SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Fioretti

KOHERENTNE MJERE RIZIKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Miljenko Huzak

Zagreb, rujan 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mami, Tati, Baki, Didi, Nonotu, Noni.

Sadržaj

Uvod

U financijama se često javlja potreba za mjerenjem rizika portfelja, odnosno pozicije. U ovom radu proučavamo alat kojim to činimo te želimo aksiomatski definirati svojstva koja razumna mjera rizika mora imati. "Razumne" mjere rizika nazivat ćemo *koherentnim*. Rad je strukturiran u dva poglavlja. U prvom poglavlju dajemo neke općenite rezultate o koherentnim mjerama rizika, dok je u drugom poglavlju fokus na konkretnim mjerama rizika.

Prvo poglavlje započinjemo definicijom rizika te dajemo aksiome kojima definiramo skupove prihvatljivih rizika, odnosno *prihvatljive* skupove. Zatim navodimo svojstva funkcija koja ih čine razumnim mjerama rizika te funkcije koje zadovoljavaju određena svojstva nazivamo *koherentnim* mjerama rizika ([6]). Definiramo *mjeru rizika određenu prihvatljivim skupom* i pokazujemo da je ona koherentna te definiramo *skup određen koherentnom mjerom rizika* i pokazujemo da je on *prihvatljiv*. Također, u prvome poglavlju dajemo reprezentaciju koherentnih mjera rizika u terminima generaliziranih scenarija.

U drugome poglavlju proučavamo tri mjere rizika: *Value-at-Risk*, najgore uvjetno očekivanje i očekivani manjak. Pokazujemo da *Value-at-Risk* nije koherentna mjera rizika jer ne zadovoljava svojstvo subaditivnosti te ukazujemo na moguće probleme korištenja takve mjere. Dajemo najgore uvjetno očekivanje kao koherentnu mjeru rizika od teoretskog značaja, ali teško primjenjivu u praksi, jer zahtjeva poznavanje cijelog vjerojatnosnog prostora. Na kraju, predlažemo očekivani manjak ([2],[3]) kao koherentnu mjeru rizika praktične primjene te pokazujemo neka njena korisna svojstva.

Poglavlje 1

Koherentne mjere rizika

1.1 Motivacija

Rizik ćemo definirati u terminima buduće vrijednosti imovine obzirom da izloženost riziku ovisi o njenoj promjenjivosti uzrokovanom neizvjesnim događajima na tržištu. Promatrat ćemo slučajne varijable koje će predstavljati buduće neto vrijednosti pozicija ili portfelja koje trenutno posjedujemo. Pozicija je količina neke financijske imovine, robe ili valute, dok je portfelj skup navedene imovine u posjedu investitora. Prvi pojam o mjeri rizika neke pozicije biti će pripada li njena buduća vrijednost skupu prihvatljivih rizika. Taj skup određuju primjerice regulatori, menadžeri ili određeni supervizori koji saniraju posljedice rizičnih ulaganja. Ukoliko buduća vrijednost pozicije ne pripada prihvatljivom skupu, moguće je poziciji dodati određenu količinu nekog financijskog instrumenta kako bi ona postala prihvatljiva. Mjeru rizika pozicije želimo definirati kao sadašnju vrijednost dovoljne količine tog instrumenta da pozicija postane prihvatljiva. Financijski instrument koji ćemo koristiti u definiciji nazivat ćemo "referentnim" instrumentom i on će predstavljati nerizičnu imovinu poput valute ili pak državnih obveznica. Takva definicija omogućavat će i primjenu mjera rizika u financijama kako bi se odredila količina (nerizične) imovine koju financijske institucije trebaju čuvati u rezervi kako bi rizici koje preuzimaju postali prihvatljivi regulatoru.

1.2 Model

Promatramo tržište s jednim periodom neizvjesnosti $(0, T)$. Trenutak $t = 0$ shvaćamo kao sadašnjost, dok je trenutak $t = T$ neko fiksno vrijeme u budućnosti. Pretpostavljamo da su za svaku imovinu kojom se trguje unaprijed poznate cijene koje mogu stupiti na snagu u trenutku T.

- S Ω ćemo označiti skup svih elementarnih događaja koji određuju cijene u trenutku T te ćemo pretpostaviti da je konačan, odnosno $|\Omega| = n$.
- Za svaki ω iz Ω računamo buduću neto vrijednost pozicije i nazivamo ju *rizikom*. Rizik je slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, gdje $\mathbb{P}$ ne mora biti poznata. Najčešće ćemo ga označavati sa X, Y,... Također, pretpostavljamo da je vjerojatnost zbivanja svakog elementarnog događaja pozitivna, to jest $\mathbb{P}(\omega) > 0$ za svaki $\omega \in \Omega$.
- Označimo s $\mathcal{G}$ skup svih rizika. Neka je $n = |\Omega|$ i $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$, tada rizik $X : \Omega \to \mathbb{R}$ možemo poistovjetiti s n-torkom $(X(\omega_1), ..., X(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$. Kako je $\mathcal{G}$ skup svih realnih funkcija na Ω, poistovjećujemo ga sa $\mathbb{R}^n$.
- Konus nenegativnih elemenata u $\mathcal{G}$ označavamo s L_+, a njegov negativ s L_-.
- S $\mathcal{A}$ označavamo skup budućih neto vrijednosti portfelja investitora koje su dopuštene od strane regulatora ili supervizora i nazivamo ga *prihvatljivim skupom*.
- Pretpostavljamo da na tržištu postoji neka "referentna" financijska imovina, čija je vrijednost u trenutku $t = 0$ jednaka 1, a vrijednost u $t = T$ je unaprijed poznata i iznosi $r > 0$. U praksi je to najčešće neka nerizična imovina, primjerice valuta.

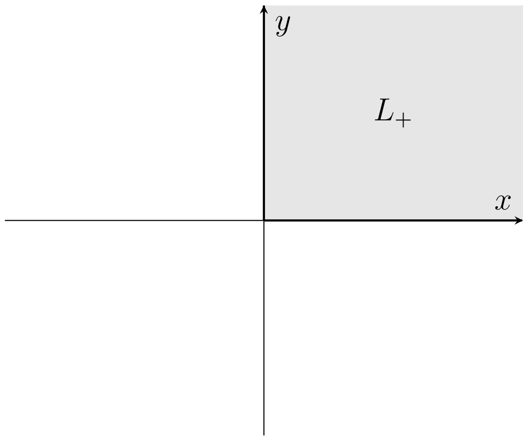
1.3 Prihvatljivi skupovi

Sada ćemo navesti aksiome kojima želimo formalno definirati prihvatljive skupove.

Aksiom 1.3.1. *Prihvatljivi skup $\mathcal{A}$ sadrži L_+.*

Ovaj aksiom govori kako portfelj čija je buduća neto vrijednost uvijek nenegativna, ne zahtjeva dodatni kapital kako bi postao prihvatljiv. Ilustrirajmo to na primjeru.

Primjer 1.3.2. *Pretpostavimo da je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ dvočlani skup. Kao što je ranije navedeno, tada skup svih rizika $\mathcal{G}$ možemo poistovjetiti s $\mathbb{R}^2$. Vrijednosti na apcisi označavati će buduću neto vrijednost portfelja u slučaju da se dogodio ω_1, a vrijednosti na ordinati u slučaju da se dogodio ω_2. Skup L_+ je konus nenegativnih elemenata u $\mathcal{G}$ te izgleda kao na slici 1.1:*



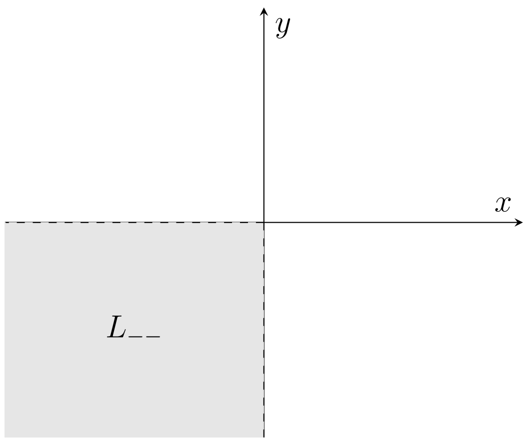
Slika 1.1: L_+ u $\mathbb{R}^2$

Sada je jasno da je skup svih rizika koji su za svaki $\omega \in \Omega$ nenegativni upravo jednak L_+.

Aksiom 1.3.3. *Prihvatljivi skup $\mathcal{A}$ je disjunktan sa skupom L_{--} gdje je*

$$L_{--} = \{X \in \mathcal{G} \mid \forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) < 0\}.$$

Ukoliko se vratimo na Primjer 1.3.2, skup L_{--} možemo prikazati kao na Slici 1.2:

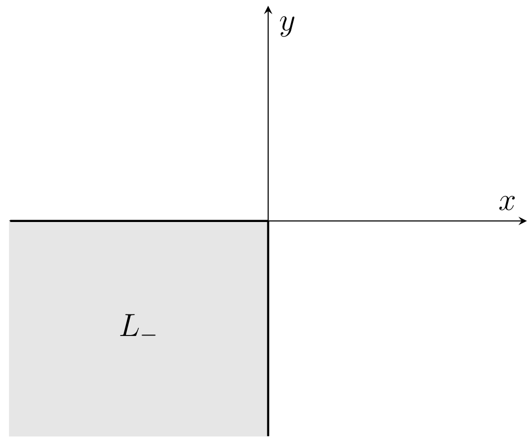


Slika 1.2: L_{--} u $\mathbb{R}^2$

Aksiomom 1.3.3 uvodimo pretpostavku da buduća neto vrijednost koja je strogo negativna za svaki mogući događaj nije prihvatljiva. Intuitivno, pozicije koji sigurno donose gubitak nisu poželjne. Promatrat ćemo i jači aksiom:

Aksiom 1.3.3'. *Prihvatljivi skup $\mathcal{A}$ zadovoljava $\mathcal{A} \cap L_- = \{0\}$.*

Ako promotrimo skup L_- u $\mathbb{R}^2$ na Slici 1.3 vidimo da Aksiom 1.3.3' govori kako buduće neto vrijednosti koje će za barem jedan događaj iz Ω biti negativne i nikada neće biti pozitivne, nisu prihvatljive.



Slika 1.3: L_- u $\mathbb{R}^2$

Aksiom 1.3.4. *Prihvatljivi skup $\mathcal{A}$ je konveksan.*

Ovaj aksiom implicira kako je diverzifikacija prihvatljiva.

Aksiom 1.3.5. *Prihvatljivi skup $\mathcal{A}$ je pozitivno homogeni konus.*

Prethodnim aksiomom uvodimo pretpostavku kako je prihvatljivost inavrijantna na skalu. Intuitivno, ako imamo više (ili pak manje) prihvatljive imovine ona je i dalje prihvatljiva. Ovdje implicitno pretpostavljamo kako su tržišta likvidna i kako količina imovine ne utječe na vrijeme potrebno za likvidaciju.

1.4 Mjere rizika

Ranije smo naveli da je osnovni pojam o mjeri rizika pozicije je li njena buduća neto vrijednost u nekom "prihvatljivom" skupu te smo zatim aksiomatski odredili što su to za nas *prihvatljivi* skupovi. Sada ćemo definirati mjeru rizika koristeći se referentnim instrumentom kao svojevrsnu udaljenost pozicije od prihvatljivog skupa.

Definicija 1.4.1. *Mjera rizika je preslikavanje sa skupa svih rizika $\mathcal{G}$ u $\mathbb{R}$.*

Definicija 1.4.2. *Neka je r vrijednost referentnog instrumenta u trenutku T. Mjeru rizika određenu prihvatljivim skupom $\mathcal{A}$, $\rho_{\mathcal{A},r} : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ definiramo s*

$$\rho_{\mathcal{A},r}(X) = \inf\{m \mid m \cdot r + X \in \mathcal{A}\}. \tag{1.1}$$

Za buduću neto vrijednost pozicije, odnosno rizik X, realan broj $\rho_{\mathcal{A},r}(X)$ interpretiramo kao minimalno ulaganje u referentni instrument koje treba dodati poziciji kako bi ona postala prihvatljiva.

Definicija 1.4.3. *Prihvatljivi skup određen mjerom rizika ρ označavamo s $\mathcal{A}_\rho$ i definiramo kao*

$$\mathcal{A}_\rho = \{X \in \mathcal{G} \mid \rho(X) \leq 0\}. \tag{1.2}$$

Sada ćemo u obliku aksioma navesti neka moguća svojstva za mjeru rizika ρ definiranu na $\mathcal{G}$. Kasnije ćemo pokazati koja je njihova veza sa aksiomima za prihvatljive skupove.

Aksiom 1.4.4. *(Translacijska invarijantnost) Za svaki $X \in \mathcal{G}$ i sve realne brojeve α, vrijedi*

$$\rho(X + \alpha \cdot r) = \rho(X) - \alpha.$$

Svojstvo translacijske invarijantnosti nam govori da ukoliko poziciji dodamo iznos α i uložimo ga u referentni instrument, smanjiti ćemo mjeru rizika za α. Posebno, $\rho(X + \rho(X) \cdot r) = 0$

Aksiom 1.4.5. *(Subaditivnost) Za svaki X_1 i X_2 iz $\mathcal{G}$,*

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2).$$

Tumačenje ovog aksioma jest da spajanje ne stvara dodatan rizik. Primjerice, subaditivna mjera rizika portfelja koji sadrži dvije različite pozicije u imovini biti će manja nego zbroj mjera rizika za pojedine pozicije što je upravo općepoznati koncept diverzifikacije portfelja u svrhu smanjena izloženosti riziku. U smislu unutarnjeg upravljanja rizikom u nekom poduzeću, subaditivnost osigurava da ukupna izloženost riziku poduzeća nije veća od sume izloženosti njegovih pojedinih odjela što omogućava decentralizirano upravljanje rizikom. Pretpostavimo da mjera rizika ne zadovoljava svojstvo subaditivnosti. Tada bi pojedinac koji želi investirati u dvije različite pozicije bio motiviran otvoriti dva brokerska računa kako bi smanjio svoju izloženost riziku.

Aksiom 1.4.6. *(Pozitivna homogenost) Za svaki $\lambda \geq 0$ i za svaki $X \in \mathcal{G}$,*

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X).$$

Pozitivna homogenost je zapravo pretpostavka da veličina pozicije ne utječe direktno na rizik što znači da implicitno pretpostavljamo da su tržišta likvidna i da veće pozicije ne zahtijevaju više vremena za likvidaciju.

Napomena 1.4.7. *Iz Aksioma 1.4.4 i 1.4.6 slijedi* $\rho(\alpha \cdot (-r)) = \alpha$ *za svaki* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

$$\rho(\alpha \cdot (-r)) - \alpha = \rho(\alpha \cdot (-r) + \alpha \cdot r) = \rho(\alpha \cdot 0) = 0 \cdot \rho(\alpha) = 0$$

gdje prva jednakost slijedi iz Aksioma 1.4.4, a treća iz Aksioma 1.4.6. □

Aksiom 1.4.8. *(Monotonost) Za svake* $X, Y \in \mathcal{G}$ *takve da* $X \leq Y$ *g.s., vrijedi* $\rho(Y) \leq \rho(X)$.

