja mase, kao i Cauchyev zakon sačuvanja momenta, imaju isti oblik za polarne i obične fluide. Razlike nastupaju u zakonu sačuvanja angularnog momenta i energije. Naime, kod polarnih fluida ovi zakoni dobiju drugačiju formu jer se počinju promatrati dodatne veličine kao što su specifični spin te gustoće volumnog i kontaktnog para. Kad bi upravo navedeni novi parametri nestali iz računa, tada bi zakon očuvanja angularnog momenta i energije za polarni i obični fluid bili jednaki.

Poznato je da je za obične fluide zakon sačuvanja angularnog momenta posljedica simetrije tenzora naprezanja i Cauchyevog zakona. Kod polarnih fluida tenzor naprezanja je nesimetričan i zakon očuvanja angularnog momenta je neovisan o zakonima sačuvanja mase i momenta. Rezultat toga je jedna dodatna jednadžba (za polje kutne brzine rotacije čestice,  $\omega$ ). Upravo će nam zbog toga, nove vrijednosti viskoznosti koje dolaze s dodatnim vektorskim poljem, omogućiti da u određenom smislu izmjerimo odstupanje toka mikropolarnog fluida od N-S modela.

Zahvaljujući jednostavnosti modela mikropolarnih fluida, u nekim klasičnim primjenama (npr. tok između dvije paralelne ravnine) i uz uobičajene geometrijske i dinamičke pretpostavke (poput simetrije, linearnosti jednadžbi itd.), jednadžbe za mikropolarne fluide postanu takve da se mogu eksplicitno riješiti. Jednom kada imamo rješenje, ovisno o nekoliko parametara vrijednosti novih viskoznosti, možemo ga jednostavno usporediti s rješenjima odgovarajućeg problema opisanog klasičnim N-S modelom, (v. Poglavlje 2).

Razlike u dobivenim rezultatima slažu se s očekivanjima da što je veći utjecaj unutarnje strukture fluida to su vjerojatno i manje karakteristične dimanzije toka. Time model za mikropolarne fluide postaje koristiv, dok se za velike dimenzije toka reducira na klasični N-S model.



# Poglavlje 1

## Izvod jednadžbi i rubni uvjeti

### 1.1 Kinematika

U mehanici kontinuuma fluid poistovjećujemo s područjem  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Jednu istaknutu konfiguraciju  $\Omega$  zovemo referentnom, a svaku drugu smatramo njezinom deformacijom.  $\Omega$  je proizvoljan otvoren i povezan skup.

Uvedimo sada fiksni pravokutni koordinatni sustav  $(x_1, x_2, x_3)$ . Ova uvedena trojka predstavljat će točku u  $\Omega$  koju ćemo označavati s  $x$ .

Uzimamo točku  $P$  koja se kreće s fluidom te pretpostavljamo da u vremenu  $t = 0$  ima koordinate  $X = (X_1, X_2, X_3)$ , dok za neki drugi  $t$ ,  $(-\infty < t < \infty)$ , se translacija u poziciju  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . Tada vrijedi

$$x = x(X, t). \quad (1.1)$$

Ako je  $X$  fiksna i  $t$  varijabilna, jednadžba (1.1) predstavlja *pomak* točke  $P$  od inicijalne točke  $X$ . S druge strane, za fiksnu  $t$ , (1.1) određuje *transformaciju* područja fluida u trenutku  $t$ .

Pretpostavljamo da je transformacija (1.1) neprekidna i invertibilna, to jest, postoji inverz

$$X = X(x, t) \quad (X_i = X_i(x, t)). \quad (1.2)$$

Da bi mogli derivirati, dodajemo i pretpostavke da su funkcije  $x_i$  i  $X_i$  dovoljno glatke.

Iz uvjeta da transformacija (1.1) ima diferencijabilan inverz slijedi da joj Jacobijan

$$J = J(X, t) = \det \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) \quad (1.3)$$

zadovoljava

$$0 < J < \infty. \quad (1.4)$$

Početne koordinate označavat ćemo s  $X$ , dok će  $x$  označavati trenutnu prostornu poziciju.

Predmet proučavanja mehanike kontinuuma su mjerljiva svojstva fluida poput gustoće, brzine, temperature, te u slučaju mikropolarnih fluida i mikrorotacija.

Svaku od ovih varijabli, zahvaljujući transformaciji (1.1) možemo izraziti preko početne pozicije:

$$f(x, t) = f(x(X, t), t) = F(X, t). \quad (1.5)$$

Brzina  $v$  u trenutku  $t$  čestice koja se na početku nalazi u točki  $X$ , definirana je s

$$v(x, t) = V(X, t) = \frac{d}{dt} x(X, t), \quad (x = x(X, t)). \quad (1.6)$$

U gornjoj jednadžbi,  $X$  koristimo kako parametar koji predstavlja danu fiksnu točku. Zbog toga koristimo običnu derivaciju u (1.6). Sada kada imamo polje brzine  $v(x, t)$ , možemo odrediti transformaciju (1.1) rješavajući diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{d}{dt} x(X, t) = v(x(X, t), t) \quad \text{gdje je} \quad x(X, 0) = X, \quad X \text{ parametar.} \quad (1.7)$$

Uzimajući u obzir (1.5), imamo

$$\frac{d}{dt} F(X, t) = \frac{d}{dt} f(x(X, t), t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(X, t), t) \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}(x(X, t), t), \quad (1.8)$$

tako da s (1.6) dolazimo do općenite formule

$$\frac{d}{dt} F(X, t) = \frac{D}{Dt} f(x, t), \quad (1.9)$$

gdje

$$\frac{D}{Dt} f(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + v(x, t) \cdot \nabla f(x, t) \quad (1.10)$$

zovemo *materijalnom derivacijom* od  $f$ .

Akceleracija je veličina promjene brzine u promatranoj točki

$$a(x, t) = A(X, t) = \frac{d}{dt} V(X, t). \quad (1.11)$$

Iz (1.9) imamo

$$a(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) + v(x, t) \cdot \nabla v(x, t). \quad (1.12)$$

**Transportni teorem**

**Teorem 1.1.1** (Transportni teorem). *Za skalarno ili vektorsko polje  $f$  i materijalno područje  $\Omega$  vrijedi transportna formula*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(x, t) dx = \int_{\Omega(t)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + v(x, t) \cdot \nabla f(x, t) \operatorname{div} v(x, t) \right\} dx. \quad (1.13)$$

*Dokaz.* Promatrat ćemo transformaciju

$$x : \Omega(0) \longrightarrow \Omega(t), \quad x = x(X, t).$$

Tada vrijedi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t)} f(x, t) dx &= \int_{\Omega(0)} f(x(X, t), t) J(X, t) dX \\ &= \int_{\Omega(0)} F(X, t) J(X, t) dX, \end{aligned} \quad (1.14)$$

pa slijedi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega(0)} F(X, t) J(X, t) dX \\ &= \int_{\Omega(0)} \left\{ \frac{d}{dt} F(X, t) J(X, t) + F(X, t) \frac{d}{dt} J(X, t) \right\} dX. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Iz (1.9) imamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(0)} \frac{d}{dt} F(X, t) J(X, t) dX &= \int_{\Omega(0)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(x(X, t), t) + v(x(X, t), t) \cdot \nabla f(x(X, t), t) \right\} J(X, t) dX \\ &= \int_{\Omega(t)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + v(x, t) \cdot \nabla f(x, t) \right\} dx. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Koristimo Eulerovu formulu

$$\frac{d}{dt} J(X, t) = \operatorname{div} v(x(X, t), t) J(X, t). \quad (1.17)$$

Identitet sada slijedi iz (1.16), (1.17) i (1.18).  $\square$

**Napomena 1.1.2.** Jednakost (1.13) možemo zapisati i na sljedeći način:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(x, t) dx = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx + \int_{\partial\Omega(t)} f(x, t) v(x, t) \cdot n(x, t) dS, \quad (1.18)$$

gdje je  $n(x, t)$  vanjska normala na  $\partial\Omega(t)$  u točki  $x$  koja pripada tom rubu.

Za fluid kažemo da je *inkompresibilan* ako za bilo koje područje  $\Omega(0)$  i bilo koji  $t$  vrijedi

$$\text{volume}(\Omega(t)) = \text{volume}(\Omega(0)). \quad (1.19)$$

Dakle, iz (1.16) zaključujemo da je fluid inkompresibilan ako i samo ako

$$\text{div } v(x, t) = 0. \quad (1.20)$$

### Zakon očuvanja mase

Osnovna veličina koja se veže uz opisivanje stanja fluida je *gustoća* koja predstavlja masu po jedinici volumena. Sa stanovišta mehanike kontinuuma gustoća je skalarna nenegativna funkcija  $(x, t) \rightarrow \rho(x, t)$ ,  $x \in \Omega$ ,  $t \geq 0$ . Masa unutar područja  $\Omega$  se iskazuje na sljedeći način

$$m = \int_{\Omega} \rho(x, t) dx. \quad (1.21)$$

Zakon očuvanja mase kaže da se masa fluida u području  $\Omega$  ne mijenja s vremenom, tj.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(x, t) dx = 0. \quad (1.22)$$

Iz transportnog teorema slijedi

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div}(\rho v) \right\} dx = 0 \quad (1.23)$$

odnosno

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div}(\rho v) = 0. \quad (1.24)$$

Ponekad zakon očuvanja mase koristimo u sljedećem zapisu

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(x, t) dx = - \int_{\partial\Omega} \rho v \cdot n dS. \quad (1.25)$$

Jednadžba (1.25) govori da je brzina promjene mase područja  $\Omega$  jednaka protoku mase kroz rub područja  $\Omega$ . Primjenom teorema o divergenciji, (v. [1]), izraz (1.25) možemo napisati u obliku

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = - \int_{\Omega} \text{div}(\rho v) dx. \quad (1.26)$$

Oдавдје slijedi tzv. lokalna forma zakona o očuvanju mase

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \quad (1.27)$$

Jednakost (1.27) možemo zapisati i na sljedeći način

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} v = 0, \quad (1.28)$$

gdje je

$$\dot{\rho} = \frac{d}{dt} \rho + v \cdot \nabla \rho \quad (1.29)$$

materijalna derivacija gustoće po vremenu. Jednadžbu (1.28) zovemo i jednadžbom kontinuiteta.

## 1.2 Dinamika

### Zakon očuvanja momenta

Mehanika kontinuuma razlikuje dvije vrste sila - volumne i kontaktne sile. Volumne sile, poput npr. gravitacije, distribuiraju svoje djelovanje na sve točke područja  $\Omega$ . Ako nam  $f$  predstavlja primjer takve sile po jedinici mase, tada njeno djelovanje na područje  $\Omega$  opisujemo na sljedeći način

$$\int_{\Omega} \rho f \, dx. \quad (1.30)$$

Djelovanje kontaktnih sila distribuira se samo po rubu područja  $\Omega$ , te ih često opisujemo normalnim naprezanjem. Ako je  $n$  vanjska normala u nekoj točki na rubu područja  $\Omega$  te  $t_n$  sila po jedinici površine koja se vrši na  $\partial\Omega$ , tada se kontaktna sila može izraziti kao

$$\int_{\partial\Omega} t_n \, dS. \quad (1.31)$$

Ako je  $\rho$  gustoća mase, a  $v$  brzina, onda se funkcija  $\rho v$  zove gustoća impulsa (momenta). Impuls područja  $\Omega$  u trenutku  $t$  je

$$\int_{\Omega} \rho(x, t) v(x, t) \, dx. \quad (1.32)$$

Kažemo da je zadovoljen zakon očuvanja momenta ako za svako područje  $\Omega$  i za svako  $t \in \mathbf{R}$  vrijedi

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v \, dx = \int_{\Omega} \rho f \, dx + \int_{\partial\Omega} t_n \, dS. \quad (1.33)$$

(tj. ako je brzina promjene impulsa proizvoljnog dijela kontinuuma jednaka sili koja na taj dio djeluje). Jednakost (1.33) kaže da su sve sile koje djeluju na fluid u međusobnoj

ravnoteži, što se naziva i D'Alembertov princip.

