Lebesgueov integral

Galić, Ivana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Galić

LEBESGUEOV INTEGRAL

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Ivan Ivec

Zagreb, rujan, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojim roditeljima, hvala što ste bili moj oslonac tijekom svih godina mog života. Ivki i Mariji, hvala što ste obogatile moje godine studiranja jer sam imala drugu obitelj. Mojim kolegicama s faksa, hvala što sam s vama mogla dijeliti sve. S vama je bilo puno lakše.

Sadržaj

Uvod

Riječ „integral“ povezujemo s granom matematike koja se naziva infinitezimalni račun. Infinitezimalni račun se bavi funkcijama, derivacijama, integralima, limesima funkcija i drugim graničnim vrijednostima. Ta grana matematike proučava razumijevanje i opisivanje promjena mjerljivih varijabli. Infinitezimalni račun je osnovna grana matematike.

Kada danas čujemo riječ integral pomislimo na broj koji označava površinu ispod grafa funkcije realne varijable. Kako se razvijala sama znanost matematike tako se razvijao i sam pojam integrala te su ga razni poznati matematičari različito definirali i prikazivali. Do pojave poznatog matematičara Cauchyja nije bilo definicija koje bi bile dovoljno precizne. Naime, samo bi se reklo što se treba zbrojiti, a što oduzeti da bi dobili nešto što se smatralo integralom. Za matematičku analizu počinje razdoblje strogosti u samom zaključivanju s pojavom matematičara Cauchyja. Takav način zaključivanja možemo pronaći danas u modernoj analizi.

Danas mi pod pojmom integrala podrazumijevamo broj koji označavamo s $\int_a^b f(x)dx$. Cauchy je neprekidne funkcije definirao kao što su i danas definirane, dok integral takvih neprekidnih funkcija f određuje preko suma koje su oduvijek korištene za aproksimaciju površine. Te Cauchyjeve sume su sljedeće:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),\ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\,.$$

Danas nama znani integral $\int_a^b f(x)dx$ Cauchy dobiva graničnim prijelazom. Definicija integrala koju je koristio Cauchy se može primijeniti i na integrale funkcija koje imaju prekide. Stoga se prirodno nametnulo pitanje ispitivanja točnih mogućnosti te definicije. Jedan od matematičara koji je ispitivao točne mogućnosti Cauchyjeve definicije bio je Riemann.

Ako uzmemo dva realna broja $\underline{f_i}$ i $\overline{f_i}$ koji predstavljaju donju i gornju ogradu funkcije f na $[x_{i-1}, x_i]$, onda se Cauchyjeva suma S nalazi između:

$$\underline{S} := \sum_{i=1}^{n} \underline{f_i}(x_i - x_{i-1})$$

i

$$\overline{S} := \sum_{i=1}^{n} \overline{f_i}(x_i - x_{i-1}).$$

Riemann je pokazao da se Cauchyjeva definicija može primijeniti ako pripadni niz razlika

$$\underline{S} - \overline{S} = \sum_{i=1}^{n} \left(\underline{f_i} - \overline{f_i}\right)(x_i - x_{i-1})$$

teži k nuli za neki niz sve finijih podjela intervala $[a, b]$. Potom je ovom navedenom Darboux dodao da pri uobičajenom graničnom prijelazu $\underline{S}$ i $\overline{S}$ daju točno određene brojeve $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ i $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ koji su općenito različiti. U slučaju kada Cauchy - Riemannov integral postoji brojevi

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

i

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

su jednaki.

Lako se pokaže da je svaka omeđena i po dijelovima monotona funkcija na $[a, b]$ integrabilna u smislu Riemanna, tj. R - intergrabilna. Također je svaka neprekidna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ R - integrabilna. Integral te funkcije računa se po Newton – Leibnizovoj formuli:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

gdje je $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ bilo koja primitivna funkcija funkcije f, odnosno vrijedi da je $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in [a, b]$.

