Odlučivost modalnih logika

Bistrović, Tamara

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Tamara Bistrović

ODLUČIVOST MODALNIH LOGIKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Mladen Vuković

Zagreb, rujan, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Modalna logika je nastala iz potrebe za formalizacijom izraza poput nužnosti, mogućnosti, vjerovanja i znanja koje ne možemo prikazati klasičnom logikom sudova. U logici sudova smo se vrlo brzo susreli s paradoksom materijalne implikacije koji je tamo nerješiv i njegovo rješavanje je još jedna motivacija za nastajanje modalnih logika. Modalni jezici, iako sintaktički jednostavni, su matematički bogati u smislu da nam pružaju lokalni uvid u relacijske strukture kojima ih interpretiramo. Premda se čine kao posve izolirani formalni sustavi, modalne logike su zapravo fragmenti klasičnih logika prvog i drugog reda bez obzira na njihovu propozicionalnu sintaksu.

U ovom se radu bavimo isključivo osnovnim modalnim jezikom-najjednostavnijim modalnim jezikom koji je zadan proširenjem alfabeta logike sudova modalnim operatorom mogućnosti ($\Diamond$) i/ili nužnosti ($\Box$). Međutim, mnogi rezultati se mogu jednostavno proširiti i na ostale modalne jezike. Vrlo važni će nam biti aksiomatizirani sustavi bazirani na osnovnom modalnom jeziku, takozvane normalne modalne logike. Krenut ćemo od najmanjeg takvog sustava **K** nazvanog po Saulu Kripkeu koji je prvi postavio formalnu semantiku za modalnu logiku u 1950-ima. Uzevši u obzir da smo modalne logike nazvali fragmentima logika prvog i drugog reda, a znamo da su te logike neodlučive, začuđujuća je činjenica da je sustav **K** odlučiv (uz relativno malu složenost). Štoviše, odlučivost je očuvana kada sustav **K** proširimo raznim dodatnim aksiomima koji opisuju raznovrsna relacijska svojstva. Osnovni cilj ovog rada je pokazati odlučivost sustava **K** i tih proširenja koristeći svojstvo koje svi oni dijele: svojstvo konačnih modela.

Za dobro razumijevanje rada je potrebno predznanje iz kolegija Matematička logika i Izračunljivost. Pojmovi i rezultati s kojima smo upoznati iz tih kolegija ovdje se samo spominju bez preciznih formulacija. Budući da je tema rada konkretno odlučivost modalnih logika, samo pojmovi vezani uz to područje su strogo definirani. Modalna logika obuhvaća puno više nego što je ovdje navedeno, a veći dio toga pokriva osnovna literatura za rad [1].

Prvo poglavlje nam pruža uvod u sintaksu i semantiku osnovnog modalnog jezika. Definiramo pojam normalne modalne logike i navodimo samo par proširenja od **K**. Ostala će uslijediti u posljednjem poglavlju kada ćemo dokazivati njihovu odlučivost. Na kraju poglavlja uvodimo bisimulacije i n-bisimulacije koje će se često pojavljivati u dokazima drugog poglavlja.

Drugo poglavlje nam ukazuje na bitnu različitost između logike prvog reda i osnovnog modalnog jezika koju zovemo svojstvom konačnih modela: svaka ispunjiva formula osnovnog modalnog jezika je ispunjiva na nekom konačnom modelu. Taj rezultat proizlazi iz činjenice da svaki beskonačni model osnovnog modalnog jezika možemo reducirati na konačni koristeći metode selekcije i filtracije koje ćemo detaljno obraditi u istom poglavlju. Osim konačnih modela, u drugom poglavlju se bavimo i konačnim okvirima. Proširujemo svojstva konačnih modela i okvira na normalne modalne logike i dokazujemo ekvivalentnost tih svojstava.

Treće poglavlje započinjemo podsjetnikom na neke pojmove iz Izračunljivosti te formalizacijom pojma odlučive logike. Ukratko objašnjavamo kako reprezentirati modalnu logiku kao niz simbola s kojim bi Turingov stroj mogao raditi. Zatim oblikujemo dvije strategije koje koriste Turingove strojeve kako bi odredile odlučivost dane logike. Strategije se razlikuju po načinu na koji je logika zadana. Prva pretpostavlja da je logika zadana kao logika neke klase okvira, a druga da je zadana aksiomima. Obje pretpostavljaju svojstvo konačnih modela zadane logike. Dokazujemo odlučivost logika **K**, **T**, **KB**, **K4**, **S4** i **S5** koristeći prvu strategiju i svih proširenja logike **S4.3** koristeći drugu strategiju.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

Započnimo s definiranjem osnovnih pojmova koje susrećemo u modalnoj logici. Pogledat ćemo kako je zadan alfabet, što sve smatramo formulama te koje su nam strukture potrebne da govorimo o njihovoj istinitosti i valjanosti. Zatim uvodimo aksiomatizaciju kako bismo mogli slijedno dokazivati formule iz već dokazanih ili aksioma. Naposljetku definiramo bisimulacije o kojima ćemo više govoriti u sljedećem poglavlju.

1.1 Sintaksa osnovnog modalnog jezika

Sintaksa osnovne modalne logike je vrlo slična sintaksi logike sudova. Radi lakšeg dokazivanja, alfabet je restringiran na veznike $\neg$ i $\vee$ pomoću kojih se veznici $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ i $\wedge$ mogu izraziti.

Definicija 1.1.1. ***Alfabet osnovnog modalnog jezika*** *sadrži prebrojiv skup propozicionalnih varijabli* $\Phi = \{p, q, r, \dots\}$*, logičke veznike* $\neg$ *i* $\vee$*, logičku konstantu* $\bot$ *te modalni unarni operator* $\Diamond$ *(operator mogućnosti).*

Koristit ćemo i operator nužnosti $\Box$, koji je zapravo skraćena oznaka za $\neg\Diamond\neg$.

Definicija 1.1.2. *Atomarna* ***formula osnovnog modalnog jezika*** *je svaka propozicionalna varijabla ili logička konstanta* $\bot$*. Svaka atomarna formula je formula. Ako su* φ *i* ψ *formule onda su formule i sljedeći izrazi:* $\neg\varphi$*,* $\varphi \vee \psi$*,* $\Diamond\varphi$*.*

Kroz cijeli rad razmatramo samo osnovni modalni jezik. Međutim, definicije i rezultati se lako poopće na ostale tipove modalnih jezika. Također, ovisno o potrebama, smatramo da je skup propozicionalnih varijabli Φ konačan ili beskonačno prebrojiv skup.

1.2 Semantika osnovnog modalnog jezika

U logici sudova proučavali smo interpretacije, odnosno funkcije koje preslikavaju formule u 0 ili 1. Ovdje imamo složeniji pristup za pokazivanje istinitosti i valjanosti formula kroz relacijske strukture: okvire i modele.

Definicija 1.2.1. ***Okvir*** *za osnovni modalni jezik je uređeni par* $\mathfrak{F} = (W, R)$ *gdje je* W *neprazan skup (domena) čije elemente nazivamo svjetovi, a* R *binarna relacija na skupu* W *koju zovemo* ***relacija dostiživosti****.*

Definicija 1.2.2. ***Model*** *za osnovni modalni jezik je uređeni par* $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ *gdje je* $\mathfrak{F} = (W, R)$ *okvir za osnovni modalni jezik, a* $V\colon \Phi \to \mathcal{P}(W)$ *funkcija koju zovemo* ***valuacija****.*

Definicija 1.2.3. *Za svijet* $w \in W$*, gdje je* W *domena modela* $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ *definiramo pojam* ***istinitosti formule*** φ ***na svijetu*** w ***iz modela*** $\mathfrak{M}$*, u oznaci* $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$*, rekurzivno ovako:*

(a) $\mathfrak{M}, w \Vdash p$ *ako i samo ako* $w \in V(p)$*, za svaki* $p \in \Phi$

(b) $\mathfrak{M}, w \nVdash \bot$

(c) $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\varphi$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M}, w \nVdash \varphi$

(d) $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \vee \psi$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ *ili* $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$

(e) $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$ *ako i samo ako postoji* $v \in W$ *takav da* wRv *i vrijedi* $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$

Kažemo da je formula φ ***globalno istinita na modelu*** $\mathfrak{M}$ *ako je istinita na svakom svijetu modela* $\mathfrak{M}$*. To označavamo s* $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$*.*
Kažemo da je formula φ ***ispunjiva na modelu*** $\mathfrak{M}$ *ako je istinita na nekom svijetu modela* $\mathfrak{M}$*.*
Kažemo da je formula φ ***oboriva na modelu*** $\mathfrak{M}$ *ako je njena negacija* $\neg\varphi$ *ispunjiva na modelu* $\mathfrak{M}$*.*

Lako se vidi da vrijedi i sljedeća tvrdnja:

(1.1) $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\varphi$ ako i samo ako za svaki $v \in W$ takav da wRv vrijedi $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$

Pokušajmo bolje objasniti prethodne definicije primjerom.

Primjer 1.2.4. *Neka je* $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ *model baziran na okviru* $\mathfrak{F} = (W, R)$*, gdje su* $V(p) = \{1, 2\}$*, a* $W = \{0, 1, 2\}$*,* $R = \{(0, 1), (1, 2)\}$*. Tada je formula* $\varphi \equiv \Diamond p \to \Box p$ *globalno istinita na* $\mathfrak{M}$*. To slijedi iz činjenice da je svaki svijet iz* $\mathfrak{M}$ *u relaciji* R *s najviše jednim svijetom iz* $\mathfrak{M}$*. Preciznije, za svijet* 0 *postoji točno jedan svijet iz* W *s kojim je u relaciji, a to je* 1*.*

Također vrijedi $1 \Vdash p$ *pa prema uvjetu* (e) *definicije 1.2.3 vrijedi* $0 \Vdash \Diamond p$. *Analogno, za svijet* 1 *postoji jedinstven svijet* 2 *s kojim je u relaciji i* $2 \Vdash p$ *pa imamo* $1 \Vdash \Diamond p$. *Zbog jedinstvenosti tih svjetova iz* (1.1) *slijedi* $0 \Vdash \Box p$ *i* $1 \Vdash \Box p$*, a onda* $0 \Vdash \varphi$ *te* $1 \Vdash \varphi$. *Svijet* 2 *nije u relaciji ni s jednim svijetom iz* W *pa je tvrdnja* $2 \Vdash \varphi$ *trivijalno zadovoljena. Pokazali smo da vrijedi* $w \Vdash \varphi$ *za bilo koji* $w \in W$ *pa imamo i globalnu istinitost od* φ *na* $\mathfrak{M}$.

Definicija 1.2.5. *Za skup formula* Σ *kažemo da je* ***istinit na svijetu*** w ***iz modela*** $\mathfrak{M}$ *ako su sve formule iz* Σ *istinite na svijetu* w *iz modela* $\mathfrak{M}$.
Skup formula Σ *je* ***globalno istinit na modelu*** $\mathfrak{M}$ *ako je istinit na svakom svijetu modela* $\mathfrak{M}$.
Skup formula Σ *je* ***ispunjiv na modelu*** $\mathfrak{M}$ *ako je istinit na nekom svijetu modela* $\mathfrak{M}$.

Definicija 1.2.6. *Kažemo da je formula* φ ***valjana na svijetu*** w ***u okviru*** $\mathfrak{F}$ *ako za svaku valuaciju* V *vrijedi* $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \varphi$.
Kažemo da je formula φ ***valjana na okviru*** $\mathfrak{F}$ *ako je valjana na svakom svijetu okvira* $\mathfrak{F}$.
Kažemo da je formula φ ***valjana na klasi okvira*** F *ako je valjana na svakom okviru iz* F.
Kažemo da je formula φ ***valjana*** *ako je valjana na klasi svih okvira.*
Skup $\Lambda_F = \{\varphi \mid \varphi$ *valjana na klasi okvira* $F\}$ *zovemo* ***logika klase okvira*** F.

Primjer 1.2.7. *Formula* $\varphi \equiv \Diamond p \to \Box p$ *iz primjera 1.2.4 je valjana na bilo kojem okviru* $\mathfrak{F} = (W, R)$ *takvom da je svaki svijet iz* W *u relaciji* R *s najviše jednim svijetom iz* W. *Uzmimo jedan takav okvir i proizvoljnu valuaciju* V. *Neka je* $w \in W$ *neki svijet okvira* $\mathfrak{F}$. *Pretpostavimo da vrijedi* $w \Vdash \Diamond p$. *Tada postoji svijet* $v \in W$ *takav da* wRv *i* $v \Vdash p$. *Zbog svojstva okvira* $\mathfrak{F}$*, taj* v *je jedinstven. Tada vrijedi da za svaki svijet* $v \in W$ *takav da* wRv *vrijedi i* $v \Vdash p$. *Odnosno, dobili smo* $w \Vdash \Box p$. *Sada zaključujemo i* $w \Vdash \varphi$ *za bilo koji* $w \in W$*, pa imamo* $(\mathfrak{F}, V) \Vdash \varphi$. *Zbog proizvoljnosti valuacije, slijedi* $\mathfrak{F} \Vdash \varphi$.

1.3 Normalna modalna logika

Promotrimo sada neke aksiomatske sustave u modalnoj logici. Njima želimo „generirati" sve valjane formule na nekoj klasi okvira koju smo zadali aksiomima. Aksiomi za pojedine sustave su pomno odabrani da opišu nama bitna svojstva, primjerice tranzitivnost.

Dva pravila izvoda su nam poznata iz logike sudova, to su modus ponens i uniformna supstitucija. Treće je pravilo generalizacije koje glasi: ako vrijedi φ onda vrijedi i $\Box\varphi$.

Definicija 1.3.1. ***Normalna modalna logika*** Λ *je svaki skup formula koji sadrži sve tautologije, formule* $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ *i* $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$ *te je zatvoren na pravila izvoda modus ponens, uniformnu supstituciju i generalizaciju.*

Napomena 1.3.2. *Tautologijama ovdje smatramo sve tautologije logike sudova te formule osnovnog modalnog jezika koje su iz njih nastale uniformnom supstitucijom. Primjerice, sljedeće modalne formule su tautologije:* $\Diamond p \to \Diamond p$, $\Box p \lor \neg\Box p$, $(\Diamond\Box p \land \Box q) \to \Diamond\Box p$.

Najmanju normalnu modalnu logiku nazivamo sistem **K**. Dakle, ona je bazirana isključivo na navedenim aksiomima i pravilima izvoda iz definicije 1.3.1.

Definicija 1.3.3. ***K-dokaz*** *je konačan niz formula* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *takav da je za svaki* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *formula* F_i *aksiom ili je nastala iz prijašnjih formula nekim od pravila izvoda. Formula* φ *je* ***K-dokaziva*** *ako postoji* **K***-dokaz* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *takav da vrijedi* $F_n \equiv \varphi$. *To označavamo s* $\mathbf{K} \vdash \varphi$ *ili* $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$.

Za **K**-dokazivu formulu još kažemo da je *teorem* logike **K**.
Složenije sustave dobijemo dodavanjem aksioma. Neka proširenja od **K** su:

- **T** je **K** s dodatnim aksiomom $p \to \Diamond p$
- **K4** je **K** s dodatnim aksiomom $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$

1.4 Bisimulacije i n-bisimulacije

Sada ćemo definirati pojam bisimulacije koji će nam biti potreban pri radu s konačnim modelima. To su posebna vrsta relacija između samih modela koje nam daju zanimljive posljedice.

Definicija 1.4.1. *Neka su* $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ *i* $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ *modeli. Relaciju* $Z \subseteq W \times W'$ *zovemo* ***bisimulacijom između*** $\mathfrak{M}$ ***i*** $\mathfrak{M}'$ *u oznaci* $Z : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'$ *ako vrijedi:*

(at) *ako* wZw' *tada za svaki* $p \in \Phi$, $w \in V(p)$ *ako i samo ako* $w' \in V'(p)$

(forth) *ako* wZw' *i* wRv *tada postoji* $v' \in W'$ *takav da* vZv' *i* $w'R'v'$

(back) *ako* wZw' *i* $w'R'v'$ *tada postoji* $v \in W$ *takav da* vZv' *i* wRv

Ako je wZw', *kažemo da su svjetovi* w *i* w' ***bisimulirani*** *i to označavamo s* $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$ *ili* $w \underline{\leftrightarrow} w'$ *ako se modeli podrazumijevaju.*

Primjer 1.4.2. *Neka su* $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ *i* $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ *modeli takvi da* $W = \{1, 2\}$, $W' = \{a, b\}$, $R = \{(1, 2)\}$, $R' = \{(a, b)\}$ *te* $V(p) = \{1\}$, $V'(p) = \{a\}$. *Neka je* $Z = \{(1, a), (2, b)\}$. *Tada je* Z *bisimulacija između* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$. *To dokazujemo provjeravajući uvjete definicije bisimulacije za sve svjetove* $w \in W$ *i* $w' \in W'$ *za koje vrijedi* wZw':

- *Za* $(1, a) \in Z$ *vrijedi* $1 \in V(p)$ *i* $a \in V'(p)$ *pa je zadovoljen uvjet* (at). *Vrijedi* $(1, 2) \in R$ *i tada je* $b \in W'$ *takav da* $(2, b) \in Z$ *i* $(a, b) \in R'$ *pa je zadovoljen uvjet* (forth). *Vrijedi i* $(a, b) \in R'$ *i tada je* $2 \in W$ *takav da* $(2, b) \in Z$ *i* $(1, 2) \in R$ *pa je zadovoljen i uvjet* (back).

- *Za* $(2, b) \in Z$ *vrijedi* $2 \notin V(p)$ *i* $b \notin V'(p)$ *pa je zadovoljen uvjet* (at). *Budući da ne postoje svjetovi* $v \in W$ *i* $v' \in W'$ *takvi da bi vrijedilo* $(2, v) \in R$ *i* $(b, v') \in R'$ *onda su uvjeti* (forth) *i* (back) *trivijalno zadovoljeni.*

Dokazat ćemo da bisimulacije čuvaju istinitost formula na svjetovima. U tu svrhu, definiramo sljedeće pojmove.

Definicija 1.4.3. *Neka su* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ *modeli te* w *iz* $\mathfrak{M}$ *i* w' *iz* $\mathfrak{M}'$ *svjetovi.* ***Teorijom od w*** *zovemo skup* $\{\varphi \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi\}$. *Kažemo da su svjetovi* w *i* w' ***modalno ekvivalentni****, u oznaci* $w \leftrightsquigarrow w'$, *ako su im teorije jednake.*

Teorem 1.4.4. *Neka su* $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ *i* $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ *modeli. Tada za svaki svijet* w *iz* $\mathfrak{M}$ *i svaki svijet* w' *iz* $\mathfrak{M}'$ *vrijedi:*

$$\text{ako } w \leftrightarroweq w' \text{ onda su } w \text{ i } w' \text{ modalno ekvivalentni.}$$

Dokaz. Dokazujemo indukcijom po složenosti formule φ da za svaki svijet $w \in W$ i svaki svijet $w' \in W'$ imamo: ako $w \leftrightarroweq w'$ onda vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi$. Slučaj gdje je formula φ propozicionalna varijabla slijedi direktno iz uvjeta (at) definicije bisimulacije, a slučaj gdje je $\varphi \equiv \bot$ je trivijalan.
Pretpostavimo da postoji $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takav da za svaka dva svijeta $w \in W$ i $w' \in W'$ i za svaku formulu ψ složenosti manje ili jednako n vrijedi: ako $w \leftrightarroweq w'$ onda vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}', w' \Vdash \psi$.
Neka je φ neka formula složenosti $n + 1$ i neka vrijedi $w \leftrightarroweq w'$. Iz pretpostavke indukcije se lako dokažu bulovski slučajevi. Neka je $\varphi \equiv \Diamond\psi$. Pretpostavimo prvo da $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$. Tada postoji $v \in W$ takav da je wRv i $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$. Budući da vrijedi $w \leftrightarroweq w'$ i wRv, prema uvjetu (forth) postoji $v' \in W'$ takav da je $v \leftrightarroweq v'$ i $w'R'v'$. Sada prema pretpostavci indukcije slijedi da $\mathfrak{M}', v' \Vdash \psi$. Onda vrijedi i $\mathfrak{M}', w' \Vdash \Diamond\psi$.
Pretpostavimo sada da $\mathfrak{M}', w' \Vdash \Diamond\psi$. Tada postoji $v' \in W'$ takav da je $w'R'v'$ i $\mathfrak{M}', v' \Vdash \psi$. Sada koristeći uvjet (back) i pretpostavku indukcije zaključujemo kao gore da $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$. Dakle, dobili smo da je $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ ekvivalentno s $\mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi$ za formulu φ složenosti $n + 1$ pa je tvrdnja dokazana. ∎

Obrat teorema 1.4.4 ne vrijedi općenito, ali postoji slabija verzija zvana Hennessy-Milnerov teorem u kojem vrijede oba smjera uz dodatno ograničenje na modele. Mi se nećemo baviti tim rezultatom, ali ćemo u sljedećem poglavlju dokazati obrat uz svojevrsnu „konačnu aproksimaciju” bisimulacije koju ćemo sada definirati.