U skladu s Cauchyjevim načelom (v. [1]), normalno naprezanje može se iskazati na sljedeći način

$$t_n(x, t) = n(x, t) \cdot T(x, t), \quad (1.34)$$

gdje je  $T = \{T_{ij}\}$  tenzor naprezanja, a  $n(x, t)$  vanjska normala. Uz primjenu teorema o divergenciji iz (1.33) i (1.34) dobivamo

$$\int_{\Omega} \rho \frac{D}{Dt} v \, dx = \int_{\Omega} \rho f \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} T \, dx. \quad (1.35)$$

Odavdje slijedi lokalna forma zakona o očuvanju momenta

$$\rho \frac{D}{Dt} v = \operatorname{div} T + \rho f. \quad (1.36)$$

Uočimo da tenzor  $T$  još nismo specificirali, tj. nismo uzeli nikakve pretpostavke o prirodi sile koje djeluju na površinu područja. Te sile ovise i o samoj vrsti fluida. U najjednostavnijem modelu kontaktne sile djeluju okomito na točke koje se nalaze na rubu promatranog područja. Tada imamo:

$$t(n) = -p(x)n, \quad (1.37)$$

gdje  $p$  zovemo tlakom. Predznak minus je izabran tako da kada je  $p > 0$  kontaktne sile koje djeluju na zatvoreni rub određenog područja stlačuju fluid unutra. Posebno, svaki fluid i u stanju mirovanja trpi ovakav pritisak, okomit na njegovu površinu te neovisan o orijentaciji. Takvi tlakovi se nazivaju hidrostatični tlakovi. Ovakav primjer nazivamo *idealna fluid*. Tenzor naprezanja možemo uvijek zapisati u ovom obliku:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + P_{ij}. \quad (1.38)$$

U ovom slučaju  $P_{ij}$  zovemo *viskozni tenzor naprezanja*. U klasičnoj mehanici fluida pretpostavljamo da je tenzor naprezanja *simetričan*, tj.  $T_{ij} = T_{ji}$ . To je upravo jedna od glavnih razlika između modela običnog i mikropolarnog fluida.

### Zakon očuvanja angularnog momenta

Zakon očuvanja momenta motivira i zakon očuvanja angularnog (kinetičkog) momenta znajući da se angularni moment definira kao djelovanje polja  $\rho(x \times v)$ . Iz (1.33) tako dobivamo jednakost

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(x \times v) \, dx = \int_{\Omega} \rho(x \times f) \, dx + \int_{\partial\Omega} x \times t_n \, dS. \quad (1.39)$$

Međutim, zakon (1.39) vrijedi samo u slučaju klasičnog fluida, odnosno ako pretpostavimo da svi zakretni momenti dolaze zbog makroskopskih sila. U slučaju mikropolarnog

fluida, uz volumnu silu  $f$  moramo uzeti u obzir i gustoću volumnog para  $g$ , a uz normalno naprezanje i gustoću kontaktnog para (couple stress)  $c_n$ .

Ukupni angularni moment će se sada sastojati od prethodno spomenutog angularnog momenta  $\rho(x \times v)$  i unutarnjeg angularnog momenta koji ćemo označiti s  $\rho l$ , gdje je  $l$  oznaka za specifični spin. Zakon očuvanja (1.39) možemo sada zapisati u formi

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho (l + x \times v) dx = \int_{\Omega} \rho (g + x \times f) dx + \int_{\partial\Omega} c_n + x \times t_n dS. \quad (1.40)$$

Analogno kao u (1.34), za gustoću kontaktnog para  $c_n$  stavimo da vrijedi

$$c_n(x, t) = n(x, t) \cdot C(x, t), \quad (1.41)$$

gdje je  $C(x, t)$  tenzor kontaktnog para, a  $n(x, t)$  vanjska normala. Kako bi došli do lokalne forme očuvanja angularnog momenta koristimo jednakost

$$\operatorname{div} (x \times T) = x \times \operatorname{div} T + T_x, \quad (1.42)$$

gdje je  $T_x$  vektor s komponentama

$$(T_x)_i = \varepsilon_{ijk} T_{jk}. \quad (1.43)$$

Ovdje je  $\varepsilon_{ijk}$  Levi-Civitin alternirajući simbol uz pretpostavku Einsteinove notacije sumiranja:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{ako } (i, j, k) \text{ je } (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2), \\ -1 & \text{ako } (i, j, k) \text{ je } (3,2,1), (1,3,2), (2,1,3), \\ 0 & \text{ako } i = j, \text{ ili } j = k \text{ ili } k = i \end{cases} \quad (1.44)$$

Koristeći (1.43) te teorem o divergenciji, kao kod (1.28) i (1.36), iz (1.40) nalazimo lokalni oblik zakona očuvanja angularnog momenta

$$\rho \frac{D}{Dt} (l + x \times v) = \rho g + \rho x \times f + \operatorname{div} C + x \times \operatorname{div} T + T_x, \quad (1.45)$$

gdje diferencijalni operator  $\frac{D}{Dt}$  označava materijalnu derivaciju. Uvrštavanjem (1.36) u (1.45) dolazimo do konačne forme zakona očuvanja angularnog momenta

$$\rho \dot{l} = \operatorname{div} C + \rho g + T_x. \quad (1.46)$$

Interpretirajući spin  $l$  kao angularni moment krute čestice, pretpostavljamo ga u obliku

$$l(x, t) = \omega(x, t) \cdot I(x, t), \quad (1.47)$$

gdje je tenzorsko polje  $I(x, t)$  mikroinercija (ovisna o gustoći), a vektorsko polje  $\omega(x, t)$  mikrorotacija. U ovom radu pretpostavljamo da je fluid izotropan, to jest, njegova svojstva ne ovise o smjeru, zbog čega je mikroinercijski tenzor definiran oblikom

$$I_{ik} = j_I \delta_{ik}, \quad (1.48)$$

gdje  $\delta_{ik}$  označava Kroneckerovu deltu, a  $j_I$  je pozitivna konstanta koju zovemo mikrorotacijski koeficijent. Prema tome, za izotropan mikropolarni fluid (1.47) postaje

$$l(x, t) = j_I \omega(x, t). \quad (1.49)$$

Konačno, za izotropan polarni fluid jednadžba (1.46) glasi

$$\rho I \frac{D\omega}{Dt} = \rho g + \operatorname{div} C + T_x. \quad (1.50)$$

Kao što smo pretpostavili da na fluid ne djeluju volumne sile, tako možemo pretpostaviti da nema ni djelovanja vanjskog zakretnog momenta, tj. da je  $g = 0$ , pa iz (1.50) i (1.46) slijedi konačna forma zakona očuvanja angularnog momenta

$$\rho j_I \dot{\omega} = \operatorname{div} C + T_x. \quad (1.51)$$

### Zakon očuvanja energije

Prema prvom zakonu termodinamike porast ukupne energije (promatramo samo kinetičku i unutarnju energiju) unutar tijela jednak je sumi prenesene topline i rada koje tijelo učini. Općenito vrijedi

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left( \frac{1}{2} |v|^2 + E \right) dx = \int_{\Omega} \rho f \cdot v dx + \int_{\partial\Omega} t_n \cdot v dS - \int_{\partial\Omega} q \cdot n dS, \quad (1.52)$$

gdje  $q$  označava toplinski fluks, a  $E$  označava specifičnu unutarnju energiju.

Ovu jednadžbu ćemo zapisati u drugoj formi. Za to ćemo se poslužiti rezultatom iz [6], koji kaže da ako je  $F$  bilo koja funkcija koja ovisi o  $t$  i  $x$ , tada vrijedi

$$\int_{\partial\Omega} F T_{ji} n_j dS = \int_{\Omega} \left[ T_{ji} F_{,j} + \rho F \left( \frac{Dv_i}{Dt} - f_i \right) \right] dx. \quad (1.53)$$

Ako uvrstimo  $F = v_i$  dobivamo:

$$\int_{\partial\Omega} v_i T_{ji} n_j dS = \int_{\Omega} \left( T_{ji} v_{i,j} + \rho v_i \frac{Dv_i}{Dt} - \rho f_i v_i \right) dx. \quad (1.54)$$

Uočimo da je drugi član u integralu desne strane zapravo jednak izrazu  $\rho \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} |v|^2$ . Koristeći transportni teorem slijedi

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \frac{1}{2} |v|^2 dx = \int_{\Omega} \rho \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} |v|^2 dx = \int_{\Omega} \rho f_i v_i dx - \int_{\Omega} T_{ji} v_{i,j} dx + \int_{\partial\Omega} v_i (t_n)_i dS. \quad (1.55)$$



Prvi član na lijevoj strani u (1.55) je brzina promjene kinetičke energije područja  $\Omega$ , a na desnoj strani je snaga (rad u jedinici vremena) sila koje djeluju na  $\Omega$ . Uvrštavanjem (1.55) u (1.52) i uz primjenu transportnog teorema te teorema o divergenciji nalazimo

$$\int_{\Omega} \left( \rho \frac{DE}{Dt} + \nabla \cdot q - T : (\nabla v) \right) dx = 0, \quad (1.56)$$

gdje je  $T : (\nabla v)$  notacija za skalarni umnožak tenzora  $T$  i  $\nabla v$ , ( $T_{ji}v_{i,j}$ ). Dakle, vrijedi

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\nabla \cdot q + T : (\nabla v). \quad (1.57)$$

Ako pretpostavimo i *Fourierov zakon* za kondukciju topline:

$$q = -k\nabla\theta \quad (k \geq 0), \quad (1.58)$$

tada jednačba (1.57) poprima sljedeći oblik

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \nabla \cdot (k\nabla\theta) + T : (\nabla v). \quad (1.59)$$

S obzirom da u ovom radu promatramo izotropan mikropolaran fluid, iz prvog zakona termodinamike dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left( \frac{v^2}{2} + j_I \frac{\omega^2}{2} + E \right) dx &= \int_{\Omega} (\rho f v + \rho \omega g) dx + \int_{\partial\Omega} t_n \cdot v dS \\ &+ \int_{\partial\Omega} c_n \cdot \omega dS - \int_{\partial\Omega} q \cdot n dS, \end{aligned} \quad (1.60)$$

gdje lijeva strana jednakosti označava porast ukupne energije. Pretpostavlja se iz ovog da volumni i kontaktni par čine rad samo na polju mikrorotacije. Prema prethodno izvedenim zakonima očuvanja momenta i angularnog momenta, iz (1.60) zaključujemo da vrijedi

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\nabla q + T : (\nabla v) + C : (\nabla \omega) - T_x \cdot \omega. \quad (1.61)$$