Ipak, Riemannov integral ima i svoje nedostatke. Najvažniji nedostatci koji se pripisuju Riemannovom integralu jesu činjenica da nema svaka funkcija primitivnu funkciju i to što se Riemannov integral loše ponaša prema graničnom prijelazu. Upravo ti i mnogi drugi nedostatci su motivirali Lebesguea da razvije apstraktniji pojam integrala.

Ako gledamo sve finije i finije podjele intervala $[a, b]$, onda one daju sve manje i manje razlike $\overline{f}_i - \underline{f_i}$ prethodnih gornjih i donjih ograda za neprekidnu funkciju f te limes razlike $\overline{S} - \underline{S}$ teži k nuli, a isto vrijedi i ako funkcija f ima samo nekoliko točaka prekida. U situaciji kada funkcija f ima mnoštvo prekida, točnije ako su prekidi u svakoj točki to se neće dogoditi jer maleni intervali $[x_{i-1}, x_i]$ nipošto ne moraju značiti i bliske vrijednosti u slici funkcije f. Ovo je potaknulo Lebesguea da umjesto podjele intervala $[a, b]$ gleda podjelu slike funkcije f.

U sedamnaestom stoljeću je integral smatran sumom beskonačnog broja nedjeljivih dijelova, gdje je ordinata svakog tog dijela jednaka $f(x)$. Lebesgue je samo te male dijelove grupirao prema veličini. Riemann ih je grupirao redom kojim su se vrijednosti $f(x)$ pojavljivale ovisno o rastu varijable x.

Pokažimo Riemannov i Lebesgueov pristup i njihovu razliku pomoću sljedećeg primjera. Gledamo trgovca koji računa ukupnu zaradu u kunama na kraju jednog dana. Trgovac Riemann bi zbrajao redom kako je novac ulazio u blagajnu odnosno kako su ljudi plaćali račune. Trgovac Lebesgue to radi na više metodičan način. Naime, na kraju dana bi prvo prebrojio koliko ima kovanica od jedne lipe te izračunao ukupnu vrijednost u kunama, nakon toga bi prebrojio kovanice od dvije lipe te za njih izračunao ukupnu vrijednost u kunama. Lebesgue bi tako nastavio niz na kovanice od dvadeset i pedeset lipa, pa na kovanice od jedne, dvije te pet kuna. Nakon kovanica Lebesgue bi prešao na brojanje novčanica od deset, dvadeset pa sve do novčanice od tisuću kuna. Na kraju dana trgovac Riemann i trgovac Lebesgue će svojim računom dobiti istu ukupnu zaradu. Zašto? Zato što u blagajni ima konačan broj kovanica i novčanica. No, što kada ti brojevi postanu beskonačni? Da li će i tada trgovci Riemann i Lebesgue dobiti istu zaradu? Upravo taj problem rješava Lebesgue kod svog postupka integracije.

Postavlja se pitanje kako riješiti problem integracije. Naime, dobro nam je znano da je problem integriranja povezan s problemom računanja duljine, površine te volumena. Zato je Lebesgue došao na ideju da kodomenu funkcije razbije na manje dijelove, tj. načini njezinu particiju. Za svaku tu particiju je potrebno znati kako „izmjeriti“ onaj dio domene koji funkcija preslika u pojedini dio particije. Upravo iz tog razloga nam je potrebna mjera skupa i teorija mjere s kojom ćemo započeti.

Poglavlje 1

Mjere

Teorija mjere je matematička disciplina koja se bavi proučavanjem pojmova kao što su duljina, površina i volumen. Sve te pojmove nazivamo jednim zajedničkim nazivom mjera. Mjera nam omogućava da navedene pojmove definiramo za veću familiju podskupova nego li je to moguće pomoću Riemannova integrala. Ujedno nam ona omogućava da se Riemannov integral zbog svojih nedostataka proširi do Lebesgueovog integrala. Lebesgueov integral je definiran za puno širu klasu funkcija od klase omeđenih funkcija definiranih na segmentu.