Definicija 1.4.5. *Neka su* $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ *i* $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ *modeli,* w *iz* $\mathfrak{M}$ *i* w' *iz* $\mathfrak{M}'$ *svjetovi te neka je* $n \in \mathbb{N}$ *proizvoljan. Kažemo da su svjetovi* w *i* w' ***n-bisimulirani****, i to označavamo s* $w \leftrightarroweq_n w'$*, ako postoji niz binarnih relacija* $Z_n \subseteq \ldots \subseteq Z_0$ *i za svaki* $i \in \mathbb{N}$ *takav da je* $i + 1 \leq n$ *vrijedi:*

(a) wZ_nw'

(b) ako vZ_0v' *onda za svaki* $p \in \phi$*,* $v \in V(p)$ *ako i samo ako* $v' \in V'(p)$

(c) ako $vZ_{i+1}v'$ *i* vRu*, onda postoji* $u' \in W'$ *takav da* $v'R'u'$ *i* uZ_iu'

(d) ako $vZ_{i+1}v'$ *i* $v'R'u'$*, onda postoji* $u \in W$ *takav da* vRu *i* uZ_iu'

Lako se vidi da ako $w \leftrightarroweq w'$ onda $w \leftrightarroweq_n w'$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, ali obrat općenito ne vrijedi.

Poglavlje 2

Konačni modeli i okviri

U logici prvog reda je jednostavno dati primjer formule koja je ispunjiva isključivo na beskonačnim modelima. Zanima nas postoji li takav primjer i u modalnoj logici. Proučit ćemo dvije osnovne metode za izgradnju konačnog modela iz beskonačnog te koristeći obje metode pokazati da osnovni modalni jezik ima bitno svojstvo konačnih modela. U nastavku poglavlja se bavimo konačnim okvirima i dokazujemo osnovni rezultat odlučivosti modalnih logika. Prema njemu, svaka normalna logika ima svojstvo konačnih okvira ako i samo ako ima svojstvo konačnih modela.

2.1 Konačni modeli

U ovom ćemo odjeljku pokazati kako izgraditi konačni model iz proizvoljnog modela koristeći metode selekcije i filtracije. Pritom želimo da formule koje su bile ispunjive na polaznom modelu ostanu ispunjive i na novonastalom modelu. Uzevši u obzir naše pitanje odlučivosti modalnih logika, ključno je pokazati da osnovni modalni jezik ima svojstvo konačnih modela.

Definicija 2.1.1. *Neka je M neka klasa modela. Kažemo da osnovni modalni jezik ima* ***svojstvo konačnih modela u odnosu na*** *M ako vrijedi sljedeće: ako je φ formula osnovnog modalnog jezika ispunjiva na nekom modelu iz M, onda je formula φ ispunjiva na nekom konačnom modelu iz M.*

Nadalje ćemo pretpostavljati da je M klasa svih modela pa ćemo pisati samo „svojstvo konačnih modela” bez isticanja da je to u odnosu na klasu svih modela.

Metoda selekcije

Prvo ćemo proučiti metodu selekcije. Ona se zasniva na zapažanju da je modalna ispunjivost lokalno svojstvo. Time želimo reći da je ispunjivost formule s modalnim operatorom $\Diamond$ na svijetu w ovisna o ispunjivosti njenih modalnih podformula na svjetovima dostiživih iz w. Postavlja se pitanje koliko je daleko od w potrebno ići da bi se ustanovila ispunjivost početne formule. To očito ovisi o tome koliko je ugniježđenih modalnih podformula sadržano u njoj što opravdava sljedeću definiciju.

Definicija 2.1.2. *Definiramo* ***stupanj modalne formule*** φ*, u oznaci* $deg(\varphi)$*, rekurzivno ovako:*

(a) $deg\,(p) = 0$, *za svaki* $p \in \Phi$

(b) $deg\,(\bot) = 0$

(c) $deg\,(\neg\varphi) = deg\,(\varphi)$

(d) $deg\,(\varphi \vee \psi) = max\,\{deg\,(\varphi)\,, deg\,(\psi)\}$

(e) $deg\,(\Diamond\varphi) = 1 + deg\,(\varphi)$

Drugim riječima, stupanj modalne formule je zapravo maksimalan broj ugniježđenih modalnih operatora.

Primjer 2.1.3. *Modalna formula* $\Diamond p \vee \Diamond\,(\neg q \vee \Diamond r)$ *je stupnja* 2.

Sljedeće propozicije navode još dva zapažanja koja su dovela do nastanka metode selekcije.

Propozicija 2.1.4. *Neka je skup svih propozicionalnih varijabli* Φ *konačan. Tada vrijedi:*

(a) za svaki $n \in \mathbb{N}$ *postoji konačno mnogo formula stupnja najviše* n*, do na logičku ekvivalenciju;*

(b) za svaki $n \in \mathbb{N}$*, za svaki model* $\mathfrak{M}$ *i za svaki svijet* w *iz* $\mathfrak{M}$ *skup svih formula stupnja najviše* n*, ispunjivih na* w*, je ekvivalentan jednoj formuli.*

Dokaz. Dokazujemo tvrdnju (a) indukcijom po n. Neka je $n = 0$. Formule stupnja 0 su zapravo formule logike sudova. Bitno je naglasiti da za formule logike sudova vrijedi da su logički ekvivalentne u logici sudova ako i samo ako su logički ekvivalentne u modalnoj logici. Tada je samo potrebno pokazati da postoji konačno mnogo neekvivalentnih formula u logici sudova. Po teoremu o normalnoj formi, za svaku formulu logike sudova F postoji konjunktivna normalna forma G takva da su F i G logički ekvivalentne. Štoviše, postoji savršena konjunktivna normalna forma G ukoliko F nije tautologija (a taj slučaj je trivijalan jer su sve tautologije ekvivalentne). Budući da je skup Φ konačan, postoji samo konačno

mnogo neekvivalentnih savršenih konjunktivnih normalnih formi. Slijedi da postoji i samo konačno mnogo neekvivalentnih formula logike sudova.
Pretpostavimo da postoji $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takav da za svaki $k \leq n$ postoji najviše konačno mnogo neekvivalentnih formula stupnja k.
Neka je φ proizvoljna formula stupnja $n+1$. Tada postoje podformule $\Diamond\psi_1, \ldots, \Diamond\psi_l$ formule φ za neki $l \in \mathbb{N}$ te (savršena) konjunktivna normalna forma $A(P_1, \ldots, P_l)$ logike sudova takva da vrijedi: formule φ i $A(\Diamond\psi_1, \ldots, \Diamond\psi_l)$ su ekvivalentne. Budući da je skup ϕ konačan, postoji samo konačno mnogo neekvivalentnih (savršenih) konjunktivnih normalnih formi. Ako dokažemo da postoji konačno mnogo neekvivalentnih podformula oblika $\Diamond\psi$, slijedi da postoji konačno mnogo takvih neekvivalentnih formula φ.
Neka je $S = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ skup svih neekvivalentnih formula stupnja n. Neka je $\Diamond\psi$ formula stupnja $n+1$ te $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model, a w svijet iz $\mathfrak{M}$ takav da vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$. Tada postoji svijet v iz $\mathfrak{M}$ takav da je wRv i $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$. Formula ψ je stupnja n. Zbog pretpostavke indukcije, postoji $i \in \{1, \ldots, m\}$ takav da su formule ψ i ψ_i ekvivalentne. Tada vrijedi $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi_i$ što povlači $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi_i$. Dokazali smo da $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$ povlači $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi_i$. Drugi smjer ide analogno pa vrijedi: $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi_i$ za neki $i \in \{1, \ldots, m\}$. Time smo pokazali da postoji i konačno mnogo neekvivalentnih formula oblika $\Diamond\psi$ stupnja $n+1$. Za formule stupnja manjeg od $n+1$ se pozivamo na pretpostavku pa je korak indukcije dokazan.
Tvrdnja (b) slijedi direktno iz (a). ∎

U prošlom smo poglavlju definirali pojam n-bisimulacije. Sada ćemo ga iskoristiti za dokaz ekvivalencije koja je izostala u teoremu 1.4.4. Prisjetimo se i definicije modalne ekvivalencije svjetova. Ovdje nam je potrebna njena slabija varijanta.

Definicija 2.1.5. *Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ modeli. Neka je $n \in \mathbb{N}$ prirodan broj. Kažemo da su svjetovi w iz $\mathfrak{M}$ i w' iz $\mathfrak{M}'$* ***modalno ekvivalentni za formule stupnja najviše*** *n, u oznaci $w \leftrightsquigarrow_n w'$, ako za svaku formulu φ stupnja $k \in \mathbb{N}$, gdje je $k \leq n$, vrijedi:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi.$$

Propozicija 2.1.6. *Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ modeli. Neka je skup ϕ svih propozicionalnih varijabli konačan. Tada za svaki svijet w iz $\mathfrak{M}$, za svaki svijet w' iz $\mathfrak{M}'$ i za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$w \leftrightarroweq_n w' \text{ ako i samo ako } w \leftrightsquigarrow_n w'.$$

Dokaz. Uzmimo $w \in W$ i $w' \in W'$ proizvoljne svjetove. Prvo indukcijom po n dokazujemo da $w \leftrightarroweq_n w'$ povlači $w \leftrightsquigarrow_n w'$. Neka je $n = 0$. Pretpostavimo da vrijedi $w \leftrightarroweq_0 w'$. Želimo dokazati: $w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $w' \Vdash \varphi$, za svaku formulu φ stupnja 0. Po uvjetu (a) definicije n-bisimulacije vrijedi da wZ_0w'. Sada uvjet (b) povlači da za svaki $p \in \phi$ vrijedi:

$w \Vdash p$ ako i samo ako $w' \Vdash p$. Po definiciji 1.2.3 imamo da $w \nVdash \bot$ i $w' \nVdash \bot$. Dokazali smo da vrijedi: $w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $w' \Vdash \varphi$ za sve formule φ stupnja 0 i složenosti 0. Sada indukcijom po složenosti formule φ stupnja 0 dobivamo tvrdnju za formulu φ proizvoljne složenosti i stupnja 0. Dokazali smo da $w \leftrightsquigarrow_0 w'$.
Pretpostavimo da postoji $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takav da: ako vrijedi $w \leftrightarroweq_n w'$ onda vrijedi i $w \leftrightsquigarrow_n w'$. Neka je $w \leftrightarroweq_{n+1} w'$. Tada prema definiciji n-bisimulacije postoje relacije $Z_{n+1} \subseteq Z_n \subseteq \ldots \subseteq Z_0$ takve da su zadovoljeni uvjeti od (a) do (d) iz definicije 1.4.5. Neka je φ proizvoljna formula stupnja $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n+1$. Budući da je operator $\Diamond$ jedini koji podiže stupanj, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\varphi \equiv \Diamond\psi$ gdje je ψ formula stupnja $k-1$. Pretpostavimo da $w \Vdash \Diamond\psi$. Tada postoji svijet $v \in W$ takav da vrijedi wRv i $v \Vdash \psi$. Sada imamo da $wZ_{n+1}w'$ i wRv pa prema uvjetu (c) postoji svijet v' takav da vrijedi $w'R'v'$ i vZ_nv'. To znači da $v \leftrightarroweq_n v'$ pa iz pretpostavke indukcije i činjenice da $v \Vdash \psi$ slijedi $v' \Vdash \psi$. Tada vrijedi da $w' \Vdash \Diamond\psi$. Drugi smjer slijedi analogno iz uvjeta (d). Dokazali smo: $w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $w' \Vdash \varphi$, odnosno $w \leftrightsquigarrow_{n+1} w'$.
Pretpostavimo sada da je $w \leftrightsquigarrow_n w'$. Želimo dokazati da su w i w' n-bisimulirani. Tražimo relacije $Z_n \subseteq \ldots \subseteq Z_0$. Za svaki $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ definiramo relaciju Z_k na način: wZ_kw' ako i samo ako $w \leftrightsquigarrow_k w'$. Provjeravamo uvjete definicije 1.4.5:

- Prema pretpostavci imamo $w \leftrightsquigarrow_n w'$ pa vrijedi wZ_nw'.

- Pretpostavimo da vrijedi vZ_0v' za neke svjetove $v \in W$ i $v' \in W'$. Tada je $v \leftrightsquigarrow_0 v'$. Posebno, $v \Vdash p$ ako i samo ako $v' \Vdash p$ za svaki $p \in \Phi$.

- Pretpostavimo da vrijedi $vZ_{i+1}v'$ i vRu za neke svjetove $v \in W$, $u \in W$ i $v' \in W'$ te $i \in \mathbb{N}$ takav da $i+1 \leq n$. Slijedi da $v \leftrightsquigarrow_{i+1} v'$. Pretpostavimo suprotno, odnosno da za svaki $u' \in W'$ ne vrijedi $v'R'u'$ ili uZ_iu'. Neka je skup $S = \{u' \in W' \mid v'R'u'\}$. Skup S ne može biti prazan jer bi inače vrijedilo $v' \Vdash \Box\bot$ što je u kontradikciji s $v \leftrightsquigarrow_{i+1} v'$ (jer je $u \in W$ takav da vrijedi vRu i $u \Vdash \neg\bot$ što povlači da $v \Vdash \Diamond\neg\bot$, odnosno $v \Vdash \neg\Box\bot$). Zaključujemo da za svaki $u' \in S$ ne vrijedi uZ_iu'. Tada ne vrijedi ni $u \leftrightsquigarrow_i u'$. Odnosno, za svaki $u' \in S$ postoji formula φ' stupnja najviše i takva da je $u \Vdash \varphi'$, a $u' \nVdash \varphi'$. Budući da je skup propozicionalnih varijabli konačan, po propoziciji 2.1.4 postoji samo konačno mnogo takvih formula φ' do na logičku ekvivalenciju. Pretpostavimo da ih ima $k \in \mathbb{N}$ i označimo ih s: $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^k$. Definirajmo formulu $\varphi \equiv \varphi^1 \wedge \varphi^2 \wedge \ldots \wedge \varphi^k$. Formula φ je logički ekvivalentna skupu formula $\{\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^k\}$ i stupanj joj je također najviše i. Sada imamo da $u \Vdash \varphi$, a za svaki $u' \in S$ vrijedi $u' \nVdash \varphi$. Iz toga slijedi da $u \Vdash \varphi$, a $v' \nVdash \Diamond\varphi$. Iz vRu slijedi da $v \Vdash \Diamond\varphi$ pa smo dobili da $v \not\leftrightsquigarrow_{i+1} v'$ što je kontradikcija. Dakle, pretpostavka nam je pogrešna. Odnosno, postoji $u' \in W'$ takav da vrijedi $v'R'u'$ i uZ_iu'.

- Uvjet (d) se dokazuje analogno.

■

Spomenuli smo važnost očuvanja ispunjivosti formula pri izgradnji konačnog modela iz proizvoljnog. Dokazat ćemo da metoda selekcije zadovoljava taj uvjet koristeći propoziciju 2.1.6.
No, prije toga imamo problem samog postupka izgradnje. Neformalno, metoda selekcije se bazira na pažljivom odabiru svjetova iz pogodnog modela. Kasnije ćemo opisati što mislimo pod „pažljivim odabirom”. Pogodni model dobivamo iz početnog modela koristeći zanimljivu vezu između takozvanih modela s korijenom i stablastih modela.
Sada ćemo definirati sve te pojmove.

Definicija 2.1.7. *Neka je W neprazan skup i R binarna relacija na W. Tada definiramo* ***tranzitivno zatvorenje od*** *R kao najmanju tranzitivnu relaciju na W koja sadrži R i označavamo ju s R^+.* ***Refleksivno tranzitivno zatvorenje od*** *R je najmanja refleksivna i tranzitivna relacija na W koja sadrži R. Označavamo ju s R^*.*

Definicija 2.1.8. ***Stablo*** *$\mathfrak{T}$ je uređeni par (T, S) gdje je T neprazan skup, a S binarna relacija na skupu T i vrijedi:*

(a) postoji jedinstven element $r \in T$ takav da za svaki $t \in T$ vrijedi rS^*t. Element r zovemo ***korijen***

(b) za svaki $t \in T$, takav da je $t \neq r$, postoji jedinstven $t' \in T$ takav da je $t'St$

(c) S je aciklička relacija, odnosno ne postoji $t \in T$ takav da vrijedi tS^+t

Model $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ zovemo ***stablastim modelom*** *ako je pripadni okvir (W, R) stablo.*

Definicija 2.1.9. *Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ modeli.*
Kažemo da je model $\mathfrak{M}'$ ***podmodel*** *modela $\mathfrak{M}$ ako je $W' \subseteq W$, R' restrikcija od R na W', a $V'(p)$ restrikcija od $V(p)$ na W' za svaki $p \in \Phi$.*
Kažemo da je model $\mathfrak{M}'$ ***generirani podmodel*** *modela $\mathfrak{M}$ ako je $\mathfrak{M}'$ podmodel od $\mathfrak{M}$ i ako za sve svjetove $w \in W$ i $v \in W$ vrijedi: ako je $w \in W'$ i vrijedi wRv onda je i $v \in W'$.*
Ako je $X \subseteq W$ skup, definiramo ***podmodel generiran s*** *X kao najmanji podmodel od $\mathfrak{M}$ čija domena sadrži X.*
Kažemo da je model $\mathfrak{M}'$ ***model s korijenom*** *ako je generiran jednočlanim skupom čiji element zovemo* ***korijen modela****.*

Primjer 2.1.10. *Neka je $\mathfrak{M} = (\mathbb{Z}, <, V)$ model gdje je $V(p) = \mathbb{Z}$ za propozicionalnu varijablu p. Tada je model $\mathfrak{M}' = (\mathbb{N}, <, V')$ s valuacijom $V'(p) = \mathbb{N}$ generirani podmodel od $\mathfrak{M}$. Naime, model $\mathfrak{M}'$ je podmodel modela $\mathfrak{M}$ jer vrijedi sljedeće:*

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

- *$<$ je standardni uređaj na $\mathbb{N}$, što je očito restrikcija uređaja na $\mathbb{Z}$*
- *$V'(p) = V(p) \cap \mathbb{N}$, a $V'(q) = \emptyset = V(q)$ za sve $q \in \Phi$, $q \not\equiv p$*

Pretpostavimo da su $w \in \mathbb{Z}$ i $v \in \mathbb{Z}$ svjetovi. Ako vrijedi $w \in \mathbb{N}$ i $w < v$, tada je i $v \in \mathbb{N}$ pa je $\mathfrak{M}'$ generirani podmodel od $\mathfrak{M}$.