Ovdje i u nastavku koristimo sljedeću notaciju za skalarni umnožak tenzora:

$$A : B = \sum_i \sum_j A_{ij} B_{ij} = \text{tr } A^T B. \quad (1.62)$$

### 1.3 Mikropolarni fluidi

#### Izotropni polarni fluidi

U prethodnim odjeljcima izveli smo sljedeći sustav zakona očuvanja izotropnog polarnog fluida:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla \cdot v, \quad (1.63)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \nabla \cdot T + \rho f, \quad (1.64)$$

$$\rho I \frac{D\omega}{Dt} = \nabla \cdot C + \rho g + T_x, \quad (1.65)$$

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\nabla \cdot q + T : (\nabla v) + C : (\nabla \omega) - T_x \cdot \omega. \quad (1.66)$$

To su redom zakon očuvanja mase, momenta, angularnog momenta i energije. Posebno, u klasičnoj mehanici,  $C = 0$ ,  $g = \omega = 0$ . Tada, po (1.65) tenzor naprezanja je simetričan, tj.  $T = T^T$ , te navedeni sustav jednadžbi zakona očuvanja postaje

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla \cdot v,$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \nabla \cdot T + \rho f,$$

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\nabla q + T : (\nabla v).$$

Stoga, model izotropnog polarnog fluida sadrži u sebi, kao specijalni slučaj, klasični model Navier-Stokesa gdje  $T$  definiramo kao

$$T_{ij} = (-p + \lambda v_{k,k})\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i}). \quad (1.67)$$

**Napomena 1.3.1.** Formula (1.67) je posljedica određenih pretpostavki koje postavlja Stokes o fundamentalnim svojstvima fluida. Možemo ih predstaviti na sljedeći način:

- Tenzor naprezanja  $T$  je neprekidna funkcija tenzora deformacije  $D$ .
- Fluid je homogen (tj.,  $T$  ne ovisi eksplicitno o  $x$ ).
- Fluid je izotropan (ne ovisi o smjeru).
- Ako nema deformacije ( $D = 0$ ), tenzor je statičan ( $T = -pI$ , gdje je  $I$  jedinična matrica).

Fluidi koji zadovoljavaju dane uvjete nazivaju se Stokesovim fluidima, te imaju tenzor naprezanja kojeg generalno možemo zapisati u sljedećem obliku

$$T = (-p + \alpha)I + \beta D + \gamma D^2, \quad (1.68)$$

gdje su  $p, \alpha, \beta, \gamma$  funkcije koje ovise o termodinamičkom stanju, te su  $\alpha, \beta, \gamma$  također ovisne o invarijantama tenzora  $D$ . Nadalje, kada imamo dodatno da su nam komponente tenzora  $T$  linearno ovisne o komponentama tenzora  $D$ , tenzor naprezanja možemo zapisati kao

$$T = (-p + \lambda \operatorname{div} v)I + 2\mu D, \quad (1.69)$$

što se podudara s (1.67). Takvi linearni Stokesovi fluidi se zovu Newtonovski fluidi. U ovom radu ćemo promatrati slučaj ne-Newtonovskog fluida, preciznije mikropolarnog fluida.

### Konstitutivne jednadžbe za mikropolarni fluid

Da bi dobili model mikropolarnog fluida, trebamo specificirati tenzor naprezanja  $T$  i tenzor kontaktnog para  $C$  u sustavu (1.63) - (1.66). Definiramo mikropolarni fluid kao polarni, izotropan fluid s tenzorima  $T$  i  $C$  koji su dani s

$$T = (-p + \lambda \operatorname{div} v)I + 2\mu \operatorname{sym} \nabla v - 2\mu_r \operatorname{skw} \nabla v - 2\mu_r \omega_{skw} \quad (1.70)$$

te

$$C = c_0 \operatorname{div} \omega I + 2c_d \operatorname{sym} \nabla \omega - 2c_a \operatorname{skw} \nabla \omega, \quad (1.71)$$

gdje  $\operatorname{sym} A$  označava simetrični dio tenzora:

$$\operatorname{sym} A = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad (1.72)$$

a  $\operatorname{skw} A$  antisimetrični dio tenzora  $A$ :

$$\operatorname{skw} A = \frac{1}{2}(A - A^T). \quad (1.73)$$

Tenzor  $\omega_{skw}$  je antisimetrični tenzor vektora  $\omega$  definiran sa

$$(\omega_{skw})_{ij} = \varepsilon_{mij} \omega_m \quad (1.74)$$

uz iste oznake kao u (1.43).

Simetrični dio tenzora  $T$  u (1.70) je

$$T_{ij}^{(s)} = (-p + \lambda v_{k,k}) \delta_{ij} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad (1.75)$$

što odgovara tenzoru naprezanja u klasičnom Navier-Stokesovom modelu.

U (1.70)  $p$  označava tlak,  $I$  je jedinična matrica, a  $\lambda$  i  $\mu$  su koeficijenti viskoznosti (*drugi koeficijent viskoznosti i dinamička Newtonovska viskoznost*) za koje vrijede nejednakosti:

$$\mu \geq 0, \quad 3\lambda + 2\mu \geq 0. \quad (1.76)$$

Konstante  $\mu_r, c_0, c_d$  i  $c_a$  u izrazima (1.70) i (1.71) su koeficijenti mikroviskoznosti. Konstantu  $\mu_r$  nazivamo *dinamičkom mikrorotacijskom viskoznosti*, a  $c_0, c_d$  i  $c_a$  *koeficijente angularne viskoznosti* sa svojstvima

$$\mu_r \geq 0, \quad c_d \geq 0, \quad 3c_0 + 2c_d \geq 0, \quad |c_d - c_a| \leq c_d + c_a. \quad (1.77)$$

Uvrštavanjem tenzora  $T$  i  $C$  iz (1.70) i (1.71) u sustav (1.63) - (1.66), dobivamo sljedeći sustav jednadžbi:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot v, \quad (1.78)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + (\lambda + \mu - \mu_r) \nabla \operatorname{div} v + (\mu + \mu_r) \Delta v + 2\mu_r \operatorname{rot} \omega + \rho f, \quad (1.79)$$

$$\rho I \frac{D\omega}{Dt} = 2\mu_r (\operatorname{rot} v - 2\omega) + (c_0 + c_d - c_a) \nabla \operatorname{div} \omega + (c_a + c_d) \Delta \omega + \rho g, \quad (1.80)$$

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -p \operatorname{div} v + \rho \Phi - \nabla \cdot q, \quad (1.81)$$

gdje je

$$\begin{aligned} \rho \Phi = & \lambda (\operatorname{div} v)^2 + 2\mu D : D + 4\mu_r \left( \frac{1}{2} \operatorname{rot} v - \omega \right)^2 \\ & + c_0 (\operatorname{div} \omega)^2 + (c_a + c_d) \nabla \omega : \nabla \omega \\ & + (c_d - c_a) \nabla \omega : (\nabla \omega)^T \end{aligned} \quad (1.82)$$

funkcija disipacije mehaničke energije po jedinici mase, a  $D$  označava *tenzor deformacije*

$$D = \operatorname{sym} \nabla v. \quad (1.83)$$

Uočimo da ako za  $g, \omega$  te koeficijente viskoznosti  $c_0, c_a, c_d, \mu_r$  uzmemo da imaju vrijednost 0, tada sustav (1.78) - (1.81) postaje zapravo sustav jednadžbi klasične dinamike:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot v,$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} v + \mu \Delta v + \rho f,$$

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -p \operatorname{div} v + \rho \Phi - \nabla \cdot q,$$

gdje je

$$\rho \Phi = \lambda (\operatorname{div} v)^2 + 2\mu D : D.$$

**Postavke modela i rubni uvjeti**

Koristeći sustav jednadžbi (1.78) - (1.81), uz pretpostavke *viskoznog i inkompresibilnog fluida*

$$\mu > 0 \quad i \quad \operatorname{div} v = 0$$

te da je unutarnja energija fluida proporcionalna temperaturi, tj.

$$E = c_r \theta, \quad \text{gdje je } c_r = \text{const.} > 0$$

te da vrijedi Fourierov zakon

$$q = -k \nabla \theta, \quad (1.84)$$

dolazimo do sustava:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho &= 0, \quad \operatorname{div} v = 0, \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) &= -\nabla p + (\mu + \mu_r) \Delta v + 2\mu_r \operatorname{rot} \omega + \rho f, \\ \rho I \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + (v \cdot \nabla) \omega \right) &= 2\mu_r (\operatorname{rot} v - 2\omega) \\ &\quad + (c_0 + c_d - c_a) \nabla \operatorname{div} \omega + (c_a + c_d) \Delta \omega + \rho g, \\ \rho c_r \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + v \cdot \nabla \theta \right) &= 2\mu D : D + 4\mu_r \left( \frac{1}{2} \operatorname{rot} v - \omega \right)^2 \\ &\quad + c_0 (\operatorname{div} \omega)^2 + (c_a + c_d) \nabla \omega : \nabla \omega + (c_d - c_a) \nabla \omega : (\nabla \omega)^T. \end{aligned}$$

U slučaju stacionarnog problema, u ovom radu ćemo pretpostavljati uvijek Dirichletov rubni uvjet za nepoznate funkcije:

$$v|_{\partial \Omega} = v_b, \quad (1.85)$$

$$\omega|_{\partial \Omega} = \omega_b, \quad (1.86)$$

$$\theta|_{\partial \Omega} = \theta_b. \quad (1.87)$$

Za nestacionarne probleme promatrane u domeni  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ , gdje je  $0 < T \leq \infty$  proizvoljan, pretpostavit ćemo analogne rubne uvjete:

$$v = v_b, \quad \omega = \omega_b, \quad \theta = \theta_b \quad \text{na } \partial \Omega \times (0, T). \quad (1.88)$$

Dane funkcije  $v_b, \omega_b, \theta_b$  pripadaju odgovarajućim funkcijskim prostorima. Općenito, u teoriji najčešće se koriste homogeni rubni uvjeti. Ova pretpostavka jako pojednostavljuje samu tehničku stranu u dokazima, argument čini jasnijim i omogućava tim lakši pristup za odgovarajuće nehomogene rubne uvjete. Također, u nestacionarnom slučaju, trebamo zadati i početne uvjete.

**Primjeri rubnih uvjeta**

Navedimo neke od najčešće korištenih vrsta rubnih uvjeta u slučaju mikropolarnog fluida.

*Homogeni rubni uvjeti*

Jednostavan i najčešći primjer rubnih uvjeta koji se koriste su upravo homogeni uvjeti.

$$v = 0 \quad (1.89)$$

$$\omega = 0 \quad (1.90)$$

Premda je fizikalna interpretacija rubnog uvjeta za brzinu jasna, (viskozni fluid se lijepi za krutu stijenu odnosno rub), za samo polje mikrorotacije nemamo smislenu fizikalnu interpretaciju rubnog uvjeta (1.90).

*Rubni uvjeti sa silama i momentima*

Zadajemo

$$T \cdot n = t_b, \quad C \cdot n = c_b \quad na \quad \partial\Omega. \quad (1.91)$$

**Primjer 1.3.2.** Jedan od primjera kako ćemo definirati tenzor  $C$  je sljedeći:

$$C \cdot n = A \left( \omega - \frac{1}{2} rot v_b \right) \quad na \quad \partial\Omega \quad (1.92)$$

gdje je  $A = (\alpha_{ij})$  matrica s skalarnim komponentama. Iz dva suprotna slučaja limesa,  $\alpha_{ij} \rightarrow \infty$  and  $\alpha_{ij} \rightarrow 0$ , respektivno dobivamo

$$\omega = \frac{1}{2} rot v_b, \quad (1.93)$$

$$C \cdot n = 0, \quad (1.94)$$

na  $\partial\Omega$ . Ako se rub ne pomiče ( $v_b = 0$ ), (1.93) postaje  $\omega = 0$  na  $\partial\Omega$  te dobivamo homogene rubne uvjete. Uvjet (1.93) predstavlja jaku interakciju između čestica fluida i krutog ruba - mikrorotacija se reducira u vrtložnost na rubu kao posljedica pomicanja ruba.