1.1 Izmjerive funkcije

Promatrat ćemo Lebesgueov integral izmjerivih funkcija na izmjerivim prostorima. Da bismo promatrali same izmjerive funkcije definirat ćemo izmjerive prostore. Budući da ćemo često spominjati algebru i σ - algebru krećemo s definicijom tih pojmova. U daljnjem podrazumijevamo da je X neprazan skup.

Definicija 1.1.1. *Neka je $\mathcal{A}$ familija podskupova od X. Za familiju $\mathcal{A}$ kažemo da je algebra na skupu X ako vrijede sljedeća svojstva:*

(a) $X \in \mathcal{A}$.

(b) Ako je $A \in \mathcal{A}$, *onda je* $A^C \in \mathcal{A}$. *(zatvorenost na komplement)*

(c) Ako je $A_1, A_2, A_3, ..., A_n \in \mathcal{A}$, *onda je i* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$. *(zatvorenost na konačne unije)*

Iz svojstva (b) i (c) slijedi da je familija $\mathcal{A}$ zatvorena i na konačne presjeke, odnosno da vrijedi sljedeće: za $A_1, A_2, A_3, ..., A_n \in \mathcal{A}$ je $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} {A_i}^C\right)^C \in \mathfrak{M}$.

Definicija 1.1.2. *Familiju $\mathfrak{M}$ podskupova od X zovemo σ – algebra na skupu X ako vrijede sljedeća svojstva:*

(a) $X \in \mathfrak{M}$.

(b) Ako je $A \in \mathfrak{M}$, *onda je* $A^C \in \mathfrak{M}$.

(c) Ako su $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathfrak{M}$, *onda je* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$.

Očito je svaka σ - algebra ujedno i algebra. Ponekad će nam zatrebati i malo uži pojmovi dani sljedećom definicijom.

Definicija 1.1.3. *Kažemo da je neprazna familija $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (σ) - prsten skupova na X ako je zatvorena na konačne (prebrojive) unije i na skupovne razlike.*

Točnije, svaka algebra je prsten i svaka σ - algebra je σ - prsten. Kada kažemo „konačne unije ili presjeci“ podrazumijevamo uniju ili presjek od barem jednog skupa.
Sada možemo definirati izmjerive prostore.

Definicija 1.1.4. *Neka je na skupu X zadana σ algebra $\mathfrak{M}$. Uređeni par $(X, \mathfrak{M})$ zovemo izmjerivim prostorom.*

Lebesgue je svoj pristup problemu integracije potražio u teoriji mjera kako bi proširio klasu funkcija koje se mogu integrirati. Da bismo izračunali Lebesgueov integral moramo uvesti klasu funkcija za koje će Lebesgueov integral biti dobro definiran. Stoga se uvode izmjerive funkcije koje su morfizmi u kategoriji izmjerivih prostora kao što su neprekidne funkcije morfizmi u kategoriji topoloških prostora. Ponovimo definiciju neprekidne funkcije na topološkim prostorima.

Definicija 1.1.5. *Neka su (X, τ) i (Y, σ) topološki prostori. Funkcija f je neprekidna ako vrijedi*

$$(\forall V \in \sigma)\, f^{\leftarrow}(V) \in \tau.$$

Pritom je $f^{\leftarrow}(V)$ praslika skupa V po funkciji f, tj. $f^{\leftarrow}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$. Na sličan način ćemo definirati i funkcije koje smatramo da su izmjerive na izmjerivim prostorima.

Definicija 1.1.6. *Neka su $(X, \mathfrak{M})$ i $(Y, \mathfrak{N})$ izmjerivi prostori, gdje su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ σ - algebre. Funkcija $f : X \to Y$ je izmjeriva ako vrijedi da*

$$(\forall F \in \mathfrak{N})\, f^{\leftarrow}(F) \in \mathfrak{M}.$$

Dakle, funkcija f je izmjeriva u paru σ – algebri $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$. Kompozicija izmjerivih funkcija je očito izmjeriva jer je $(f \circ g)^{\leftarrow}(F) = g^{\leftarrow}(f^{\leftarrow}(F))$.