Ukoliko je buduća neto vrijednost neke pozicije za svaki događaj iz Ω veća od buduće vrijednosti neke druge pozicije, logično je zahtijevati da je njena mjera rizika manja.

Aksiom 1.4.9. *(Relevantnost) Za svaki* $X \in \mathcal{G}$, *takav da je* $X \leq 0$ *g.s. i* $X \neq 0$ *g.s. je* $\rho(X) > 0$.

Ovaj aksiom govori da za pozicije čija je buduća neto vrijednost uvijek manja ili jednaka 0 i za koje postoji događaj takav da je ona strogo negativna, mjera rizika pozitivna.

Napomena 1.4.10. *Ako mjera rizika* ρ *zadovoljava Aksiome 1.4.5, 1.4.6, 1.4.8 i 1.4.9 tada ih zadovoljava i mjera* $\lambda \cdot \rho$, $\lambda > 0$, *što nije slučaj i sa Aksiomom 1.4.4.*

1.5 Koherentne mjere rizika i aksiomatska veza sa prihvatljivim skupovima

Definicija 1.5.1. *Mjera rizika koja zadovoljava aksiome o translacijskoj invarijantnosti, subaditivnosti, pozitivnoj homogenosti i monotonosti naziva se koherentnom.*

U sljedećoj propoziciji dajemo vezu između koherentnih mjera rizika i mjera rizika određenih prihvatljivim skupovima.

Propozicija 1.5.2. *Ako skup* $\mathcal{B}$ *zadovoljava Aksiome 1.3.1, 1.3.3, 1.3.4 i 1.3.5, mjera rizika određena prihvatljivim skupom* $\rho_{\mathcal{B},r}$ *je koherentna.*

Dokaz. Prvo, primijetimo da je $\rho_{\mathcal{B},r}(X)$ konačan za svaki $X \in \mathcal{G}$. Uzmimo proizvoljni rizik $X \in \mathcal{G}$ i poistovjetimo ga s $(X(\omega_1), X(\omega_2), ..., X(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$ te definiramo $m_0 := \min_{\omega\in\Omega} X(\omega)$ i $M_0 := \max_{\omega\in\Omega} X(\omega)$. Promatramo tri slučaja:

- ako je $X \in L_+$, onda je po Aksiomu 1.3.1 $X \in \mathcal{B}$. Kako je $0 \in \{m \mid m \cdot r + X \in \mathcal{B}\}$, zaključujemo da je $\rho_{\mathcal{B},r}(X) \leq 0$. $M_0 \geq 0$ te je $X - M_0 \in L_-$ pa je $X - M_0 - \alpha \in L_{--}$, $\forall \alpha > 0$. Po Aksiomu 1.3.3 onda slijedi $X - M_0 - \alpha \notin \mathcal{B}$, $\forall \alpha > 0$. Zaključujemo $\rho_{\mathcal{B},r}(X) \geq -\dfrac{M_0}{r}$.
- ako je $X \in L_-$, analogno kao i ranije zaključujemo da je $\rho_{\mathcal{B},r}(X) \geq 0$. Također, $m_0 \leq 0$ i $X + |m_0| \in L_+$, prema tome $\dfrac{|m_0|}{r} \in \{m \mid m \cdot r + X \in \mathcal{B}\}$ pa je $\rho_{\mathcal{B},r}(X) \leq \dfrac{|m_0|}{r}$.
- ako je $X \in \mathcal{G} \setminus \{L_+ \cup L_-\}$, tada je $m_0 < 0$ te $X + |m_0| \in L_+$ i $M_0 > 0$ te $X - M_0 \in L_-$, zaključujemo $-\dfrac{M_0}{r} \leq \rho_{\mathcal{B},r}(X) \leq \dfrac{|m_0|}{r}$.

Sada ćemo pokazati da svojstva koherentnih mjera rizika vrijede za mjeru $\rho_{\mathcal{B},r}$:

1. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathcal{B},r}(X + \alpha \cdot r) &= \inf\{m \mid m \cdot r + \alpha \cdot r + X \in \mathcal{B}\} = \\
&= \inf\{m \mid (m + \alpha) \cdot r + X \in \mathcal{B}\} = \\
&= \inf\{m + \alpha \mid (m + \alpha) \cdot r + X \in \mathcal{B}\} - \alpha = \\
&= \inf\{\widetilde{m} \mid \widetilde{m} \cdot r + X \in \mathcal{B}\} - \alpha \\
&= \rho_{\mathcal{B},r}(X) - \alpha,
\end{aligned}$$

   što pokazuje da je Aksiom 1.4.4 zadovoljen.

2. Za $X, Y \in \mathcal{B}$ vrijedi $X + Y \in \mathcal{B}$. Naime, iz Aksioma 1.3.4 znamo da je konveksna kombinacija $(X+Y)/2$ u skupu $\mathcal{B}$, a zato što je po Aksiomu 1.3.5 $\mathcal{B}$ konus, vrijedi $2 \cdot \frac{(X+Y)}{2} \in \mathcal{B}$.
   Prvo pokazujemo da ako je $m > \rho_{\mathcal{B},r}(X)$, tada je $X + m \cdot r \in \mathcal{B}$. Označimo sa $S := \{m \mid X + m \cdot r \in \mathcal{B}\}$. Za infimum skupa S, $\rho_{\mathcal{B},r}(X)$, po karakterizaciji infimuma vrijedi da za svaki $m \in \mathbb{R}$ takav da je $m > \rho_{\mathcal{B},r}(X)$ postoji $x \in S$ takav da je $x < m$. Neka je sada x iz karakterizacije infimuma za dani m. Imamo:

$$\begin{aligned}
X + r \cdot m &= X + r \cdot (x + (m - x)) = \\
&= \underbrace{X + r \cdot x}_{\in \mathcal{B} \text{ po izboru } x} + \underbrace{r \cdot (m - x)}_{\in L_+ \subseteq \mathcal{B}} \in \mathcal{B}
\end{aligned}$$

Pokažimo sada svojstvo subaditivnosti. Neka su $X, Y \in \mathcal{G}$. Po prethodno pokazanom, za sve $m, n \in \mathbb{R}$ takve da su $m > \rho_{\mathcal{B},r}(X)$ i $n > \rho_{\mathcal{B},r}(Y)$ je $X + m \cdot r, Y + n \cdot r \in \mathcal{B}$. Slijedi da je i njihov zbroj $X + Y + (m + n) \cdot r \in \mathcal{B}$ pa je $\rho_{\mathcal{B},r}(X + Y) \leq m + n$.
Pretpostavimo $\rho_{\mathcal{B},r}(X + Y) > \rho_{\mathcal{B},r}(X) + \rho_{\mathcal{B},r}(Y)$. Za

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\rho_{\mathcal{B},r}(X + Y) - \rho_{\mathcal{B},r}(X) - \rho_{\mathcal{B},r}(Y)}{4} > 0$$

je $\rho_{\mathcal{B},r}(X+Y) > m+n$ gdje su $m := \rho_{\mathcal{B},r}(X)+\varepsilon_1 > \rho_{\mathcal{B},r}(X)$ i $n := \rho_{\mathcal{B},r}(Y)+\varepsilon_2 > \rho_{\mathcal{B},r}(Y)$ što je kontradikcija.

3. Pretpostavimo da je $m > \rho_{\mathcal{B},r}(X)$. Za $\lambda > 0$ je $\lambda \cdot X + \lambda \cdot r \cdot m \in \mathcal{B}$ jer je $\mathcal{B}$ pozitivno homogen konus, stoga zaključujemo $\rho_{\mathcal{B},r}(\lambda \cdot X) \leq \lambda \cdot m$.
Pretpostavimo sada $m < \rho_{\mathcal{B},r}(X)$. Po Definiciji 1.4.2, $X + r \cdot m \notin \mathcal{B}$, pa za $\lambda > 0$, $\lambda \cdot X + \lambda \cdot r \cdot m \notin \mathcal{B}$ (u suprotnom $(1/\lambda) \cdot (\lambda \cdot X + \lambda \cdot r \cdot m) \in \mathcal{B}$). Dakle, $\rho_{\mathcal{B},r}(\lambda \cdot X) \geq \lambda \cdot m$.
Prema prethodno pokazanom možemo zaključiti da je $\rho_{\mathcal{B},r}(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot \rho_{\mathcal{B},r}(X)$. Zaista, ako je $\rho_{\mathcal{B},r}(\lambda \cdot X) > \lambda \cdot \rho_{\mathcal{B},r}(X),\ \lambda > 0$, tada za

$$\varepsilon = \frac{\rho_{\mathcal{B},r}(\lambda \cdot X) - \lambda \cdot \rho_{\mathcal{B},r}(X)}{2\lambda} > 0$$

je $\rho_{\mathcal{B},r}(\lambda \cdot X) > \lambda \cdot (\rho_{\mathcal{B},r}(X) + \varepsilon)$ što je u kontradikciji sa $\rho_{\mathcal{B},r}(\lambda \cdot X) \leq \lambda \cdot m$ za $m > \rho_{\mathcal{B},r}(X)$. Analogno se pokaže da ne vrijedi $\rho_{\mathcal{B},r}(\lambda \cdot X) < \lambda \cdot \rho_{\mathcal{B},r}(X),\ \lambda > 0$. Iz početnog dijela dokaza gdje smo odredili granice za $\rho_{\mathcal{B},r}(X)$ u slučaju kad je $X \in L_+$, slijedi da je $\rho_{\mathcal{B},r}(0 \cdot X) = \rho_{\mathcal{B},r}(0) = 0$. Time smo pokazali da za mjeru rizika $\rho_{\mathcal{B},r}$ vrijedi Aksiom 1.4.6.

4. Pretpostavimo da je za proizvoljne rizike $X, Y \in \mathcal{G}$, $X \leq Y$ $g.s.$ i $X + m \cdot r \in \mathcal{B}$. Vrijedi $(Y - X) \geq 0$ $g.s.$ pa je $(Y - X) \in L_+ \subseteq \mathcal{B}$. Zaključujemo da je tada $Y + m \cdot r \in \mathcal{B}$ kao suma dva elementa iz $\mathcal{B}$. Pokazali smo $\{m \mid X + m \cdot r \in \mathcal{B}\} \subseteq \{m \mid Y + m \cdot r \in \mathcal{B}\}$, pa je $\rho_{\mathcal{B},r}(Y) \leq \rho_{\mathcal{B},r}(X)$ kao posljedica činjenice da je infimum podskupa nekog skupa veći ili jednak od infimuma tog skupa .

$\square$

Propozicija 1.5.3. *Ako je mjera rizika ρ koherentna, tada je skup $\mathcal{A}_\rho$ zatvoren te zadovoljava Aksiome 1.3.1, 1.3.3, 1.3.4 i 1.3.5. Dodatno, vrijedi $\rho = \rho_{\mathcal{A}_\rho, r}$*

Dokaz.

- Neka su $X, Y \in \mathcal{G}$. Zbog pozitivne homogenosti od ρ je $\rho(\frac{X+Y}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \rho(X + Y)$, a zbog subaditivnosti je $\frac{1}{2} \cdot \rho(X+Y) \leq \frac{1}{2} \cdot \big(\rho(X) + \rho(Y)\big)$. Dakle, ρ je konveksna na $\mathcal{G}$ pa je i neprekidna (vidi [4], str.109, Teorem 4.14 (Jensenova nejednakost)). Skup $\mathcal{A}_\rho = \{X \in \mathcal{G} \mid \rho(X) \leq 0\}$ je zatvoren jer je praslika zatvorenog skupa $(-\infty, 0]$ po neprekidnoj funkciji ρ, zatvoren skup.

- Pretpostavimo da su $X, Y \in \mathcal{A}_\rho$. Zbog konveksnosti od ρ je $\rho(\frac{X+Y}{2}) \leq \frac{1}{2} \cdot \big(\rho(X) + \rho(Y)\big) \leq 0$ pa je $\frac{X+Y}{2} \in \mathcal{A}_\rho$, odnosno $\mathcal{A}_\rho$ je konveksan tj. vrijedi Aksiom 1.3.4 .

- Neka je $t > 0$ i $X \in \mathcal{A}_\rho$. Tada je zbog pozitivne homogenosti $\rho(t \cdot X) = t \cdot \rho(X) \leq 0$ pa je $\mathcal{A}_\rho$ pozitivno homogen konus. Pokazali smo da $\mathcal{A}_\rho$ zadovoljava Aksiom 1.3.5.

- Pozitivna homogenost implicira da je $\rho(0) = 0$. Za $X \in L_+$ vrijedi da je $X \geq 0$ $g.s.$ pa je zbog monotonosti $\rho(X) \leq 0$. Dakle, Aksiom 1.3.1 je zadovoljen.

- Neka je $X \in L_{--}$, tada je $X \leq 0$ $g.s.$ Zbog monotonosti imamo $\rho(X) \geq \rho(0) = 0$. Pretpostavimo $\rho(X) = 0$. Zato što je $X \in L_{--}$ postoji $\alpha > 0$ takav da je $X + \alpha \cdot r \in L_{--}$ (npr. $\alpha = \frac{1}{2r} \cdot |\max_{\omega \in \Omega} X(\omega)|$). Znamo da je $\rho(X + \alpha \cdot r) \geq 0$, no zbog Akisoma 1.4.4 je $0 \leq \rho(X + \alpha \cdot r) = \rho(X) - \alpha = -\alpha$ što je kontradikcija. Zaključujemo da je za svaki $X \in L_{--}$, $\rho(X) > 0$ tj. $X \notin \mathcal{A}_\rho$.