**Primjer 1.3.3.** Neka je

$$s \left( \omega - \frac{1}{2} rot v_b \right) = rot v - 2\omega \quad (1.95)$$

na  $\partial\Omega$ . Limes, (sa  $rot v_b = 0$ ), kad  $s = \infty$  daje

$$\omega = 0 \quad (1.96)$$

odnosno,

$$\omega = \frac{1}{2} rot v \quad (1.97)$$

za  $s = 0$  na  $\partial\Omega$ . Zadnja dva uvjeta izražavaju neprisutnost mikrorotacije i antisimetričnog dijela tenzora naprezanja na rubu. Jednakost (1.95) s uvjetom da je  $\text{rot } v_b = 0$  možemo zapisati u formi

$$\omega = \frac{\alpha}{2} \text{rot } v, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (1.98)$$

na  $\partial\Omega$ .

Također, u literaturi (v. [6]) nalazimo i

$$\omega = \frac{\alpha}{2} \text{rot } v + \frac{1-\alpha}{2} \text{rot } v_b, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (1.99)$$

na  $\partial\Omega$ , koji poprima oblik :

$$\omega = \frac{1}{2} \text{rot } v_b \quad \text{za } \alpha = 0, \quad (1.100)$$

$$\omega = \frac{1}{2} \text{rot } v \quad \text{za } \alpha = 1, \quad (1.101)$$

$$\omega = \frac{\alpha}{2} \text{rot } v \quad \text{za } v_b = 0. \quad (1.102)$$

Prilikom rješavanja sustava gibanja za mikropolarni fluid uz primjenu navedenih rubnih uvjeta te provjeru same valjanosti rubnog uvjeta za promatrani problem, također trebamo znati i pogodne uvjete za određen problem. Drugim riječima, znati procijeniti koji uvjet najviše odgovara određenom problemu. U ovom radu ćemo testirati razne slučajeve rubnih uvjeta na jednostavnijim, stacionarnim problemima za Poiseuilleov i Couetteov tok fluida, za koje ćemo u konačnici i dobiti egzaktno rješenje.





## Poglavlje 2

# Primjeri egzaktnih rješenja

U ovom poglavlju prikazat ćemo nekoliko primjera egzaktnih rješenja za Poiseuille i Couette tokove mikropolarnog fluida između dvije paralelne ravnine. Za Poiseuilleov tok promatrat ćemo i različite rubne probleme te istaknuti njihovu međusobnu povezanost. Zahvaljujući egzaktnim formulama za rješenje danih tokova lako ćemo uočiti i sam utjecaj mikrostrukture i karakterističnih dimenzija na efektivni tok fluida. Dobivene rezultate poput brzine, mikrorotacije i protoka toka ćemo također međusobno usporediti za različite tokove. Pokazat ćemo i povezanost s klasičnim, Navier-Stokesovim modelom, odnosno kada dolazi do stapanja modela, a kada do bitnog utjecaja mikrostrukture.

### 2.1 Poiseuilleov tok između dvije paralelne ravnine

Promatramo stacionarni tok mikropolarnog fluida između dvije paralelne ravnine

$$\Gamma_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = (-1)^i h\}, \quad i = 1, 2, \quad (2.1)$$

u smjeru  $x$ -osi, induciran s  $\frac{dp}{dx}$  bez prisustva vanjskih sila i momenta ( $f = g = 0$ ). U skladu s tim brzinu, mikrorotaciju i tlak označavamo respektivno s:

$$u = (u_1(y), 0, 0), \quad \omega = (0, 0, \omega_3(y)), \quad p(x). \quad (2.2)$$

Prisjetimo se osnovnog sustava kojeg smo izveli u Poglavlju 1:

$$-(\nu + \nu_r)\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 2\nu_r \operatorname{rot} \omega, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (2.4)$$

$$-(c_a + c_d)\Delta \omega + I(u \cdot \nabla) \omega - (c_0 + c_d - c_a)\nabla \operatorname{div} \omega + 4\nu_r \omega = 2\nu_r \operatorname{rot} u. \quad (2.5)$$

Prethodne jednadžbe predstavljaju zakone sačuvanja i to redom; sačuvanje momenta, mase i angularnog momenta. Također stavljamo:

$$v = \mu/\rho, \quad v_r = \mu_r/\rho, \quad i \quad \rho = 1, \quad I = 1 \quad (2.6)$$

radi jednostavnosti zapisa. Dakle, uvrštavanjem brzine, mikrorotacije i tlaka za Poiseuilleov tok nalazimo:

$$(v + v_r) \frac{d^2 u_1}{dy^2} + 2v_r \frac{d\omega_3}{dy} = \frac{dp}{dx}, \quad (2.7)$$

$$(c_a + c_d) \frac{d^2 \omega_3}{dy^2} - 2v_r \left( 2\omega_3 + \frac{du_1}{dy} \right) = 0, \quad (2.8)$$

gdje je

$$u_1 = u_1(y), \quad \omega_3 = \omega_3(y), \quad i \quad p = p(x). \quad (2.9)$$

Iz (2.7) vidimo da je  $\frac{dp}{dx} = \text{const}$ . Sustav (2.7) - (2.8) možemo zapravo promatrati kao sustav običnih, linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima i nepoznatim funkcijama  $u_1 = u_1(y)$ ,  $\omega_3 = \omega_3(y)$  definiranim na intervalu  $(-h, h)$ .

Pretpostavimo za početak homogene rubne uvjete:

$$u = 0 \quad \text{za} \quad y = \pm h, \quad (2.10)$$

$$\omega = 0 \quad \text{za} \quad y = \pm h. \quad (2.11)$$

Neka je  $p$  takav da je

$$u_1(y) = 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^2$$

rješenje klasičnog Poiseuilleovog toka, odnosno  $\frac{dp}{dx} = \frac{-2\rho v}{h^2}$ , gdje je  $\rho = 1$ . Sada rješavamo sustav (2.7), (2.8), te izvodimo egzaktno rješenje Poiseuilleovog mikropolarnog toka.

Iz (2.8) vidimo da brzinu  $u_1$  možemo izraziti preko mikrorotacije  $\omega_3$ , odnosno dobivamo

$$\frac{du_1}{dy} = -2\omega_3 + \frac{c_a + c_d}{2v_r} \frac{d^2 \omega_3}{dy^2}. \quad (2.12)$$

Ako sada tu jednadžbu deriviramo po  $y$ , nalazimo

$$\frac{d^2 u_1}{dy^2} = -2 \frac{d\omega_3}{dy} + \frac{c_a + c_d}{2v_r} \frac{d^3 \omega_3}{dy^3}. \quad (2.13)$$

Uvrštavanjem (2.13) u (2.7), dobivamo običnu diferencijalnu jednadžbu za  $\omega_3$ :

$$\frac{(v_r + v)(c_a + c_d)}{2v_r} \frac{d^3 \omega_3}{dy^3} - 2v \frac{d\omega_3}{dy} = \frac{dp}{dx}. \quad (2.14)$$

### 1) Homogeno rješenje

Karakteristična jednadžba glasi

$$\frac{(v_r + v)(c_a + c_d)}{2v_r} \lambda^3 - 2v\lambda = 0$$

čije nultočke su: 1)  $\lambda_1 = 0$  2)  $\lambda_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{4vv_r}{(c_a + c_d)(v + v_r)}}$

Uvodimo oznake:

$$N = \sqrt{\frac{v_r}{v + v_r}}, \quad (2.15)$$

$$l = \sqrt{\frac{c_a + c_d}{4v}}. \quad (2.16)$$

Pripadno homogeno rješenje dano je s:

$$\omega_H = C + Ae^{\frac{N}{l}y} + Be^{-\frac{N}{l}y} \quad (2.17)$$

### 2) Partikularno rješenje

Pretpostavljajući partikularno rješenje u obliku (2.17) gdje  $C = C(y)$ , nalazimo:

$$\frac{(c_a + c_d)(v + v_r)}{2v_r} \frac{N^3}{l^3} \left( Ae^{\frac{N}{l}y} - Be^{-\frac{N}{l}y} \right) - 2v \left( C' + \frac{N}{l} \left( Ae^{\frac{N}{l}y} - Be^{-\frac{N}{l}y} \right) \right) = \frac{dp}{dx}.$$

Oдавde slijedi

$$-C' = \frac{dp}{dx} \frac{1}{2v},$$

tj.

$$C = -\frac{dp}{dx} \frac{y}{2v} + D,$$

pa je rješenje za mikrorotaciju dano s

$$\omega_3(y) = \frac{-dp}{dx} \frac{y}{2v} - \frac{c}{2v} + Ae^{\frac{N}{l}y} + Be^{-\frac{N}{l}y}. \quad (2.18)$$

**Napomena 2.1.1.** Za svaku konstantu  $C$  i  $D$  vrijedi

$$\begin{aligned} Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y} &= \frac{A+B}{2}e^{\lambda y} + \frac{A-B}{2}e^{-\lambda y} \\ &= \frac{A}{2}e^{\lambda y} + \frac{B}{2}e^{\lambda y} + \frac{A}{2}e^{-\lambda y} - \frac{B}{2}e^{-\lambda y} \\ &= \frac{A}{2}(e^{\lambda y} + e^{-\lambda y}) + \frac{B}{2}(e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}) \\ &= A \cosh(\lambda y) + B \sinh(\lambda y). \end{aligned}$$

Uzimajući ovo u obzir, (2.18) možemo zapisati:

$$\omega_3(y) = \frac{-dp}{dx} \frac{y}{2\nu} - \frac{c}{2\nu} + A \cosh\left(\frac{N}{l}y\right) + B \sinh\left(\frac{N}{l}y\right). \quad (2.19)$$

Uvrštavanjem (2.19) u (2.12) imamo

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dy} &= \frac{dp}{dx} \frac{y}{\nu} + \frac{c}{\nu} - 2\left(A \cosh\left(\frac{N}{l}y\right) + B \sinh\left(\frac{N}{l}y\right)\right) \\ &\quad + \frac{2\nu N^2}{\nu_r} \left(A \cosh\left(\frac{N}{l}y\right) + B \sinh\left(\frac{N}{l}y\right)\right). \end{aligned}$$

Integriranjem po  $y$  nalazimo

$$u_1(y) = \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2\nu} + \frac{c}{\nu}y + D - 2lN \left(A \sinh\left(\frac{N}{l}y\right) + B \cosh\left(\frac{N}{l}y\right)\right). \quad (2.20)$$

### Određivanje konstanti:

Uvažavajući rubne uvjete (2.10) i (2.11) određujemo nepoznate konstante  $A, B, c$  i  $D$ . Kao što smo naveli, uzimamo da je  $\frac{dp}{dx} = \frac{-2\nu}{h^2}$  i uvodimo oznaku

$$\lambda = \frac{N}{l}h. \quad (2.21)$$

S tim pretpostavkama dobijemo sustav od četiri jednadžbe s četiri nepoznanice:

$$-1 + \frac{c}{2\nu}h + D - 2Nl(A \sinh(\lambda) + B \cosh(\lambda)) = 0, \quad (2.22a)$$

$$-1 - \frac{c}{2\nu}h + D - 2Nl(-A \sinh(\lambda) + B \cosh(\lambda)) = 0, \quad (2.22b)$$

$$\frac{1}{h} - \frac{c}{2\nu} + A \cosh(\lambda) + B \sinh(\lambda) = 0, \quad (2.22c)$$

$$\frac{-1}{h} - \frac{c}{2\nu} + A \cosh(\lambda) - B \sinh(\lambda) = 0. \quad (2.22d)$$