Za funkciju f koja je definirana na $E \subseteq X$ kažemo da je izmjeriva u paru $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ ako je $(\forall F \in \mathfrak{N})\ f^{\leftarrow}(F) \in \mathfrak{M}$. Uočimo da je ova dopuna ekvivalentna tome da je f izmjeriva u paru $(\mathfrak{M}_E, \mathfrak{N})$ (u smislu ranije definicije) pri čemu je σ – algebra $\mathfrak{M}_E := \{A \cap E : A \in \mathfrak{M}\}$.

Poseban interes u teoriji integrala imaju funkcije koje poprimaju vrijednosti u proširenom skupu realnih brojeva $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definicija 1.1.7. *Neka je $\bar{\mathbb{R}}$ prošireni skup realnih brojeva sa standardnom topologijom i neka je $(X, \mathfrak{M})$ izmjeriv prostor. Funkcija $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ je izmjeriva (kraće pisano $\mathcal{L}(X, \mathfrak{M})$ ili samo $\mathcal{L}$) ako je izmjeriva u paru σ – algebri $(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_{\bar{\mathbb{R}}})$.*

Na isti način se postupa i za druge topološke prostore: ako se posebno ne naglasi, na topološkom prostoru podrazumijevamo Borelovu σ – algebru (najmanja σ - algebra koja sadrži sve otvorene skupove) te govorimo o Borel – izmjerivim ili Borelovim funkcijama. Za izmjerivost funkcije $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ posebno vrijedi sljedeći jednostavan kriterij: funkcija je izmjeriva ako i samo ako je

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}) f^{\leftarrow}(\langle \alpha, \infty]) \in \mathfrak{M}.$$

Takav jednostavan kriterij slijedi iz sljedeće leme (sa $\sigma(\mathcal{E})$ označavamo najmanju σ - algebru koja sadrži familiju podskupova $\mathcal{E}$, a to je upravo presjek svih σ - algebri koje sadrže $\mathcal{E}$):

Lema 1.1.8. *Neka je $(X, \mathfrak{M})$ izmjeriv prostor. Neka Y neprazan skup i familija $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$. Funkcija $f : X \to Y$ je izmjeriva u paru σ – algebri $\mathfrak{M}$ i $\sigma(\mathcal{E})$ ako i samo ako vrijedi*

$$(\forall E \in \mathcal{E})\ \ f^{\leftarrow}(E) \in \mathfrak{M}.$$

Dokaz. Da bismo pokazali da tvrdnja navedene leme vrijedi dovoljno nam je uočiti da je skup $\{E \in \mathcal{P}(Y) : f^{\leftarrow}(E) \in \mathfrak{M}\}$ σ – algebra koja sadrži familiju $\mathcal{E}$. Ako navedeni skup sadrži $\mathcal{E}$, onda nužno sadrži i $\sigma(\mathcal{E})$ (najmanja σ - algebra koja sadrži $\mathcal{E}$).
Za $E \in \mathcal{P}(Y)$ za koji je $f^{\leftarrow}(E) \in \mathfrak{M}$ vrijedi da je $E^C \in \mathcal{P}(Y)$ takav da je $f^{\leftarrow}\left(E^C\right) = (f^{\leftarrow}(E))^C \in \mathfrak{M}$ pa je dani skup zatvoren na komplementiranje. Također je očito $f^{\leftarrow}(Y) = X \in \mathfrak{M}$.
Treba još pokazati da vrijedi zatvorenost na prebrojive unije. Za $E_1, E_2, \cdots \in \mathcal{P}(Y)$, takve da je $f^{\leftarrow}(E_i) \in \mathfrak{M}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{P}(Y) \ \text{ i } f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{\leftarrow}(E_i) \in \mathfrak{M},$$

zbog svojstva (c) u definiciji σ - algebre, čime je lema dokazana. $\square$

Neposredna je posljedica da je svaka neprekinuta funkcija između topoloških prostora izmjeriva u pripadnom paru σ -algebri Borelovih skupova. Također, koristeći gornji kriterij može se pokazati i da su zbroj, razlika, umnožak, kvocijent, maksimum i minimum dviju izmjerivih funkcija ponovo izmjerive funkcije. U sljedećoj lemi pokazujemo tvrdnje koje vrijede za niz izmjerivih funkcija.