Ukoliko je formula bila ispunjiva na modelu, bit će ispunjiva i na generiranom podmodelu. Štoviše, to svojstvo je invarijantno s obzirom na generirane podmodele.

Propozicija 2.1.11. *Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ modeli takvi da je $\mathfrak{M}'$ generirani podmodel od $\mathfrak{M}$. Tada za svaku formulu φ i svaki svijet $w \in W'$ vrijedi:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}', w \Vdash \varphi.$$

Dokaz. Dokazujemo tvrdnju indukcijom po složenosti formule φ. Neka je svijet $w \in W'$ proizvoljan. Neka je $\varphi \equiv \bot$. Tada vrijedi $\mathfrak{M}, w \nVdash \bot$ i $\mathfrak{M}', w \nVdash \bot$ prema definiciji 1.2.3. Ukoliko je $\varphi \equiv p$ za neku propozicionalnu varijablu $p \in \Phi$, tada prema definiciji podmodela slijedi: $\mathfrak{M}, w \Vdash p$ ako i samo ako $\mathfrak{M}', w \Vdash p$ jer je $V'(p)$ restrikcija od $V(p)$ na W', a $w \in W'$.
Pretpostavimo da postoji $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takav da za svaku formulu ψ složenosti $k \leq n$ i za svaki svijet $w \in W'$ vrijedi: $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}', w \Vdash \psi$.
Neka je φ formula složenosti $n + 1$. Bulovski slučajevi slijede direktno iz pretpostavke indukcije. Pretpostavimo da je $\varphi \equiv \Diamond\psi$, gdje je formula ψ složenosti n. Pretpostavimo da $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$. Tada postoji svijet $v \in W$ takav da wRv i $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$. Budući da je $w \in W'$ i wRv, tada je i $v \in W'$ prema definiciji generiranog podmodela. Također wRv onda povlači $wR'v$ jer je R' restrikcija od R na W', a w i v su iz W'. Pozivom na pretpostavku indukcije imamo da postoji $v \in W'$ takav da je $wR'v$ i $\mathfrak{M}', v \Vdash \psi$. Odnosno, vrijedi $\mathfrak{M}', w \Vdash \Diamond\psi$.
Pretpostavimo sada da $\mathfrak{M}', w \Vdash \Diamond\psi$. Tada postoji svijet $v \in W'$ takav da $wR'v$ i $\mathfrak{M}', v \Vdash \psi$. Iz pretpostavke indukcije i činjenica da su $W' \subseteq W$ i R' restrikcija od R slijedi da postoji svijet $v \in W$ takav da wRv i $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$, odnosno $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$. ■

Mi ćemo se usredotočiti na modele s korijenom. Posebno, bavit ćemo se njihovim restrikcijama.

Definicija 2.1.12. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model s korijenom $w \in W$. Definiramo* ***visinu svijeta u*** $\mathfrak{M}$ *rekurzivno ovako:*

(a) w je visine 0

(b) svjetovi visine $n + 1$ su neposredni R-sljedbenici od svjetova visine n ukoliko im već nije dodijeljena manja visina

Visina modela *$\mathfrak{M}$ je najveći broj $n \in \mathbb{N}$ takav da postoji svijet visine n u $\mathfrak{M}$. Ako takav n ne postoji, kažemo da je visina modela $\mathfrak{M}$ beskonačna.*
Neka je $k \in \mathbb{N}$. Definiramo ***restrikciju od*** *$\mathfrak{M}$* ***na*** *k kao podmodel modela $\mathfrak{M}$ koji sadrži samo one svjetove čija visina je najviše k. To označavamo s: $\mathfrak{M} \upharpoonright k$.*

Ako postoje svjetovi $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ takvi da je $wRv_1, v_1Rv_2, \ldots, v_{k-1}Rv$, kažemo da je svijet v dostiživ iz svijeta w u k R-koraka. Može se reći da restrikcija od $\mathfrak{M}$ na k sadrži sve svjetove iz modela $\mathfrak{M}$ dostižive iz korijena u najviše k R-koraka.

Promotrimo sada spomenutu vezu između modela s korijenom i stablastih modela.

Definicija 2.1.13. *Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ modeli. Funkcija $f\colon W \to W'$ je* ***ograničeni morfizam*** *ako vrijedi:*

(a) $w \Vdash p$ ako i samo ako $f(w) \Vdash p$, za svaki $p \in \Phi$

(b) ako je wRv onda je i $f(w)R'f(v)$

(c) ako je $f(w)R'v'$ onda postoji $v \in W$ takav da wRv i $f(v) = v'$

Ako je funkcija f surjektivna onda model $\mathfrak{M}'$ zovemo ***homomorfnom ograničenom slikom*** *modela $\mathfrak{M}$. To označavamo s $\mathfrak{M} \twoheadrightarrow \mathfrak{M}'$.*

Ispunjivost modalnih formula je invarijantna i s obzirom na ograničene morfizme, što ćemo dokazati u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 2.1.14. *Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ modeli. Neka je funkcija $f\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ ograničeni morfizam. Tada za svaku formulu φ i svaki svijet $w \in W$ vrijedi:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}', f(w) \Vdash \varphi.$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po složenosti formule φ. Ako je $\varphi \equiv \bot$, tvrdnja očito slijedi iz definicije 1.2.3. Ako je $\varphi \equiv p$, tvrdnja slijedi direktno iz definicije ograničenog morfizma.
Pretpostavimo da postoji $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takav da za svaku formulu ψ složenosti $k \leq n$ i za svaki svijet $w \in W$ vrijedi: $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}', f(w) \Vdash \psi$.
Neka je φ formula složenosti $n + 1$ i neka je w proizvoljan svijet iz W. Bulovski slučajevi slijede direktno iz pretpostavke indukcije. Pretpostavimo da je $\varphi \equiv \Diamond\psi$, gdje je ψ formula složenosti n. Pretpostavimo da je $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$. Tada postoji svijet $v \in W$ takav da je wRv i $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$. Iz pretpostavke indukcije slijedi $\mathfrak{M}', f(v) \Vdash \psi$. Iz definicije ograničenog morfizma, imamo da wRv povlači $f(w)R'f(v)$. Sada imamo da postoji svijet $f(v) \in W'$ takav da $f(w)R'f(v)$ i $\mathfrak{M}', f(v) \Vdash \psi$. Tada vrijedi $\mathfrak{M}', f(w) \Vdash \Diamond\psi$.
Pretpostavimo sada da $\mathfrak{M}', f(w) \Vdash \Diamond\psi$. Tada postoji svijet $v' \in W'$ takav da $f(w)R'v'$ i

$\mathfrak{M}', v' \Vdash \psi$. Iz definicije ograničenog morfizma slijedi da postoji svijet $v \in W$ takav da wRv i $f(v) = v'$. Sada imamo da postoji $v \in W$ takav da wRv i $\mathfrak{M}', f(v) \Vdash \psi$. Iz pretpostavke indukcije slijedi da postoji $v \in W$ takav da wRv i $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$ pa vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$. ■

Propozicija 2.1.15. *Za svaki model s korijenom $\mathfrak{M}$ postoji stablasti model $\mathfrak{M}'$ takav da je $\mathfrak{M}' \twoheadrightarrow \mathfrak{M}$.*

Dokaz. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ proizvoljan model s korijenom w. Definiramo model $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ na način:

- $W' = \{(w, u_1, u_2, \dots, u_n) \,|\, n \in \mathbb{N}, n \geq 0, wR^* u_n\}$.
- $(w, u_1, u_2, \dots, u_n) R' (w, v_1, v_2, \dots, v_m)$ ako i samo ako je $m = n + 1$, $u_i = v_i$ za svaki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ te vrijedi $u_n R v_m$. Odnosno, dva niza iz W' su u relaciji R' ako i samo ako je drugi niz produžetak prvog i sadrži svijet iz W koji je R-sljedbenik zadnjeg elementa prvog niza.
- $(w, u_1, u_2, \dots, u_n) \in V'(p)$ ako i samo ako $u_n \in V(p)$, za svaku propozicionalnu varijablu $p \in \phi$.

Dokažimo prvo da je model $\mathfrak{M}'$ stablasti.
Model $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ je stablasti ako mu je okvir (W', R') stablo. Provjeravamo uvjete iz definicije 2.1.8:

1. Za $(w) \in W'$ vrijedi da za svaki $(w, v_1, \dots, v_n)$ imamo $(w)(R')^*(w, v_1, \dots, v_n)$. Dakle, (w) je korijen od (W', R').
2. Za svaki niz $(w, u_1, \dots, u_n) \in W'$ takav da $n > 0$ (odnosno $(w, u_1, \dots, u_n) \neq (w)$) postoji jedinstven niz $(w, u_1, \dots, u_{n-1})$ takav da vrijedi $(w, u_1, \dots, u_{n-1}) R' (w, u_1, \dots, u_n)$.
3. Relacija R' je aciklička relacija po svojoj definiciji jer nijedan niz iz W' ne može biti produžetak samom sebi.

Time su zadovoljeni uvjeti definicije stabla. Dakle, $\mathfrak{M}'$ je stablasti model.
Sada definiramo funkciju $f\colon W' \to W$ sa $f((w, u_1, \dots, u_n)) = u_n$. Tvrdimo da je funkcija f surjektivni ograničeni morfizam provjeravajući uvjete definicije 2.1.13:

1. Po definiciji valuacije V', vrijedi: $(w, u_1, \dots, u_n) \in V'(p)$ ako i samo ako $u_n \in V(p)$. Tada imamo: $(w, u_1, \dots, u_n) \in V'(p)$ ako i samo ako $f((w, u_1, \dots, u_n)) \in V(p)$.
2. Ako vrijedi $(w, u_1, \dots, u_n) R' (w, v_1, \dots, v_m)$, tada po definiciji od R' vrijedi $u_n R v_m$, odnosno $f((w, u_1, \dots, u_n)) R f((w, v_1, \dots, v_m))$.

3. Ako je $f((w, u_1, \dots, u_n))Rv_m$, odnosno u_nRv_m, tada za niz $(w, u_1, \dots, u_n, v_m) \in W'$ vrijedi $(w, u_1, \dots, u_n)R'(w, u_1, \dots, u_n, v_m)$ i $f((w, u_1, \dots, u_n, v_m)) = v_m$.

4. Neka je $u \in W$ proizvoljan svijet iz kodomene funkcije f. Budući da je $\mathfrak{M}$ model s korijenom, svijet u je dostižan iz w u k R-koraka za neki $k \in \mathbb{N}$. Odnosno, vrijedi $wRu_1, u_1Ru_2, \dots, u_{k-1}Ru$ pa je niz $(w, u_1, \dots, u_{k-1}, u) \in W'$. Dakle, f je surjekcija.

Slijedi da je model $\mathfrak{M}$ homomorfna ograničena slika modela $\mathfrak{M}'$. ■

Iz prethodne propozicije slijedi jednostavan korolar.

Korolar 2.1.16. *Svaka ispunjiva formula je ispunjiva na nekom stablastom modelu.*

Dokaz. Neka je formula φ istinita na svijetu w modela $\mathfrak{M}_1$. Neka je $\mathfrak{M}_2$ model generiran svijetom w. Iz propozicije 2.1.11 slijedi $\mathfrak{M}_2, w \Vdash \varphi$. Neka je $\mathfrak{M}'$ stablasti model takav da je $\mathfrak{M}' \twoheadrightarrow \mathfrak{M}_2$ konstruiran kako je opisano u propoziciji 2.1.15. Neka je funkcija f ograničeni morfizam $f\colon \mathfrak{M}' \to \mathfrak{M}_2$. Tada iz propozicije 2.1.14 slijedi da je $\mathfrak{M}', u \Vdash \varphi$ za svijet u modela $\mathfrak{M}'$ takav da je $f(u) = w$. Dakle, formula φ je ispunjiva i na stablastom modelu. ■

U [1] se nalazi opširnije razmatranje invarijantnih rezultata u modalnoj logici.
Sada napokon možemo dokazati kako za danu formulu φ stupnja k, koja je ispunjiva na nekom modelu s korijenom $\mathfrak{M}$, model $\mathfrak{M} \upharpoonright k$ sadrži sve svjetove potrebne da pokažemo tu ispunjivost.

Lema 2.1.17. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model s korijenom i $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Tada za svaki svijet $w \in \mathfrak{M} \upharpoonright k$ visine $h \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mathfrak{M} \upharpoonright k, w \leftrightarrows_l \mathfrak{M}, w$ gdje je $l = k - h$.*

Dokaz. Neka je w proizvoljan svijet iz $\mathfrak{M} \upharpoonright k = (W', R', V')$ visine h. Tada iz definicije podmodela slijedi da je w iz $\mathfrak{M}$, a iz definicije visine modela je $h \leq k$.
Želimo konstruirati l-bisimulaciju između svijeta w u modelu $\mathfrak{M}$ i modelu $\mathfrak{M} \upharpoonright k$. U tu svrhu, definiramo niz relacija $Z_n = \{(v, v) \mid v \in \mathfrak{M} \upharpoonright (k - n)\}$ za $n \in \{0, 1, \dots l\}$. Očito je $Z_l \subseteq \dots \subseteq Z_0$. Provjeravamo uvjete iz definicije 1.4.5:

- Vrijedi da je $h = k - l$ i $w \in \mathfrak{M} \upharpoonright h$ pa je $w \in \mathfrak{M} \upharpoonright (k - l)$ što povlači wZ_lw.

- Neka su $v \in \mathfrak{M}$, $v' \in \mathfrak{M} \upharpoonright k$ svjetovi. Ako je vZ_0v', onda je $v = v'$ i $v \in \mathfrak{M} \upharpoonright k$. Jer je V' restrikcija od V na $\mathfrak{M} \upharpoonright k$ vrijedi: $v \in V(p)$ ako i samo ako $v \in V'(p)$ za svaki $p \in \phi$.

- Neka su $v, u \in \mathfrak{M}$ i $v' \in \mathfrak{M} \upharpoonright k$ svjetovi, a $i + 1 \leq l$. Neka je $vZ_{i+1}v'$ i vRu. Iz $vZ_{i+1}v'$ slijedi da je $v = v'$ i $v \in \mathfrak{M} \upharpoonright (k - i - 1)$. Vrijedi $u \in \mathfrak{M} \upharpoonright (k - i)$ jer imamo vRu. No, tada je i $u \in \mathfrak{M} \upharpoonright k$ što povlači da vrijedi $v'R'u$ jer je R' restrikcija relacije R na $\mathfrak{M} \upharpoonright k$. Dakle, $u \in \mathfrak{M} \upharpoonright k$ je svijet takav da vrijedi $v'R'u$ i uZ_iu.

- Neka su $v \in \mathfrak{M}$ i $v', u' \in \mathfrak{M} \upharpoonright k$ svjetovi, a $i+1 \leq l$. Neka je $vZ_{i+1}v'$ i $v'R'u'$. Iz $vZ_{i+1}v'$ slijedi $v = v'$ i $v \in \mathfrak{M} \upharpoonright (k-i-1)$. Jer je R' restrikcija od R, slijedi da je $v'Ru'$. Sada imamo da je $u' \in \mathfrak{M} \upharpoonright (k-i)$. Dakle, $u' \in \mathfrak{M}$ je svijet takav da vrijedi vRu' i $u'Z_iu'$.

Dokazali smo da postoji l-bisimulacija između svijeta w u modelima $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M} \upharpoonright k$. Time je dokazana tvrdnja leme. ∎

Iz prethodne leme i propozicije 2.1.6 slijedi zaključak da je svaka ispunjiva modalna formula ispunjiva na nekom modelu konačne visine. No, to ne znači da je takav model nužno konačan jer se može beskonačno granati. Konačan model ćemo dobiti tako da odbacimo nepotrebne grane na način prikazan u sljedećem teoremu.

Teorem 2.1.18. *Neka je φ formula osnovnog modalnog jezika. Ako je formula φ ispunjiva, tada je ispunjiva na nekom konačnom modelu.*

Dokaz. Restringiramo skup propozicionalnih varijabli Φ na varijable koje se pojavljuju u formuli φ. Tada je skup Φ konačan. Pretpostavimo da je formula φ ispunjiva. Neka je $\mathfrak{M}_1$ model i $w_1 \in \mathfrak{M}_1$ svijet takav da vrijedi $\mathfrak{M}_1, w_1 \Vdash \varphi$. Prema korolaru 2.1.16, tada postoji stablasti model $\mathfrak{M}_2$ s korijenom $w_2 \in \mathfrak{M}_2$ takav da vrijedi $\mathfrak{M}_2, w_2 \Vdash \varphi$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ stupanj formule φ. Definiramo model $\mathfrak{M}_3 := \mathfrak{M}_2 \upharpoonright k$. Neka je $\mathfrak{M}_3 = (W, R, V)$. Iz leme 2.1.17 slijedi $\mathfrak{M}_2, w_2 \leftrightarroows_k \mathfrak{M}_3, w_2$ jer je korijen w_2 visine 0 pa je $l = k$. Sada imamo $\mathfrak{M}_3, w_2 \Vdash \varphi$ prema propoziciji 2.1.6.
Rekurzivno ćemo definirati skupove svjetova $S_0, \ldots, S_k$ čija će unija $S_0 \cup \ldots \cup S_k$ biti domena konačnog modela $\mathfrak{M}_4$ koji tražimo. Definiramo: $S_0 := \{w_2\}$. Nadalje, neka je $n < k$. Konstruiramo skup S_{n+1} koristeći već definirane skupove $S_0, \ldots, S_n$ na način:
Neka je $v \in S_n$. Iz propozicije 2.1.4 slijedi da postoji konačno mnogo neekvivalentnih modalnih formula čiji je stupanj najviše k. Označimo taj skup formula s $A = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$. Među njima odaberimo one koje su ispunjive na svijetu v modela $\mathfrak{M}_3$ i oblika su $\psi_i = \Diamond\rho_i$ za neke modalne formule ρ_i te indekse $i \in I$ gdje je $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$. Dakle, imamo $\mathfrak{M}_3, v \Vdash \psi_i$ za svaki $i \in I$. Za svaku takvu formulu ψ_i odaberimo svijet $u \in \mathfrak{M}_3$ takav da je vRu i $\mathfrak{M}_3, u \Vdash \rho_i$. Drugim riječima, biramo proizvoljne svjetove dostižive iz v jednim R-korakom takve da je svaka podformula ρ_i ispunjiva na nekom takvom svijetu. Svjetove u dodajemo u skup S_{n+1} te postupak ponovimo za svaki svijet u skupu S_n. Tako smo dobili skup S_{n+1} čiji svjetovi imaju visinu $n+1$.
Sada definiramo model $\mathfrak{M}_4 = (W', R', V')$. Domena modela $\mathfrak{M}_4$ je $W' = S_0 \cup \ldots \cup S_k$. Skup formula A je konačan, a svaki skup S_{i+1} konstruiramo iz skupa S_i tako da za svaku formulu iz A i svijet iz S_i dodamo najviše jedan svijet u S_{i+1}. Budući da je početni skup S_0 jednočlan, svi S_i za $i \in \{0, \ldots k\}$ su konačni. Tada je i W' konačan, odnosno model $\mathfrak{M}_4$ je konačan. Relaciju R' i valuaciju V' definiramo kao restrikcije od R i V modela $\mathfrak{M}_3$ na domeni W'. Preostalo je pokazati da vrijedi $\mathfrak{M}_4, w_2 \Vdash \varphi$.