Rješavanjem sustava nalazimo:

$$\begin{aligned} A &= 0, \\ B &= \frac{-1}{h} \frac{1}{\sinh(\lambda)}, \\ c &= 0, \\ D &= 1 - \frac{2Nl \cosh(\lambda)}{h \sinh(\lambda)}. \end{aligned}$$

Njihovim uvrštavanjem u brzinu i mikrorotaciju dobivamo konačno rješenje za Poiseuilleov tok mikropolarnog fluida:

$$u_1(y) = 1 - \frac{y^2}{h^2} - \frac{2N^2 \cosh(\lambda) - \cosh(\lambda \frac{y}{h})}{\lambda \sinh(\lambda)}, \quad (2.23)$$

$$\omega_3(y) = \frac{y}{h^2} - \frac{1}{h} \frac{\sinh(\lambda \frac{y}{h})}{\sinh(\lambda)}. \quad (2.24)$$

Neka nam je  $u_0$  maksimalna vrijednost brzine Navier-Stokesovog modela za Poiseuilleov tok fluida tj.  $u_0 = 1$ . Uvedimo:

$$u^* = \frac{u_1}{u_0}, \quad \omega^* = \frac{\omega_3 h}{u_0}, \quad Y = \frac{y}{h}, \quad N = \left( \frac{\nu_r}{\nu + \nu_r} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad l = \left( \frac{c_a + c_d}{4\nu} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad L = \frac{h}{l}.$$

Tada rješenja (2.23) i (2.24) možemo zapisati u bezdimenzionalnom obliku:

$$u^*(Y) = 1 - Y^2 - 2 \frac{N}{L} \cdot \frac{\cosh(NL) - \cosh(NLY)}{\sinh(NL)}, \quad (2.25)$$

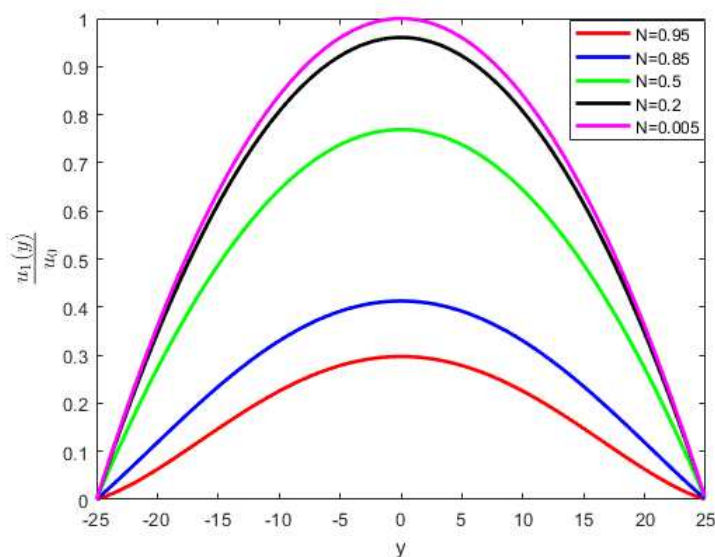
$$\omega^*(Y) = Y - \frac{\sinh(NLY)}{\sinh(NL)}. \quad (2.26)$$

Parametar  $N$  karakterizira povezanost između jednadžbi linearnog i angularnog momenta odnosno možemo reći da opisuje odnos dinamičke Newtonovske viskoznosti i mikrorotacijske viskoznosti.  $N$  je definirana konstanta za svaki tip fluida zasebno te vrijedi  $0 \leq N \leq 1$ . Posebno,  $N$  mjeri stupanj do kojeg je ograničeno rotiranje čestice potaknuto prosječnom kutnom brzinom u području u kojem se nalazi. Za  $N = 0$ , jednadžbe linearnog momenta i angularnog momenta postanu međusobno nezavisne, te dobijemo klasične jednadžbe za Navier-Stokesov model Newtonovskog fluida. Kada  $N$  teži prema 1, viskozne sile mikrorotacije postanu dominantne te se čestica rotira s kutnom brzinom koja je približna prosječnoj angularnoj brzini.

Parametar  $l$  ima dimenziju duljine te karakterizira veličinu molekula - veći  $l$ , veća molekula. Kako je  $l$  izražen preko viskoznosti  $c_a, c_d, \nu$ , koje su pozitivne, nužno slijedi da je  $l$  pozitivan realan broj.

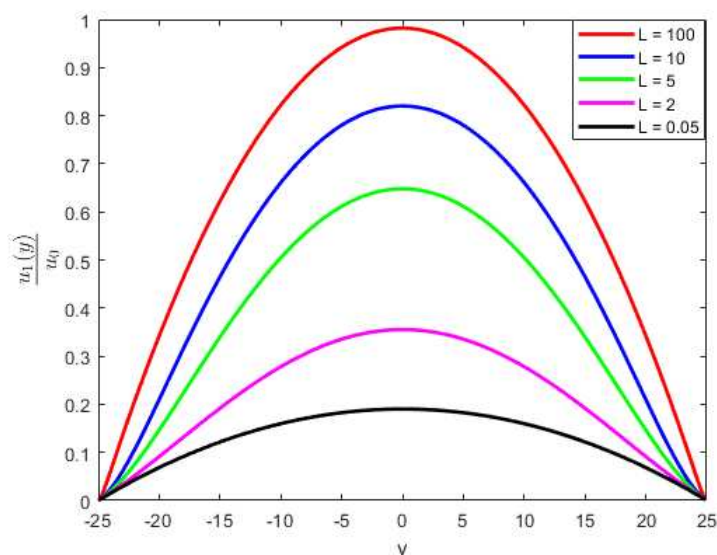
Bezdimenzionalni parametar  $L$  karakterizira relaciju između geometrije toka i svojstva fluida. Uočavamo da će jako ovisiti o veličini  $h$ . Što je manja vrijednost parametra  $L$ , to će biti veći učinak mikropolarnosti fluida. To postizemo u dva slučaja; za jako male udaljenosti između ravnina koje određuju tok fluida ili za jako velike molekule. Iz [3] vidimo da za  $L \rightarrow \infty$  sustav gibanja mikropolarnog fluida se reducira na poznati sustav Navier-Stokesa za viskozni fluid. S druge strane za  $L \rightarrow 0$  imamo opet isti ishod uz neke izmjene kod koeficijenata viskoznosti.

Na slikama 2.1 i 2.2 prikazan je profil brzine Poiseuilleovog toka za izvedeno rješenje  $u^*$  koje ovisi o parametrima  $N$  i  $L$ .



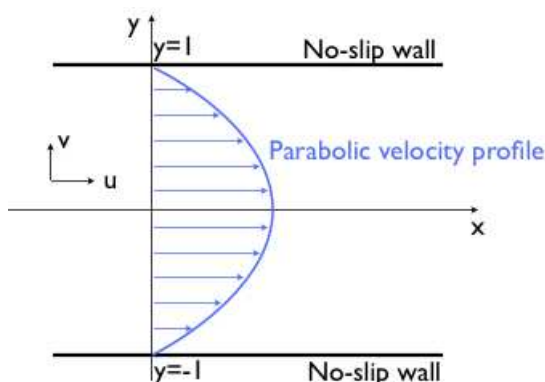
Slika 2.1: Profil brzine Poiseuilleovog toka mikropolarnog fluida za različite vrijednosti parametra  $N$  ( $L=2$ ).

Na slici 2.1 vidimo kako se profil brzine mijenja s obzirom na različite vrijednosti parametra  $N$  uz fiksnu vrijednost od  $L$ . Doista, rezultati se slažu sa teorijom iz literature [3]. Kako pada vrijednost parametra  $N$  tako i brzina poprima paraboloidni izgled, odnosno dolazimo do podudaranja jednadžbi gibanja mikropolarnog toka i klasičnog Navier-Stokesovog modela. U trenutku kada  $N$  ima vrijednost 0, nestane utjecaj mikrorotacijske viskoznosti na tok, te se ova dva profila u potpunosti podudaraju. Također iščitavamo da što je veći utjecaj svojstava mikropolarnog fluida to je i manja brzina (usporedba sa slikom 2.3).



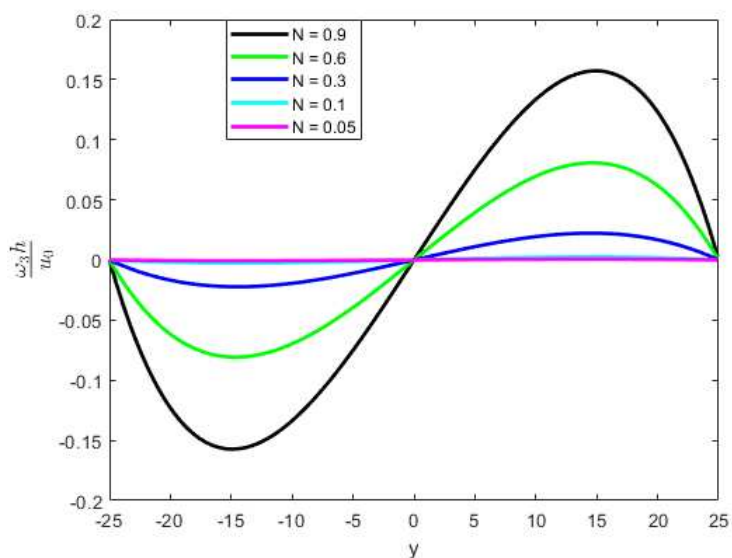
Slika 2.2: Profil brzine Poiseuillovog toka mikropolarnog fluida za različite vrijednosti parametra  $L$  ( $N=0.9$ ).

Na slici 2.2 nam je također prikazana brzina ali za različite vrijednosti parametra  $L$  uz  $N = 0.9$  (pretpostavljamo jak utjecaj mikrostrukture). Vidimo da uz veću vrijednost  $L$  raste i brzina te sve više poprima oblik parabole. Za  $L < 10$  to svojstvo se počinje gubiti te brzina postaje sve manja. Kao što smo rekli,  $L$  je proporcionalan udaljenosti  $h$  između dviju ravnina koje omeđuju naš tok, a obrnuto proporcionalan parametru  $l$  koji opisuje veličinu molekula. Iz rezultata je stoga lako očitati da što je veći  $h$  to je veći i  $L$  i veća brzina, te sve manje djeluju sile mikrorotacije na tok. Za  $L = 100$ , brzina već poprima oblik parabole. Iz toga zaključujemo slaganje s teorijom da uz  $L \rightarrow \infty$  dobivamo klasični model Poiseuilleovog toka. S druge strane, kako nam se smanjuje  $L$ , odnosno rastu viskozne sile mikrorotacije, tako imaju i veći utjecaj na brzinu toka koja postaje sve manja.