Lema 1.1.9. *Neka je* $(X, \mathfrak{M})$ *izmjeriv prostor. Neka je* (f_n) *niz izmjerivih funkcija s vrijednostima u proširenom skupu realnih brojeva* $\bar{\mathbb{R}}$. *Tada su* $sup f_n$, $inf f_n$, $lim\ inf f_n$ *i* $lim\ sup f_n$ *izmjerive funkcije.*
Posebno, skup $E := \{x \in X : lim f_n(x)$ *postoji u* $\bar{\mathbb{R}}\}$ *je izmjeriv, te je funkcija*

$$f(x) := \begin{cases} \lim f_n(x), & x \in E \\ 0, & x \in E^C \end{cases}$$

izmjeriva.

Dokaz. Neka je (f_n) rastući niz izmjerivih funkcija. Limes niza (f_n) postoji u svakoj točki. Tada za neki proizvoljan realan broj $b \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\{x \in X : \lim f_n(x) > b\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{\leftarrow}(\langle b, \infty]) \in \mathfrak{M}.$$

Budući da podskupovi oblika $\langle b, \infty]$ generiraju Borelovu σ – algebru na $\bar{\mathbb{R}}$, prema Lemi 1.1.8. slijedi da je i $\lim f_n$ izmjeriva funkcija. Ako zamijenimo niz (f_n) s nizom $(-f_n)$, možemo na isti način uočiti da će tvrdnja vrijediti i za padajući niz (f_n). Sada ćemo za općeniti niz (f_n) definirati rastući niz izmjerivih funkcija $h_n := \max\{f_1, \cdots, f_n\}$. Tada je po upravo dokazanom $\sup_n f_n = \lim_n h_n$ izmjeriva funkcija.

Slično, za općeniti niz (f_n) možemo definirati padajući niz izmjerivih funkcija $g_n := \min\{f_1, \cdots, f_n\}$ i zaključiti da je $\inf_n f_n = \lim_n g_n$ izmjeriva funkcija. Budući da je $\inf_{n \geq m} f_n$ rastuća funkcija po m, na isti način zaključujemo da je i

$$\liminf_n f_n = \sup_m \inf_{n \geq m} f_n = \lim_m \inf_{n \geq m} f_n$$

izmjeriva funkcija. Analogno se pokaže i za $\limsup_n f_n$: budući da je $\sup_{n \leq m} f_n$ padajuća funkcija po m, slijedi da je

$$\limsup_n f_n = \inf_m \sup_{n \leq m} f_n = \lim_m \sup_{n \leq m} f_n$$

izmjeriva funkcija.

Sada ako pogledamo skup

$$E = \left\{ x \in X : \limsup_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x) \right\},$$

možemo uočiti da je izmjeriv (promatramo ga kao prasliku $\{0\}$ po razlici izmjerivih funkcija). Funkcija f je izmjeriva kao produkt dviju izmjerivih funkcija $\limsup_n f_n$ i χ_E, gdje je χ_E karakteristična funkcija skupa E (jednaka 1 na skupu E i 0 izvan njega). $\square$

Za dani izmjeriv prostor $(X, \mathfrak{M})$ s $\mathcal{L}^+(X, \mathfrak{M})$ (ili kraće samo $\mathcal{L}^+$) označit ćemo skup svih izmjerivih funkcija s X u $[0, \infty]$. Izmjerive funkcije koje su oblika $\sum a_k \chi_{A_k}$, $a_k \in \mathbb{R}$ gdje je $A_k \in \mathfrak{M}$ ($k \in \mathbb{N}$) nazivamo prostima. Ako je suma konačna, onda ih zovemo jednostavnim. Ako je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor mjere, te uz gornje za svaki k k tome vrijedi i $\mu(A_k) < \infty$, takvu funkciju zovemo elementarnom.
Svaka se od gornjih funkcija može prikazati na standardni način kao $f = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \chi_{f^{\leftarrow}\{\alpha\}}$.