Za kraj, dokazujemo $\rho = \rho_{\mathcal{A}_\rho, r}$. Uzmimo proizvoljan $X \in \mathcal{G}$. Za svaki $\delta \in \mathbb{R}$ takav da je $\rho_{\mathcal{A}_\rho, r}(X) < \delta$ je $X + \delta \cdot r \in \mathcal{A}_\rho$. Po definiciji od $\mathcal{A}_\rho$, $\rho(X + \delta \cdot r) \leq 0$ što zbog translacijske invarijantnosti povlači $\rho(X) \leq \delta$. Dakle, vrijedi da za svaki $\delta \in \mathbb{R}$ takav da je $\delta > \rho_{\mathcal{A}_\rho, r}(X)$ je $\rho(X) \leq \delta$. Zaključujemo $\rho(X) \leq \rho_{\mathcal{A}_\rho, r}(X)$, odnosno $\rho \leq \rho_{\mathcal{A}_\rho, r}$. Naime, ako pretpostavimo suprotno, tj. da je $\rho(X) > \rho_{\mathcal{A}_\rho, r}(X)$, za $\varepsilon = \frac{\rho(X) - \rho_{\mathcal{A}_\rho, r}(X)}{2} > 0$ je $\rho(X) > \delta$ gdje je $\delta = \rho_{\mathcal{A}_\rho, r}(X) + \varepsilon > \rho_{\mathcal{A}_\rho, r}(X)$ što je kontradikcija. S druge strane, za svaki $\delta > \rho(X)$ je zbog translacijske invarijantnosti $\rho(X + \delta \cdot r) < 0$. Po definiciji od $\mathcal{A}_\rho$ je $X + \delta \cdot r \in \mathcal{A}_\rho$ pa je $\rho_{\mathcal{A}_\rho, r}(X + \delta \cdot r) \leq 0$. Prema tome, za svaki $\delta \in \mathbb{R}$ takav da $\delta > \rho(X)$ je $\rho_{\mathcal{A}_\rho, r}(X) \leq \delta$. Analogno kao i ranije zaključujemo $\rho_{\mathcal{A}_\rho, r} \leq \rho$. □

Korolar 1.5.4. *Neka je $\mathcal{B}$ prihvatljiv skup u smislu Aksioma 1.3.1, 1.3.3, 1.3.4 i 1.3.5. Tada je $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{B}, r}} = \bar{\mathcal{B}}$, zatvarač od $\mathcal{B}$.*

Dokaz. Za $X \in \mathcal{B}$, $\rho_{\mathcal{B},r}(X) \leq 0$ pa je $X \in \mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{B},r}}$. Po Propoziciji 1.5.2 je $\rho_{\mathcal{B},r}$ koherentna, pa je po Propoziciji 1.5.3 $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{B},r}}$ zatvoren skup. Zaključujemo, $\bar{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{B},r}}$. S druge strane, neka je $X \in \mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{B},r}}$. Tada je $\rho_{\mathcal{B},r}(X) \leq 0$ odakle slijedi da je $\inf\{m \mid m \cdot r + X \in \mathcal{B}\} \leq 0$. Ukoliko je $\inf\{m \mid m \cdot r + X \in \mathcal{B}\} < 0$, tada za $m = 0$ vrijedi $m \cdot r + X \in \mathcal{B}$ pa je $X \in \mathcal{B}$. Poistovjetimo skup svih rizika $\mathcal{G}$ sa $\mathbb{R}^n$, $n = |\Omega|$, te pretpostavimo $\inf\{m \mid m \cdot r + X \in \mathcal{B}\} = 0$ i $X \notin \bar{\mathcal{B}}$. Tada je $X \in \bar{\mathcal{B}}^c$ što je otvoren skup pa postoji $\varepsilon > 0$ takav da za otvorenu kuglu $K(X, \varepsilon)$ vrijedi $K(X, \varepsilon) \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Slijedi da je $X + m \cdot r \in K(X, \varepsilon) \subseteq \bar{\mathcal{B}}^c$ za sve $0 \leq m < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{r^2 n}}$ što je u kontradikciji s $\inf\{m \mid m \cdot r + X \in \mathcal{B}\} = 0$. □

Propozicija 1.5.5. *Ako zatvoren skup $\mathcal{B}$ zadovoljava Aksiome 1.3.1, 1.3.3', 1.3.4 i 1.3.5, onda koherentna mjera rizika $\rho_{\mathcal{B},r}$ zadovoljava Aksiom 1.4.9 o relevantnosti. Ako koherentna mjera rizika ρ zadovoljava Aksiom 1.4.9, tada prihvatljivi skup $\mathcal{A}_\rho$ zadovoljava aksiom 1.3.3'.*

Dokaz.

- Za početak primijetimo da ukoliko skup $\mathcal{B}$ zadovoljava Aksiom 1.3.3', tada zadovoljava i Aksiom 1.3.3 jer je $L_{--} \subset L_-$ i $0 \notin L_{--}$. Stoga je $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{B},r}} = \bar{\mathcal{B}}$ prema Korolaru 1.5.4, odnosno $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{B},r}} = \mathcal{B}$ jer je $\mathcal{B}$ zatvoren skup. Neka je $X \in \mathcal{G}$, takav da je $X \leq 0$ *g.s.* i $X \neq 0$ *g.s.* kao u Aksiomu 1.4.9. Onda je $X \in L_-$ i $X \neq 0$ *g.s.* pa po Aksiomu 1.3.3', $X \notin \mathcal{B}$ što znači da $X \notin \mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{B},r}}$. Zaključujemo da je $\rho_{\mathcal{B},r}(X) > 0$ po definiciji skupa $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{B},r}}$.
- Za $X \in L_-$ i $X \neq 0$ *g.s.* zbog Aksioma 1.4.9 vrijedi $\rho(X) > 0$ pa $X \notin \mathcal{A}_\rho$.

□

1.6 Teorem o reprezentaciji

Definicija 1.6.1. *Mjera rizika definirana nepraznim skupom $\mathcal{P}$ vjerojatnosnih mjera na Ω i povratom r na referentni instrument je funkcija $\rho_\mathcal{P}$ na $\mathcal{G}$ definirana s*

$$\rho_\mathcal{P}(X) = \sup\{\ \mathbb{E}_\mathbb{P}[-X/r] \mid \mathbb{P} \in \mathcal{P}\}. \tag{1.3}$$

Ideja iza ovakve konstrukcije mjere rizika jest da za različite generalizirane scenarije u budućnosti računamo očekivani gubitak/dobitak te za mjeru rizika uzimamo maksimalni očekivani gubitak. Svaki generalizirani scenarij koji promatramo predstavljen je sa jednom vjerojatnosnom mjerom, odnosno vjerojatnostima poprimanja različitih cijena u budućnosti. Primijetimo, što više vjerojatnosih mjera, odnosno scenarija, uzmemo u obzir, to će mjera biti konzervativnija (veća).

Propozicija 1.6.2. *Mjera rizika definirana sa* (1.3) *je koherentna.*

Dokaz. Ispitujemo svojstva koherentnih mjera rizika:

- Translacijska invarijantnost: $X \in \mathcal{G},\ \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{P}}(X + \alpha \cdot r) &= \sup \{ \ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(-X - \alpha \cdot r)/r] \mid \mathbb{P} \in \mathcal{P}\} \\ &= \sup \{ \ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-X/r - \alpha] \mid \mathbb{P} \in \mathcal{P}\} \\ &= \rho_{\mathcal{P}}(X) - \alpha\end{aligned}$$

- Subaditivnost: $X, Y \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{P}}(X + Y) &= \sup \{ \ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(-X - Y)/r] \mid \mathbb{P} \in \mathcal{P}\} \\ &= \sup \{ \ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-X/r] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-Y/r] \mid \mathbb{P} \in \mathcal{P}\} \\ &\le \sup \{ \ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-X/r] \mid \mathbb{P} \in \mathcal{P}\} + \sup \{ \ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-Y/r] \mid \mathbb{P} \in \mathcal{P}\} \\ &= \rho_{\mathcal{P}}(X) + \rho_{\mathcal{P}}(Y)\end{aligned}$$

- Pozitivna homogenost: $\lambda \ge 0,\ X \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{P}}(\lambda \cdot X) &= \sup \{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-(\lambda \cdot X)/r] \mid \mathbb{P} \in \mathcal{P}\} \\ &= \sup \{\lambda \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-X/r] \mid \mathbb{P} \in \mathcal{P}\} \\ &= \lambda \cdot \sup \{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-X/r] \mid \mathbb{P} \in \mathcal{P}\} \\ &= \lambda \cdot \rho_{\mathcal{P}}(X)\end{aligned}$$

- Monotonost: $X \le Y$ *g.s.* stoga je $-X \ge -Y$ *g.s.* Zbog monotonosti matematičkog očekivanja je $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-X/r] \ge \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-Y/r]$ pa je

$$\sup \{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-X/r] \mid \mathbb{P} \in \mathcal{P}\} \ge \sup \{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-Y/r] \mid \mathbb{P} \in \mathcal{P}\},$$

odnosno $\rho_{\mathcal{P}}(X) \ge \rho_{\mathcal{P}}(Y)$.

□

Sada ćemo dokazati pomoćni teorem koji će biti ključan za dokaz teorema o reprezentaciji koherentnih mjera rizika.

Teorem 1.6.3. *Pretpostavljamo da je Ω konačan skup događaja i $\mathcal{M}$ skup svih vjerojatnostih mjera na Ω. Ako za funkciju $E^* : \mathcal{L}^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ vrijedi da je monotona:*

$$X \leq Y \ g.s \Rightarrow E^*(X) \leq E^*(Y), \tag{1.4}$$

afino pozitivno homogena:

$$E^*(aX + b) = aE^*(X) + b, \ a \geq 0, \ b \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

i subaditivna:

$$E^*(X + Y) \leq E^*(X) + E^*(Y), \tag{1.6}$$

onda se ona može reprezentirati sa

$$E^*(X) = \sup\{ \ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] \mid \mathbb{P} \in \mathcal{P}\} \tag{1.7}$$

gdje je

$$\mathcal{P} = \{\mathbb{P} \in \mathcal{M} \mid \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X) \leq E^*(X) \ \forall X : \Omega \to \mathbb{R}\}. \tag{1.8}$$

Dokaz. Dokaz provodimo kao u [5] (10. poglavlje, propozicija 10.1). Primijetimo prvo da je za svaki $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathbb{E}|X| < \infty$ jer je Ω konačan. Konstrukcija skupa $\mathcal{P}$ u (1.8) nam osigurava da je $\sup\{ \ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] \mid \mathbb{P} \in \mathcal{P}\} \leq E^*(X)$ pa je dovoljno pokazati da za svaki $X_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ postoji vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}$ takva da za svaku slučajnu varijablu X je $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] \leq E^*(X)$ i $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0] = E^*(X_0)$. Na taj način pokazujemo da postoji vjerojatnosna mjera u skupu $\mathcal{P}$ za koju se supremum postiže. Zbog (1.5) bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $E^*(X_0) = 1$. Naime, ako je $E^*(X_0) = \alpha \neq 1$, tada je zbog svojstva (1.5) $E^*[X_0 - (\alpha - 1)] = 1$, pa ukoliko pokažemo da postoji vjerojatnosna mjera u $\mathcal{P}$ takva da je $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0 - (\alpha - 1)] = 1 = E^*[X_0 - (\alpha - 1)]$ slijediti će da je $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0] = \alpha = E^*(X_0)$. Neka je

$$U = \{X : \Omega \to \mathbb{R} \mid E^*(X) < 1\}.$$

Iz (1.4) i (1.5) slijedi da je U otvoren: ako sadržava X tada sadržava i sve Y takve da je $Y < X + \varepsilon$, za $\varepsilon = 1 - E^*(X)$. Također, iz (1.5) i (1.6) slijedi da je U konveksan. Naime, za $X, Y \in U$ vrijedi $E^*[(X+Y)/2] = \frac{1}{2}E^*(X+Y) \leq \frac{1}{2}(E^*(X)+E^*(Y)) < 1$. Obzirom da $X_0 \notin U$, postoji linearni funkcional λ koji separira X_0 i U:

$$\lambda(X) < \lambda(X_0) \text{ za svaki } X \in U. \tag{1.9}$$

Poistovjetili smo $\mathcal{L}^1(\Omega)$ sa $\mathbb{R}^n$ te koristimo modifikaciju teorema o separaciji hiperravninom koja tvrdi da ako su A i B dva disjunktna konveksna neprazna skupa te je A otvoren, onda postoje nenul vektor $v \in \mathbb{R}^n$ i $c \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\langle x, v\rangle < c \text{ i } \langle y, v\rangle \geq c$$

za svaki $x \in A$ i $y \in B$. Za $x \in \mathbb{R}^n$ definiramo linearni funkcional s $\lambda(x) = \langle x, v \rangle$.[1]
Za $X = 0$ vrijedi $\lambda(X) = 0 < \lambda(X_0)$ pa je $\lambda(X_0)$ striktno pozitivna i možemo ju normalizirati tako da je $\lambda(X_0) = 1 = E^*(X_0)$.
Ako je $E^*(X) < 1$, tada je $X \in U$ pa je po (1.9) $\lambda(X) < \lambda(X_0) = 1$. Stoga, možemo pisati

$$E^*(X) < 1 \Rightarrow \lambda(X) < 1. \tag{1.10}$$

Vrijedi

$$X \leq 0 \overset{(1.4)}{\Rightarrow} E^*(X) \leq E^*(0) \overset{(1.5)}{=} 0$$

stoga za $c > 0, X \geq 0$ je $E^*(-c \cdot X) \leq 0 < 1$ pa je po (1.10) $\lambda(-c \cdot X) < 1$ odnosno $-\lambda(-c \cdot X) = \lambda(c \cdot X) > -1$. $\lambda(X) \geq -1/c$ za $c > 0$, tj. $\lambda(X) \geq 0$ pa je λ pozitivni funkcional. Tvrdimo da je $\lambda(1) = 1$.

- Zbog (1.5) je za $c \in \mathbb{R}$, $E^*(c) = c$ pa iz (1.10) slijedi $c < 1 \Rightarrow \lambda(c) < 1$. Za $0 < c < 1$ vrijedi $\lambda(1) < \dfrac{1}{c}$ stoga zaključujemo da je $\lambda(1) \leq 1$. U suprotnom, za $\dfrac{1}{\lambda(1)} < c < 1$ ne vrijedi $\lambda(1) < \dfrac{1}{c}$.

- Za $c > 1$ imamo $E^*(2X_0 - c) \overset{(1.5)}{=} 2 - c < 1$ pa je po (1.10) $\lambda(2X_0 - c) = 2 - c\lambda(1) < 1$ tj. $\lambda(1) > \dfrac{1}{c}$ za svaki $c > 1$, slijedi $\lambda(1) \geq 1$.

Za svaki $c \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned} E^*(X) < c &\overset{(1.5)}{\Rightarrow} E^*\big(X - (c-1)\big) < 1 \\ &\overset{(1.10)}{\Rightarrow} \lambda\big(X - (c-1)\big) < 1 \\ &\Rightarrow \lambda(X) - (c-1)\lambda(1) < 1 \\ &\Rightarrow \lambda(X) < c \end{aligned}$$

stoga zaključujemo da je

$$\lambda(X) \leq E^*(X) \text{ za svaki } X : \Omega \to \mathbb{R} \tag{1.11}$$

te definiramo vjerojatnosnu mjeru sa $\mathbb{P}(A) = \lambda(1_A)$. $\mathbb{P}(\Omega) = \lambda(1_\Omega) = \lambda(1) = 1$ te je za svaki $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \lambda(1_{\{\omega\}}) \geq 0$ jer je λ pozitivan funkcional. Dakle, ovako definirana mjera je zaista vjerojatnosna. Također,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] &= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\cdot\mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\cdot\lambda(1_{\{\omega\}}) \\
&= [\text{linearnost od } \lambda] = \lambda\Big(\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\cdot 1_{\{\omega\}}\Big) \\
&= \lambda(X)
\end{aligned}
$$

pa iz (1.11) slijedi da je $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] \leq E^*(X)$ za svaki $X : \Omega \to \mathbb{R}$, te je $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_0] = \lambda(X_0) = 1 = E^*(X_0)$. Prema tome, pronašli smo vjerojatnosnu mjeru koju smo tražili. □

Teorem 1.6.4. *(Teorem o reprezentaciji koherentnih mjera rizika)*
Neka je r vrijednost referentne imovine u trenutku T. Mjera rizika ρ je koherentna ako i samo ako postoji familija $\mathcal{P}$ vjerojatnosnih mjera na Ω takva da je

$$\rho(X) = \sup\{\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-X/r] \mid \mathbb{P}\in\mathcal{P}\}$$

Dokaz. $\boxed{\Leftarrow}$ Pokazali smo u Propoziciji 1.6.2.
$\boxed{\Rightarrow}$ Pokazujemo da $E^*(X) := \rho(-r\cdot X)$ zadovoljava pretpostavke Teorema 1.6.3. Skup svih rizika $\mathcal{G}$ možemo poistovjetiti s $\mathcal{L}^1(\Omega)$ jer su svi rizici konačnog očekivanja obzirom da je Ω konačan.