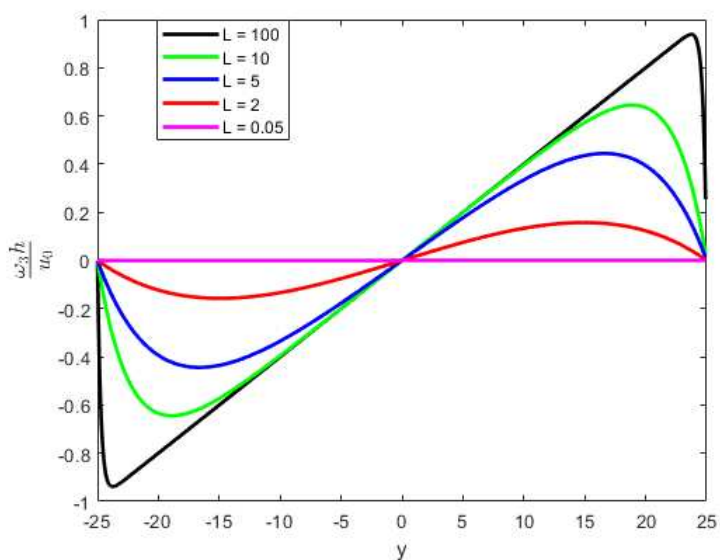


Slika 2.3: Primjer Poiseuille-ovog toka za Navier-Stokes model.

Na slikama 2.4 i 2.5 prikazani su profili mikrorotacije.



Slika 2.4: Profil mikrorotacije Pouiseilleovog toka mikropolarnog fluida za različite vrijednosti parametra  $N$  ( $L=2$ ).



Slika 2.5: Profil mikrorotacije Pouiseilleovog toka mikropolarnog fluida za različite vrijednosti parametra  $L$  ( $N=0.9$ ).



Za N-S model, mikrorotacija ima trivijalno određenu vrijednost 0, jer uopće nije uključena u teoriju modela. Dodavanjem pak specifičnog spina u jednadžbu angularnog momenta, za mikropolarni model dobivamo mikrorotaciju izraženu s linearnim i hiperboličnim članom (2.26). Kada bi hiperbolični član nestao, linearni bi implicirao da je mikrorotacija zapravo jedna polovina vrtložnosti toka. Hiperbolični član zapravo kontrolira brzinu kojom se mikrorotacija mijenja od njene granične vrijednosti (u ovom slučaju 0) do željene veličine od  $\frac{1}{2}\nabla u$ , (v. [7]). Upravo postizanjem te veličine možemo ukloniti vektor mikrorotacije iz zakona očuvanja angularnog momenta, čime dobivamo Navier-Stokesov model (v. [4]). Iz navedenog, te iz slike 2.5 zaključujemo da se učinci mikropolarnog fluida mogu zanemariti u opisu gibanja fluida samo ako je veličina broja  $L$ , odnosno geometrijski broj  $h$ , dovoljno velik za zadani parametar  $l$ . Stoga, kako se smanjuje veličina  $h$ , pojaviti će se razlike između rješenja dobivenih primjenom mikropolarnog modela i klasičnog modela. Na slici 2.4 vidimo kako se mikrorotacija mijenja i za različite vrijednosti broja  $N$ . Očito opadanjem njene vrijednosti smanjuje se utjecaj mikrorotacije na tok, dok u potpunosti ne nestane čime dolazimo opet do klasičnog N-S modela. Kao što je očekivano, na obje slike vidimo da je utjecaj mikrorotacije na sredini toka jako malen ( $\omega_3$  tu nestaje zbog simetrije).

Da bi odredili fluks našeg toka, trebamo integrirati brzinu toka. Dakle, promatramo sljedeće:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-h}^h \rho u_1(y) dy && (\text{uzimamo } \rho = 1) \\ &= \int_{-h}^h \left( 1 - \frac{y^2}{h^2} - \frac{2N^2 \cosh(\lambda) - \cosh(\lambda \frac{y}{h})}{\lambda \sinh(\lambda)} \right) dy \\ &= \frac{4}{3}h - \frac{4N^2h \cosh(\lambda)}{\lambda \sinh(\lambda)} + \frac{4N^2h}{\lambda^2} \\ &= \frac{4}{3}h - \frac{4N^2h}{\lambda} (\coth(\lambda) - \frac{1}{\lambda}) \end{aligned}$$

Ako uvedemo

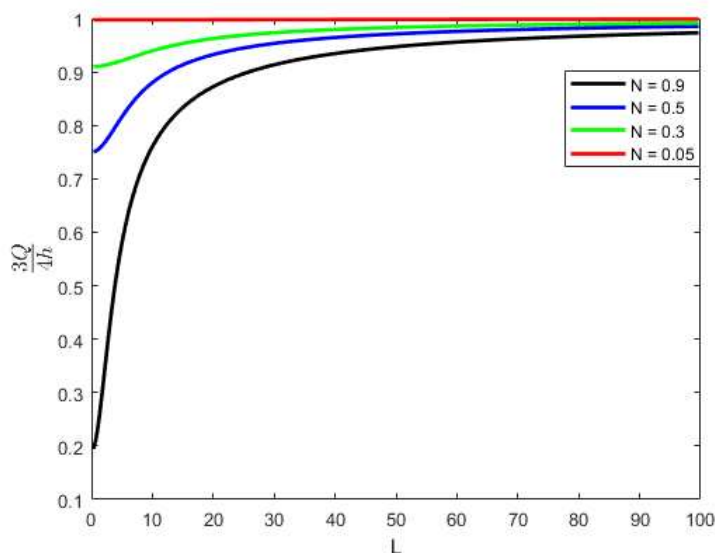
$$Q^* = \frac{3Q}{4h},$$

tada imamo da nam je fluks u bezdimenzionalnom obliku dan s:

$$Q^*(N, L) = 1 - \frac{3N}{L} \left( \coth(NL) - \frac{1}{NL} \right). \quad (2.27)$$

Za  $N \rightarrow 0$  ili za  $L \rightarrow \infty$  protok  $Q^*$  poprima vrijednost protoka za Poiseuille tok Newtonovskog fluida. Ako  $L \rightarrow 0$  protok će opet poprimiti vrijednost Newtonovskog toka ali s malo različitim viskoznim vrijednostima (v. [3]).

Sada ćemo grafički prikazati protok fluida prema formuli (2.27) kao funkciju koja ovisi o parametru  $L$  za razne fiksne vrijednosti parametra  $N$ .



Slika 2.6: Protok mikropolarnog fluida prikazan za različite vrijednosti parametra  $N$ .

Uočavamo sa slike 2.6 da za sve pozitivne vrijednosti  $N$ , vrijednost  $Q^*$  pada ako i  $L$  pada (što su veće molekule ili manja geometrijska veličina  $h$ , to je veći učinak mikrostrukture). Kako raste  $L$  tako nam se  $Q^*$  može sve točnije aproksimirati s  $Q_0$  (oznaka za fluks Newtonovskog fluida), konvergirajući prema vrijednosti 1. Osim o  $L$ , vidimo da na  $Q$  jako utječe i vrijednost parametra  $N$ , njegovim rastom dolazi do opadanja protoka. Zbog čega i primjećujemo da mikropolarni fluid doista ima manji protok od klasičnog Newtonovskog fluida.

### Rubni uvjeti

U prethodnom dijelu izveli smo egzaktno rješenje za Poiseuilleov tok mikropolarnog fluida uz homogene rubne uvjete. Sada ćemo proučiti i drugi primjer rubnih uvjeta koje smo ranije predstavili. Ovi rubni uvjeti će ovisiti o parametru  $\alpha$  koji karakterizira interakciju između fluida i granice.

**Primjer 2.1.2.** *Neka su zadani sljedeći rubni uvjeti:*

$$u = 0 \quad \text{za} \quad y = \pm h, \quad (2.28)$$

$$\omega = -\frac{\alpha}{2} \frac{du}{dy} \quad \text{za} \quad y = \pm h. \quad (2.29)$$

za sustav (2.23)-(2.24). Rubni uvjet (2.29) je poseban slučaj uvjeta (1.99).

Rješavanjem sustava istim postupkom kao i za homogene uvjete dolazimo do rješenja

$$u_1(y) = 1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2 + 2 \frac{\nu_r(1-\alpha)}{\nu + \nu_r(1-\alpha)} \frac{1}{\lambda} \frac{\cosh(\lambda \frac{y}{h}) - \cosh(\lambda)}{\sinh(\lambda)}, \quad (2.30)$$

$$\omega_3(y) = \frac{y}{h^2} - \frac{(1-\alpha)(\nu + \nu_r)}{\nu + \nu_r(1-\alpha)} \frac{1}{h} \frac{\sinh(\lambda \frac{y}{h})}{\sinh(\lambda)}. \quad (2.31)$$

Za  $\alpha = 0$  uvjet (2.29) se podudara s homogenim uvjetom  $\omega = 0$ , te se gore izvedeno rješenje tada svodi upravo na (2.23) i (2.24).

**Primjer 2.1.3.** Promotrimo sada rubne uvjete:

$$u = 0 \quad \text{za} \quad y = \pm h, \quad (2.32)$$

$$\frac{d\omega}{dy} = 0 \quad \text{za} \quad y = \pm h. \quad (2.33)$$

Tada, opet provodeći isti postupak dolazimo do sljedećeg rješenja:

$$u_1(y) = 1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2 + \frac{2}{\lambda^2} \frac{\nu_r}{\nu + \nu_r} \left( \frac{\cosh(\lambda \frac{y}{h}) - \cosh(\lambda)}{\cosh(\lambda)} \right), \quad (2.34)$$

$$\omega_3(y) = \frac{y}{h^2} - \frac{1}{\lambda h} \frac{\sinh(\lambda \frac{y}{h})}{\cosh(\lambda)}. \quad (2.35)$$

Ako u formule za rješenje (2.30) i (2.31) uvrstimo

$$\alpha = \frac{(\nu + \nu_r)(\lambda - \tanh(\lambda))}{(\nu + \nu_r)\lambda - \nu_r \tanh(\lambda)} \quad (2.36)$$

tada dobivamo upravo izvedena rješenja (2.34) i (2.35). Stoga zaključujemo da formule (2.30) i (2.31), gdje je  $\alpha$  dan s (2.36), daju isti tok kao i formule (2.34) i (2.35) koje smo izveli iz drugog rubnog uvjeta za mikrorotaciju  $\omega$  (v. (2.29) i (2.33)).