Sljedeći teorem prema kojem svaku nenegativnu izmjerivu funkciju možemo aproksimirati jednostavnim funkcijama ima ključnu ulogu pri konstrukciji Lebesgueovog integrala.

Teorem 1.1.10. *Neka je $f \in \mathcal{L}^+$. Tada postoji niz nenegativnih jednostavnih funkcija (f_n) takav da niz (f_n) konvergira k funkciji f po točkama, tj. $f_n \nearrow f$ u svakoj točki skupa X.*

Dokaz. Moramo pokazati da postoji niz nenegativnih jednostavnih funkcija (f_n) takav da konvergira k funkciji f. To ćemo učiniti tako da traženi niz konstruiramo. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $k \in \{1, \ldots, n2^n\}$. Za navedene n i f definirat ćemo sljedeće skupove $F_{n,k} := f^{\leftarrow}\left([\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\rangle\right)$. Sada trebamo pokazati da niz funkcija (f_n) koji je definiran sljedećom formulom:

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{k-1}{2^n}, & x \in F_{n,k} \\ n, & x \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{n2^n} F_{n,k} \end{cases}$$

ima traženo svojstvo, odnosno da (f_n) konvergira k f. Kao prvo, radi se o jednostavnim funkcijama jer su skupovi $F_{n,k}$ izmjerivi (kao praslike poluotvorenih intervala koji također generiraju Borelovu σ - algebru). Zatim, funkcije f_n su konstruirane tako da se na skupu $F_{n,k}$ razlikuju od funkcije f za manje od $\frac{1}{2^n}$ pa je i konvergencija očita. $\square$

1.2 Mjere

Definicija 1.2.1. *Mjera je funkcija $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ takva da vrijedi sljedeće:*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) *Ako je* $\left(E_j\right)$ *niz disjunktnih skupova iz* $\mathfrak{M}$*, onda vrijedni jednakost*

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu\left(E_j\right). \text{ (prebrojiva aditivnost)}$$

Trojku $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *nazivamo prostor mjere.*

Prethodno definirana mjera je nenegativna ili pozitivna mjera – razlikujemo još mjere s predznakom i kompleksne mjere, ovisno o vrijednostima koje mjera može poprimiti. Mjera može biti konačna pa ćemo taj pojam definirati u sljedećoj definiciji.

Definicija 1.2.2. *Neka je* μ *mjera. Kažemo da je mjera* μ *konačna ako je* $\mu(X) < \infty$*. Tada i za svaki* $E \in \mathfrak{M}$ *vrijedi da je* $\mu(E) < \infty$*. Mjeru* μ *koja je konačna i za koju vrijedi* $\mu(X) = 1$ *nazivamo vjerojatnosnom mjerom.*

Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}$ (i na $\mathbb{R}^d$), koja poopćuje klasične pojmove duljine, površine i volumena, i čija će konstrukcija biti ukratko opisana u sljedećim poglavljima, nije konačna, ali je σ – konačna.

Definicija 1.2.3. *Mjera* μ *je* σ *– konačna ako postoji niz skupova* (E_n) *iz* $\mathfrak{M}$ *takav da je* $\mu(E_n) < \infty$*, dok je* $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$*.*

Bez smanjenja općenitosti, mogli smo zahtijevati da gornja unija bude disjunktna. Osnovna svojstva mjere dana su sljedećim teoremom.

Teorem 1.2.4. *Neka je* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *prostor mjere. Neka su* $E_1, E_2, \ldots \in \mathfrak{M}$*. Tada vrijedi:*

(a) *Za* $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow \mu(E_1) \leq \mu(E_2)$*. (monotonost)*

(b) $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(E_j\right)$*. (subaditivnost)*

(c) *Za niz rastućih skupova* $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\right) = \lim \mu\left(E_j\right)$*. (neprekidnost na rastuće nizove)*

(d) *Za niz padajućih skupova* $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots : (\exists n \in \mathbb{N})\ \mu(E_n) < \infty \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} E_j\right) = \lim \mu\left(E_j\right)$*. (neprekidnost na padajuće nizove)*