- Monotonost: $X, Y \in \mathcal{G}$, ako je $X \leq Y,\ g.s.$ onda je $-r\cdot X \geq -r\cdot Y$ $g.s.$ pa je zbog Aksioma 1.4.8, $\rho(-r\cdot X) \leq \rho(-r\cdot Y)$.

- Pozitivno afina homogenost: $a \geq 0,\ b\in\mathbb{R},\ X\in\mathcal{G}$

$$
\begin{aligned}
E^*(aX+b) &= \rho(-r\cdot(aX+b)) \\
&= \rho(-r\cdot aX + r\cdot(-b)) \\
&= [\text{Aksiom 1.4.4}] = \rho(-r\cdot aX) - (-b) \\
&= [\text{Aksiom 1.4.6}] = a\cdot\rho(-r\cdot X) + b \\
&= aE^*(X) + b
\end{aligned}
$$

- Subaditivnost: $X, Y\in\mathcal{G}$, $E^*(X+Y) = \rho(-r(X+Y)) = \rho(-r\cdot X + (-r\cdot Y))$ pa je po Aksiomu 1.4.5, $E^*(X+Y) \leq \rho(-r\cdot X) + \rho(-r\cdot Y) = E^*(X) + E^*(Y)$

Slijedi da se $\rho(X)$ može reprezentirati sa:

$$\rho(X) = E^*(-X/r) = \sup\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-X/r] \mid \mathbb{P}\in\mathcal{P}\}$$

gdje je

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{\mathbb{P} \in \mathcal{M} \mid \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] \leq E^*(X) = \rho(-r \cdot X) \ \forall X \in \mathcal{G}\} \\ &= \{\mathbb{P} \in \mathcal{M} \mid \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-Y/r] \leq \rho(Y) \ \forall Y \in \mathcal{G}\}.\end{aligned}$$

$\square$

Zaključujemo da se svaka koherentna mjera rizika pojavljuje kao metoda najgoreg ishoda u smislu generaliziranih scenarija.

Poglavlje 2

Primjeri mjera rizika

2.1 Value-at-Risk

Započinjemo s definicijom kvantila koja će nam biti korisna za razumijevanje definicije *Value-at-risk* mjere rizika.

Definicija 2.1.1. *Za $\alpha \in (0,1)$, broj q je α-kvantil slučajne varijable X uz vjerojatnosnu distribuciju $\mathbb{P}$ ako vrijedi jedno od sljedeća tri ekvivalentna svojstva:*

i. $\mathbb{P}(X \leq q) \geq \alpha \geq \mathbb{P}(X < q)$,

ii. $\mathbb{P}(X \leq q) \geq \alpha$ *i* $\mathbb{P}(X \geq q) \geq 1 - \alpha$,

iii. $F_X(q) \geq \alpha$ *i* $F_X(q-) \leq \alpha$ *gdje je* $F_X(q-) = \lim_{x \to q, x<q} F_X(x)$ *i* F_X *funkcija distribucije slučajne varijable* X.

Napomena 2.1.2. *Skup takvih α-kvantila je zatvoren interval. Obzirom da je Ω konačan, postoje konačne krajnje točke q_α^- i q_α^+ koje zadovoljavaju*

- $q_\alpha^- = \inf\{x \mid \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\} = F^{\leftarrow}(\alpha) \Leftrightarrow q_\alpha^- = \sup\{x \mid \mathbb{P}(X \leq x) < \alpha\}$
- $q_\alpha^+ = \inf\{x \mid \mathbb{P}(X \leq x) > \alpha\}$.

Za sve osim prebrojivo mnogo α vrijedi jednakost $q_\alpha^- = q_\alpha^+$.

Definicija 2.1.3. *Za $\alpha \in (0,1)$ i r vrijednost referentnog instrumenta u trenutku T, Value-at-risk VaR_α na razini α buduće neto vrijednosti X sa vjerojatnosnom mjerom $\mathbb{P}$ je negativna vrijednost q_α^+ kvantila od X/r, to jest*

$$VaR_\alpha(X) = -\inf\{x \mid \mathbb{P}(X/r \leq x) > \alpha\}.$$

Value-at-Risk je statistika koja mjeri razinu financijskog rizika poduzeća, portfelja ili pozicije tijekom nekog vremenskog perioda. Široke je primjene, npr. za upravljanje rizikom, financijsko izvješćivanje i računanje regulatornog kapitala. VaR_α interpretiramo da sa vjerojatnošću $(1-\alpha)$ gubitak neće iznositi više od VaR_α. Pokazat ćemo da *Value-at-Risk* mjera rizika zadovoljava svojstva translacijske invarijantnosti, pozitivne homogenosti i monotonosti te ćemo kontraprimjerom pokazati da nije subaditivna.

- Translacijska invarijantnost: $X \in \mathcal{G}, \alpha \in (0,1), \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(X+\beta\cdot r) &= -\inf\{x \mid \mathbb{P}((X+\beta\cdot r)/r \leq x) > \alpha\} \\ &= -\inf\{x \mid \mathbb{P}(X/r+\beta \leq x) > \alpha\} \\ &= -\inf\{x-\beta \mid \mathbb{P}(X/r \leq x-\beta) > \alpha\} - \beta \\ &= -\inf\{y \mid \mathbb{P}(X/r \leq y) > \alpha\} - \beta \\ &= VaR_\alpha(X) - \beta \end{aligned}$$

- Pozitivna homogenost: $X \in \mathcal{G}$, $\alpha \in (0,1)$, za $\lambda = 0$ je $VaR_\alpha(\lambda X) = VaR_\alpha(0) = -\inf\{x \mid \mathbb{P}(0 \leq x) > \alpha\} = 0$. Za $\lambda > 0$ vrijedi:

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(\lambda\cdot X) &= -\inf\{x \mid \mathbb{P}((\lambda\cdot X)/r \leq x) > \alpha\} \\ &= -\lambda\inf\{x/\lambda \mid \mathbb{P}(X/r \leq x/\lambda) > \alpha\} \\ &= \lambda VaR_\alpha(X) \end{aligned}$$

- Monotonost: $X, Y \in \mathcal{G},\ \alpha \in (0,1)$. Neka je $X \leq Y$ *g.s.* Tada je za $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X/r \leq x) \geq \mathbb{P}(Y/r \leq x)$ pa je $\inf\{x \mid \mathbb{P}(X/r \leq x) > \alpha\} \leq \inf\{x \mid \mathbb{P}(Y/r \leq x) > \alpha\}$, odnosno $VaR_\alpha(X) \geq VaR_\alpha(Y)$.

U sljedećem primjeru pokazujemo da *Value-at-Risk* nije subaditivan.

Primjer 2.1.4. *Promatramo dvije opcije A i B na neku dionicu, sa istim trenutkom izvršenja T. Pisac opcije A plaća kupcu opcije* 1000 *novčanih jedinica u slučaju da je u trenutku T, cijena S_T dionice veća od nekog određenog U. U slučaju opcije B pisac opcije plaća kupcu opcije* 1000 *ukoliko je cijena dionice u trenutku T manja od nekog L uz $L < U$. Početna cijena opcije A je u, a opcije B je l. Pretpostavljamo da je $r = 1$. Biramo L i U tako da je $\mathbb{P}(S_T < L) = \mathbb{P}(S_T > U) = 0.0008$ te promatramo $VaR_{1\%}$ buduće neto vrijednosti pozicije za pisca opcije A i pisca opcije B. Obzirom da je vjerojatnost nepovoljnog događaja kada su pisci opcija obvezni platiti* 1000 *manja od* 0.01, 1*%-tni Value-at-Risk iznosi redom $-u$ i $-l$. Naime, pisci opcija u početnom trenutku dobivaju novčani iznos u, odnosno l čija buduća neto vrijednost ostaje nepromijenjena. Promatrajmo sad $VaR_{1\%}$ za poziciju pisca opcije*

A i B. Pisac opcija će se naći u nepovoljnoj situaciji gdje je primoran isplatiti 1000 *u slučaju da se dogodi događaj* $\{S_T < L\} \cup \{S_T > U\}$ *čija je vjerojatnost* 1.6%. *U ovom slučaju je* 1%*-tni Value-at-Risk* $1000 - u - l$. *Kako* $1000 - u - l \nleq -u - l$, *pokazali smo da Value-at-Risk mjera rizika nije subaditivna pa tako nije ni koherentna.*

U primjeru koji slijedi želimo pokazati kako upotreba VaR-a može obeshrabriti diverzifikaciju i podbaciti u prepoznavanju koncentracijskog rizika, to jest izloženosti prema jednoj osobi, odnosno grupi povezanih osoba ili skup izloženosti koje povezuju zajednički činitelji rizika kao što su isti gospodarski sektor, odnosno geografsko područje.

Primjer 2.1.5. *Pretpostavimo da je bazna stopa* 0% ($r = 1$) *i da povrat na sve korporativne obveznice iznosi* 2%. *Pretpostavljamo da izdavatelji obveznica, nezavisno jedni od drugih, neće podmiriti svoje obveze s vjerojatnosti od* 1%. *Ukoliko se posudi* 1 000 000 *i uloži u jednu korporativnu obveznicu, isplata je*

$$X = \begin{cases} 20\ 000 & \text{s vjerojatnosti 99\%,} \\ -1\ 000\ 000 & \text{s vjerojatnosti 1\%.} \end{cases}$$

Prema tome, $VaR_{0.05} = -20\ 000$ *što je prihvatljiva investicija, "bez rizika". S druge strane, promatramo investiranje u 100 različitih korporativnih obveznica s jednakim iznosom od 10 000. Isplata je*

$$X = \begin{cases} 20\ 000 & \text{s vjerojatnosti } 0.99^{100} \approx 0.366, \\ 9\ 800 & \text{s vjerojatnosti } 100 \cdot (0.99)^{99} \cdot 0.01 \approx 0.370, \\ -400 & \text{s vjerojatnosti } \binom{100}{2} \cdot 0.99^{98} \cdot 0.01^2 \approx 0.185, \\ \vdots \end{cases}$$

Obzirom da je $\mathbb{P}(X < 0) > 0.05$, *to jest portfelj obveznica ima negativnu buduću neto vrijednost s vjerojatnošću većom od 5%,* $VaR_{0.05}(X) > 0$. *Prema tome, diverzifikacija je dovela do povećanja rizika, što je ekonomski apsurdan koncept. Također, rizik uzrokovan koncentracijom obveznica jedne korporacije ostao je nezamijećen.*

Zaključujemo da bi osnovni razlozi za odbacivanje VaR-a bili to što ne potiče diverzifikaciju te se ne ponaša "lijepo" obzirom na zbrajanje (agregaciju) rizika. U nastavku promatramo primjere nekih koherentnih mjera rizika.

2.2 Najgore uvjetno očekivanje

Definicija 2.2.1. *Neka je* $\mathbb{P}$ *vjerojatnost na* Ω, r *povrat na referentni instrument i* $\alpha \in (0, 1)$, *uvjetno očekivanje repa (eng. Tail conditional expectation, "TailVaR") je* *mjera rizika definirana s*

$$TCE_\alpha(X) = -\mathbb{E}_\mathbb{P}[X/r \mid X/r \leq -VaR_\alpha(X)].$$

Definicija 2.2.2. *Neka je $\mathbb{P}$ vjerojatnost na Ω, r povrat na referentni instrument i $\alpha \in (0,1)$. Najgore uvjetno očekivanje (eng. worst conditional expectation) je mjera rizika definirana s:*

$$WCE_\alpha(X) = -\inf\{\ \mathbb{E}_\mathbb{P}[X/r \mid A] \mid \mathbb{P}(A) > \alpha\}$$

Propozicija 2.2.3. *WCE_α je koherentna mjera rizika.*

Ispitujemo svojstva koherentih mjera rizika:

- Translacijska invarijantnost: $X \in \mathcal{G}, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
WCE_\alpha(X + \beta \cdot r) &= -\inf\{\ \mathbb{E}_\mathbb{P}[(X + \beta \cdot r)/r \mid A] \mid \mathbb{P}(A) > \alpha\} \\
&= -\inf\{\ \mathbb{E}_\mathbb{P}[X/r + \beta \mid A] \mid \mathbb{P}(A) > \alpha\} \\
&= -\inf\{\ \mathbb{E}_\mathbb{P}[X/r \mid A] + \beta \mid \mathbb{P}(A) > \alpha\} \\
&= -\inf\{\ \mathbb{E}_\mathbb{P}[X/r \mid A] \mid \mathbb{P}(A) > \alpha\} - \beta \\
&= WCE_\alpha(X) - \beta
\end{aligned}$$

- Subaditivnost: $X, Y \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned}
WCE_\alpha(X + Y) &= -\inf\{\ \mathbb{E}_\mathbb{P}[(X + Y)/r \mid A] \mid \mathbb{P}(A) > \alpha\} \\
&= -\inf\{\ \mathbb{E}_\mathbb{P}[X/r + Y/r \mid A] \mid \mathbb{P}(A) > \alpha\} \\
&= -\inf\{\ \mathbb{E}_\mathbb{P}[X/r \mid A] + \mathbb{E}_\mathbb{P}[Y/r \mid A] \mid \mathbb{P}(A) > \alpha\} \\
&\leq -\inf\{\ \mathbb{E}_\mathbb{P}[X/r \mid A] \mid \mathbb{P}(A) > \alpha\} - \inf\{\ \mathbb{E}_\mathbb{P}[Y/r \mid A] \mid \mathbb{P}(A) > \alpha\} \\
&= WCE_\alpha(X) + WCE_\alpha(Y)
\end{aligned}$$

- Pozitivna homogenost: $X \in \mathcal{G}$, $\lambda \geq 0$

$$\begin{aligned}
WCE_\alpha(\lambda \cdot X) &= -\inf\{\ \mathbb{E}_\mathbb{P}[(\lambda \cdot X)/r \mid A] \mid \mathbb{P}(A) > \alpha\} \\
&= -\inf\{\lambda \cdot \mathbb{E}_\mathbb{P}[X/r \mid A] \mid \mathbb{P}(A) > \alpha\} \\
&= -\lambda \cdot \inf\{\ \mathbb{E}_\mathbb{P}[X/r \mid A] \mid \mathbb{P}(A) > \alpha\} \\
&= \lambda \cdot WCE_\alpha(X)
\end{aligned}$$

- Monotonost: $X, Y \in \mathcal{G}$, neka je $X \leq Y$ *g.s.*. Tada je za svaki događaj A, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X/r \mid A] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y/r \mid A]$ pa je

$$-\inf\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X/r \mid A] \mid \mathbb{P}(A) > \alpha\} \geq -\inf\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y/r \mid A] \mid \mathbb{P}(A) > \alpha\},$$

odnosno $WCE_\alpha(X) \geq WCE_\alpha(Y)$.