**Primjer 2.1.4.** Pogledajmo sada poseban slučaj

$$\alpha_0 \omega = (c_a + c_d) \frac{d\omega}{dy} \quad \text{za } y = \pm h \quad (2.37)$$

što je tip rubnog uvjeta (1.92). Uzimajući opet homogeni uvjet za brzinu i uvrštavanjem navedenog nalazimo

$$u_1(y) = 1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2 + \frac{2\nu_r}{(\nu + \nu_r)\lambda} \cdot \frac{1 - \frac{c_0 + c_d}{\alpha_0 h}}{\tanh(\lambda) - \lambda \frac{c_a + c_d}{\alpha_0 h}} \times \left( \frac{\cosh(\lambda \frac{y}{h}) - \cosh(\lambda)}{\cosh(\lambda)} \right), \quad (2.38)$$

$$\omega_3(y) = \frac{y}{h^2} - \frac{1 - \frac{c_0 + c_d}{\alpha_0 h}}{1 - \lambda \tanh(\lambda) \frac{c_a + c_d}{\alpha_0 h}} \cdot \frac{\sinh(\lambda \frac{y}{h})}{\sinh(\lambda)}. \quad (2.39)$$

## 2.2 Couetteov tok između dvije paralelne ravnine

Promatramo Couetteov tok fluida između dvije paralelne ravnine

$$\Gamma_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = (i - 1)h\}, \quad i = 1, 2$$

u smjeru  $x$ -osi, te induciran gibanjem ravnine  $\Gamma_2$  s konstantnom brzinom  $V$  u tom smjeru bez prisustva sila i momenta, ( $f = g = 0$ ). Pretpostavljajući:

$$u = (u_1(y), 0, 0),$$

$$\omega = (0, 0, \omega_3(y)),$$

$$p = p(y),$$

nakon uvrštavanja u jednadžbe gibanja dobivamo sustav jednadžbi:

$$(v + v_r) \frac{d^2 u_1}{dy^2} + 2v_r \frac{d\omega_3}{dy} = 0, \quad (2.40)$$

$$(c_a + c_d) \frac{d^2 \omega_3}{dy^2} - 2v_r \left( 2\omega_3 + \frac{du_1}{dy} \right) = 0. \quad (2.41)$$

Rubni uvjeti koje zadajemo glase:

$$u(0) = 0, \quad u(h) = V, \quad (2.42)$$

$$\omega = -\frac{\alpha}{2} \frac{du}{dy} \quad \text{za } y = 0, h. \quad (2.43)$$

Zapišimo jednadžbe (2.40) - (2.41) u obliku linearnog sustava prvog reda. Definiramo vektorsku funkciju

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1' \\ \omega_3 \\ \omega_3' \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

pa imamo :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dy} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}, \quad (2.45)$$

gdje je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2v_r}{v+v_r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2v_r}{c_a+c_d} & \frac{4v_r}{c_a+c_d} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Iz [5] znamo da je tada generalno rješenje dano u sljedećem obliku

$$\mathbf{u} = e^{\lambda y} \mathbf{r}, \quad \lambda \mathbf{r} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} \quad (2.47)$$

gdje je  $\lambda$  svojstvena vrijednost matrice  $\mathbf{A}$ , a  $\mathbf{r}$  njen pripadni svojstveni vektor. Sada određujemo svojstvene vrijednosti matrice  $\mathbf{A}$ :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \frac{-2v_r}{v+v_r} \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{2v_r}{c_a+c_d} & \frac{4v_r}{c_a+c_d} & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 \frac{\lambda^2(c_a + c_d)(v + v_r) - 4v_r v}{(c_a + c_d)(v + v_r)}. \quad (2.48)$$

Izjednačavanjem s 0 nalazimo:

- 1)  $\lambda_{1,2} = 0, \quad k = 2,$
- 2)  $\lambda_{3,4} = \pm \frac{N}{l},$

gdje su  $N$  i  $l$  definirani kao u 2.2. Pripadni svojstveni vektori ( $\mathbf{A} \mathbf{r} = \lambda \mathbf{r}$ ) dani su sa

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} -2lN \\ -2N^2 \\ 1 \\ \frac{N}{l} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_4 = \begin{bmatrix} 2lN \\ -2N^2 \\ 1 \\ \frac{-N}{l} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica  $\mathbf{A}$  je ranga 3, pa za drugi svojstveni vektor  $\mathbf{r}_2$  uz pripadni  $\lambda = 0$  vrijedi

$$\mathbf{r}_2 \in \text{Ker}(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{I})^2 \setminus \text{Ker}(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{I}),$$

odnosno tražimo  $\mathbf{r}_2$  takav da vrijedi  $(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{I}) \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$ . Dakle,

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Konačno rješenje je linearna kombinacija prve i treće komponente vektora  $\mathbf{u}$ , što zapisano preko hiperbolnih funkcija daje

$$u_1(y) = -2Nl \left( A \sinh\left(\frac{N}{l}y\right) + B \cosh\left(\frac{N}{l}y\right) \right) - 2Cy + D,$$

$$\omega_3(y) = A \cosh\left(\frac{N}{l}y\right) + B \sinh\left(\frac{N}{l}y\right) + C.$$

Uzimajući u obzir rubne uvjete (2.42) - (2.43) odredimo konstante

$$A = \frac{V}{\frac{4Nl}{\sinh(\lambda)}(1 - \cosh(\lambda)) - \frac{\nu + \nu_r(1 - \alpha)}{(\nu + \nu_r)(1 - \alpha)}},$$

$$B = -A \cdot \frac{(\cosh(\lambda) - 1)}{\sinh(\lambda)},$$

$$C = \frac{(1 - \alpha N^2)}{\alpha - 1} \cdot A,$$

$$D = -2Nl \frac{(\cosh(\lambda) - 1)}{\sinh(\lambda)} \cdot A.$$

Uvažavanjem izvedenog dobivamo konačno rješenje za brzinu i mikrorotaciju:

$$u_1(y) = \frac{V}{K} \times \left\{ \frac{1 - \cosh(\lambda)}{\sinh(\lambda)} \left( 1 - \cosh\left(\lambda \frac{y}{h}\right) \right) - \sinh\left(\lambda \frac{y}{h}\right) + \lambda \frac{\nu + \nu_r(1 - \alpha)}{\nu_r(1 - \alpha)} \cdot \frac{y}{h} \right\},$$

$$\omega_3(y) = \frac{V\lambda}{2hK} \frac{\nu + \nu_r}{\nu_r} \times \left\{ \cosh\left(\lambda \frac{y}{h}\right) + \frac{1 - \cosh(\lambda)}{\sinh(\lambda)} \sinh\left(\lambda \frac{y}{h}\right) - \frac{\nu + \nu_r(1 - \alpha)}{(\nu + \nu_r)(1 - \alpha)} \right\},$$

gdje je

$$K = \lambda \frac{\nu + \nu_r(1 - \alpha)}{\nu_r(1 - \alpha)} + 2 \frac{1 - \cosh(\lambda)}{\sinh(\lambda)}.$$

Sada ćemo rješenje zapisati u bezdimenzionalnoj formi, uzimajući da je  $\alpha = 0$ , što odgovara homogenom uvjetu za mikrorotaciju  $\omega = 0$  na  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Nalazimo:

$$u^*(Y) = \frac{1}{\frac{L}{N} + 2 \frac{1 - \cosh(NL)}{\sinh(NL)}} \times \left\{ \frac{1 - \cosh(NL)}{\sinh(NL)} (1 - \cosh(NLY)) - \sinh(NLY) + \frac{L}{N} Y \right\}, \quad (2.49)$$

$$\omega^*(Y) = \frac{\frac{L}{N}}{2 \left( \frac{L}{N} + 2 \frac{1 - \cosh(NL)}{\sinh(NL)} \right)} \times \left\{ \cosh(NLY) - \frac{1 - \cosh(NL)}{\sinh(NL)} \sinh(NLY) - 1 \right\}, \quad (2.50)$$

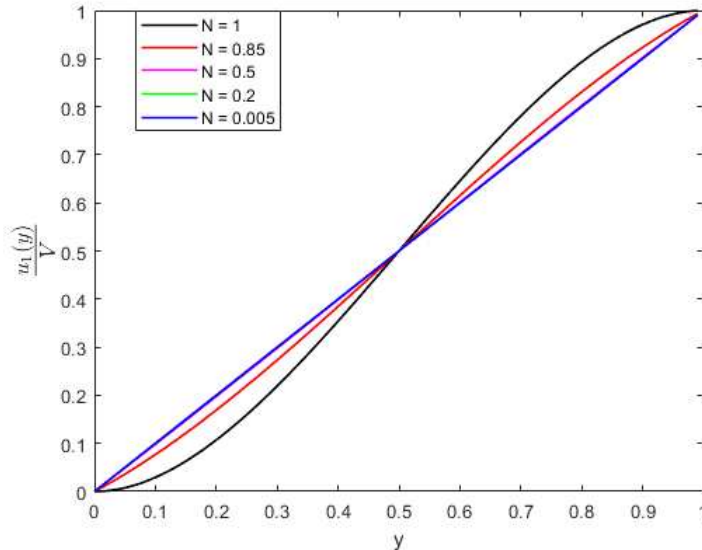
gdje su

$$u^*(Y) = \frac{u_1(y)}{V}, \quad \omega^*(Y) = \frac{\omega_3(y) \cdot h}{V}, \quad Y = \frac{y}{h},$$

te

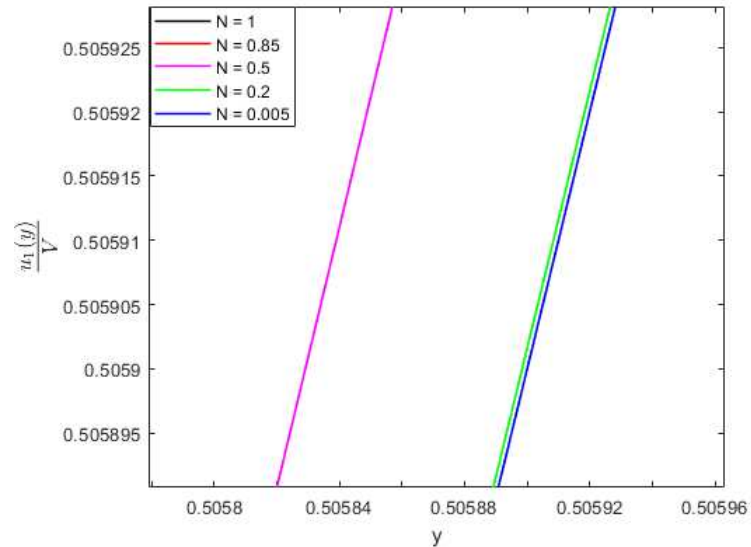
$$L = h \cdot \left( \frac{4\nu}{c_a + c_d} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad N = \left( \frac{\nu_r}{\nu + \nu_r} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pomoću izvedenih egzaktnih rješenja za brzinu i mikrorotaciju prikazati ćemo grafove njihovih profila.



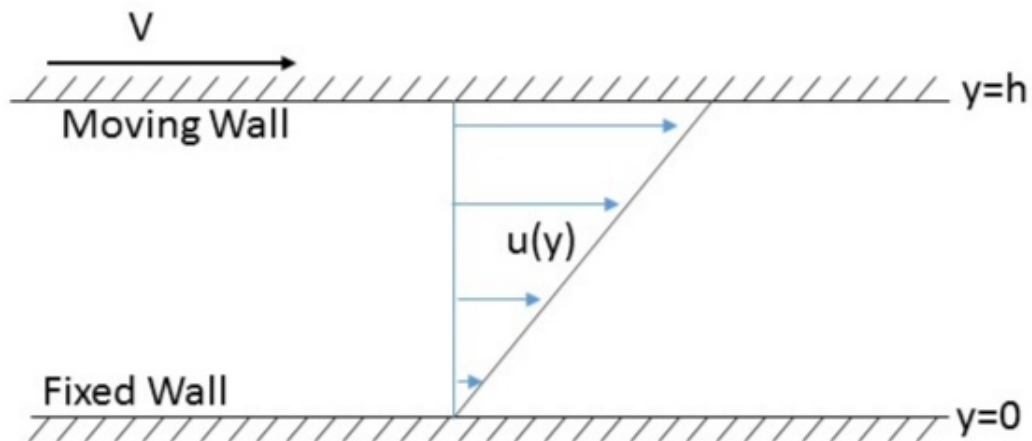
Slika 2.7: Profil brzine Couetteovog toka mikropolarnog fluida prikazan za različite vrijednosti parametra  $N$  ( $L=5$ ).