Definiramo skupove $N_i = \bigcup_{j=0}^{i} S_j$ za svaki $i \in \{0, \dots k\}$ i modele $\mathfrak{N}_i = (N_i, R_i, V_i)$ gdje su R_i i V_i restrikcije od R' i V' (može se reći i od R i V) nad skupovima N_i. Primijetimo prvo da je $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{M}_4$ jer je $N_k = W'$. Također, za sve $i, j \in \{0, \dots, k\}$ takve da je $i \leq j$ je model $\mathfrak{N}_i$ podmodel od $\mathfrak{N}_j$ jer je $N_i \subseteq N_j$. Posebno je svaki model $\mathfrak{N}_i$ podmodel od $\mathfrak{M}_4$.
Dokažimo prvo pomoćnu tvrdnju: Za svaku formulu ψ takvu da je $deg(\psi) \leq k$ i za svaki svijet $u \in N_{k-deg(\psi)}$ vrijedi: $\mathfrak{M}_4, u \Vdash \psi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}_3, u \Vdash \psi$.
Dokazujemo indukcijom po složenosti formule ψ. Bazni slučajevi slijede direktno iz $u \in N_{k-deg(\psi)} = N_{k-0} = N_k = W' \subseteq W$.
Pretpostavimo da postoji $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takav da za svaku formulu ρ složenosti $l \leq n$ i stupnja $deg(\rho) \leq k$ i za svaki svijet $u \in N_{k-deg(\rho)}$ vrijedi: $\mathfrak{M}_4, u \Vdash \rho$ ako i samo ako $\mathfrak{M}_3, u \Vdash \rho$.
Neka je ψ formula složenosti $n + 1$ i stupnja $deg(\psi) \leq k$. Neka je $u \in N_{k-deg(\psi)}$. Imamo tri slučaja:

1. $\psi \equiv \neg\rho$: Tada vrijedi $\mathfrak{M}_4, u \Vdash \psi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}_4, u \nVdash \rho$ ako i samo ako (po pretpostavci) $\mathfrak{M}_3, u \nVdash \rho$ ako i samo ako $\mathfrak{M}_3, u \Vdash \psi$ gdje smo mogli iskoristiti pretpostavku jer je formula ρ složenosti n i stupnja $deg(\rho) = deg(\psi) \leq k$ te je $u \in N_{k-deg(\psi)} = N_{k-deg(\rho)}$.

2. $\psi \equiv \rho_1 \vee \rho_2$: Primijetimo: $u \in N_{k-deg(\psi)} = N_{k-max\{deg(\rho_1), deg(\rho_2)\}} = N_{min\{k-deg(\rho_1), k-deg(\rho_2)\}}$. Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}_4, u \Vdash \psi$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $\mathfrak{M}_4, u \Vdash \rho_1$. Iz $min\{k - deg(\rho_1), k - deg(\rho_2)\} \leq k - deg(\rho_1)$ slijedi $u \in N_{k-deg(\rho_1)}$ pa iz pretpostavke indukcije imamo $\mathfrak{M}_3, u \Vdash \rho_1$. Tada $\mathfrak{M}_3, u \Vdash \rho_1 \vee \rho_2$, odnosno $\mathfrak{M}_3, u \Vdash \psi$. S druge strane, neka je $\mathfrak{M}_3, u \Vdash \psi$. Analognim zaključivanjem dobivamo $\mathfrak{M}_4, u \Vdash \psi$.

3. $\psi \equiv \Diamond\rho$: Prvo primijetimo da postoji formula $\tau \in A$ takva da $\psi \equiv \tau$ jer je $deg(\psi) \leq k$, a skup A konačan. Ukoliko je formula τ negacija ili disjunkcija nekih formula, pozovemo se na prethodne slučajeve. Pretpostavimo nadalje da je $\tau \equiv \Diamond\rho'$ za neku formulu ρ' te ćemo umjesto ρ' pisati samo ρ.
Drugo, vrijedi: $u \in N_{k-deg(\psi)} = N_{k-(deg(\rho)+1)}$ što povlači $u \in N_{k-deg(\rho)}$. Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}_4, u \Vdash \Diamond\rho$. Tada postoji svijet $v \in W'$ takav da $uR'v$ i $\mathfrak{M}_4, v \Vdash \rho$. Jer je $W' \subseteq W$ i $R' \subseteq R$ zapravo imamo svijet $v \in W$ takav da uRv i $\mathfrak{M}_4, v \Vdash \rho$. Iz pretpostavke indukcije slijedi da je uRv i $\mathfrak{M}_3, v \Vdash \rho$ pa zaključujemo $\mathfrak{M}_3, u \Vdash \Diamond\rho$.
Obratno, neka je $\mathfrak{M}_3, u \Vdash \Diamond\rho$. Vrijedi $u \in N_{k-deg(\rho)-1} = \bigcup_{j=0}^{k-deg(\rho)-1} S_j$, odnosno postoji $j \in \{0, \dots, k-deg(\rho)-1\}$ takav da je $u \in S_j$. Prema definiciji skupa S_{j+1}, postoji svijet $v \in S_{j+1}$ takav da vrijedi uRv i $\mathfrak{M}_3, v \Vdash \rho$. Budući da je $v \in S_{j+1}$ i $j + 1 \in \{1, \dots, k - deg(\rho)\}$, slijedi $v \in N_{k-deg(\rho)}$ pa se možemo pozvati na pretpostavku indukcije. Tada $\mathfrak{M}_4, v \Vdash \rho$ što povlači (uz uRv i $u, v \in N_{k-deg(\rho)}$ odnosno $u, v \in \mathfrak{M}_4$) da je $\mathfrak{M}_4, u \Vdash \Diamond\rho$.

Sada za formulu φ koja je stupnja k i svijet $w_2 \in N_0$ iz prethodne tvrdnje slijedi: $\mathfrak{M}_4, w_2 \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}_3, w_2 \Vdash \varphi$. Već smo dokazali da $\mathfrak{M}_3, w_2 \Vdash \varphi$ pa slijedi $\mathfrak{M}_4, w_2 \Vdash \varphi$ što dokazuje teorem. ■

Teorem 2.1.18 nam daje traženi rezultat: osnovni modalni jezik ima svojstvo konačnih modela.
Metoda selekcije uvijek generira konačni stablasti model, ali ima poveću manu. Početni model možda zadovoljava neka relacijska svojstva poput simetričnosti koja se često ne uspiju očuvati opisanim postupkom.

Metoda filtracije

Metoda filtracije je još jedna klasična metoda za izgradnju konačnih modela iz velikih, možda i beskonačnih početnih modela. Za razliku od metode selekcije, ona ne briše nepotrebne svjetove već „identificira" svjetove tako da ih svrsta u klase ekvivalencije prema tome koje su formule istinite na njima. Postupak filtracije se tada svodi na konstruiranje modela nad skupom tih klasa. Ipak ne možemo uzeti proizvoljan skup formula, nego on mora imati svojstvo koje navodimo u sljedećoj definiciji.

Definicija 2.1.19. *Za skup formula Σ kažemo da je* ***zatvoren na podformule*** *ako za sve formule φ i φ' vrijedi:*

(a) ako je $\varphi \vee \varphi' \in \Sigma$ onda su $\varphi \in \Sigma$ i $\varphi' \in \Sigma$

(b) ako je $\neg\varphi \in \Sigma$ onda je i $\varphi \in \Sigma$

(c) ako je $\Diamond\varphi \in \Sigma$ onda je i $\varphi \in \Sigma$

Definicija 2.1.20. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model i Σ skup formula zatvoren na podformule. Neka je $\leftrightsquigarrow_\Sigma$ relacija na skupu W definirana na način:*

$$w \leftrightsquigarrow_\Sigma v \text{ ako i samo ako za sve } \varphi \in \Sigma \text{ vrijedi da je } \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \text{ ekvivalentno s } \mathfrak{M}, v \Vdash \varphi.$$

Lako je provjeriti da je $\leftrightsquigarrow_\Sigma$ relacija ekvivalencije. Klasu ekvivalencije za svijet w nad relacijom $\leftrightsquigarrow_\Sigma$ označavamo s $|w|_\Sigma$ ili jednostavno s $|w|$.
Neka je skup $W_\Sigma = \{|w|_\Sigma \mid w \in W\}$. Neka je $\mathfrak{M}^f_\Sigma$ bilo koji model (W^f, R^f, V^f) za koji vrijedi:

(a) $W^f = W_\Sigma$

(b) ako je wRv onda je i $|w|R^f|v|$

(c) ako je $|w|R^f|v|$ onda za svaki $\Diamond\varphi \in \Sigma$ vrijedi da $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$ povlači $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$

(d) $V^f(p) = \{|w| \mid \mathfrak{M}, w \Vdash p\}$ *za svaku propozicionalnu varijablu* $p \in \Sigma$

Tada model $\mathfrak{M}^f_\Sigma$ *zovemo* ***filtracijom modela*** $\mathfrak{M}$ ***u odnosu na skup*** Σ. *Pišemo* $\mathfrak{M}^f$ *ukoliko je skup formula* Σ *jasan iz konteksta.*

Primjer 2.1.21. *Neka je* $\mathfrak{M} = (\mathbb{N}, R, V)$ *model gdje su* $V(p) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *i* $V(q) = 2$, *a* $R = \{(0,1),(0,2),(1,3),(n,n+1) \mid n \geq 2\}$. *Neka je* $\Sigma = \{\Diamond p, p\}$ *skup formula. Skup* Σ *je očito zatvoren na podformule.*
Pokazat ćemo da je model $\mathfrak{M}^f = (W^f, R^f, V^f)$ *filtracija modela* $\mathfrak{M}$ *u odnosu na skup* Σ, *gdje su* $W^f = \{|0|, |1|\}$, $R^f = \{(|0|,|1|),(|1|,|1|)\}$ *te* $V^f(p) = \{|1|\}$, $V^f(q) = \emptyset$.
Provjeravamo uvjete iz definicije 2.1.20:

- *U klasi* $|0|$ *se nalazi samo* 0 *budući da je propozicionalna varijabla p istinita svugdje osim u* 0. *Također, za svaki* $w \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *postoji svijet* $v \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *takav da je* $v \Vdash p$ *i* wRv *(to je sljedbenik tog svijeta, ili* 3 *ukoliko je* $w = 1$*). Tada je i formula* $\Diamond p$ *istinita na svim svjetovima* $w \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. *Dakle, u klasi* $|1|$ *se nalaze svi preostali elementi iz domene* $\mathbb{N}$ *što povlači da je* $W_\Sigma = \{|0|, |1|\}$. *Sada slijedi* $W^f = W_\Sigma$.

- *Ako vrijedi wRv, onda imamo* 4 *mogućnosti:*

  1. $w = 0$ *i* $v = 1$*: Tada je* $|w| = |0|$ *i* $|v| = |1|$, *a po definiciji od* R^f *je* $|0|R^f|1|$.
  2. $w = 0$ *i* $v = 2$*: Tada je* $|w| = |0|$ *i* $|v| = |1|$ *pa je opet* $|0|R^f|1|$.
  3. $w = 1$ *i* $v = 3$*: Tada je* $|w| = |1|$ *i* $|v| = |1|$, *a po definiciji od* R^f *je* $|1|R^f|1|$.
  4. $w = n$ *i* $v = n + 1$ *za* $n \geq 2$*: Tada je* $|w| = |1|$ *i* $|v| = |1|$ *pa je opet* $|1|R^f|1|$.

- *Pretpostavimo da vrijedi* $|w|R^f|v|$. *Tada je po definiciji od* R^f *nužno* $|v| = |1|$ *što povlači da je* $v \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. *Uzmimo* $\Diamond p \in \Sigma$. *U prvoj točki smo zaključili da su formule p i* $\Diamond p$ *istinite na svakom svijetu iz skupa* $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ *pa time i na v. Ukoliko je* $w \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *tada je formula* $\Diamond p$ *istinita na njemu. U suprotnom je* $w = 0$, *a tada je* $u = 1$ *ili* $u = 2$ *svijet takav da je wRu i* $u \Vdash p$ *pa opet slijedi* $w \Vdash \Diamond p$.

- *Varijabla p je jedina propozicionalna varijabla u skupu* Σ *i ona je istinita na svakom svijetu iz skupa* $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ *što se preslikava u klasu* $|1|$.

Dakle, model $\mathfrak{M}^f = (W^f, R^f, V^f)$ *je filtracija modela* $\mathfrak{M}$ *u odnosu na skup* Σ.

Metoda filtracije nam daje eksponencijalnu gornju ogradu na veličinu novonastalog modela.

Propozicija 2.1.22. *Neka je* Σ *konačan skup formula zatvoren na podformule te* $n \in \mathbb{N}$ *njegov kardinalitet. Neka je* $\mathfrak{M}$ *proizvoljan model i* $\mathfrak{M}^f$ *filtracija od* $\mathfrak{M}$ *u odnosu na skup* Σ. *Tada model* $\mathfrak{M}^f$ *sadrži najviše* 2^n *svjetova.*

Dokaz. Definiramo funkciju $f\colon W_\Sigma \to \mathcal{P}(\Sigma)$ sa $f(|w|) = \{\varphi \in \Sigma \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi\}$. Funkcija f je dobro definirana jer po definiciji relacije $\leftrightsquigarrow_\Sigma$ imamo da za svaku klasu ekvivalencije $|w|$, postoji jedinstven skup formula iz Σ koje su istinite na w. Pretpostavimo da su $|w|$ i $|v|$ različite klase ekvivalencije. Iz spomenute definicije slijedi da postoji formula $\varphi \in \Sigma$ takva da vrijedi (bez smanjenja općenitosti) $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$, a $\mathfrak{M}, v \nVdash \varphi$. Tada je $f(|w|) \neq f(|v|)$ pa je funkcija f injekcija. Slijedi da je $card(W_\Sigma) \leq card(\mathcal{P}(\Sigma))$ što je jednako 2^n. ∎

Još važnije svojstvo je da filtracija čuva ispunjivost formula. Taj dokaz nam daje motivaciju za uvjete (b) i (c) iz definicije 2.1.20.

Teorem 2.1.23. *Neka je Σ skup formula zatvoren na podformule, $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model, a $\mathfrak{M}^f = (W_\Sigma, R^f, V^f)$ filtracija od $\mathfrak{M}$ u odnosu na skup Σ. Tada za svaku formulu $\varphi \in \Sigma$ i svaki svijet $w \in W$ vrijedi: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}^f, |w| \Vdash \varphi$.*

Dokaz. Neka je $w \in W$ proizvoljan. Dokazujemo tvrdnju indukcijom po složenosti formule φ. Za $\varphi \equiv \bot$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \nVdash \bot$ i $\mathfrak{M}^f, |w| \nVdash \bot$. Za $\varphi \equiv p$ tvrdnja jednostavno slijedi iz definicije od V^f.
Pretpostavimo da postoji $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takav da za svaku formulu $\psi \in \Sigma$ složenosti $k \leq n$ i za svaki svijet $w \in W$ vrijedi: $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}^f, |w| \Vdash \psi$.
Neka je $\varphi \in \Sigma$ formula složenosti $n + 1$. Bulovski slučajevi slijede direktno iz pretpostavke indukcije i zatvorenosti skupa Σ na podformule. Pretpostavimo da je $\varphi \equiv \Diamond\psi$. Iz zatvorenosti skupa Σ na podformule slijedi da je i $\psi \in \Sigma$.
Neka vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$. Tada postoji svijet $v \in W$ takav da vrijedi wRv i $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$. Sada iz $\psi \in \Sigma$ i pretpostavke indukcije imamo $\mathfrak{M}^f, |v| \Vdash \psi$. Iz uvjeta (b) definicije filtracije slijedi da je $|w|R^f|v|$ pa zaključujemo da je $\mathfrak{M}^f, |w| \Vdash \varphi$.
Neka je sada $\mathfrak{M}^f, |w| \Vdash \varphi$. Tada postoji svijet $|v| \in W_\Sigma$ takav da vrijedi $|w|R^f|v|$ i $\mathfrak{M}^f, |v| \Vdash \psi$. Budući da je $\psi \in \Sigma$, po pretpostavci indukcije imamo da je $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$. Sada iz uvjeta (c) definicije filtracije slijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$. ∎

U primjeru 2.1.21 smo pokazali da filtracija postoji za konkretni model. Želimo dokazati da isto vrijedi za proizvoljni model. Zapravo se pitamo postoji li uvijek relacija R^f koja bi zadovoljila uvjete (b) i (c) iz definicije filtracije. Ispostavi se da uvijek postoje barem dva načina za definiranje takve relacije.

Definicija 2.1.24. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model te Σ skup formula zatvoren na podformule. Definiramo relacije R^s i R^l nad skupom W_Σ na sljedeći način:*

(a) $|w|R^s|v|$ ako i samo ako postoje svjetovi $w' \in |w|$, $v' \in |v|$ takvi da vrijedi $w'Rv'$

(b) $|w|R^l|v|$ ako i samo ako za svaku formulu $\Diamond\varphi \in \Sigma$ vrijedi da $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$ povlači $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$

Relacije R^s i R^l nisu nužno različite i one definiraju najmanju i najveću filtraciju modela.

Lema 2.1.25. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ proizvoljni model te Σ skup formula zatvoren na podformule. Neka je W_Σ skup klasa ekvivalencije relacije $\leftrightsquigarrow_\Sigma$ te V^f valuacija nad skupom W_Σ kako je definirano u definiciji 2.1.20. Tada su modeli (W_Σ, R^s, V^f) i (W_Σ, R^l, V^f) filtracije modela $\mathfrak{M}$ u odnosu na skup Σ. Nadalje, ako je (W_Σ, R^f, V^f) bilo koja filtracija modela $\mathfrak{M}$ u odnosu na skup Σ tada vrijedi $R^s \subseteq R^f \subseteq R^l$.*

Dokaz. Prvo pokazujemo da je (W_Σ, R^s, V^f) filtracija od $\mathfrak{M}$ u odnosu na Σ. Budući da su domena i valuacija zadane, preostalo je samo provjeriti zadovoljava li relacija R^s uvjete (b) i (c) iz definicije 2.1.20:

- Očito svijet $w \in W$ pripada klasi $|w|$ i svijet $v \in W$ klasi $|v|$. Ukoliko vrijedi wRv, tada je i $|w|R^s|v|$ izravno iz definicije relacije R^s.

- Ako vrijedi $|w|R^s|v|$, tada po definiciji relacije R^s postoje svjetovi $w' \in |w|$ i $v' \in |v|$ takvi da je $w'Rv'$. Neka je formula $\Diamond\varphi \in \Sigma$ proizvoljna. Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$. Iz $v' \in |v|$ slijedi $\mathfrak{M}, v' \Vdash \varphi$. Tada imamo i $\mathfrak{M}, w' \Vdash \Diamond\varphi$ jer vrijedi $w'Rv'$. Sada zbog $w' \in |w|$ zaključujemo da je i $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$.

Zatim, treba pokazati da je (W_Σ, R^l, V^f) filtracija od $\mathfrak{M}$ u odnosu na Σ. Provjeravamo kao gore:

- Neka vrijedi wRv. Neka je $\Diamond\varphi \in \Sigma$ proizvoljna formula. Pretpostavimo da $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$. Tada slijedi da $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$ pa iz definicije relacije (budući da je φ proizvoljna) R^l imamo da $|w|R^l|v|$.

- Uvjet (c) je upravo definicija relacije R^l.