Propozicija 2.2.4. *Vrijedi nejednakost* $TCE_\alpha \leq WCE_\alpha$.

Dokaz. Definiramo $Y := X/r$.

- Ako je $F_Y(q_\alpha^+(Y)) = \mathbb{P}(Y \leq -VaR_\alpha(Y)) > \alpha$, onda je $A_0 := \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \leq q_\alpha^+(Y)\}$ jedan od skupova koji se koristi za definiciju od WCE_α. Slijedi

$$\begin{aligned} TCE_\alpha(X) &= -\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X/r \mid X/r \leq -VaR_\alpha(X)] \\ &= -\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid A_0] \\ &\leq -\inf\{\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid A] \mid \mathbb{P}(A) > \alpha\} \\ &= WCE_\alpha(X). \end{aligned}$$

- Ako je $F_Y(q_\alpha^+(Y)) = \alpha$, iz definicije od q_α^+ i monotonosti of F_Y, slijedi da je za svaki $\varepsilon > 0$, $F_Y(q_\alpha^+(Y) + \varepsilon) > \alpha$. Za $A_\varepsilon := \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \leq q_\alpha^+(Y) + \varepsilon\}$ imamo

$$WCE_\alpha(X) \geq -\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid A_\varepsilon] = -\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y \cdot \mathbf{1}_{A_\varepsilon}]}{\mathbb{P}(A_\varepsilon)}. \tag{2.1}$$

  Obzirom da je F_Y neprekidna s desna,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{P}(A_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{P}(Y \leq q_\alpha^+(Y) + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} F_Y(q_\alpha^+(Y) + \varepsilon) = F_Y(q_\alpha^+(Y)).$$

  $A_\varepsilon \to A_0$ kada $\varepsilon \to 0$, pa po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji imamo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y \cdot \mathbf{1}_{A_\varepsilon}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\lim_{\varepsilon \to 0} Y \cdot \mathbf{1}_{A_\varepsilon}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y \cdot \mathbf{1}_{A_0}].$$

  Prema tome, limes desne strane nejednadžbe (2.1) je $-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid A_0] = TCE_\alpha(X)$ pa po teoremu o sendviču imamo $WCE_\alpha \geq TCE_\alpha$.

□

Propozicija 2.2.5. *Za svaki rizik X vrijedi jednakost*

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{\rho(X) \mid \rho \textit{ koherentna i } \rho \geq VaR_\alpha\}.$$

Za dokaz Propozicije 2.2.5 koristiti ćemo sljedeću lemu.

Lema 2.2.6. *Ako je ρ koherentna mjera rizika definirana skupom vjerojatnosnih mjera $\mathcal{P}$, onda je $\rho \geq VaR_\alpha$ ako i samo ako za svaki B takav da je $\mathbb{P}(B) > \alpha$ i za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}$ tako da je $\mathbb{Q}(B) > 1 - \varepsilon$.*

Dokaz Leme 2.2.6. $\boxed{\Rightarrow}$ Definiramo $X := -r \cdot \mathbf{1}_B$ gdje je $\mathbb{P}(B) > \alpha$.

$$VaR_\alpha(-r \cdot \mathbf{1}_B) = -\inf\{x \mid \mathbb{P}(-\mathbf{1}_B \leq x) > \alpha\} = 1$$

pa je po pretpostavci leme $\rho(-r \cdot \mathbf{1}_B) \geq 1$. Obzirom da je

$$\rho(-r \cdot \mathbf{1}_B) = \sup\{\ \mathbb{E}_\mathbb{P}[\mathbf{1}_B] \mid \mathbb{P} \in \mathcal{P}\} \geq 1$$

po definiciji supremuma imamo da za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}$ tako da je $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[\mathbf{1}_B] = \mathbb{Q}(B) > 1 - \varepsilon$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je za proizvoljan rizik X, $VaR_\alpha(X) = -k$. Tada je $\mathbb{P}(X/r \leq k) \geq \alpha$ i za svaki $\delta > 0$ je $\mathbb{P}(X/r \leq k + \delta) > \alpha$. Po pretpostavci postoji $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}$ takav da je $\mathbb{Q}(X/r \leq k + \delta) \geq 1 - \delta$. Prema tome,

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}[X/r] \leq (k + \delta) \cdot (1 - \delta) + \delta \cdot \sup_{\omega \in \Omega} \frac{X(\omega)}{r},$$

odnosno

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X/r] \geq (-k - \delta) \cdot (1 - \delta) - \delta \cdot \sup_{\omega \in \Omega} \frac{X(\omega)}{r}.$$

Ako pustimo $\delta \to 0$, dobivamo $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X/r] \geq -k$ pa je i $\rho(X) = \sup\{\mathbb{E}_\mathbb{P}[-X/r] \mid \mathbb{P} \in \mathcal{P}\ \} \geq -k$. $\square$

Dokaz Propozicije 2.2.5. Neka je za proizvoljan X, $VaR_\alpha(X) = -k$. Tada je $\mathbb{P}(X/r \leq k) \geq \alpha$. Konstruirat ćemo koherentnu mjeru rizika ρ tako da je $\rho \geq VaR_\alpha$ i $\rho(X) \leq VaR_\alpha(X)$. Vrijedi da je $\mathbb{P}(X/r \geq k) \geq 1 - \alpha$, u suprotnom iz $\mathbb{P}(X/r \geq k) < 1 - \alpha$ slijedi $\mathbb{P}(X/r < k) > \alpha$ što je u kontradikciji s definicijom VaR_α. Prema tome, za skup B takav da je $\mathbb{P}(B) > \alpha$, vrijedi da je $\mathbb{P}(B \cap \{X/r \geq k\}) > 0$. Sada možemo definirati

$$h_B = \frac{\mathbf{1}_{B \cap \{X/r \geq k\}}}{\mathbb{P}(B \cap \{X/r \geq k\})}$$

i stavimo $\mathbb{Q}_B = h_B \cdot \mathbb{P}$. $\mathbb{Q}_B$ je vjerojatnosna mjera. Naime, $\mathbb{Q}_B(\omega) \geq 0,\ \omega \in \Omega$ i

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_B(\Omega) &= \sum_{\omega \in \Omega} \frac{\mathbb{P}(\omega) \cdot \mathbf{1}_{B \cap \{X/r \geq k\}}(\omega)}{\mathbb{P}(B \cap \{X/r \geq k\})} \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(B \cap \{X/r \geq k\})} \cdot \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) \cdot \mathbf{1}_{B \cap \{X/r \geq k\}} = 1.\end{aligned}$$

$\mathbb{Q}_B(B) = 1$ pa mjera ρ konstruirana uz $\mathcal{P} = \{\mathbb{Q}_B \mid \mathbb{P}(B) > \alpha\}$ po Lemi 2.2.6 dominira VaR_α. Također, za X vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_B}[-X/r] &= \sum_{\omega\in\Omega}\left(\frac{-X(\omega)}{r}\cdot\frac{\mathbb{P}(\omega)\cdot\mathbf{1}_{B\cap\{X/r\geq k\}}(\omega)}{\mathbb{P}(B\cap\{X/r\geq k\})}\right)\\
&= \sum_{\omega\in\Omega}\left(\frac{-X(\omega)}{r}\cdot\frac{\mathbb{P}(\omega)\cdot\mathbf{1}_{B\cap\{-X/r\leq -k\}}(\omega)}{\mathbb{P}(B\cap\{X/r\geq k\})}\right)\\
&\leq \sum_{\omega\in\Omega}\left(-k\cdot\frac{\mathbb{P}(\omega)\cdot\mathbf{1}_{B\cap\{-X/r\leq -k\}}(\omega)}{\mathbb{P}(B\cap\{X/r\geq k\})}\right) = -k
\end{aligned}$$

pa je

$$\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q}_B\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_B}[-X/r] \leq -k = VaR_\alpha(X).$$

$\square$

Propozicija 2.2.7. *Neka je vjerojatnost $\mathbb{P}$ uniforma na Ω. Ako je X rizik takav da su vrijednosti diskontiranog rizika $Y = X/r$ međusobno različite za različite elementarne događaje, onda je $TCE_\alpha = WCE_\alpha$.*

Dokaz. Neka je $\alpha \in (0,1)$. Označimo $q := -VaR_\alpha(X)$, $B := \{X/r \leq q\}$. $y_1 < y_2 < ... < y_n$ neka su vrijednosti koje poprima $Y = X/r$. Neka je k cijeli broj, $0 \leq k < n$, takav da je $\alpha \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$. Pokazujemo da je $-VaR_\alpha(X) = q^+_\alpha(Y) = q = y_{k+1}$. Za $u > q$ imamo

$$\frac{\#\{i \mid y_i \leq u\}}{n} > \alpha,$$

pa da bi $\#\{i \mid y_i \leq u\}$ bio striktno veći od $\alpha\cdot n$, mora iznositi barem $k+1$. Ukoliko stavimo $u = y_{k+1}$, minimiziramo $\#\{i \mid y_i \leq u\}$ tako da bude veći od $\alpha\cdot n$ pa je y_{k+1} zapravo $-VaR_\alpha(X)$.
$I_B := \{Y(\omega) : \omega \in B\} = \{y_1, y_2, ..., y_{k+1}\}$ i

$$TCE_\alpha(X) = -\mathbb{E}[X/r \mid X/r \leq q] = -\frac{y_1 + y_2 + ... + y_{k+1}}{k+1}.$$

Da bi $\mathbb{P}(C) > \alpha$, skup C mora sadržavati barem $k+1$ elementarni događaj (jer je $\mathbb{P}$ uniformna). Za C takav da je $\mathbb{P}(C) > \alpha$ je $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid C] = \frac{y_{i_1}+y_{i_2}+...+y_{i_r}}{r}$ gdje je $r \geq k+1$ i $\{y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_r}\} = \{Y(\omega) : \omega \in C\} =: I_C$. Aritmetička sredina vrijednosti od I_C biti će uvijek veća ili jednaka od aritmetičke sredine vrijednosti skupa I_B, jer I_B sadrži $k+1$ najmanjih vrijednosti koje poprima Y. Zaključujemo, $WCE_\alpha = TCE_\alpha$. $\square$

Propozicija 2.2.8. *Neka je vjerojatnost $\mathbb{P}$ uniformna na Ω. Ako koherentna mjera rizika ρ ovisi samo o distribuciji diskontiranog rizika X/r i veća je od mjere rizika VaR_α, onda je veća i od koherente mjere rizika WCE_α.*

Dokaz. Za rizik X označimo $q := -VaR_\alpha(X)$ i $Y := X/r$. Skup $A := \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \leq q\}$ ima kardinalitet $p > n{\cdot}\alpha$ te ga možemo zapisati kao $A = \{\,\omega_1, \omega_2, ..., \omega_p\}$ uz uvjet $Y(\omega_i) \leq Y(\omega_{i+1}),\ 1 \leq i \leq p-1$. Definiramo

$$\bar{Y}(\omega_i) := \begin{cases} y^* = \dfrac{Y(\omega_1) + ... + Y(\omega_p)}{p} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid Y \leq q], & i \leq p \\ Y(\omega_i), & \text{inače.} \end{cases}$$

Za permutaciju π skupa $\{1, ..., p\}$ definiramo Y^π sa

$$Y^\pi(\omega_i) := \begin{cases} Y(\omega_{\pi(i)}), & 1 \leq i \leq p \\ Y(\omega_i), & p+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Primjećujemo da je $\bar{Y}$ aritmetička sredina $p!$ slučajnih varijabli Y^π. Pretpostavka da mjera rizika ρ ovisi samo o distribuciji diskontiranog rizika, implicira da je $\rho(r \cdot Y^\pi) = \rho(X)$ jer su Y^π i X/r jednako distribuirani. Konveksnost od ρ implicira da je $\rho(X) = \rho(r \cdot Y^\pi) \geq \rho(r \cdot \bar{Y})$, a pretpostavka da je $\rho \geq VaR_\alpha$ implicira da je $\rho(r \cdot \bar{Y}) \geq VaR_\alpha(r \cdot \bar{Y})$. Vrijedi

$$VaR_\alpha(r \cdot \bar{Y}) = -y^* = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-Y \mid Y \leq q],$$

pa je $\rho(X) \geq \mathbb{E}[-X/r \mid X/r \leq q] = TCE_\alpha(X)$. Prema Propoziciji 2.2.7 imamo jednakost $TCE_\alpha(X) = WCE_\alpha(X)$ na gustom skupu slučajnih varijabli X u $\mathcal{G}$ pa je na tom skupu $\rho \geq WCE_\alpha$. U nastavku dajemo neformalni dokaz da je skup rizika koji zadovoljavaju pretpostavke Propozicije 2.2.7 zaista gust u $\mathcal{G}$. Neka je $\widetilde{X} \in \mathcal{G}$ te kao i inače $|\Omega| = n$. Za proizvoljni $\varepsilon > 0$ želimo konstruirati $X \in \mathcal{G}$ čije će sve diskontirane vrijednosti za različite $\omega \in \Omega$ biti različite te će vrijediti da je $\mathbb{E}|X - \widetilde{X}| < \varepsilon$. Za početak stavimo $X = \widetilde{X}$. Promatramo redom $X(\omega_i)$ za $i = 1, .., n$. Ako X poprima vrijednost $X(\omega_i)$ za više elementarnih događaja $\omega \in \Omega$, izmijenimo $X(\omega_i)$ tako da mu pribrojimo minimalni element skupa

$$\Big\{\frac{n \cdot \varepsilon}{2^{(i-1)\cdot(n-1)+1}}, \frac{n \cdot \varepsilon}{2^{(i-1)\cdot(n-1)+2}}, ..., \frac{n \cdot \varepsilon}{2^{i\cdot(n-1)}}\Big\}$$

takav da je novodobivena vrijednost $X(\omega_i)$ različita od svih vrijednosti $X(\omega_j),\ j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}$. U nastavku zatim promatramo tako novo dobiveni X. Na taj način dobivamo X za kojeg su sve diskontirane vrijednosti različite za različite elementarne događaje te vrijedi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X-\widetilde{X}| &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\omega_i)\cdot|X(\omega_i)-\widetilde{X}(\omega_i)| \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X(\omega_i)-\widetilde{X}(\omega_i)| \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n\cdot\varepsilon}{2^{(i-1)\cdot(n-1)+1}} \\ &< \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Za kraj pokazujemo da je $\rho \geq WCE_\alpha$ na cijelom $\mathcal{G}$. ρ i WCE_α su koherentne, stoga i neprekidne pa je $f := \rho - WCE_\alpha$ također neprekidna na $\mathcal{G}$. Pretpostavimo da postoji $X_0 \in \mathcal{G}$ tako da je $\rho(X_0) < WCE_\alpha(X_0)$. Obzirom da neprekidna funkcija lokalno čuva predznak, postoji $\delta > 0$ tako da za $X \in \mathcal{G}$ takve da je $\mathbb{E}|X - X_0| < \delta$ je $f(X) < 0$. No, obzirom da je skup rizika čije su sve diskontirane vrijednosti različite za različite $\omega \in \Omega$, gust u $\mathcal{G}$, postoji element tog skupa $\widetilde{X}$ takav da je $\mathbb{E}|\widetilde{X} - X_0| < \delta$ te je $f(\widetilde{X}) \geq 0 \Rightarrow\!\Leftarrow$. $\square$