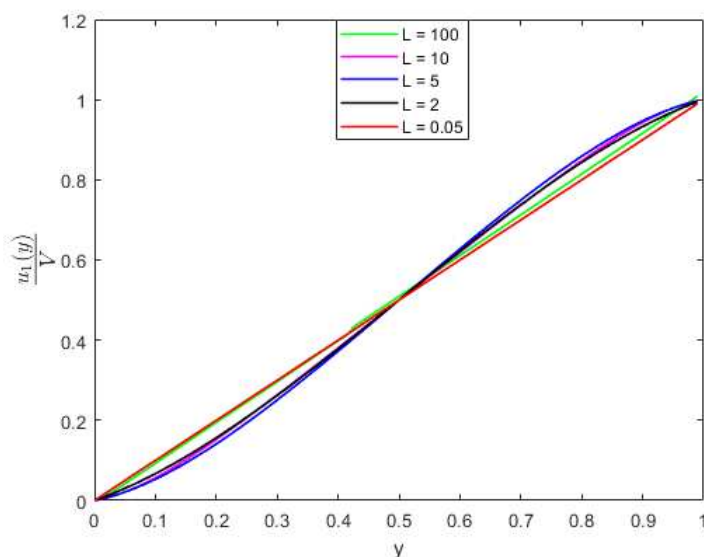


Slika 2.8: Dio uvećanog grafa sa slike 2.7.

Iz slike 2.7 primjećujemo kako profil brzine,  $u^*$ , sve više poprima S-oblik, te kako se vrijednost parametra  $N$  smanjuje tako se približava profilu klasičnog Couette toka (2.9). Dobiveni S-oblik je upravo rezultat uvođenja polja mikrorotacije. Slijedi isti zaključak kao i kod Poiseuilleovog toka za mikropolarni fluid; kako  $N \rightarrow 0$ , dobivamo klasični Naver-Stokes model, a za  $N \rightarrow 1$  dominiraju mikrorotacijske viskoznosti.

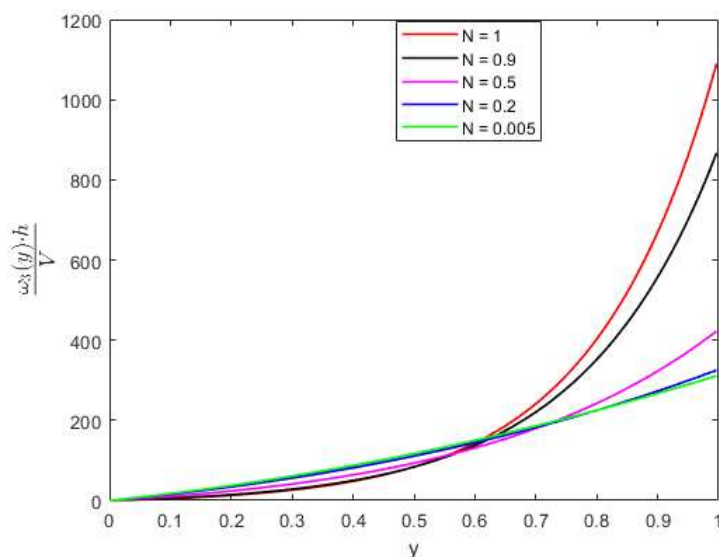


Slika 2.9: Klasični prikaz Couetteovog toka.

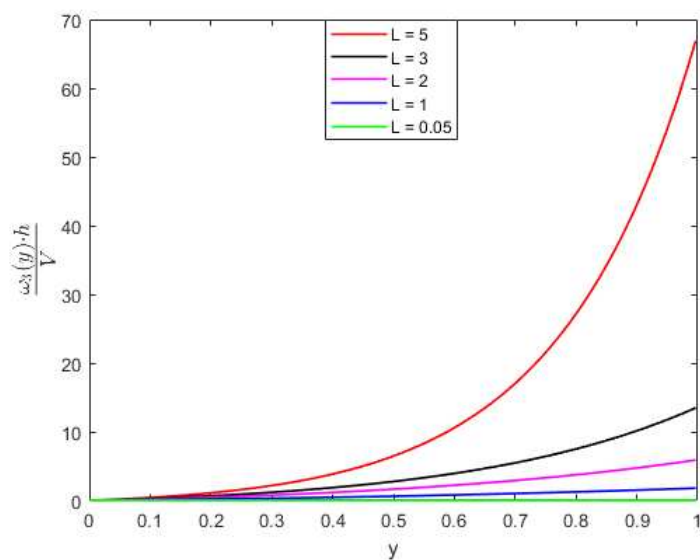


Slika 2.10: Profil brzine Couetteovog toka mikropolarnog fluida prikazan za različite vrijednosti parametra  $L$  ( $N = 0.9$ ).

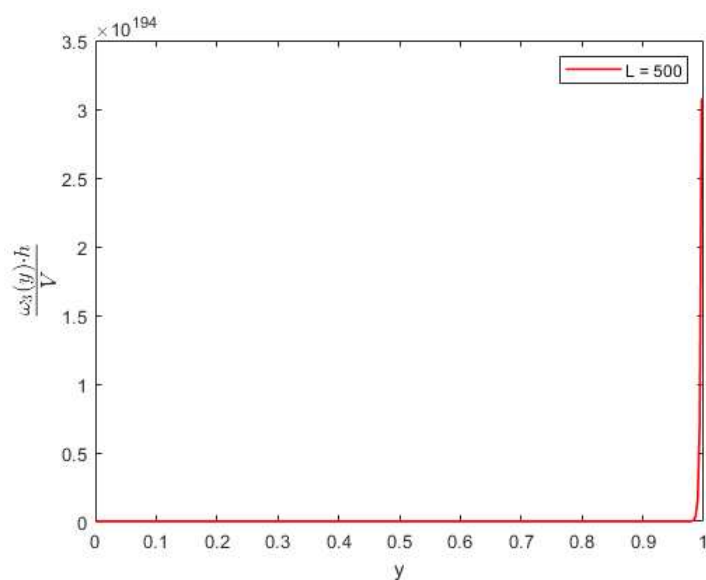
Na slici 2.10 opet uočavamo da za jako velike vrijednosti parametra  $L$ , kao i za jako male, model Couetteovog toka za mikropolarni fluid zapravo prelazi u klasični model (za  $N \neq 0$ ). Za neke međuvrijednosti parametra  $L$ , poput 2 i 5, primjećuju se efekti mikropolarnosti. Kao na slici 2.7, brzina je veća uz rub ravnine koja se giba brzinom  $V$ .



Slika 2.11: Profil brzine mikrorotacije Couetteovog toka mikropolarnog fluida prikazan za različite vrijednosti parametra  $N$  ( $L = 5$ ).



Slika 2.12: Profil brzine mikrorotacije Couetteovog toka mikropolarnog fluida za različite vrijednosti parametra  $L$  ( $N=0.9$ ).



Slika 2.13: Profil brzine Couetteovog toka mikropolarnog fluida prikazan za  $L=100$  ( $N = 0.9$ ).

Na slikama 2.11 i 2.12, te 2.13 prikazani su grafovi za mikrorotaciju izvedenu u (2.50). U oba slučaja, za različite  $L$  i  $N$ , uočavamo da se maksimalna vrijednost mikrorotacije postiže upravo uz sam rub toka. Razlog tome jest pretpostavka da je tok induciran gibanjem ravnine koja predstavlja taj rub. Zadana brzina ravnine potiče tada čestice toka na gibanje  $i$ , u ovom slučaju, na njihovu rotaciju. Za slučaj kada je  $L$  jako malen, tj. veličine molekule su jako velike s obzirom na udaljenost između ravnina  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$ , tada "ponestaje mjesta za rotaciju" te utjecaj mikrorotacije na tok fluida nestane. Stoga, za  $L \rightarrow 0$  imamo klasični N-S model čak i na rubu toka, što čitamo iz slike 2.12. Kako  $L = \frac{h}{\lambda}$  raste, odnosno kako veličina molekula u uspoređi s udaljenošću ravnina postaje sve manja, time se dopušta rotacija čestica fluida zbog čega nastaju sve veće razlike između mikrorotacije sve dok  $L$  ne postane prevelik te  $\omega$  ne iščezne.

Kao što smo uočili u oba primjera, za Poiseuilleov i Couetteov tok mikropolarnog fluida, velike karakteristične veličine  $l$  u uskim tokovima, poput jako blizu postavljenih ravnina, će pokazati veliku ovisnost o parametru  $L$  te parametru  $N$ . Dok je tok takav da te veličine dominiraju dobivamo drugačiji model koji će realnije prikazati promatrane tokove od onog kojeg nam daje N-S model u klasičnoj mehanici. Što su zadane mikrorotacijske viskoznosti te karakteristične dimenzije sve veće, to je brzina i protok fluida sve manji.

# Bibliografija

- [1] I. Aganović, K. Veselić *Linearne diferencijalne jednačbe, Uvod u rubne probleme*, Element, 1997.
- [2] I. Aganović, *Uvod u rubne zadaće mehanike kontinuuma*, Element, 2003.
- [3] C.S. Cowin, *The theory of Polar fluids*, Advances in Applied Mechanics, Vol. 14 (1974), 279-347.
- [4] C.A. Eringen, *Microcontinuum Field Theories, II. Fludent Media*, Springer, 1998.
- [5] M. W. Hirsch, S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, 1974.
- [6] G. Lukaszewicz, *Micropolar fluids, Theory and Applications*, Brikhäuser, 1999.
- [7] K.P. Travis, B.D. Todd, D.J. Evans *Poiseuille flow of micropolar fluids*, Physica A, Vol. 240 (1997.), 315-327.



# Sažetak

U ovom radu izučavamo model mikropolarnih fluida te pomoću zakona sačuvanja i uz dodatne pretpostavke poput izotropnosti, Fourierovog zakona, inkompresibilnosti izvodimo jednadžbe gibanja. Pokazuje se kako je taj model zapravo poopćena verzija klasičnog Navier-Stokesovog modela. Fizikalno gledajući, ovaj model je pogodan za fluide čije molekule se mogu rotirati neovisno o toku fluida i njegove lokalne vrtložnosti. Izvedeni model je analiziran u slučaju dva različita toka uz pripadne rubne uvjete. Za Poiseuille-ov i Couette-ov tok prikazan je utjecaj mikrorotacije na izvedeno egzaktno rješenje za brzinu i mikrorotaciju toka. Na samim rezultatima primjećuje se utjecaj karakterističnih geometrijskih veličina poput razmaka između dviju ravnina kroz koje prolazi fluid. Utjecaj mikrostrukture fluida dolazi do izražaja kod malih geometrijskih dimenzija, gdje prevladavaju mikrorotacijske sile i viskoznosti te tako utječu i na brzinu toka. Za šire kanale i slično, tok se može jednako dobro aproksimirati i klasičnim Navier-Stokesovim jednadžbama.





# Summary

In this work, we introduce the model of micropolar fluids. We derive equations of motion from conservation laws under a number of supplementary assumptions such as isotropy, Fourier's law and incompressibility. It turns out that the micropolar fluid model represents a significant generalization of the classical, Navier-Stokes model. Physically, a micropolar model is suitable for fluids whose molecules can rotate independently of the fluid stream flow and its local vorticity. The derived model is considered for two different flows and various boundary conditions. For Poiseuille and Couette flow the influence of the microstructure on the exact solution for the velocity and microrotation is shown. One can conclude from the results that the characteristic geometrical dimension such as the distance between the parallel planes has significant influence on the effective flow. Once these dimensions are small enough micropolar model is applicable, with the dominant microviscosities and microrotations the change is observed even in the velocity of the flow. For wider channels and such, the flow is quite well described by the classical, Navier-Stokes equations.



# Životopis

Antonia Vuleta rođena je 19. travnja 1993. godine u Sinju. Nakon završene osnovne škole, upisuje jezičnu gimnaziju u Sinju. Godine 2012. upisala je preddiplomski studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija 2017. upisuje diplomski studij Primijenjene matematike na istom fakultetu.