Uzmimo sada proizvoljnu filtraciju (W_Σ, R^f, V^f) modela $\mathfrak{M}$ u odnosu na Σ. Pretpostavimo da vrijedi $|w|R^s|v|$ za neke klase $|w|, |v| \in W_\Sigma$. Tada po definiciji relacije R^s postoje svjetovi $w' \in |w|$ i $v' \in |v|$ takvi da vrijedi $w'Rv'$. Budući da je R^f filtracija, prema uvjetu (b) iz definicije filtracije slijedi $|w|R^f|v|$. Zaključujemo da je $R^s \subseteq R^f$.
Pretpostavimo sada da vrijedi $|w|R^f|v|$ za neke klase $|w|, |v| \in W_\Sigma$. Tada iz uvjeta (c) direktno slijedi da je $|w|R^l|v|$, odnosno imamo $R^f \subseteq R^l$. ∎

Teorem 2.1.26. *Neka je φ proizvoljna formula s n podformula. Ako je formula φ ispunjiva, tada je ispunjiva na konačnom modelu koji sadrži najviše 2^n svjetova.*

Dokaz. Neka je $\mathfrak{M}$ model na kojem je φ ispunjiva i Σ skup koji sadrži sve podformule formule φ. Tada je on zatvoren na podformule te mu je kardinalitet jednak n. Neka je $\mathfrak{M}^f$ proizvoljna filtracija modela $\mathfrak{M}$ u odnosu na skup Σ. Iz teorema 2.1.23 slijedi da je formula φ ispunjiva i na modelu $\mathfrak{M}^f$. Također, iz propozicije 2.1.22 slijedi da model $\mathfrak{M}^f$ sadrži najviše 2^n svjetova. ∎

Naveli smo gubitak važnih relacijskih svojstava kao najveću manu metode selekcije. Sve filtracije čuvaju neka svojstva, poput refleksivnosti. Ipak, za složenija svojstva nam trebaju i posebne filtracije.

Lema 2.1.27. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model te Σ skup formula zatvoren na podformule. Neka je W_Σ skup klasa ekvivalencije relacije $\leftrightsquigarrow_\Sigma$ te V^f valuacija nad skupom W_Σ kako je definirano u definiciji 2.1.20. Neka je R^t relacija nad skupom W_Σ definirana na način:*

$$|w|R^t|v| \text{ ako i samo ako za sve } \varphi \text{ vrijedi da } (\Diamond\varphi \in \Sigma \text{ i } \mathfrak{M}, v \Vdash \varphi \vee \Diamond\varphi) \text{ povlači } \mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi.$$

Ako je relacija R tranzitivna, tada je model (W_Σ, R^t, V^f) filtracija modela $\mathfrak{M}$ u odnosu na skup Σ i relacija R^t je također tranzitivna.

Dokaz. Pretpostavimo da je relacija R tranzitivna. Prvo dokazujemo da je (W_Σ, R^t, V^f) filtracija modela $\mathfrak{M}$ u odnosu na Σ. Potrebno je samo provjeriti uvjete (b) i (c) iz definicije filtracije:

- Pretpostavimo da vrijedi wRv. Neka je φ formula takva da je $\Diamond\varphi \in \Sigma$ i $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi \vee \Diamond\varphi$. Tada je $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$ ili $\mathfrak{M}, v \Vdash \Diamond\varphi$. U prvom slučaju iz wRv slijedi da $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$ pa po definiciji relacije R^t imamo $|w|R^t|v|$. U drugom slučaju postoji svijet $u \in W$ takav da vRu i $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$. Iz wRv, vRu i tranzitivnosti od R slijedi da je wRu. Tada imamo $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$, odnosno $|w|R^t|v|$.

- Pretpostavimo da vrijedi $|w|R^t|v|$. Neka je $\Diamond\varphi \in \Sigma$ formula takva da $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$. Slijedi da $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi \vee \Diamond\varphi$ pa po definiciji relacije R^t imamo $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$ što je trebalo pokazati.

Dakle, model (W_Σ, R^t, V^f) je filtracija od $\mathfrak{M}$ u odnosu na Σ. Još treba pokazati da je R^t tranzitivna relacija.
Pretpostavimo da vrijedi $|w|R^t|v|$ i $|v|R^t|u|$. Neka je φ formula takva da je $\Diamond\varphi \in \Sigma$ i $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi \vee \Diamond\varphi$. Tada iz $|v|R^t|u|$ slijedi $\mathfrak{M}, v \Vdash \Diamond\varphi$ što povlači $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi \vee \Diamond\varphi$. Sada iz $|w|R^t|v|$ slijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$, odnosno vrijedi $|w|R^t|u|$. Dakle, relacija R^t je tranzitivna. ∎

Filtracije beskonačnog modela uspijevaju prikazati beskonačno mnogo informacija (o istinitosti formula) na konačan način. U primjeru 2.1.21 smo pokazali da se beskonačni lanac filtracijom može sažeti u jednu jedinu refleksivnu točku.

2.2 Konačni okviri

Dokazali smo da osnovni modalni jezik ima svojstvo konačnih modela. Sada se pitamo možemo li promatrati to svojstvo nad manjim skupom formula. U ovom ćemo se odjeljku prisjetiti normalnih modalnih logika i vidjeti kako su povezane s konačnim okvirima. Definirat ćemo što znači svojstvo konačnih okvira te dokazati da je jednako „jako" kao i svojstvo konačnih modela.

Normalna modalna logika je skup formula koji sadrži sve tautologije, određene aksiome i zatvoren je na pravila izvoda kako smo definirali u cjelini 1.3. Već smo spomenuli kako ona sadrži sve valjane formule koje zadovoljavaju neka svojstva dana aksiomima. Budući da su normalne modalne logike u suštini samo skupovi formula, lako je za njih proširiti definiciju svojstva konačnih modela.

Definicija 2.2.1. *Neka je Λ normalna modalna logika, a M proizvoljna klasa konačnih modela. Kažemo da Λ ima svojstvo konačnih modela u odnosu na klasu modela M ako vrijedi $M \Vdash \Lambda$ i svaka formula $\varphi \notin \Lambda$ je oboriva na nekom modelu iz klase M.*
Kažemo da Λ ima ***svojstvo konačnih modela*** *ako ima svojstvo konačnih modela u odnosu na neku klasu konačnih modela.*

Dakle, normalna logika sa svojstvom konačnih modela je skup onih formula koje su globalno istinite na nekoj klasi konačnih modela. Zapravo pokušavamo normalnu logiku semantički okarakterizirati nekom konačnom strukturom. No, globalna istinitost nam ovdje nije dovoljna već se traži valjanost. Budući da smo pojam valjanosti definirali koristeći okvire, a ne modele, ima više smisla uvesti sljedeću definiciju.

Definicija 2.2.2. *Neka je Λ normalna modalna logika, a F proizvoljna klasa konačnih okvira. Kažemo da Λ ima svojstvo konačnih okvira u odnosu na klasu okvira F ako vrijedi $F \Vdash \Lambda$ i svaka formula $\varphi \notin \Lambda$ je oboriva na nekom okviru iz klase F.*
Kažemo da Λ ima ***svojstvo konačnih okvira*** *ako ima svojstvo konačnih okvira u odnosu na neku klasu konačnih okvira.*

Na prvi pogled se čini da smo definirali puno jače svojstvo od svojstva konačnih modela, ali osnovni teorem ovog rada će nam uskoro pokazati da se radi o svojstvima koja su svediva jedno na drugo. Prije dokaza nam je potrebno još par pojmova.

Definicija 2.2.3. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model i $U \subseteq W$ skup svjetova. Kažemo da je skup svjetova U* ***definabilan*** *u modelu $\mathfrak{M}$ ako postoji formula φ_U takva da za svaki svijet $w \in W$ vrijedi: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi_U$ ako i samo ako $w \in U$.*
Proizvoljan model $\mathfrak{M}'$ baziran na okviru (W, R) zovemo ***varijantom*** *modela $\mathfrak{M}$.*
Za varijantu $\mathfrak{M}' = (W, R, V')$ modela $\mathfrak{M}$ kažemo da je definabilna u modelu $\mathfrak{M}$ ako za svaku propozicionalnu varijablu $p \in \Phi$ vrijedi da je skup svjetova $V'(p)$ definabilan skup u $\mathfrak{M}$.
Ako je model $\mathfrak{M}'$ varijanta modela $\mathfrak{M}$ koja je definabilna u modelu $\mathfrak{M}$, tada kažemo da je model $\mathfrak{M}'$ ***definabilna varijanta*** *modela $\mathfrak{M}$.*

Prisjetimo se da su normalne modalne logike zatvorene na uniformnu supstituciju. Nazovimo supstitucijskom instancom od φ formulu dobivenu nekom uniformnom supstitucijom iz formule φ. Ukoliko smo u formuli φ zamijenili varijablu p s formulom ψ, a varijablu q s formulom ρ, supstitucijsku instancu od φ dobivenu takvom zamjenom označavamo: $\varphi(\psi/p, \rho/q)$.

Lema 2.2.4. *Neka je $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ model i $\mathfrak{M}' = (\mathfrak{F}, V')$ definabilna varijanta modela $\mathfrak{M}$. Za svaku propozicionalnu varijablu $p \in \Phi$ označimo s $\varphi_{V'(p)}$ formulu koja definira skup $V'(p)$ u $\mathfrak{M}$. Za svaku formulu φ, neka je $\varphi' \equiv \varphi(\varphi_{V'(p)}/p)$ supstitucijska instanca formule φ. Tada za svaku formulu φ i svaku normalnu modalnu logiku Λ vrijedi:*

(a) $\mathfrak{M}', w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi'$

(b) ako je svaka supstitucijska instanca formule φ globalno istinita na $\mathfrak{M}$, tada je svaka supstitucijska instanca od φ globalno istinita na $\mathfrak{M}'$

(c) ako vrijedi $\mathfrak{M} \Vdash \Lambda$, tada vrijedi i $\mathfrak{M}' \Vdash \Lambda$

Dokaz. Dokazujemo tvrdnju (a) indukcijom po složenosti formule φ. Neka je $w \in \mathfrak{F}$ proizvoljan svijet. Slučaj gdje je $\varphi \equiv \bot$ je trivijalan. Neka je $\varphi \equiv p$ za neku propozicionalnu varijablu $p \in \Phi$. Tada iz definicije uniformne supstitucije slijedi $\mathfrak{M}', w \Vdash p$ ako i samo ako $\mathfrak{M}', w \Vdash \varphi_{V'(p)}$. Model $\mathfrak{M}'$ je definabilna varijanta od modela $\mathfrak{M}$ što povlači da je $V'(p)$ definabilan skup u $\mathfrak{M}$. Tada imamo da je $w \in V'(p)$ ako i samo ako $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi_{V'(p)}$ pa je baza indukcije dokazana.
Pretpostavimo da postoji $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takav da za svaki $k \leq n$ i svaku formulu ψ složenosti k vrijedi: $\mathfrak{M}', w \Vdash \psi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi'$.
Neka je φ formula složenosti $n + 1$. Formula φ može biti jedan od tri oblika: $\varphi \equiv \neg\psi$, $\varphi \equiv \psi \vee \rho$ ili $\varphi \equiv \Diamond\psi$ za neke formule ψ i ρ složenosti $\leq n$. Sva tri slučaja slijede iz pretpostavke indukcije i svojstava uniformne supstitucije: $(\neg\psi)' \equiv \neg\psi'$, $(\psi \vee \rho)' \equiv \psi' \vee \rho'$ i $(\Diamond\psi)' \equiv \Diamond\psi'$.
Nadalje, dokazujemo tvrdnju (b) obratom po kontrapoziciji. Neka je φ proizvoljna formula i ψ njena supstitucijska instanca takva da je $\mathfrak{M}', w \nVdash \psi$ za neki svijet $w \in \mathfrak{F}$. Iz tvrdnje (a) slijedi da $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi'$ gdje je ψ' supstitucijska instanca od ψ. No, tada je ψ' supstitucijska instanca i od φ. Dokazali smo da ako postoji neka supstitucijska instanca od φ koja je neistinita na $\mathfrak{M}'$, tada postoji supstitucijska instanca od φ koja je neistinita i na $\mathfrak{M}$ pa je tvrdnja (b) dokazana.
Neka je Λ normalna modalna logika takva da vrijedi $\mathfrak{M} \Vdash \Lambda$. Svaka normalna modalna logika je zatvorena na uniformnu supstituciju što znači da su sve formule iz Λ i sve njihove uniformne supstitucije globalno istinite na $\mathfrak{M}$. Tada iz tvrdnje (b) slijedi da su sve te formule globalno istinite i na $\mathfrak{M}'$ (svaka formula je trivijalno sama sebi instanca), odnosno imamo $\mathfrak{M}' \Vdash \Lambda$ što dokazuje i zadnju tvrdnju leme. ■

Definicija 2.2.5. *Model $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ zovemo* ***istaknutim*** *ukoliko je relacija modalne ekvivalencije $\leftrightsquigarrow$ između svjetova u $\mathfrak{M}$ jednaka skupu $\{(w, w) \mid w \in W\}$.*

Napomena 2.2.6. *Primijetimo da je model $\mathfrak{M}$ istaknuti ako i samo ako za sve svjetove w i v iz $\mathfrak{M}$ vrijedi: ako $w \neq v$ onda postoji formula φ takva da $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ i $\mathfrak{M}, v \nVdash \varphi$.*

Iz prethodne napomene i definicije 2.1.20 (preciznije, iz definicije skupa W_Σ) slijedi da su sve filtracije istaknuti modeli. Sada ćemo pokazati da konačan istaknuti model može definirati sve svoje varijante.

Lema 2.2.7. *Neka je $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ konačan istaknuti model. Tada vrijedi:*

(a) za svaki svijet $w \in \mathfrak{M}$ postoji formula φ_w koja je istinita samo na svijetu w

(b) svaki podskup od $\mathfrak{F}$ je definabilan u odnosu na model $\mathfrak{M}$ (posebno, $\mathfrak{M}$ može definirati sve svoje varijante)

(c) ako vrijedi $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$ onda vrijedi i $\mathfrak{F} \Vdash \varphi$

Dokaz. Prvo dokazujemo tvrdnju (a). Neka je $\mathfrak{F} = (W, R)$. Model $\mathfrak{M}$ je konačan pa je njegova domena W konačan skup. Označimo elemente skupa $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Budući da je $\mathfrak{M}$ istaknuti model, za svaki par (i, j) takav da je $1 \leq i, j \leq n$ i $i \neq j$ postoji formula $\varphi_{i,j}$ za koju vrijedi da je $\mathfrak{M}, w_i \Vdash \varphi_{i,j}$ i $\mathfrak{M}, w_j \nVdash \varphi_{i,j}$. Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ definiramo formulu $\varphi_{w_i} = \bigwedge_{j=1}^{n} \varphi_{i,j}$. Tada je za svaki svijet $w_i \in W$ formula φ_{w_i} istinita na svijetu w_i, ali nije istinita ni na jednom drugom svijetu.
Sada dokazujemo tvrdnju (b). Neka je $U \subseteq W$ proizvoljan skup. Za svaki svijet $w \in W$, neka je φ_w formula istinita samo na svijetu w kao iz prethodne tvrdnje ove leme. Definiramo formulu $\varphi \equiv \bigvee_{w \in U} \varphi_w$. Tada za svaki svijet $w \in W$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ ako i samo ako je formula φ_w jedan disjunkt formule φ što vrijedi ako i samo ako je $w \in U$. Dakle, model $\mathfrak{M}$ definira skup U. Budući da je $V'(p)$ podskup od W za svaku propozicionalnu varijablu p i valuaciju V' nad okvirom $\mathfrak{F}$, onda model $\mathfrak{M}$ po definiciji definira i svaku svoju varijantu i tvrdnja (b) je dokazana.
Pretpostavimo sada da vrijedi $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$ za proizvoljnu formulu φ. Iz tvrdnje (c) leme 2.2.4 slijedi da $\mathfrak{M}' \Vdash \varphi$ gdje je $\mathfrak{M}'$ proizvoljna definabilna varijanta modela $\mathfrak{M}$. To znači da za svaki svijet $w \in W$ imamo da $\mathfrak{M}', w \Vdash \varphi$. Budući da je $\mathfrak{M}' = (\mathfrak{F}, V')$ definabilna varijanta modela $\mathfrak{M}$ i da prema dokazanoj tvrdnji (b) ove leme slijedi da model $\mathfrak{M}$ definira sve svoje varijante, imamo da za svaki svijet $w \in W$ i za svaku valuaciju V' vrijedi $(\mathfrak{F}, V'), w \Vdash \varphi$. Dakle, vrijedi $\mathfrak{F} \Vdash \varphi$. ∎

Sada slijedi glavni rezultat ovog poglavlja. U dokazu ćemo opet koristiti filtraciju, ali ovaj put ćemo filtrirati model u odnosu na beskonačan skup formula: cijelu jednu normalnu logiku. To je nužno da osiguramo istinitost cijele logike.

Teorem 2.2.8. *Normalna modalna logika ima svojstvo konačnih okvira ako i samo ako ima svojstvo konačnih modela.*

Dokaz. Neka je Λ neka normalna modalna logika. Pretpostavimo prvo da Λ ima svojstvo konačnih okvira. Tada vrijedi $F \Vdash \Lambda$ za neku klasu konačnih okvira F i svaka formula $\varphi \notin \Lambda$ je oboriva na nekom okviru iz F. Ako vrijedi $F \Vdash \Lambda$ onda posebno vrijedi $M \Vdash \Lambda$ za klasu modela $M = \{\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V) \mid \mathfrak{F} \in F, V \text{ proizvoljna valuacija}\}$. Budući da su svi okviri $\mathfrak{F} \in F$ konačni, onda je i M skup konačnih modela. Za formulu $\varphi \notin \Lambda$ postoji okvir $\mathfrak{F} \in F$ takav da $\mathfrak{F} \nVdash \varphi$. Tada postoji svijet w i valuacija V takvi da $(\mathfrak{F}, V), w \nVdash \varphi$. Tada je model $(\mathfrak{F}, V)$ konačan model iz klase M na kojem je formula φ oboriva pa Λ ima svojstvo konačnih modela.
Sada pretpostavimo da Λ ima svojstvo konačnih modela. Tada postoji klasa konačnih modela M takva da za svaki model $\mathfrak{M} \in M$ vrijedi $\mathfrak{M} \Vdash \Lambda$. Dokazat ćemo da Λ ima i svojstvo konačnih okvira koristeći filtraciju u odnosu na skup formula Λ. Neka je $\varphi \notin \Lambda$ proizvoljna formula. Iz svojstva konačnih modela slijedi da postoji konačan model $\mathfrak{M} \in M$ i svijet w iz tog modela takvi da $\mathfrak{M}, w \nVdash \varphi$. Neka je Σ skup svih podformula formula iz $\{\varphi\} \cup \Lambda$. Očito je skup Σ zatvoren na podformule.
Neka je $\mathfrak{M}^f = (\mathfrak{F}^f, V^f)$ proizvoljna filtracija modela $\mathfrak{M}$ u odnosu na skup Σ (ona postoji zbog leme 2.1.25). Budući da je model $\mathfrak{M}$ konačan, tada je i model $\mathfrak{M}^f$ konačan jer ne možemo generirati beskonačno mnogo klasa ekvivalencije iz konačnog skupa. Posebno, i njegov okvir $\mathfrak{F}^f$ je konačan. Bili smo već prije komentirali da su sve filtracije istaknuti modeli zbog definicije skupa W_Σ. Tada iz $\mathfrak{M}, w \nVdash \varphi$ i teorema 2.1.23 slijedi da $\mathfrak{M}^f, |w| \nVdash \varphi$. Odnosno, slijedi da postoji svijet $|w|$ iz $\mathfrak{F}^f$ i valuacija V^f takvi da $(\mathfrak{F}^f, V^f), |w| \nVdash \varphi$ pa imamo $\mathfrak{F}^f \nVdash \varphi$. Dokazali smo da za proizvoljnu formulu $\varphi \notin \Lambda$ postoji konačan okvir $\mathfrak{F}^f$ takav da je formula φ oboriva na $\mathfrak{F}^f$.
Iz svojstva konačnih modela logike Λ slijedi $\mathfrak{M} \Vdash \Lambda$. To znači da za svaku formulu $\varphi \in \Lambda$ i za svaki svijet w iz modela $\mathfrak{M}$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$. Tada iz teorema 2.1.23 slijedi da za svaku formulu φ i za svaki svijet $|w|$ imamo $\mathfrak{M}^f, |w| \Vdash \varphi$, odnosno vrijedi $\mathfrak{M}^f \Vdash \varphi$. Tada prema tvrdnji (c) iz leme 2.2.7 imamo da za svaku formulu φ vrijedi $\mathfrak{F}^f \Vdash \varphi$. Konačno, tada vrijedi $\mathfrak{F}^f \Vdash \Lambda$. Zaključujemo da logika Λ ima svojstvo konačnih okvira u odnosu na klasu okvira na kojoj se baziraju filtracije modela $\mathfrak{M}$. ■

Teorem 2.2.8 će igrati bitnu ulogu u rezultatu od velike važnosti za dokazivanje odlučivosti konačno aksiomatizabilnih logika u sljedećem poglavlju.