2.3 Očekivani manjak

Ranije smo spomenuli dvije mjere rizika: *Value-at-Risk* i najgore uvjetno očekivanje. VaR ne poštuje svojstvo subaditivnosti, stoga nije koherentan. S druge strane, najgore uvjetno očekivanje je koherentna mjera rizika, no ima veći značaj u teoretskom nego praktičnom smislu obzirom da zahtijeva poznavanje cijelog vjerojatnosnog prostora. Stoga sada uvodimo očekivani manjak (*eng. expected shortfall*) kao mjeru rizika koja je koherentna te se jednostavno računa u praksi. [2],[3]

Napomena 2.3.1. *Radi jednostavnosti uvodimo nove oznake koje ćemo u nastavku često koristiti. Neka je $X \in \mathcal{G}$. Definiramo:*

$$x_{(\alpha)} = \inf\{x \mid \mathbb{P}(X/r \leq x) \geq \alpha\}$$

$$x^{(\alpha)} = \inf\{x \mid \mathbb{P}(X/r \leq x) > \alpha\}.$$

Primijetimo,

$$VaR_\alpha(X) = -x^{(\alpha)}.$$

Neka je $\alpha = A\% \in (0,1)$ kojeg interpretiramo kao postotak "najgorih scenarija" koje promatramo. Kao što smo ranije spomenuli, *Value-at-Risk* smo definirali tako da sa vjerojatnošću $(1-\alpha)$ gubitak neće iznositi više od VaR_α, odnosno kao minimalni gubitak u $A\%$ najgorih slučajeva za naš portfelj. Obzirom da je VaR_α granična vrijednost za $A\%$ najgorih slučajeva, ne daje informaciju o gubitcima jednom kad oni premaše VaR_α. Pitanje koje se prirodno postavlja jest koji je očekivani gubitak za naš portfelj u $A\%$ najgorih slučajeva. U slučaju da je distribucija rizika X neprekidna, odgovor na to pitanje daje nam uvjetno očekivanje repa:

$$TCE_\alpha(X) = -\mathbb{E}_\mathbb{P}[X/r \mid X/r \leq -VaR_\alpha(X)] = -\mathbb{E}_\mathbb{P}[X/r \mid X/r \leq x^{(\alpha)}].$$

U slučaju općenitih distribucija, to ne mora vrijediti obzirom da događaj $\{X \leq x^{(\alpha)}\}$ može imati vjerojatnost veću od α pa je veći od našeg izabranog skupa $A\%$ najgorih slučajeva. To motivira sljedeću definiciju.

Definicija 2.3.2. *Neka je $X \in \mathcal{G}$ i $\alpha = A\% \in (0,1)$. $A\%$ očekivani manjak definiramo kao*

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\left(\mathbb{E}_\mathbb{P}\Big[\frac{X}{r}\cdot \mathbf{1}_{\{X/r\leq x^{(\alpha)}\}}\Big] - x^{(\alpha)}\cdot\Big(\mathbb{P}\Big[\frac{X}{r}\leq x^{(\alpha)}\Big]-\alpha\Big)\right)$$

Član $x^{(\alpha)}\cdot\big(\mathbb{P}\big[\frac{X}{r}\leq x^{(\alpha)}\big]-\alpha\big)$ interpretiramo kao suvišan dio koji moramo oduzeti od vrijednosti $\mathbb{E}_\mathbb{P}\big[\frac{X}{r}\cdot \mathbf{1}_{\{X/r\leq x^{(\alpha)}\}}\big]$ kada događaj $\{X/r \leq x^{(\alpha)}\}$ ima vjerojatnost veću od $\alpha = A\%$. Ako je $\mathbb{P}\big[\frac{X}{r}\leq x^{(\alpha)}\big] = \alpha$, što je uvijek slučaj kada je distribucija od X neprekidna, vrijedi:

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X) &= -\frac{1}{\alpha}\cdot\mathbb{E}_\mathbb{P}\Big[\frac{X}{r}\cdot \mathbf{1}_{\{X/r\leq x^{(\alpha)}\}}\Big] \\ &= -\frac{\mathbb{E}_\mathbb{P}\big[\frac{X}{r}\cdot \mathbf{1}_{\{X/r\leq x^{(\alpha)}\}}\big]}{\mathbb{P}\big[\frac{X}{r}\leq x^{(\alpha)}\big]} \\ &= -\mathbb{E}_\mathbb{P}[X/r \mid X/r \leq x^{(\alpha)}] = TCE_\alpha(X). \end{aligned}$$

Napomena 2.3.3. *Primijetimo da definicija očekivanog manjka ne ovisi o izboru gornjeg ($x^{(\alpha)}$), odnosno donjeg ($x_{(\alpha)}$) kvantila. Tj. ekvivalentno možemo pisati:*

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\left(\mathbb{E}_\mathbb{P}\Big[\frac{X}{r}\cdot \mathbf{1}_{\{X/r\leq x_{(\alpha)}\}}\Big] - x_{(\alpha)}\cdot\Big(\mathbb{P}\Big[\frac{X}{r}\leq x_{(\alpha)}\Big]-\alpha\Big)\right).$$

Dokaz. Prisjetimo se da je Ω konačan skup elementarnih događaja s pozitivnim vjerojatnostima, $|\Omega| = n$. Neka su $y_1 < y_2 < ... < y_n$ vrijednosti koje poprima X/r na

Ω. U slučaju da je $x_{(\alpha)} = x^{(\alpha)}$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo $x_{(\alpha)} \neq x^{(\alpha)}$. To će vrijediti ako postoji y_i, $i \in \{1, ..., n\}$ takav da je $\mathbb{P}(X/r \leq y_i) = \alpha$. U tom slučaju je $x_{(\alpha)} = y_i$ i $x^{(\alpha)} = y_{i+1}$ te primijetimo da je $\{X/r < x^{(\alpha)}\} = \{X/r \leq x_{(\alpha)}\}$. Slijedi da je $\mathbb{P}(X/r \leq x_{(\alpha)}) - \alpha = 0$ pa preostaje pokazati

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}}\big] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}_{\{X/r \leq x^{(\alpha)}\}}\big] - x^{(\alpha)} \cdot \big(\mathbb{P}\big[\frac{X}{r} \leq x^{(\alpha)}\big] - \alpha\big).$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}_{\{X/r \leq x^{(\alpha)}\}}\big] - x^{(\alpha)} \cdot \big(\mathbb{P}\big[\frac{X}{r} \leq x^{(\alpha)}\big] - \alpha\big) \\
=&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}_{\{X/r < x^{(\alpha)}\}} + \frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}_{\{X/r = x^{(\alpha)}\}}\big] - x^{(\alpha)} \cdot \big(\mathbb{P}\big[\frac{X}{r} < x^{(\alpha)}\big] + \mathbb{P}\big[\frac{X}{r} = x^{(\alpha)}\big] - \alpha\big) \\
=&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}}\big] + \cancel{x^{(\alpha)} \cdot \mathbb{P}\big(\frac{X}{r} = x^{(\alpha)}\big)} \\
&- x^{(\alpha)} \cdot \big(\underbrace{\mathbb{P}\big[\frac{X}{r} \leq x_{(\alpha)}\big] - \alpha}_{=0}\big) - \cancel{x^{(\alpha)} \cdot \mathbb{P}\big(\frac{X}{r} = x^{(\alpha)}\big)} \\
=&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}}\big],
\end{aligned}$$

gdje smo u trećoj jednakosti koristili $\{X/r < x^{(\alpha)}\} = \{X/r \leq x_{(\alpha)}\}$ te $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}_{\{X/r = x^{(\alpha)}\}}\big] = x^{(\alpha)} \cdot \mathbb{P}\big(\frac{X}{r} = x^{(\alpha)}\big)$. $\square$

U nastavku koristimo formulaciju očekivanog manjka iz Napomene 2.3.3. Prije nego pokažemo da je ES_α koherentna mjera rizika, dokazati ćemo jednu korisnu lemu.

Lema 2.3.4. *Neka je $X \in \mathcal{G}$. Za $x \in \mathbb{R}$ definiramo:*

$$\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x\}} = \begin{cases} \mathbf{1}_{\{X/r \leq x\}}, & \textit{ako je } \mathbb{P}(X/r = x) = 0, \\ \mathbf{1}_{\{X/r \leq x\}} + \frac{\alpha - \mathbb{P}(X/r \leq x)}{\mathbb{P}(X/r = x)} \cdot \mathbf{1}_{\{X/r = x\}}, & \textit{ako je } \mathbb{P}(X/r = x) > 0. \end{cases}$$

Vrijedi:

$$\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}} \in [0, 1], \tag{2.2}$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}}] = \alpha \tag{2.3}$$

te

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}}] = -ES_\alpha(X) \tag{2.4}$$

Dokaz. Neka je F funkcija distribucije od X/r. Za početak pokazujemo da je $\mathbb{P}(X/r = x_{(\alpha)}) > 0$ odnosno da F ima prekid u $x_{(\alpha)}$. F je distribucija diskretne slučajne varijable, pa je po dijelovima konstantna. Pretpostavimo da je $\mathbb{P}(X/r = x_{(\alpha)}) = 0$. Slijedi da je $\mathbb{P}(X/r \leq x_{(\alpha)}) - \mathbb{P}(X/r < x_{(\alpha)}) = 0$ što povlači da je $F(x_{(\alpha)}) = F(x_{(\alpha)}-)$. Obzirom da je funkcija distribucije neprekidna s desna, zaključujemo da je F neprekidna u $x_{(\alpha)}$. Obzirom da je F po dijelovima konstantna, postoji $\varepsilon > 0$ takav da je F konstantna na $(x_{(\alpha)} - \varepsilon, x_{(\alpha)} + \varepsilon)$. Zaključujemo da postoji $x \in (x_{(\alpha)} - \varepsilon, x_{(\alpha)})$ takav da je $F(x) = F(x_{(\alpha)})$. S druge strane,

$$x_{(\alpha)} = \inf\{x \ : \ \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\}$$

pa za $x < x_{(\alpha)}$ vrijedi da je $F(x) < \alpha$ što daje kontradikciju.
Sada redom dokazujemo (2.2), (2.3) te (2.4).

- Po prethodno pokazanom vrijedi

$$\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}} = \mathbf{1}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}} + \frac{\alpha - \mathbb{P}(X/r \leq x_{(\alpha)})}{\mathbb{P}(X/r = x_{(\alpha)})} \cdot \mathbf{1}_{\{X/r = x_{(\alpha)}\}}.$$

Na $\{X/r < x_{(\alpha)}\}$ (2.2) očito vrijedi. Na $\{X/r = x_{(\alpha)}\}$ imamo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}} &= 1 + \frac{\alpha - \mathbb{P}(X/r \leq x_{(\alpha)})}{\mathbb{P}(X/r = x_{(\alpha)})} \\
&= \frac{\alpha + \mathbb{P}(X/r = x_{(\alpha)}) - \mathbb{P}(X/r \leq x_{(\alpha)})}{\mathbb{P}(X/r = x_{(\alpha)})} \\
&= \frac{\alpha - \mathbb{P}(X/r < x_{(\alpha)})}{\mathbb{P}(X/r = x_{(\alpha)})} \\
&= \frac{\alpha - F(x_{(\alpha)}-)}{F(x_{(\alpha)}) - F(x_{(\alpha)}-)}.
\end{aligned}$$

$x_{(\alpha)} = \inf\{x \ : \ \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\}$ pa za svaki $x \in \mathbb{R}$, $x < x_{(\alpha)}$ vrijedi $F(x) < \alpha$ što povlači da je $F(x_{(\alpha)}-) \leq \alpha$. S druge strane, za svaki $x \in \mathbb{R}$, $x > x_{(\alpha)}$ vrijedi $F(x) \geq \alpha$ pa je $F(x_{(\alpha)}+) \geq \alpha$. Zaključujemo $F(x_{(\alpha)}-) \leq \alpha \leq F(x_{(\alpha)}+)$, odnosno $F(x_{(\alpha)}-) \leq \alpha \leq F(x_{(\alpha)})$ jer je F neprekidna s desna. Oduzmemo li nejednakostima $F(x_{(\alpha)}-)$, dobivamo

$$0 \leq \alpha - F(x_{(\alpha)}-) \leq F(x_{(\alpha)}) - F(x_{(\alpha)}-)$$

što pokazuje (2.2).

- Vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r\le x_{(\alpha)}\}}] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_{\{X/r\le x_{(\alpha)}\}}] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\frac{\alpha - \mathbb{P}(X/r \le x_{(\alpha)})}{\mathbb{P}(X/r = x_{(\alpha)})} \cdot \mathbf{1}_{\{X/r=x_{(\alpha)}\}}\Big] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_{\{X/r\le x_{(\alpha)}\}}] + \frac{\alpha - \mathbb{P}(X/r \le x_{(\alpha)})}{\mathbb{P}(X/r = x_{(\alpha)})} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_{\{X/r=x_{(\alpha)}\}}] \\
&= \mathbb{P}(X/r \le x_{(\alpha)}) + \frac{\alpha - \mathbb{P}(X/r \le x_{(\alpha)})}{\cancel{\mathbb{P}(X/r = x_{(\alpha)})}} \cdot \cancel{\mathbb{P}(X/r = x_{(\alpha)})} \\
&= \mathbb{P}(X/r \le x_{(\alpha)}) + \alpha - \mathbb{P}(X/r \le x_{(\alpha)}) = \alpha,
\end{aligned}$$

  čime smo pokazali (2.3).