Poglavlje 3

Odlučivost modalnih logika

Znamo da za svaku formulu logike sudova možemo u konačno mnogo koraka ustanoviti je li valjana. U [6] su razmatrani različiti algoritmi koji nam za danu formulu logike sudova daju taj odgovor. Zato kažemo da je logika sudova odlučiva logika. Također znamo da za logiku prvog reda ne postoji niti jedan takav algoritam. Osnovni modalni jezik je po svojoj sintaksi sličan logici sudova, dok mu je semantika bitno različita. U ovom poglavlju proučavamo razne normalne modalne logike bazirane na osnovnom modalnom jeziku i ispitujemo njihovu odlučivost. Prvo definiramo odlučivu logiku i opisujemo način na koji tražimo tu odlučivost koristeći Turingove strojeve. Zatim koristimo svojstva konačnih modela i okvira za dokazivanje odlučivosti raznih logika koristeći dvije strategije i tri bitna teorema. Dajemo primjer neodlučive modalne logike te naposljetku navodimo i druge metode za dokazivanje odlučivosti.

3.1 Odlučivost logike i njena reprezentacija na Turingovim strojevima

Neformalno govoreći, za neki problem kažemo da je odlučiv ukoliko postoji algoritam koji bi ga izračunao. Primjerice, problem valjanosti je odlučiv ako postoji algoritam koji za dani ulaz (proizvoljnu formulu) daje odgovarajući odgovor: je li valjana ili nije. Postoje i drugi problemi koji se mogu razmatrati u nekoj logici. Neki od njih su ispunjivost formula, oborivost formula i problem zaključivanja (logičke posljedice). Može se pokazati da su svi ti problemi svedivi jedan na drugi i iz tog razloga kratko kažemo da promatramo problem odlučivosti logike.

Definicija 3.1.1. *Neka je φ proizvoljna modalna formula, a M klasa modela.*
Problem* M*-ispunjivosti *je određivanje je li formula φ ispunjiva na nekom modelu iz M.*

Problem* M*-valjanosti *je određivanje je li formula φ globalno istinita na svakom modelu iz M, odnosno vrijedi li $M \Vdash \varphi$.*

Drugi problem zovemo problemom valjanosti jer nas najviše zanima slučaj kada je M klasa svih modela nad nekom klasom okvira. Pokažimo da su problem ispunjivosti i valjanosti međusobni duali.

Lema 3.1.2. *Neka je M klasa modela. Problemi M-ispunjivosti i M-valjanosti su svedivi jedan na drugi.*

Dokaz. Pretpostavimo da imamo algoritam za rješavanje problema M-ispunjivosti. Neka je φ proizvoljna formula. Primijetimo da je formula φ valjana na M ako i samo ako formula $\neg\varphi$ nije ispunjiva na M. Konstruiramo algoritam koji radi sljedeće:

1. Za dani ulaz, odnosno formulu φ, uzmimo njenu negaciju $\neg\varphi$.

2. Tu negaciju dajemo kao ulaz algoritmu za rješavanje problema M-ispunjivosti.

3. Uzmemo izlaz algoritma iz drugog koraka i negiramo ga te tu vrijednost vratimo kao izlaz.

Vidimo da taj algoritam rješava problem M-valjanosti proizvoljne formule.
Drugi smjer slijedi analogno iz činjenice da je formula ispunjiva na M ako i samo ako joj negacija nije valjana na M. ■

Želimo navedene probleme promatrati nad nekom normalnom modalnom logikom, a ne općenitom klasom modela. No, prvo moramo uvesti sljedeći pojam Λ-konzistentnog skupa formula. Prisjetimo se definicije 1.3.3 dokaza u logici **K**. Analogno definiramo pojam dokaza u ostalim normalnim modalnim logikama.

Definicija 3.1.3. *Neka je Γ skup formula, a φ proizvoljna formula. Neka je Λ normalna modalna logika. Kažemo da je formula φ* ***izvediva iz skupa*** Γ ***u logici*** Λ *ili* Λ***-izvediva iz skupa*** Γ *ako vrijedi jedno od sljedećeg:*

(a) $\vdash_\Lambda \varphi$,

(b) postoje formule $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ *takve da vrijedi:* $\vdash_\Lambda (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi$.

U tom slučaju pišemo $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi$*, a u suprotnom* $\Gamma \nvdash_\Lambda \varphi$.
Za skup formula Γ kažemo da je Λ***-konzistentan*** *ako vrijedi* $\Gamma \nvdash_\Lambda \bot$. *Inače kažemo da je* Λ***-nekonzistentan***.
Formula φ je Λ-konzistentna ako je skup $\{\varphi\}$ Λ-konzistentan.

Definicija 3.1.4. *Neka je Λ normalna modalna logika, a φ neka modalna formula. Problem određivanja je li formula φ Λ-konzistentna zovemo **problemom Λ-konzistentnosti**. Problem određivanja vrijedi li $\Lambda \vdash \varphi$ zovemo **problemom Λ-dokazivosti**.*

Modalnom logikom zovemo skupove formula koji sadrže sve tautologije te su zatvoreni na pravila izvoda modus ponens i uniformnu supstituciju. Vidimo da je klasa modalnih logika nadskup klase normalnih modalnih logika.
Neka je F neka klasa okvira, a M neka klasa modela. U definiciji 1.2.6 smo definirali pojam *logike klase okvira* Λ_F kao skup svih formula valjanih na klasi F. Taj skup opravdano zovemo logikom jer zaista jest jedna modalna logika.
Analogno definiramo skup: $\Lambda_M = \{\varphi \mid \mathfrak{M} \Vdash \varphi$, za svaki model $\mathfrak{M} \in M\}$. Skup Λ_M ne mora biti logika jer je globalna ispunjivost „slabija" od valjanosti kao što smo dosad imali prilike vidjeti.
Uočimo sljedeće:

Napomena 3.1.5. *Neka je Λ konzistentna normalna modalna logika i M klasa modela takva da vrijedi $\Lambda = \Lambda_M$. Tada vrijedi:*

1. ***Problem Λ-konzistentnosti je ekvivalentan problemu M-ispunjivosti.***
   Naime, formula φ je Λ-konzistentna (po definiciji) ako i samo ako vrijedi $\Lambda \nvdash \bot$ i $\Lambda \nvdash (\varphi \to \bot)$. Prva tvrdnja je trivijalno ispunjena za svaku konzistentnu normalnu modalnu logiku, a druga je ekvivalentna s $\Lambda_M \nvdash (\varphi \to \bot)$. Primijetimo da je formula $\varphi \to \bot$ istinita na točno onim svjetovima (drugim riječima, ispunjiva na točno onim modelima) na kojim formula φ nije istinita (ispunjiva). Tada će vrijediti $\Lambda_M \nvdash (\varphi \to \bot)$ ako i samo ako je formula φ ispunjiva barem na nekom modelu iz M.

2. ***Problem Λ-dokazivosti je ekvivalentan problemu M-valjanosti.***
   Formula φ je Λ-dokaziva ako postoji Λ-dokaz $F_1, \ldots, F_n$ takav da je $F_n \equiv \varphi$. Iz $\Lambda = \Lambda_M$ slijedi da je svaka od formula F_i globalno istinita na svakom modelu iz M, pa tako i formula φ. Obratno, ako je φ formula globalno istinita na svakom modelu iz M, onda je $\varphi \in \Lambda_M$ pa $\varphi \in \Lambda$ iz čega odmah slijedi da je formula φ Λ-dokaziva.

Nadalje ćemo probleme Λ-konzistentnosti i Λ-dokazivosti zvati upravo problemima Λ-ispunjivosti i Λ-valjanosti jer za svaku konzistentnu normalnu modalnu logiku Λ postoji barem jedna klasa modela M takva da vrijedi $\Lambda = \Lambda_M$. Uvjet konzistentnosti nam neće predstavljati problem jer je zadovoljen za sve normalne logike čiju ćemo odlučivost dokazivati. Sada možemo formalizirati definiciju odlučive normalne logike.

Definicija 3.1.6. *Neka je Λ normalna modalna logika. Kažemo da je logika Λ **odlučiva** ukoliko je problem Λ-ispunjivosti (ekvivalentno: Λ-valjanosti) odlučiv. Tada problem određivanja je li logika Λ odlučiva zovemo problemom odlučivosti logike Λ.*

Rekli smo da je problem odlučiv ako postoji algoritam koji ga rješava. Štoviše, u dokazu leme 3.1.2 smo dali primjer jednog algoritma. Međutim, sve ostaje samo na apstraktnoj razini jer pojam algoritma nismo formalno definirali. U daljnjim rezultatima ćemo također zaobilaziti njegovu formalizaciju jer nadilazi temu ovog rada. Sada ćemo ipak okvirno objasniti što mislimo pod pojmom algoritma i kako predstaviti formule modalne logike kao njegov ulaz.

Prvo nam je potreban neki matematički model za izračunavanje. U ovom radu koristimo vjerojatno najčešće korišten takav model: Turingove strojeve. U literaturi postoje različite definicije Turingovog stroja, a mi koristimo sljedeću po uzoru na [4].

Definicija 3.1.7. ***Turingov stroj*** *je uređena sedmorka* $(Q, \Sigma, \Gamma, \sqcup, \delta, q_0, F)$ *gdje su:*

1. *Q je konačan skup čije elemente zovemo* ***stanja****. $q_0 \in Q$ je početno stanje, a F je skup završnih stanja.*

2. *Σ je konačan skup koji zovemo* ***abeceda*** *i njegove elemente* ***ulazni simboli****. Pretpostavljamo da prazan simbol $\sqcup$ nije u Σ.*

3. *Γ je konačan skup koji nazivamo* ***radna abeceda****. Pretpostavljamo da vrijedi $\sqcup \in \Gamma$ i $\Sigma \subset \Gamma$.*

4. *$\delta : (Q \setminus F) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, D\}$ je proizvoljna funkcija koju zovemo* ***funkcija prijelaza****.*

Primijetimo da smo δ definirali kao funkciju, dakle promatramo determinističke Turingove strojeve. Najzanimljivije nam je promatrati skup završnih stanja F kao skup $\{q_{DA}, q_{NE}\}$ jer svi spomenuti problemi u logici zahtijevaju DA/NE odgovor (je li formula valjana, je li ispunjiva, je li logička posljedica drugih formula...).
Imajući na umu dani model izračunavanja i Church-Turingovu tezu o ekvivalenciji raznih modela izračunavanja možemo poboljšati neformalnu definiciju odlučivog problema. Kažemo da je problem odlučiv ili *rekurzivan* ako postoji Turingov stroj koji za danu reprezentaciju instance tog problema, stane nakon konačno mnogo koraka i na traku ispiše reprezentaciju točnog odgovora. Kasnije ćemo reći nešto o reprezentacijama koje nama trebaju.
Često govorimo o rekurzivnim skupovima misleći pritom na ulazne podatke Turingovog stroja iz definicije nekog rekurzivnog problema. Primjerice, kažemo da je skup ispunjivih formula logike sudova rekurzivan pritom misleći na rekurzivnost problema ispunjivosti logike sudova. Detaljnije o rekurzivnosti se može pronaći u nastavnim materijalima za kolegij Izračunljivosti, s teorijskog [5] i računarskog [3] stajališta.
Osim rekurzivnih, promatramo i *rekurzivno prebrojive* skupove. Skup je rekurzivno prebrojiv ako postoji Turingov stroj koji uspješno ispisuje sve elemente tog skupa na traku i

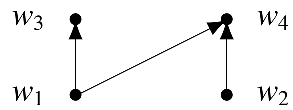
nijedne druge. Oba pojma će nam biti potrebna u daljnjim razmatranjima. Napomenimo samo da su svi rekurzivni skupovi i rekurzivno prebrojivi, ali obrat ne vrijedi. To možemo vidjeti na primjeru valjanih formula logike prvog reda. Već smo spomenuli da taj skup nije rekurzivan. Rekurzivna prebrojivost tog skupa slijedi iz činjenice da postoji sustav za dokazivanje formula logike prvog reda (račun predikata) koji generira sve valjane formule logike prvog reda.

Kažimo sad nešto o reprezentaciji problema koje ćemo promatrati. Rekli smo da ćemo odlučivost logike Λ promatrati kroz odlučivost problema Λ-ispunjivosti i Λ-valjanosti. Ukoliko želimo naći Turingov stroj koji bi riješio neki od tih problema, za ulaz moramo uzeti modalnu formulu i model, odnosno okvir na kojima testiramo ispunjivost ili valjanost formule. Turingovi strojevi kao ulaz mogu primiti bilo kakav konačan niz simbola. Nužno je da niz bude konačan kako bi samo izračunavanje bilo moguće. Što se složenosti takvog izračunavanja tiče, ipak imamo veće zahtjeve na efikasnost izračunavanja, a time i same reprezentacije ulaza.
U definiciji 1.1.1 smo zadali alfabet osnovnog modalnog jezika kao prebrojiv skup propozicionalnih varijabli i konačan skup veznika, logičkog simbola i modalnog operatora što znači da bi nam jedino varijable mogle predstavljati problem. Međutim, skup svih varijabli je prebrojiv pa ih možemo poredati na sljedeći način: $\{p_1, p_2, p_3 \dots\}$. Tada jednostavno reprezentiramo varijablu p_n kao pb gdje je b binarni zapis broja n bez vodećih nula. Primjerice, p_3 će biti zapisan kao $p11$.
Reprezentacija modela je veći problem. Svaka od komponenti modela $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ može biti beskonačan skup. No, ponašanje valuacije V nam je zapravo bitno samo na propozicionalnim varijablama koje se pojavljaju u formuli čiju ispunjivost/valjanost tražimo što je konačan skup. Valuacija u takvim varijablama ipak može biti beskonačan skup kao podskup beskonačnog skupa W. Taj problem će biti riješen čim ustanovimo da logike koje proučavamo imaju svojstvo konačnih modela, odnosno okvira. Time je odmah riješen i problem reprezentacije okvira.
Dakle, promatramo modalne formule nad abecedom $\{p, 0, 1, (,), \wedge, \neg, \Diamond\}$ gdje propozicionalne varijable zapisujemo kao slovo p praćeno binarnim zapisom njegovog indeksa. Slično ćemo promatrati modele kao riječi nad abecedom $\{w, p, 0, 1, ;, \langle, \rangle\}$. Budući da promatramo samo konačne modele, stanjima dajemo indekse i reprezentiramo ih kao varijable. Tada konačni model $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ reprezentiramo na sljedeći način:

$$(*) \qquad \begin{array}{l} \langle\langle w_1; \dots ; w_n\rangle; \\ \;\langle\langle w_i; w_j\rangle; \dots \langle w_k; w_l\rangle\rangle; \\ \;\langle\langle p_x; \langle w_r; \dots ; w_s\rangle\rangle; \dots ; \langle p_y; \langle w_t; \dots ; w_u\rangle\rangle\rangle\rangle \end{array}$$

gdje su $1 \leq i, j, k, l, r, s, t, u \leq n$, $W = \{w_1, \dots, w_n\}$, $R = \{(w_i, w_j) \dots, (w_k, w_l)\}$, $V(p_x) = \{w_r, \dots, w_s\}$, $V(p_y) = \{w_t, \dots, w_u\}$. U (*) su nam w_s i p_s reprezentacije odgovarajućih svjetova i varijabli kako smo opisali. Pogledajmo primjer.

Primjer 3.1.8. *Neka je* $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ *model nacrtan na slici.*



Neka je na svjetovima w_1 *i* w_3 *istinita varijabla* p_1*, na svjetovima* w_2 *i* w_4 *varijabla* p_2*. Reprezentacija modela* $\mathfrak{M}$ *je tada:*

$$\begin{aligned}&\langle\langle w1; w10; w11; w100\rangle;\\ &\ \langle\langle w1; w11\rangle; \langle w1; w100\rangle; \langle w10; w100\rangle\rangle;\\ &\ \langle\langle p1; \langle w1; w11\rangle\rangle; \langle p10; \langle w10; w100\rangle\rangle\rangle\rangle\end{aligned}$$

Sada možemo opravdano govoriti o rekurzivnim i rekurzivno prebrojivim skupovima formula, modela ili okvira. Nadalje nećemo često spominjati reprezentacije modalne logike na Turingovim strojevima već ćemo radi jednostavnosti umjesto „stroj ispisuje reprezentaciju modela na traku" govoriti samo „stroj ispisuje model na traku" i slično. Važno je primijetiti zaključak ovog odjeljka: postoji efikasna reprezentacija koja nam omogućava rješavanje problema ispunjivosti i valjanosti.

3.2 Odlučivost pomoću svojstva konačnih modela

U prošlom smo poglavlju uveli definicije svojstva konačnih modela (2.2.1) i svojstva konačnih okvira (2.2.2) za normalne modalne logike. Sada ćemo ih definirati na malo jednostavniji način.

Propozicija 3.2.1. *Neka je* Λ *normalna modalna logika,* F *klasa konačnih okvira, a* M *klasa modela baziranih na nekim konačnim okvirima. Tada vrijedi:*

(a) Λ *ima svojstvo konačnih okvira u odnosu na* F *ako i samo ako* $\Lambda = \Lambda_F$.

(b) Λ *ima svojstvo konačnih modela u odnosu na* M *ako i samo ako* $\Lambda = \Lambda_M$.

Dokaz. Pokažimo da vrijedi prva tvrdnja. Ako Λ ima svojstvo konačnih okvira, onda vrijedi $F \Vdash \Lambda$ i za svaku formulu $\varphi \notin \Lambda$ postoji okvir $\mathfrak{F} \in F$ takav da $\mathfrak{F} \nVdash \varphi$. Prvi dio povlači da je $\Lambda \subseteq \Lambda_F$. Kad bi vrijedilo $\Lambda_F \nsubseteq \Lambda$, onda bi postojala formula ψ takva da je $\psi \in \Lambda_F$ i $\psi \notin \Lambda$. Odnosno, postojala bi formula koja nije u Λ, a vrijedi $F \Vdash \psi$ što je kontradiktorno s drugim dijelom definicije svojstva konačnih okvira.
Suprotno, neka vrijedi $\Lambda = \Lambda_F$. Tada odmah imamo da je $F \Vdash \Lambda$. Kad bi postojala formula $\varphi \notin \Lambda$ takva da $F \Vdash \varphi$ slijedilo bi da je $\Lambda \subset \Lambda_F$ što je kontradikcija.
Analogno za drugu tvrdnju. ∎

Model baziran na nekom konačnom okviru ćemo nadalje zvati jednostavno konačno baziranim modelom. Naglasimo da klasa konačnih okvira ili modela može biti neprebrojiva. Ipak, postoji samo prebrojivo mnogo konačnih okvira i modela do na izomorfizam pa te klase smatramo skupovima i to prebrojivim skupovima.

U prethodnom odjeljku smo rekli što mislimo pod pojmom odlučivog problema. Slično definiramo pojam izračunljive funkcije: funkcija f je izračunljiva ako postoji Turingov stroj koji za danu reprezentaciju (kodiranje) elementa x iz domene funkcije f stane u konačno mnogo koraka i na traku ispiše reprezentaciju vrijednosti $f(x)$, a u slučaju elementa koji nije u domeni nikad ne stane.

Sada ćemo navesti dvije strategije pri dokazivanju odlučivosti logika koje se razlikuju po načinu na koji je ta logika zadana. Naime, možemo ju zadati kao logiku neke klase okvira što možemo nazvati *semantičkim* načinom zadavanja. Isto tako ju možemo zadati aksiomima što zovemo *sintaktičkim* načinom. Kako god bila zadana, pokazat ćemo da je poželjno da ima svojstvo konačnih modela jer ono u oba slučaja daje prvi korak u dokazivanju odlučivosti. Strategije ćemo prvo opisati neformalno tako da u svakoj nađemo Turingov stroj koji daje odgovor o Λ-ispunjivosti, odnosno Λ-valjanosti dane formule φ. Koristimo oznaku $|\varphi|$ za duljinu reprezentacije formule φ.

1. **Odlučivost semantički zadane logike:** Pretpostavimo da imamo normalnu modalnu logiku Λ zadanu semantički koja ima takozvano jako svojstvo konačnih modela: ima svojstvo konačnih modela u odnosu na neki skup modela M te postoji izračunljiva funkcija f takva da za svaku formulu φ je $f(|\varphi|)$ gornja ograda za veličinu modela na kojem je ispunjiva φ. Opišimo rad Turingovog stroja T koji za ulaz prima formulu φ i vraća odgovor je li ona Λ-ispunjiva. Stroj T prvo generira sve konačne modele iz skupa M čija veličina je najviše $f(|\varphi|)$ i provjerava je li formula φ ispunjiva na njima. Budući da je formula φ Λ-ispunjiva ako i samo ako je ispunjiva na nekom modelu iz skupa M veličine najviše $f(|\varphi|)$, taj stroj rješava problem Λ-ispunjivosti tako da vrati DA čim nađe neki takav model, a NE inače.

2. **Odlučivost sintaktički zadane logike:** Pretpostavimo da imamo normalnu modalnu logiku Λ zadanu sintaktički koja ima svojstvo konačnih modela u odnosu na neki skup modela M. Konstruiramo prvo Turingov stroj T_1 koji ispisuje sve teoreme u logici Λ. Nadalje, konstruiramo Turingov stroj T_2 koji ispisuje sve konačne modele u skupu M. Tada ispitujemo Λ-valjanost formule φ na sljedeći način. Neka je T_3 Turingov stroj koji radi sljedeće: za danu formulu φ kao ulaz, ispituje je li bila ispisana na traci stroja T_1. Ako je, Λ-valjana je. Ako nije, ispituje njenu istinitost na modelima ispisanim na traci stroja T_2. Ukoliko je formula istinita na svim ispisanim modelima, Λ-valjana je. Ukoliko nađemo neki model na kojem formula nije istinita, nije Λ-valjana.

U nastavku poglavlja nam je cilj formalizirati navedene strategije. Prvo definirajmo spomenuto jako svojstvo konačnih modela.

Definicija 3.2.2. *Neka je Λ normalna modalna logika, a M skup konačno baziranih modela takav da vrijedi $\Lambda = \Lambda_M$. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ neka funkcija.*
Logika Λ ima ***svojstvo konačnih modela reda*** $\mathbf{f(n)}$ *u odnosu na skup M ako je svaka Λ-konzistentna formula φ ispunjiva na modelu iz M koji sadrži najviše $f(|\varphi|)$ svjetova.*
Logika Λ ima ***jako svojstvo konačnih modela*** *u odnosu na skup M ako postoji izračunljiva funkcija f takva da Λ ima svojstvo konačnih modela reda $f(n)$ u odnosu na skup M.*
Logika Λ ima ***polinomno svojstvo konačnih modela*** *u odnosu na skup M ako postoji polinom p takav da Λ ima svojstvo konačnih modela reda $p(n)$ u odnosu na skup M.*
Kažemo da logika Λ ima svojstvo konačnih modela reda $f(n)$ (jako; polinomno svojstvo konačnih modela) ako postoji skup konačno baziranih modela M takav da vrijedi $\Lambda = \Lambda_M$ i Λ ima svojstvo konačnih modela reda $f(n)$ (jako; polinomno svojstvo konačnih modela) u odnosu na skup M.

Polinomno svojstvo konačnih modela logike Λ osigurava da je svaka Λ-ispunjiva formula ispunjiva ne samo na konačnom, već na zaista malom modelu. Međutim, to ne garantira odlučivost logike iz jednostavnog razloga što postoji prebrojivo mnogo različitih Turingovih strojeva (time i najviše prebrojivo mnogo odlučivih logika), a neprebrojivo mnogo modalnih logika s polinomnim svojstvom konačnih modela kao što ćemo pokazati u sljedećem primjeru.

Primjer 3.2.3. *Neka je $F_{suc} = \{(W,R) \mid W = \{0,\dots,k\}$ za $k \in \mathbb{N}$, nRm ako i samo ako $m = n+1$ za sve $m,n \in W$ takve da $m \neq n\}$ klasa okvira. Primijetimo da ova definicija dopušta i okvire s refleksivnim točkama. Svaki okvir iz F_{suc} je jedinstveno određen brojem k i mogućim refleksivnim točkama.*
Za svaki $j \in \mathbb{N}$ definiramo:

$$F_j = \{\text{irefleksivni okviri iz } F_{suc}\} \cup \{\text{okviri iz } F_{suc} \text{ čiji zadnji svijet je refleksivan}\} \cup \mathfrak{F}_j$$

gdje je $\mathfrak{F}_j = (W,R) = (\{0,\dots,j\},\{(0,0),(n,m) \mid m = n+1\})$ jedinstveni okvir za taj j. Tada za svaki $I \subseteq \mathbb{N}$ različit od $\emptyset$ definiramo klasu okvira $F_I = \bigcup_{i \in I} F_i$ i Λ_I kao logiku klase okvira F_I, odnosno $\Lambda_I = \{\varphi \mid F_I \Vdash \varphi\}$.
Za svaki $j \in \mathbb{N}$ definiramo formulu $\varphi_j = p \land \Diamond p \land \Diamond(\neg p \land \Diamond^{j-1}\Box\bot)$.
Vrijede sljedeće tvrdnje:

(a) *Formula φ_j je ispunjiva na klasi F_i ako i samo ako vrijedi $i = j$.*
Dokaz: Iz definicije klase okvira F_i slijedi da je formula φ_j ispunjiva na F_i ako i samo ako je φ_j ispunjiva na nekom okviru $\mathfrak{F} = (W,R) \in F_i$ takav da je $\mathfrak{F}$ irefleksivni okvir iz F_{suc} ili je $\mathfrak{F}$ okvir iz F_{suc} čiji je zadnji svijet refleksivan ili je $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_i$. To

pak vrijedi ako i samo ako postoji model $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ i svijet $w \in W$ takvi da vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi_j$. Sada raspisivanjem formule φ_j dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi_j \\
\Leftrightarrow\ &\mathfrak{M}, w \Vdash p \wedge \Diamond p \wedge \Diamond(\neg p \wedge \Diamond^{j-1}\Box\bot) \\
\Leftrightarrow\ &\mathfrak{M}, w \Vdash p \text{ i } \mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond p \text{ i } \mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond(\neg p \wedge \Diamond^{j-1}\Box\bot) \\
\Leftrightarrow\ &\mathfrak{M}, w \Vdash p \text{ i } \exists v \text{ takav da } wRv \text{ i } \mathfrak{M}, v \Vdash p \text{ i } \exists u \text{ takav da } wRu \text{ i } \mathfrak{M}, u \Vdash \neg p \wedge \Diamond^{j-1}\Box\bot \\
\Leftrightarrow\ &\mathfrak{M}, w \Vdash p \text{ i } \exists v \text{ takav da } wRv \text{ i } \mathfrak{M}, v \Vdash p \text{ i } \exists u \text{ takav da } wRu \text{ i } \mathfrak{M}, u \nVdash p \text{ i} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \exists t \text{ takav da } uR^{j-1}t \text{ i } \mathfrak{M}, t \Vdash \Box\bot
\end{aligned}$$

iz čega zaključujemo da svjetovi u i v nužno moraju biti različiti, da svijet w mora biti različit od u i da svijet t nema R-sljedbenika. Tada vidimo da $\mathfrak{F}$ ne može biti irefleksivni okvir iz F_{suc} jer bi onda moralo vrijediti da wRx ako i samo ako $x = w+1$ iz čega bi slijedilo $u = v$ što je kontradikcija. Također, $\mathfrak{F}$ ne može biti okvir iz F_{suc} čiji je zadnji svijet refleksivan jer bi to nužno morao biti t, a tRt povlači $\mathfrak{M}, t \Vdash \bot$ što je isto kontradikcija. Zaključujemo da je $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_i$ i da je tada $t = i \neq 0$ posljednji svijet u okviru. S druge strane, budući da svijet w ima dva različita R-sljedbenika, zaključujemo da je $w = 0$. Tada je $v = 0$ i $u = 1$, a t mora biti jednak svijetu j jer se do njega dolazi iz svijeta w u j R-koraka. No, tada mora vrijediti $i = j$.

(b) Ako su I i J različiti neprazni podskupovi od $\mathbb{N}$, tada postoji formula φ koja je ispunjiva na točno jednoj od klasa F_I i F_J.
Dokaz: Neka je $I \neq J$. Ako vrijedi $I \cap J = \emptyset$ ili $J \subset I$, tada postoji $i \in I$ takav da $i \notin J$. Tada vrijedi da je $\mathfrak{F}_i \in F_I$, ali $\mathfrak{F}_i \notin F_J$ jer je okvir $\mathfrak{F}_i$ jedinstven za indeks i koji se ne nalazi u J. Iz dijela (a) slijedi da je formula φ_i ispunjiva samo na F_i, dakle na F_I, ali nije ispunjiva na F_J.
Ako pak vrijedi $I \subset J$, tada samo uzmemo $\varphi = \varphi_j$ i istom argumentacijom kao gore dobijemo dokaz tvrdnje.

(c) Za svaki I, logika Λ_I ima polinomno svojstvo konačnih modela.
Dokaz: Fiksirajmo $I \subseteq \mathbb{N}$ neprazan skup. Iz definicije slijedi da Λ_I ima polinomno svojstvo konačnih modela ako postoji skup konačno baziranih modela M takav da vrijedi $\Lambda_I = \Lambda_M$ i ako postoji polinom p takav da je svaka Λ_I-konzistentna formula φ ispunjiva na modelu iz M koji sadrži najviše $p(|\varphi|)$ svjetova. Primijetimo da smo logike Λ_I definirali na način da direktno vrijedi $\Lambda_I = \Lambda_{F_I}$. Ako uzmemo da je skup $M = \{\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V) \mid \mathfrak{F} \in F_I\}$ skup modela baziranih na okvirima iz F_I, slijedi da je M skup konačno baziranih modela (jer su svi okviri iz F_I konačni) i da vrijedi $\Lambda_I = \Lambda_M$.

Sada još preostaje naći polinom p. Može se pokazati da vrijedi sljedeća pomoćna tvrdnja:

Ako je formula φ F_i-ispunjiva, tada je ispunjiva na okviru iz F_i koji sadrži najviše $m + 2$ svijeta gdje je m broj modalnih operatora koji se pojavljuju u formuli φ.

Tada možemo definirati polinom p na način: $p(x) = x+2$ iz čega slijedi $p(|\varphi|) = |\varphi|+2$ što je svakako veće od $m+2$ za formulu φ pa je polinomno svojstvo konačnih modela dokazano.

(d) *Postoji samo prebrojivo mnogo odlučivih logika.*
Dokaz: Odlučivost logike utvrđujemo preko Turingovih strojeva kojih ima najviše prebrojivo mnogo različitih.

(e) *Postoji neprebrojivo mnogo neodlučivih logika s polinomnim svojstvom konačnih modela.*
Dokaz: Postoji neprebrojivo mnogo podskupova od $\mathbb{N}$. Budući da iz (b) dijela slijedi da su sve logike Λ_I različite, tada postoji i neprebrojivo mnogo logika Λ_I. U (c) dijelu smo pokazali da sve one imaju polinomno svojstvo konačnih modela. Sada slijedi da među njima ima neprebrojivo mnogo neodlučivih jer prema (d) dijelu postoji najviše prebrojivo mnogo odlučivih.

Ako ne možemo dokazati odlučivost logike iz njenog polinomnog svojstva konačnih modela, postavlja se pitanje gdje smo pogriješili u našoj prvoj strategiji za dokazivanje odlučivosti semantički zadane logike u kojoj tvrdimo upravo suprotno. Kontradikcija je uzrokovana pretpostavkom da možemo konstruirati Turingov stroj koji bi ispisao sve modele iz skupa modela M koji imaju veličinu manju od zadane gornje granice. Ta pretpostavka vrijedi isključivo ako je skup M rekurzivan. Kako ćemo vidjeti u sljedećem formalnom rezultatu, to je jedina pogreška u danoj strategiji.

Teorem 3.2.4. *Neka je Λ normalna modalna logika i M rekurzivan skup modela. Ako Λ ima jako svojstvo konačnih modela u odnosu na skup M, tada je Λ odlučiva.*

Dokaz. Pretpostavimo da Λ ima jako svojstvo konačnih modela u odnosu na rekurzivan skup M i da je f funkcija iz definicije tog svojstva. Neka je φ proizvoljna formula i $l \in \mathbb{N}$ broj propozicionalnih varijabli koje se pojavljuju u njoj. Ograničit ćemo skup svih varijabli ϕ na samo te varijable. Opisat ćemo rad Turingovog stroja koji odlučuje je li formula φ Λ-ispunjiva i tako ćemo dokazati odlučivost logike Λ.
Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Dokažimo prvo pomoćnu tvrdnju: Postoji Turingov stroj koji ispisuje sve različite modele veličine manje ili jednake n na traku.
Za proizvoljni $k \leq n$, model $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ veličine k ima domenu W veličine k. Tada svjetovima iz W možemo dodijeliti indekse i poredati ih u niz $w_1, \ldots, w_k$. Primijetimo

da domene svih modela s istim brojem elemenata reprezentiramo na isti način bez obzira na to koji su svjetovi zaista u njima. Također, možemo poredati i propozicionalne varijable $p_1, \ldots, p_l$. Sada se svi modeli čija je domena veličine k razlikuju samo po relaciji i valuaciji. Ukupan broj mogućih različitih relacija nad skupom W jest 2^{k^2} što je konačno. Ukupan broj mogućih različitih valuacija je $2^{k \cdot l}$ što je isto konačno. Uočimo onda da postoji samo konačno mnogo različitih reprezentacija modela veličine k iako postoji beskonačno mnogo različitih modela te veličine. Sada imamo da postoji samo konačno mnogo reprezentacija modela veličine manje ili jednake n. Tada postoji Turingov stroj koji na traku ispisuje sve različite takve reprezentacije, odnosno modele veličine manje ili jednake n. Dakle, za $n = f(|\varphi|)$ imamo Turingov stroj T_1 koji ispisuje sve modele veličine najviše $f(|\varphi|)$ na traku. Budući da je skup M rekurzivan, postoji Turingov stroj T_2 koji za dani model $\mathfrak{M}$ kao ulaz odlučuje je li $\mathfrak{M}$ iz M. Sada konstruirajmo Turingov stroj T koji radi sljedeće:

1. Za danu reprezentaciju formule φ kao ulaz stroj T računa njenu duljinu $|\varphi|$. Zatim radi isto što i stroj T_1, odnosno ispisuje sve modele veličine najviše $f(|\varphi|)$ na traku.

2. Za svaki model na traci, stroj imitira rad stroja T_2, odnosno odlučuje je li on pripada skupu M i samo oni koji pripadaju ostaju na traci, a ostali se brišu.

3. Za svaki preostali model, stroj ispituje ispunjivost formule φ na njemu i vraća DA čim nađe neki takav. Stroj vraća NE ako prođe kroz sve modele i ne nađe nijedan na kojem je formula φ ispunjiva.

Tada stroj T za proizvoljnu formulu φ odlučuje je li ona Λ-ispunjiva jer je $\Lambda = \Lambda_M$. Dakle, logika Λ je odlučiva. ∎

Da bismo primijenili prethodni teorem, morali bismo prvo ustanoviti da dana normalna modalna logika ima jako svojstvo konačnih modela. Međutim, ne postoji posve općenita metoda za određivanje tog svojstva. U sljedećem rezultatu ćemo pokazati da metoda filtracije iz prethodnog poglavlja može biti od pomoći. No, prvo se potrebno prisjetiti najmanje normalne modalne logike **K** i definirati neka od njenih proširenja čiju odlučivost ćemo promatrati.

Definicija 3.2.5. *Neka su dane sljedeće formule (aksiomi):*

(4)	$\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$
(T)	$p \to \Diamond p$
(B)	$p \to \Box\Diamond p$
(.3)	$\Diamond p \land \Diamond q \to \Diamond(p \land \Diamond q) \lor \Diamond(p \land q) \lor \Diamond(q \land \Diamond p)$

T *je proširenje logike K aksiomom* (T).
KB *je proširenje logike K aksiomom* (B).
K4 *je proširenje logike K aksiomom* (4).
S4 *je proširenje logike K aksiomima* (T) *i* (4).
S5 *je proširenje logike K aksiomima* (T), (4) *i* (B).

Korolar 3.2.6. *Normalne modalne logike* **K**, **T**, **KB**, **K4**, **S4** *i* **S5** *su odlučive.*

Dokaz. Dokazivanje odlučivosti za sve navedene logike provodimo pozivanjem na teorem 3.2.4. Dakle, moramo dokazati da logika ima jako svojstvo konačnih modela u odnosu na neki skup M za koji također moramo pokazati da je rekurzivan. Skup M će biti upravo skup modela u odnosu na koji kažemo da je logika potpuna što znači da je svaka formula koja je valjana na M, dokaziva u danoj logici. Zapravo se za sve navedene logike može dokazati svojstvo konačnih modela koristeći filtracije, a ono odmah povlači i jako svojstvo konačnih modela jer iz propozicije 2.1.22 slijedi da je potrebna funkcija f dana s $f(n) = 2^n$ što je izračunljivo (iako eksponencijalno). Ipak nećemo uzeti bilo koju filtraciju nego ćemo zahtijevati da ona zadovoljava ista svojstva kao i skup M, primjerice tranzitivnost. Tada još preostaje dokazati da je skup M rekurzivan što se svodi na provjeravanje tih svojstava.
Konkretnije ćemo provesti dokaz za logiku **K4**. Neka je N skup svih tranzitivnih modela. Može se dokazati da vrijedi $\mathbf{K4} = \Lambda_N$, odnosno da je logika **K4** potpuna i adekvatna u odnosu na skup svih tranzitivnih modela.
Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljan model iz skupa N i Σ skup svih podformula neke formule φ ispunjive na $\mathfrak{M}$. Tada je jedna tranzitivna filtracija modela $\mathfrak{M}$ dana lemom 2.1.27 jer je relacija R modela $\mathfrak{M}$ tranzitivna. Definiramo skup M kao skup takvih filtracija svih modela iz N. Tada je M skup konačnih i tranzitivnih modela. Zbog propozicije 3.2.1 preostaje provjeriti da vrijedi $\mathbf{K4} = \Lambda_M$. Iz teorema 2.1.23 jednostavno slijedi $\Lambda_N = \Lambda_M$, a prije smo rekli da vrijedi i $\mathbf{K4} = \Lambda_N$. Dakle, logika **K4** ima svojstvo konačnih modela u odnosu na skup M.
Za dokazivanje jakog svojstva konačnih modela koristimo već navedenu propoziciju 2.1.22 iz koje slijedi da je veličina svakog modela iz M ograničena vrijednošću $2^{card(\Sigma)}$. Pritom je kardinalitet od Σ zasigurno manji od duljine reprezentacije formule φ pomoću koje je Σ zadan. Tada za svaku **K4**-konzistentnu formulu φ postoji model $\mathfrak{M} \in M$ takav da je formula φ ispunjiva na $\mathfrak{M}$ (jer je $\Lambda_M = \mathbf{K4}$) i vrijedi $card(\mathfrak{M}) \leq 2^{card(\Sigma)} \leq 2^{|\varphi|}$. Dakle, tražena funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je zadana kao $f(n) = 2^n$. Dokazali smo da **K4** ima jako svojstvo konačnih modela u odnosu na skup M.
Još je potrebno dokazati da je skup M rekurzivan, odnosno da postoji Turingov stroj koji bi za dani model kao ulaz odlučio pripada li on skupu M ili ne. Zapravo samo moramo provjeriti zadovoljava li model svojstvo tranzitivnosti za što je lako napisati algoritam pa prema Church-Turingovoj tezi postoji i Turingov stroj koji bi provjeravao to svojstvo. ∎

Vidjeli smo da filtracija može biti korisna za dokazivanje jakog svojstva konačnih modela. No, ona ipak ima svoja ograničenja pa je ponekad bolje koristiti metodu selekcije koja je pogotovo uspješna kad se radi o netranzitivnim modelima. Također, selekcija je prirodan način za reduciranje konačnog modela na model polinomne veličine. Sada vidimo da nam metode selekcije i filtracije, zajedno s teoremom 3.2.4 daju dobar alat za dokazivanje odlučivosti semantički zadane logike.