- Za kraj još pokazujemo

$$\alpha^{-1} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r\le x_{(\alpha)}\}}] = -ES_\alpha(X).$$

  Vrijedi

$$\begin{aligned}
&\alpha^{-1} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r\le x_{(\alpha)}\}}] = \\
=&\alpha^{-1}\Big(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X/r \cdot \mathbf{1}_{\{X/r\le x_{(\alpha)}\}}] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\frac{\alpha - \mathbb{P}(X/r \le x_{(\alpha)})}{\mathbb{P}(X/r = x_{(\alpha)})} \cdot X/r \cdot \mathbf{1}_{\{X/r=x_{(\alpha)}\}}\Big]\Big) \\
=&\alpha^{-1}\Big(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X/r \cdot \mathbf{1}_{\{X/r\le x_{(\alpha)}\}}] + \frac{\alpha - \mathbb{P}(X/r \le x_{(\alpha)})}{\mathbb{P}(X/r = x_{(\alpha)})} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X/r \cdot \mathbf{1}_{\{X/r=x_{(\alpha)}\}}]\Big) \\
=&\alpha^{-1}\Big(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X/r \cdot \mathbf{1}_{\{X/r\le x_{(\alpha)}\}}] + \frac{\alpha - \mathbb{P}(X/r \le x_{(\alpha)})}{\mathbb{P}(X/r = x_{(\alpha)})} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[x_{(\alpha)} \cdot \mathbf{1}_{\{X/r=x_{(\alpha)}\}}]\Big) \\
=&\alpha^{-1}\Big(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X/r \cdot \mathbf{1}_{\{X/r\le x_{(\alpha)}\}}] + \frac{\alpha - \mathbb{P}(X/r \le x_{(\alpha)})}{\cancel{\mathbb{P}(X/r = x_{(\alpha)})}} \cdot x_{(\alpha)} \cancel{\mathbb{P}(X/r = x_{(\alpha)})}\Big) \\
=&\alpha^{-1}\Big(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X/r \cdot \mathbf{1}_{\{X/r\le x_{(\alpha)}\}}] - x_{(\alpha)} \cdot (\mathbb{P}(X/r \le x_{(\alpha)}) - \alpha)\Big) \\
=&-ES_\alpha(X),
\end{aligned}$$

  što daje (2.4).

□

Propozicija 2.3.5. *ES_α je koherentna mjera rizika.*

Dokaz. Dokazujemo da ES_α redom zadovoljava svojstva translacijske invarijantnosti, subaditivnosti, pozitivne homogenosti te monotonosti.

- Translacijska invarijantnost
  Neka je $X \in \mathcal{G}$. Definiramo $\bar{x}_{(\alpha)}$ sa

$$\bar{x}_{(\alpha)} = \inf\{x : \mathbb{P}(\frac{X + \alpha \cdot r}{r} \leq x) \geq \alpha\}$$

te primjećujemo da vrijedi

$$\begin{aligned}
\bar{x}_{(\alpha)} &= \inf\{x : \mathbb{P}(\frac{X + \alpha \cdot r}{r} \leq x) \geq \alpha\} \\
&= \inf\{x : \mathbb{P}(\frac{X}{r} + \alpha \leq x) \geq \alpha\} \\
&= \inf\{x : \mathbb{P}(\frac{X}{r} \leq x - \alpha) \geq \alpha\} \\
&= \inf\{y + \alpha : \mathbb{P}(\frac{X}{r} \leq y) \geq \alpha\} \\
&= \inf\{y : \mathbb{P}(\frac{X}{r} \leq y) \geq \alpha\} + \alpha \\
&= x_{(\alpha)} + \alpha.
\end{aligned}$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
&ES_\alpha(X + \alpha \cdot r) = \\
=& - \alpha^{-1} \left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X + \alpha \cdot r}{r} \cdot \mathbf{1}_{\{\frac{X+\alpha\cdot r}{r} \leq \bar{x}_{(\alpha)}\}}\big] - \bar{x}_{(\alpha)} \cdot \big(\mathbb{P}\big[\frac{X + \alpha \cdot r}{r} \leq \bar{x}_{(\alpha)}\big] - \alpha\big) \right) \\
=& - \alpha^{-1} \left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}_{\{\frac{X}{r}+\alpha \leq \bar{x}_{(\alpha)}\}}\big] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\alpha \cdot \mathbf{1}_{\{\frac{X}{r}+\alpha \leq \bar{x}_{(\alpha)}\}}\big] - \bar{x}_{(\alpha)} \cdot \big(\mathbb{P}\big[\frac{X}{r} + \alpha \leq \bar{x}_{(\alpha)}\big] - \alpha\big) \right) \\
=& - \alpha^{-1} \left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}_{\{\frac{X}{r} \leq \bar{x}_{(\alpha)} - \alpha\}}\big] + \alpha \cdot \mathbb{P}\big(\frac{X}{r} \leq \bar{x}_{(\alpha)} - \alpha\big) - \bar{x}_{(\alpha)} \cdot \big(\mathbb{P}\big[\frac{X}{r} \leq \bar{x}_{(\alpha)} - \alpha\big] - \alpha\big) \right) \\
=& - \alpha^{-1} \left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}_{\{\frac{X}{r} \leq x_{(\alpha)}\}}\big] + \alpha \cdot \mathbb{P}\big(\frac{X}{r} \leq x_{(\alpha)}\big) - (x_{(\alpha)} + \alpha) \cdot \big(\mathbb{P}\big[\frac{X}{r} \leq x_{(\alpha)}\big] - \alpha\big) \right) \\
=& - \alpha^{-1} \left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}_{\{\frac{X}{r} \leq x_{(\alpha)}\}}\big] - x_{(\alpha)} \cdot \big(\mathbb{P}\big[\frac{X}{r} \leq x_{(\alpha)}\big] - \alpha\big) + \alpha^2 \right) \\
=& ES_\alpha(X) - \alpha.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da očekivani manjak zadovoljava svojstvo translacijske invarijantnosti.

- Subaditivnost
  Ovaj dokaz provodimo uz pomoć indikatorske funkcije koju smo definirali u Lemi 2.3.4. Neka su $X, Y \in \mathcal{G}$ te definiramo $Z := X + Y \in \mathcal{G}$. Za $\alpha \in (0,1)$ želimo pokazati

$$ES_\alpha(Z) = ES_\alpha(X+Y) \leq ES(X) + ES(Y).$$

Promotrimo prvo izraz

$$\Big(\frac{X}{r} - x_{(\alpha)}\Big) \cdot \Big(\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z/r \leq z_{(\alpha)}\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}}\Big). \tag{2.5}$$

1. Na događaju $\{\frac{X}{r} < x_{(\alpha)}\}$ je po (2.2), $\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z/r \leq z_{(\alpha)}\}} \in [0,1]$, a $\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}} = 1$ po definiciji. Prema tome $\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z/r \leq z_{(\alpha)}\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}} \leq 0$. Stoga je (2.5) nenegativno kao produkt dva nepozitivna faktora.
2. Na događaju $\{\frac{X}{r} > x_{(\alpha)}\}$ je opet $\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z/r \leq z_{(\alpha)}\}} \in [0,1]$, a $\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}} = 0$ po definiciji. Prema tome $\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z/r \leq z_{(\alpha)}\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}} \geq 0$. Stoga je (2.5) nenegativno kao produkt dva nenegativna faktora.
3. Za kraj, na događaju $\{\frac{X}{r} = x_{(\alpha)}\}$ je (2.5) jednako nuli.

Zaključujemo da je

$$\Big(\frac{X}{r} - x_{(\alpha)}\Big) \cdot \Big(\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z/r \leq z_{(\alpha)}\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}}\Big) \geq 0 \ g.s.$$

pa zbog monotonosti očekivanja vrijedi:

$$\mathbb{E}\big[X(\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z/r \leq z_{(\alpha)}\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}})\big] \geq \mathbb{E}\big[x_{(\alpha)}(\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z/r \leq z_{(\alpha)}\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}})\big]. \tag{2.6}$$

Računamo

$$\begin{aligned}
&\alpha \cdot \big(ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y) - ES_\alpha(Z)\big) = \\
&\overset{(2.4)}{=} \mathbb{E}\big[Z\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z/r \leq z_{(\alpha)}\}} - X\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}} - Y\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Y/r \leq y_{(\alpha)}\}}\big] \\
&= \mathbb{E}\Big[X\big(\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z/r \leq z_{(\alpha)}\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}}\big) + Y\big(\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z/r \leq z_{(\alpha)}\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Y/r \leq y_{(\alpha)}\}}\big)\Big] \\
&\overset{(2.6)}{\geq} x_{(\alpha)}\mathbb{E}\big[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z/r \leq z_{(\alpha)}\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}}\big] + y_{(\alpha)}\mathbb{E}\big[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z/r \leq z_{(\alpha)}\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Y/r \leq y_{(\alpha)}\}}\big] \\
&\overset{(2.3)}{=} x_{(\alpha)}(\alpha - \alpha) + y_{(\alpha)}(\alpha - \alpha) = 0,
\end{aligned}$$

iz čega slijedi $ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y) - ES_\alpha(Z) \geq 0$, odnosno da je ES_α subaditivna mjera rizika.

- Pozitivna homogenost
  Neka je $X \in \mathcal{G}$. Želimo pokazati da za $\lambda \geq 0$ vrijedi
$$ES_\alpha(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot ES_\alpha(X).$$
  Očito je $ES_\alpha(0) = 0$. Pretpostavimo da je $\lambda > 0$. Definiramo $\tilde{x}_{(\alpha)} = \inf\{x : \mathbb{P}(\lambda \cdot X \leq x) \geq \alpha\}$ te primijetimo da vrijedi
$$\begin{aligned}\tilde{x}_{(\alpha)} &= \inf\{x : \mathbb{P}(\lambda \cdot X \leq x) \geq \alpha\}\\ &= \inf\{x : \mathbb{P}(X \leq \frac{x}{\lambda}) \geq \alpha\}\\ &= \inf\{\lambda \cdot y : \mathbb{P}(X \leq y) \geq \alpha\}\\ &= \lambda \cdot x_{(\alpha)}.\end{aligned}$$
  Računamo
$$\begin{aligned}ES_\alpha(\lambda \cdot X) &\overset{(2.4)}{=} -\alpha^{-1} \cdot \mathbb{E}[\frac{\lambda \cdot X}{r} \cdot \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{\frac{\lambda \cdot X}{r} \leq \tilde{x}_{(\alpha)}\}}]\\ &= -\alpha^{-1} \cdot \lambda \cdot \mathbb{E}[\frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{\frac{X}{r} \leq \frac{\tilde{x}_{(\alpha)}}{\lambda}\}}]\\ &= -\alpha^{-1} \cdot \lambda \cdot \mathbb{E}[\frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{\frac{X}{r} \leq x_{(\alpha)}\}}]\\ &\overset{(2.4)}{=} \lambda \cdot ES_\alpha(X).\end{aligned}$$
  Prema tome, svojstvo pozitivne homogenosti je zadovoljeno.

- Monotonost
  Neka je $X \leq Y$ *g.s.* Pokazujemo da je tada
$$ES_\alpha(X) \geq ES_\alpha(Y).$$
  Primijetimo da je $x_{(\alpha)} \leq y_{(\alpha)}$. Naime, ukoliko pretpostavimo suprotno da je $x_{(\alpha)} > y_{(\alpha)}$, slijedi da je $\mathbb{P}(\frac{X}{r} \leq y_{(\alpha)}) < \alpha$. S druge strane, zbog $\frac{X}{r} \leq \frac{Y}{r}$ *g.s.* te $\mathbb{P}(\frac{Y}{r} \leq y_{(\alpha)}) \geq \alpha$ slijedi da je $\mathbb{P}(\frac{X}{r} \leq y_{(\alpha)}) \geq \alpha$ što daje kontradikciju.
  $ES_\alpha(X)$ možemo zapisati na sljedeći način:
$$\begin{aligned}ES_\alpha(X) &= -\alpha^{-1} \cdot \left(\mathbb{E}_\mathbb{P}\big[\frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}}\big] - x_{(\alpha)} \cdot \big(\mathbb{P}\big[\frac{X}{r} \leq x_{(\alpha)}\big] - \alpha\big)\right)\\ &= -\alpha^{-1} \cdot \left(\mathbb{E}_\mathbb{P}\big[\frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}_{\{X/r < x_{(\alpha)}\}}\big] + x_{(\alpha)} \cdot \mathbb{P}(\frac{X}{r} = x_{(\alpha)}) - x_{(\alpha)} \cdot \big(\mathbb{P}\big[\frac{X}{r} \leq x_{(\alpha)}\big] - \alpha\big)\right)\\ &= -\alpha^{-1} \cdot \left(\mathbb{E}_\mathbb{P}\big[\frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}_{\{X/r < x_{(\alpha)}\}}\big] + x_{(\alpha)} \cdot \big(\alpha - \mathbb{P}\big[\frac{X}{r} < x_{(\alpha)}\big]\big)\right).\end{aligned}$$

Zaključujemo da je dovoljno pokazati da je

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X}{r}\cdot\mathbf{1}_{\{X/r<x_{(\alpha)}\}}\big]+x_{(\alpha)}\cdot\big(\alpha-\mathbb{P}\big[\frac{X}{r}<x_{(\alpha)}\big]\big)$$

manje ili jednako od

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{Y}{r}\cdot\mathbf{1}_{\{Y/r<y_{(\alpha)}\}}\big]+y_{(\alpha)}\cdot\big(\alpha-\mathbb{P}\big[\frac{Y}{r}<y_{(\alpha)}\big]\big).$$

Promatramo tri slučaja:

1. Pretpostavimo $\mathbb{P}(X/r<x_{(\alpha)})=\mathbb{P}(Y/r<y_{(\alpha)})$. Iz $X\leq Y$ $g.s.$ te monotonosti očekivanja slijedi da je

   $$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{Y}{r}\cdot\mathbf{1}_{\{Y/r\leq y_{(\alpha)}\}}\big]\geq\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X}{r}\cdot\mathbf{1}_{\{Y/r\leq y_{(\alpha)}\}}\big].$$

   Obzirom da X/r na događaju $\{\frac{X}{r}<x_{(\alpha)}\}$ poprima vrijednosti manje ili jednake nego na događaju $\{\frac{Y}{r}<y_{(\alpha)}\}$ te su ta dva događaja istih vjerojatnosti, slijedi da je

   $$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X}{r}\cdot\mathbf{1}_{\{Y/r\leq y_{(\alpha)}\}}\big]\geq\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X}{r}\cdot\mathbf{1}_{\{X/r\leq x_{(\alpha)}\}}\big].$$

   Također, vrijedi

   $$\begin{aligned}x_{(\alpha)}\cdot(\alpha-\mathbb{P}(X/r<x_{(\alpha)}))&=x_{(\alpha)}\cdot(\alpha-\mathbb{P}(Y/r<y_{(\alpha)}))\\&\leq y_{(\alpha)}\cdot(\alpha-\mathbb{P}(Y/r<y_{(\alpha)})).\end{aligned}$$

   Stoga zaključujemo da je u ovom slučaju $ES_\alpha(X)\geq ES_\alpha(Y)$.