Zapravo nam je aksiomatizacija logike često zadana pa se pitamo kako ju možemo iskoristiti da bismo dobili informaciju o odlučivosti logike. Ideja naše druge strategije je da nam je uz aksiomatizaciju dovoljno samo svojstvo konačnih modela u odnosu na neki skup modela M kako bismo dokazali odlučivost. Slično kao i kod prve strategije, zahtijevamo dodatne uvjete na skup M da nam strategija bude korektna. Primijetimo da je potrebno moći ispisati sve modele skupa M na traku nekog Turingovog stroja. Da bismo to zadovoljili, najjednostavnije je proglasiti M rekurzivno prebrojivim skupom.

Za svaki skup formula Γ postoji najmanja normalna modalna logika koja ga sadrži. Tada kažemo da je logika *generirana* skupom Γ. **K** je logika generirana praznim skupom. Ako je Γ neprazan skup, onda normalnu modalnu logiku generiranu s Γ obično označavamo s $\mathbf{K\Gamma}$. Također kažemo da su elementi skupa Γ aksiomi te logike, odnosno da je skup Γ aksiomatizacija logike $\mathbf{K\Gamma}$. Primijetimo da smo ovom definicijom aksiomatizacije dali mogućnost da svaka normalna modalna logika sama sebe generira. Nama je to nepraktično zbog složenosti računanja pa ćemo dodati ograničenja na skup formula Γ.

Definicija 3.2.7. *Neka je Λ normalna modalna logika, a Γ njena aksiomatizacija.*
Kažemo da je logika Λ ***konačno aksiomatizabilna*** *ako je Γ konačan skup.*
Kažemo da je logika Λ ***rekurzivno aksiomatizabilna*** *ako je Γ rekurzivan skup.*
Kažemo da je logika Λ ***aksiomatizabilna*** *ako je Γ rekurzivno prebrojiv skup.*

Postoji ponešto neočekivan rezultat koji povezuje aksiomatizabilnost i rekurzivnu aksiomatizabilnost bilo koje logike, u literaturi zvan *Craigova lema*: svaka aksiomatizabilna logika je ujedno i rekurzivno aksiomatizabilna. Dokaz se može pronaći u članku [2].

Lema 3.2.8 (Craigova lema za modalnu logiku)**.** *Neka je Λ normalna modalna logika. Ako je Λ aksiomatizabilna, onda je Λ i rekurzivno aksiomatizabilna.*

Rekli smo da ćemo zahtijevati rekurzivnu prebrojivost skupa modela M. To povlači sljedeću zanimljivu posljedicu.

Lema 3.2.9. *Neka je M skup konačnih modela. Ako je M rekurzivno prebrojiv skup, tada je skup formula koje su oborive na M također rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Pretpostavimo da je M rekurzivno prebrojiv skup konačnih modela. Tada postoji Turingov stroj T_1 koji ispisuje sve njegove elemente. Nije teško vidjeti da je skup svih modalnih formula također rekurzivno prebrojiv (jer je unija skupova modalnih formula koji sadrže prvih n propozicionalnih varijabli) pa postoji Turingov stroj T_2 koji ih ispisuje. Sada možemo konstruirati Turingov stroj T_3 s tri trake koji radi na sljedeći način:

1. T_3 ispisuje na prvu traku po jedan model s trake stroja T_1 i na drugu traku po jednu formulu s trake stroja T_2.

2. Zatim prolazi po svim formulama na drugoj traci i provjerava njihovu istinitost na svim modelima s prve trake.

3. Ako naiđe na formulu koja je oboriva na nekom modelu, spremi ju na treću traku.

4. Budući da postoji samo konačno mnogo formula i modela za provjeriti, stroj je u jednom trenutku završio s 2. korakom pa se vrati na 1. korak.

Rad stroja T_3 ne završi, ali se na trećoj traci ispisuju sve formule oborive na skupu M pa je skup svih takvih formula rekurzivno prebrojiv.

■

Slijedi formalizacija strategije dokazivanja odlučivosti za sintaktički zadane logike. U oba važna teorema koji ju opisuju koristimo sljedeći rezultat iz kolegija Izračunljivost, odnosno [5].

Teorem 3.2.10 (Postov teorem)**.** *Neka je R skup, R^c njegov komplement. Skup R je rekurzivan ako i samo ako su R i R^c oba rekurzivno prebrojivi.*

Teorem 3.2.11. *Ako je Λ aksiomatizabilna normalna modalna logika koja ima svojstvo konačnih modela u odnosu na rekurzivno prebrojiv skup M, onda je Λ odlučiva logika.*

Dokaz. Ako je Λ aksiomatizabilna logika, onda je njena aksiomatizacija Γ rekurzivno prebrojiva. To znači da postoji Turingov stroj koji na traku može ispisati sve aksiome logike Λ. Tada nije teško konstruirati stroj koji bi (koristeći konačno mnogo pravila izvoda) ispisao sve valjane formule logike Λ na svoju traku. Dakle, logika Λ je rekurzivno prebrojiva. Budući da Λ ima svojstvo konačnih modela u odnosu na skup M, vrijedi $\Lambda = \Lambda_M$. Skup M je po pretpostavci rekurzivno prebrojiv pa iz leme 3.2.9 slijedi da je i skup formula oborivih na M također rekurzivno prebrojiv. To je upravo skup formula koje nisu valjane u logici Λ. Sada imamo da je logika Λ rekurzivno prebrojiv skup i njen komplement je rekurzivno prebrojiv skup pa iz Postovog teorema zaključujemo da je logika Λ odlučiva. ■

Teorem 3.2.11 je izrazito bitan i ima mnogo praktičkih primjena. Primjerice, možemo ga iskoristiti da dokažemo odlučivost propozicionalne dinamičke logike (*PDL*). Primijetimo doduše da teorem pretpostavlja slabije svojstvo aksiomatizabilnosti koje koristi samo kako bi ispisao valjane formule u logici. No što ako znamo da je dana logika čak konačno aksiomatizabilna. Tada možemo napraviti i više. Ovdje napokon koristimo ključan teorem iz prethodnog poglavlja o ekvivalenciji svojstava konačnih modela i okvira.

Teorem 3.2.12. *Neka je Λ konačno aksiomatizabilna normalna modalna logika sa svojstvom konačnih modela. Tada je logika Λ odlučiva.*

Dokaz. Budući da je aksiomatizacija logike Λ konačna, slijedi da je i rekurzivno prebrojiva. Tada je i Λ rekurzivno prebrojiva jer se svi njeni teoremi lako dobiju primjenom (konačno mnogo, dakle rekurzivno prebrojivo) pravila izvoda na aksiome. Potrebno je još dokazati da je i skup formula koje nisu u Λ također rekurzivno prebrojiv pa dokaz slijedi primjenom Postovog teorema.
Logika Λ ima svojstvo konačnih modela pa iz teorema 2.2.8 slijedi da ima i svojstvo konačnih okvira. Tada postoji skup okvira F takav da vrijedi $\Lambda = \Lambda_F$. Za formulu φ koja nije iz logike Λ tada postoji okvir $\mathfrak{F} \in F$ takav da $\mathfrak{F} \nVdash \varphi$. Odnosno, postoji model baziran na okviru $\mathfrak{F}$ na kojem je formula φ oboriva. Označimo s Σ skup svih aksioma logike Λ. Primijetimo da su sve formule iz skupa Σ valjane na svakom okviru iz F. Tada je formula φ oboriva na modelu baziranom na okviru na kojem su valjane sve formule iz Σ. Budući da je skup Σ konačan, možemo konstruirati Turingov stroj S koji za dani konačni model $\mathfrak{M}$ provjerava vrijedi li $\mathfrak{M} \Vdash \Sigma$.
Označimo s P_φ konačan skup propozicionalnih varijabli koje je pojavljuju u nekoj formuli φ. Pretpostavljamo da su propozicionalne varijable poredane na način $\{p_1, p_2 \dots\}$. Definiramo skupove $M_0 = \emptyset$ i $F_0 = \emptyset$. Tada konstruiramo Turingov stroj T s pet traka koji radi sljedeće:

1. Pri pokretanju stroj T ima prazne sve trake osim pete na kojoj je $n = 0$.

2. Stroj T dodaje na prvu traku sve modele veličine n (u teoremu 3.2.4 smo pokazali kako to napraviti).

3. Za svaki model $\mathfrak{M}$ na prvoj traci, stroj T simulira rad stroja S. Ukoliko je odgovor stroja S *DA*, dodajemo model $\mathfrak{M}$ u skup M_n, odnosno ispišemo ga na drugu traku.

4. Stroj T doda na četvrtu traku sve formule φ stupnja $deg(\varphi) = n$ takve da je $P_\varphi \subseteq \{p_1, \dots, p_n\}$.

5. Za svaku formulu φ na četvrtoj traci, stroj provjerava vrijedi li $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$. Ukoliko je odgovor *NE*, stroj dodaje formulu φ skupu F_n tako da ju ispiše na treću traku. Ako

je odgovor DA, stroj prolazi po drugoj traci i za svaki model $\mathfrak{M}'$ iz skupa M_k za $k < n$ takav da $\mathfrak{M}' \nVdash \varphi$ doda formulu φ skupu F_n.

6. Stroj poveća n za jedan na petoj traci i vraća se na korak 2.

U definiciji rada stroja T nismo naglasili, ali podrazumijevamo da se prilikom ispisivanja na traku pišu određeni simboli između modela te između skupova M_i i M_{i+1} da bi ih stroj mogao razlikovati. Isto vrijedi za formule i skupove F_j. Također primijetimo da stroj T radi beskonačno, ali to je u redu jer definicija rekurzivne prebrojivosti ne zahtijeva da stroj stane već samo da u nekom trenutku ispiše svaku formulu koja se ne nalazi u logici Λ što se upravo i događa na trećoj traci stroja. ■

Još nismo nikako iskoristili rekurzivnu aksiomatizabilnost. Pitamo se možemo li samo zamijeniti pojam konačne aksiomatizabilnosti s rekurzivnom u teoremu 3.2.12. Odgovor je ne: može se pokazati da postoji *neodlučiva* rekurzivno aksiomatizabilna logika sa svojstvom konačnih modela.

Teorem 3.2.12 ima mnogo primjena jer postoji puno modalnih logika koje su konačno aksiomatizabilne i imaju svojstvo konačnih modela. Na primjer, sve logike čiju smo odlučivost dokazali u korolaru 3.2.6 su očigledno konačno aksiomatizabilne iz same njihove definicije, a imaju (jako) svojstvo konačnih modela kako smo pokazali. U posljednjem rezultatu ovog rada ćemo dati dosta zanimljiviju primjenu teorema, no najprije moramo definirati još jednu normalnu modalnu logiku.

Definicija 3.2.13. **S4.3** *je proširenje logike* **K** *aksiomima* (T)*,* (4) *i* (.3) *danih u definiciji 3.2.5.*

Slijede dva presudna teorema iz kojih će završni rezultat slijediti gotovo trivijalno. Dokazi teorema počivaju na poprilično mnogo dodatnih pojmova i pomoćnih rezultata pa ih ovdje nećemo navoditi. Mogu se pronaći u [1, str. 252 i 255].

Teorem 3.2.14 (Bullov teorem)**.** *Svaka normalna modalna logika koja proširuje* **S4.3** *ima svojstvo konačnih modela.*

Teorem 3.2.15 (Fineov teorem)**.** *Svaka normalna modalna logika koja proširuje* **S4.3** *je konačno aksiomatizabilna.*

Sada lako slijedi sljedeća moćna primjena teorema 3.2.12.

Korolar 3.2.16. *Svaka normalna modalna logika koja proširuje logiku* **S4.3** *je odlučiva.*

Dokaz. Neka je Λ proizvoljna normalna modalna logika koja proširuje logiku **S4.3**. Iz Bullovog teorema slijedi da Λ ima svojstvo konačnih modela, a iz Fineovog teorema slijedi da je konačno aksiomatizabilna. Sada lakom primjenom teorema 3.2.12 slijedi odlučivost logike Λ. ■

Tako smo teoremima 3.2.4, 3.2.11 i 3.2.12 obuhvatili tri važna slučaja u kojima svojstvo konačnih modela implicira odlučivost logike. I zaista većina rezultata o odlučivosti koristi jedan od ta tri teorema.

Naravno, postoje modalne logike koje nemaju svojstvo konačnih modela ili pak one kojima se to svojstvo teško dokazuje i gdje selekcija i filtracija ne daju željene rezultate. Zato postoje i druge metode za dokazivanje odlučivosti takvih logika. Primjerice, metoda interpretacije svodi logiku čija nas odlučivost zanima na monadsku teoriju drugog reda čija odlučivost je dokazana Rabinovim teoremom (vidi [1, str. 350]).
Filtracije ipak mogu biti korisne čak i onda kada logika nema svojstvo konačnih modela. Umjesto da pokušamo konstruirati konačan model, konstruiramo konačnu strukturu koja sadrži informacije o modelu. To je ukratko cilj metode kvazi-modela. Metoda mozaika je još jedna metoda koja koristi konačne strukture umjesto modela za dokazivanje odlučivosti logike.
Također postoji uspješna metoda za pokazivanje neodlučivosti logika. Već smo rekli da ima neprebrojivo mnogo neodlučivih logika s polinomnim svojstvom konačnih modela. Dakle, čak i logike s poželjnim svojstvima koje se dobro „ponašaju" mogu biti neodlučive. Za dokazivanje neodlučivosti takvih logika, koristi se takozvani problem popločivanja koji je neodlučiv. Svođenjem tog problema na problem odlučivosti dane logike dobijemo željeni rezultat o neodlučivosti. Više o navedenim metodama se može pronaći u [1].

Bibliografija

[1] P. Blackburn, M. de Rijke i Y. Venema. *Modal Logic*. 4th. Cambridge University Press, New York, 2010.

[2] W. Craig. „On axiomatizability within a system". *Journal of Symbolic Logic* (1953), str. 30–32.

[3] V. Čačić. *Computonomicon-Izračunljivost za računarce*. nastavni materijal iz kolegija Izračunljivost, PMF-MO, 2019.
URL: `https://web.math.pmf.unizg.hr/~veky/izr/Komputonomikon.pdf`.

[4] M. Sipser. *Introduction to the Theory of Computation*. 3th. Cengage Learning, 2013.

[5] M. Vuković. *Izračunljivost*. nastavni materijal iz kolegija Izračunljivost, PMF-MO, 2009.
URL: `https://www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures/izn-skripta-2009.pdf`.

[6] M. Vuković. *Matematička logika*. Element, Zagreb, 2009.

Sažetak

Osnovni modalni jezik je proširenje alfabeta propozicionalne logike modalnim operatorom mogućnosti $\Diamond$. Unatoč toj sintaktičkoj sličnosti s logikom sudova, modalne logike su u suštini fragmenti logika prvog i drugog reda. Zato se postavlja pitanje što možemo zaključiti o njihovoj odlučivosti. Cilj ovog rada je dokazivanje odlučivosti većeg broja normalnih modalnih logika koristeći njihovo svojstvo konačnih modela.

U prvom poglavlju opisujemo osnove sintakse i semantike osnovnog modalnog jezika. Normalne modalne logike su skupovi formula osnovnog modalnog jezika koje su dobivene iz aksioma primjenom pravila izvoda. Najmanja normalna modalna logika je **K**, a njena proširenja se dobivaju dodavanjem poželjnih aksioma.

U drugom poglavlju dokazujemo da osnovni modalni jezik ima svojstvo konačnih modela. To znači da je svaka ispunjiva formula osnovnog modalnog jezika ispunjiva i na konačnom modelu. Svojstvo konačnih modela imaju i mnoge normalne modalne logike i ono se dokazuje koristeći dvije metode: selekcije i filtracije. Promatramo i svojstvo konačnih okvira iz razloga što su okviri pogodniji za pokazivanje valjanosti formula. Naposljetku dokazujemo ekvivalentnost ta dva svojstva.

U posljednjem poglavlju objašnjavamo način na koji prikazujemo modalnu logiku na traci Turingovog stroja. Uvodimo dvije strategije za dokazivanje odlučivosti logika. One se razlikuju po načinu na koji je logika zadana: semantički kao logika neke klase okvira ili sintaktički aksiomima. Obje strategije se zasnivaju na svojstvu konačnih modela i daju rezultate za puno poznatih modalnih logika uključujući i sva proširenja logike **S4.3**.

Summary

The basic modal language extends the alphabet of the propositional logic using a modal operator of possibility $\Diamond$. Although they share syntax similarity with propositional logic, modal logics are basically fragments of first- and second-order logics. That implies the question of their decidability. The main goal of this work is to prove that a lot of normal modal logics are decidable using their finite model property.

In the first chapter we describe the fundamentals of the basic modal language syntax and semantics. A normal modal logic is a set of basic modal language formulas which are generated from the axioms using rules of proof. The smallest normal modal logic is **K**. Its extensions are created by adding more axioms.

In the second chapter we prove that the basic modal language has the finite model property. That means that every satisfiable formula of the basic modal language is satisfiable on some finite model. Many normal modal logics have the finite model property. We prove that by using two different methods: selection and filtration. We observe the finite frame property as well because frames are more suited for showing the validity of formulas. Lastly, we prove the equality between those two properties.

In the final chapter we explain the manner in which we represent modal logic on the tape of a Turing machine. We introduce two strategies for proving the decidability of logics. They differ by the way the logic is specified: semantically as the logic of some class of frames or syntactically by axioms. Both strategies are based on the finite model property and they hand results for many known modal logics including all extensions of logic **S4.3**.

Životopis

Rođena sam 23. siječnja 1997. u Zagrebu. Tamo sam završila Osnovnu školu Ive Andrića 2011. godine i prirodoslovno-matematički smjer X. gimnazije Ivana Supeka 2015. godine. Tijekom osnovne škole sam sudjelovala na natjecanjima iz matematike, a tijekom srednje škole na natjecanjima iz matematike, latinskog jezika i biologije.

Godine 2015. sam upisala Preddiplomski sveučilišni studij na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Tri godine poslije sam završila preddiplomski studij i na istom fakultetu upisala Diplomski sveučilišni studij Računarstva i matematike koji još pohađam.

U 2019. godini sam volontirala na 16. „International Conference on Computability and Complexity in Analysis" koja se održavala na našem fakultetu. U ožujku 2019. i 2020. godine sam pomagala u distribuciji materijala za matematičko natjecanje „Klokan bez granica". U drugom semestru 2020. godine sam položila edukaciju za programski jezik Java koji održava tvrtka Vestigo u kojoj nastavljam raditi po završetku studija.