2. Pretpostavimo sada da je $\mathbb{P}(X/r<x_{(\alpha)})<\mathbb{P}(Y/r<y_{(\alpha)})$. U ovom slučaju $-\alpha\cdot ES_\alpha(X)$ možemo zapisati kao

   $$\begin{aligned}-\alpha\cdot ES_\alpha(X)&=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X}{r}\cdot\mathbf{1}_{\{X/r<x_{(\alpha)}\}}\big]+x_{(\alpha)}\cdot\big(\alpha-\mathbb{P}\big[\frac{X}{r}<x_{(\alpha)}\big]\big)\\&=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X}{r}\cdot\mathbf{1}_{\{X/r<x_{(\alpha)}\}}\big]+x_{(\alpha)}\cdot\big(\mathbb{P}(\frac{Y}{r}<y_{(\alpha)})-\mathbb{P}(\frac{X}{r}<x_{(\alpha)})\big)+\\&+x_{(\alpha)}\cdot\big(\alpha-\mathbb{P}\big[\frac{Y}{r}<y_{(\alpha)}\big]\big).\end{aligned}$$

   Uz sličan argument kao i u prethodnom slučaju vrijedi:

   $$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{Y}{r}\cdot\mathbf{1}_{\{Y/r<y_{(\alpha)}\}}\big]\\&\quad\geq\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X}{r}\cdot\mathbf{1}_{\{Y/r<y_{(\alpha)}\}}\big]\\&\quad\geq\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X}{r}\cdot\mathbf{1}_{\{X/r<x_{(\alpha)}\}}\big]+x_{(\alpha)}\cdot\big(\mathbb{P}(\frac{Y}{r}<y_{(\alpha)})-\mathbb{P}(\frac{X}{r}<x_{(\alpha)})\big),\end{aligned}$$

te
$$x_{(\alpha)} \cdot \big(\alpha - \mathbb{P}\big[\frac{Y}{r} < y_{(\alpha)}\big]\big) \leq y_{(\alpha)} \cdot \big(\alpha - \mathbb{P}\big[\frac{Y}{r} < y_{(\alpha)}\big]\big).$$

3. Za kraj, pretpostavimo $\mathbb{P}(X/r < x_{(\alpha)}) > \mathbb{P}(Y/r < y_{(\alpha)})$. Imamo

$$\begin{aligned}
-\alpha \cdot ES_\alpha(Y) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{Y}{r} \cdot \mathbf{1}_{\{Y/r<y_{(\alpha)}\}}\big] + y_{(\alpha)} \cdot \big(\alpha - \mathbb{P}\big[\frac{Y}{r} < y_{(\alpha)}\big]\big) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{Y}{r} \cdot \mathbf{1}_{\{Y/r<y_{(\alpha)}\}}\big] + y_{(\alpha)} \cdot \big(\mathbb{P}(\frac{X}{r} < x_{(\alpha)}) - \mathbb{P}(\frac{Y}{r} < y_{(\alpha)})\big) + \\
&\quad + y_{(\alpha)} \cdot \big(\alpha - \mathbb{P}\big[\frac{X}{r} < x_{(\alpha)}\big]\big) \\
&\geq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}_{\{Y/r<y_{(\alpha)}\}}\big] + x_{(\alpha)} \cdot \big(\mathbb{P}(\frac{X}{r} < x_{(\alpha)}) - \mathbb{P}(\frac{Y}{r} < y_{(\alpha)})\big) + \\
&\quad + x_{(\alpha)} \cdot \big(\alpha - \mathbb{P}\big[\frac{X}{r} < x_{(\alpha)}\big]\big) \\
&\geq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\frac{X}{r} \cdot \mathbf{1}_{\{X/r<x_{(\alpha)}\}}\big] + x_{(\alpha)} \cdot \big(\alpha - \mathbb{P}\big[\frac{X}{r} < x_{(\alpha)}\big]\big) \\
&= -\alpha \cdot ES_\alpha(X)
\end{aligned}$$

gdje prva nejednakost slijedi iz $X \leq Y$ $g.s.$ te $x_{(\alpha)} \leq y_{(\alpha)}$, a druga nejednakost iz činjenice da $x_{(\alpha)}$ dominira X/r na događaju $\{X/r < x_{(\alpha)}\}$.

Zaključujemo da je ES_α monotona mjera rizika.

□

U nastavku dokazujemo alternativnu reprezentaciju očekivanog manjka iz koje će slijediti neprekidnost u α. Intuitivno, to nam osigurava da se očekivani manjak neće drastično promijeniti za male promjene razine pouzdanosti α.

Propozicija 2.3.6. *Neka je $X \in \mathcal{G}$ i $\alpha \in (0,1)$. Tada vrijedi*

$$ES_\alpha(X) = -\alpha^{-1} \int_0^\alpha x_{(u)} du.$$

Dokaz. Neka je U realna slučajna varijabla na nekom vjerojatnosnom prostoru koja je uniformno distribuirana na $(0,1)$ te neka je F funkcija distribucije slučajne varijable X. Generalizirani inverz definiran je sa

$$F^{\leftarrow}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}, \; u \in (0,1)$$

i vrijedi da je $F^{\leftarrow}(U)$ jednako distribuirano kao i slučajna varijabla X. U nastavku koristimo navedeni rezultat. Primijetimo da je $F^{\leftarrow}(u)$ jednako $x_{(u)}$ u našim oznakama. Obzirom da je $u \mapsto x_{(u)}$ neopadajuća funkcija slijedi

$$\{U \leq \alpha\} \subset \{F^{\leftarrow}(U) \leq F^{\leftarrow}(\alpha) = x_{(\alpha)}\} \tag{2.7}$$

te

$$\{U > \alpha\} \subset \{F^{\leftarrow}(U) \geq x_{(\alpha)}\}.$$

Stoga zaključujemo da je

$$\{U > \alpha\} \cap \{F^{\leftarrow}(U) \leq x_{(\alpha)}\} \subset \{F^{\leftarrow}(U) = x_{(\alpha)}\}. \tag{2.8}$$

Računamo

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha x_{(u)} du &= \mathbb{E}[F^{\leftarrow}(U) \cdot \mathbf{1}_{\{U \leq \alpha\}}] \\ &= \mathbb{E}[F^{\leftarrow}(U) \cdot \mathbf{1}_{\{F^{\leftarrow}(U) \leq x_{(\alpha)}\}}] - \mathbb{E}[F^{\leftarrow}(U) \cdot \mathbf{1}_{\{U < \alpha\} \cap \{F^{\leftarrow}(U) \leq x_{(\alpha)}\}}].\end{aligned}$$

Obzirom da je $F^{\leftarrow}(U) \sim X$ vrijedi da je $\mathbb{E}[F^{\leftarrow}(U) \cdot \mathbf{1}_{\{F^{\leftarrow}(U) \leq x_{(\alpha)}\}}] = \mathbb{E}[X \cdot \mathbf{1}_{\{X \leq x_{(\alpha)}\}}]$. Zbog (2.8) slijedi da je $F^{\leftarrow}(U) = x_{(\alpha)}$ na događaju $\{U > \alpha\} \cap \{F^{\leftarrow}(U) \leq x_{(\alpha)}\}$. Također, vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U > \alpha,\ F^{\leftarrow}(U) \leq x_{(\alpha)}) &= \mathbb{P}(F^{\leftarrow}(U) \leq x_{(\alpha)}) - \mathbb{P}(F^{\leftarrow}(U) \leq x_{(\alpha)},\ U \leq \alpha) \\ &\overset{(2.7)}{=} \mathbb{P}(F^{\leftarrow}(U) \leq x_{(\alpha)}) - \mathbb{P}(U \leq \alpha).\end{aligned}$$

Sada zbog $F^{\leftarrow}(U) \sim X$ i $\mathbb{P}(U \leq u) = u,\ u \in (0,1)$ slijedi da je $\mathbb{E}[F^{\leftarrow}(U) \cdot \mathbf{1}_{\{U < \alpha\} \cap \{F^{\leftarrow}(U) \leq \alpha\}}] = x_{(\alpha)} \cdot (\mathbb{P}(X \leq x_{(\alpha)})) - \alpha)$. Tvrdnja propozicije sada slijedi množenjem jednakosti

$$\int_0^\alpha x_{(u)} du = \mathbb{E}[X \cdot \mathbf{1}_{\{X \leq x_{(\alpha)}\}}] + x_{(\alpha)} \cdot (\alpha - \mathbb{P}(X \leq x_{(\alpha)})))$$

sa $-\alpha^{-1}$. □

Korolar 2.3.7. *Za $X \in \mathcal{G}$, preslikavanje $\alpha \mapsto ES_\alpha(X)$ je neprekidno na $(0,1)$.*

Dokaz. Slijedi iz Propozicije 2.3.6. □

Sljedeće svojstvo koje dokazujemo je monotonost očekivanog manjka u α. Odnosno, što je α manji, mjera rizika je veća.

Propozicija 2.3.8. *Neka je $X \in \mathcal{G}$. Tada za svaki $\alpha \in (0,1)$ te $\varepsilon > 0$ takav da je $\alpha + \varepsilon < 1$ vrijedi nejednakost:*

$$ES_{\alpha+\varepsilon}(X) \leq ES_\alpha(X).$$

Dokaz. U ovom dokazu koristimo rezultate iz Leme 2.3.4. Neka je $X \in \mathcal{G}$, $\alpha \in (0,1)$ te neka je $\varepsilon > 0$ takav da je $\alpha + \varepsilon < 1$.
Za početak promotrimo izraz

$$\big(X - x_{(\alpha)}\big) \cdot \big(\alpha \mathbf{1}^{(\alpha+\varepsilon)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha+\varepsilon)}\}} - (\alpha+\varepsilon)\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}}\big). \tag{2.9}$$

1. Na događaju $\{X < x_{(\alpha)}\}$ je po (2.2) $\alpha \mathbf{1}^{(\alpha+\varepsilon)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha+\varepsilon)}\}} \in [0,\alpha]$ te je $(\alpha+\varepsilon)\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}} = \alpha + \varepsilon$ po definiciji indikatorske funkcije iz Leme 2.3.4. Prema tome, (2.9) je nenegativno kao produkt dva nepozitivna elementa.

2. Na događaju $\{X > x_{(\alpha)}\}$ je po definiciji indikatorske funkcije iz Leme 2.3.4 $(\alpha+\varepsilon)\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}} = 0$ te je kao i ranije $\alpha \mathbf{1}^{(\alpha+\varepsilon)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha+\varepsilon)}\}} \in [0,\alpha]$. Zaključujemo da je (2.9) nenegativno kao produkt dva nenegativna elementa.

3. Za kraj, na događaju $\{X = x_{(\alpha)}\}$ je (2.9) jednako nuli.

Zaključujemo da je

$$\big(X - x_{(\alpha)}\big) \cdot \big(\alpha \mathbf{1}^{(\alpha+\varepsilon)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha+\varepsilon)}\}} - (\alpha+\varepsilon)\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}}\big) \geq 0 \ g.s.$$

Iz monotonosti očekivanja zatim slijedi da je

$$\mathbb{E}\Big[X \cdot \big(\alpha \mathbf{1}^{(\alpha+\varepsilon)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha+\varepsilon)}\}} - (\alpha+\varepsilon)\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}}\big)\Big] \geq \mathbb{E}\Big[x_{(\alpha)} \cdot \big(\alpha \mathbf{1}^{(\alpha+\varepsilon)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha+\varepsilon)}\}} - (\alpha+\varepsilon)\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}}\big)\Big] \tag{2.10}$$

Uz reprezentaciju očekivanog manjka iz (2.4) računamo:

$$\begin{aligned}
ES_\alpha(X) - ES_{\alpha+\varepsilon}(X) &= \mathbb{E}\Big[X\Big((\alpha+\varepsilon)^{-1}\mathbf{1}^{(\alpha+\varepsilon)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha+\varepsilon)}\}} - \alpha^{-1}\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}}\Big)\Big] \\
&= (\alpha(\alpha+\varepsilon))^{-1}\mathbb{E}\Big[X\Big(\alpha \mathbf{1}^{(\alpha+\varepsilon)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha+\varepsilon)}\}} - (\alpha+\varepsilon)\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}}\Big)\Big] \\
&\overset{(2.10)}{\geq} (\alpha(\alpha+\varepsilon))^{-1}\mathbb{E}\Big[x_{(\alpha)}\Big(\alpha \mathbf{1}^{(\alpha+\varepsilon)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha+\varepsilon)}\}} - (\alpha+\varepsilon)\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}}\Big)\Big] \\
&= \frac{x_{(\alpha)}}{\alpha(\alpha+\varepsilon)}\Big(\alpha\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}^{(\alpha+\varepsilon)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha+\varepsilon)}\}}\Big] - (\alpha+\varepsilon)\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X/r \leq x_{(\alpha)}\}}\Big]\Big) \\
&\overset{(2.3)}{=} \frac{x_{(\alpha)}}{\alpha(\alpha+\varepsilon)}(\alpha(\alpha+\varepsilon) - (\alpha+\varepsilon)\alpha) = 0.
\end{aligned}$$

Iz prethodnog računa slijedi

$$ES_\alpha(X) \geq ES_{\alpha+\varepsilon}(X)$$

čime smo pokazali monotonost u α. □

Bibliografija

[1] *Hyperplane separation theorem*, srpanj 2020, `https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperplane_separation_theorem`.

[2] C. Acerbi i D. Tasche, *On the Coherence of Expected Shortfall*, Journal of Banking & Finance **26** (2002), 1487–1503.

[3] C. Acerbi i D. Tasche, *Expected Shortfall: A Natural Coherent Alternative to Value at Risk*, Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena SpA **31** (2002), br. 2-2002, 379–388.

[4] B. Guljaš, *Matematička analiza 1&2*, skripta, 2018.

[5] Peter J. Huber, *Robust statistics, 2nd edition*, John Wiley & Sons, 2009.

[6] P.Artzner, F.Delbaen, J. M. Eber i D. Heat, *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance **9** (1999), br. 3, 203–228.

Sažetak

U ovom radu diskutiramo poželjna svojstva mjera rizika, te mjeru koja zadovoljava određena svojstva nazivamo "koherentnom". Aksiomatski definiramo "prihvatljive" skupove te pokazujemo njihovu vezu sa koherentnim mjerama rizika. Nadalje, pokazujemo reprezentaciju koherentnih mjera rizika uz pomoć generaliziranih scenarija. Na kraju proučavamo tri konkretne mjere rizika: *Value-at-Risk*, najgore uvjetno očekivanje i očekivani manjak. Pokazujemo da *Value-at-Risk*, unatoč tome što je široko primijenjena, nije koherentna te ukazujemo na potencijalne probleme primjene takve mjere. Najgore uvjetno očekivanje dajemo kao koherentnu mjera rizika od teoretskog značaja, a očekivani manjak predlažemo kao koherentnu alternativu praktične primjene.

Summary

In this paper, we discuss desirable properties for measures of risk, and call the measure satisfying appropriate properties “coherent”. We define by axioms ”acceptable” sets, and show their relation to coherent risk measures. Furthermore, we give the representation of coherent risk measures in terms of generalized scenarios. In the end, we study three measures of risk: *Value-at-Risk*, the worst conditional expectation and expected shortfall. We show that *Value-at-Risk*, despite being widely used, isn’t coherent and we point out potential problems in that regard. We give the worst conditional expectation as a coherent risk measure of theoretical importance, while we propose expected shortfall as a coherent alternative of practical usage.

Životopis

Rođena sam 04.03.1997. u Puli. U Puli sam pohađala osnovnu školu te matematički smjer u gimnaziji. Preddiplomski studij matematike upisala sam 2015. godine na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu te sam na studiju u nastavnoj godini 2016./2017. držala demonstrature iz Matematičke analize 1 i 2. Titulu univ. bacc. math. stekla sam 2018. godine te sam tada upisala diplomski studij Financijske i poslovne matematike pri istome fakultetu. U slobodno vrijeme bavim se plesom, a najviše me zanimaju suvremeni ples i lyrical jazz.