Dokaz. Pokažimo prvu tvrdnju odnosno monotonost funkcije mjere μ.
Iz $E_1 \in \mathfrak{M}$ i $E_2 \in \mathfrak{M}$ slijedi da je $E_2 \setminus E_1 = E_2 \bigcap E_1^C \in \mathfrak{M}$. Kako je $E_2 = E_1 \bigcup (E_2 \setminus E_1)$ i $E_1 \bigcap (E_2 \setminus E_1) = \emptyset$, zbog aditivnosti i nenegativnosti mjere slijedi

$$\mu(E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2 \setminus E_1) \geq \mu(E_1).$$

Pokažimo sada tvrdnju (b).
Definirajmo skup $F_j := E_j \setminus \left(E_1 \bigcup \cdots \bigcup E_{j-1}\right)$, odnosno izbacit ćemo $j-1$ skupova. Skupovi F_j su disjunktni te vrijedi da je $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$, pa zbog aditivnosti i monotonosti slijedi

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(F_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(E_j\right).$$

Sada ćemo pokazati tvrdnju pod (c) za rastuće nizove. Definirat ćemo opet skup $F_j := E_j \setminus \left(E_1 \bigcup \cdots \bigcup E_{j-1}\right)$. Tada je

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} \mu\left(F_k\right) = \lim_{j\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{j} F_k\right) = \lim_{j\to\infty} \mu\left(E_j\right).$$

Pokažimo još posljednju tvrdnju.
Možemo uočiti da će obje strane jednakosti ostati nepromijenjene ako izostavimo prvih $n-1$ skupova. Stoga ćemo bez smanjenja općenitosti uzeti da je $n = 1$. Iskoristit ćemo tvrdnju (c) te dobijemo sljedeće:

$$\mu\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} E_j\right) = \mu\left(E_1\right) - \mu\left(E_1 \setminus \bigcap_{j\in\mathbb{N}} E_j\right) =$$

$$\mu\left(E_1\right) - \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \left(E_1 \setminus E_j\right)\right) = \mu\left(E_1\right) - \lim_j \mu\left(E_1 \setminus E_j\right) = \lim_j \mu\left(E_j\right).$$

□

U primjenama je ponekad važno da je mjera potpuna, tj. da sadrži sve podskupove skupova mjere nula. Srećom, svaka se mjera može upotpuniti. Detalje donosimo u nastavku.

Definicija 1.2.5. *Neka je $\mathfrak{M}$ σ – algebra te neka je Z neprazan skup. Skup $Z \in \mathfrak{M}$ je zanemariv (μ – zanemariv) ako je $\mu(Z) = 0$.*

Iz svojstva prebrojive aditivnosti slijedi da je prebrojiva unija zanemarivih skupova ponovno zanemariv skup.
Neka je $E \in \mathfrak{M}$. Kažemo da svojstvo $P(x)$ vrijedi za skoro svaki $x \in E$ ($P(x)$ (ss $x \in E$), odnosno $P(x)$ vrijedi skoro svuda na E) ako postoji zanemariv skup Z takav da vrijedi $(\forall x \in E \setminus Z)\ P(x)$. Točnije, gornja svojstva ovise o mjeri μ, pa se kaže i μ-ss (skoro svuda s obzirom na mjeru μ). Na primjer, kažemo da je $f \leq g$ skoro svuda ako je $f \leq g$ osim na zanemarivom skupu.

Definicija 1.2.6. *Funkcija f je definirana skoro svuda na X ako je definirana na $X \setminus Z$, gdje je Z zanemariv. Za funkciju čija je kodomena izmjeriv prostor $(Y, \mathfrak{N})$ kažemo da je μ – izmjeriva ako je izmjeriva u paru σ – algebri $(\mathfrak{M}_{X\setminus Z}, \mathfrak{N})$, gdje je $\mathfrak{M}_{X\setminus Z} := \mathfrak{M} \cap \mathcal{P}(X \setminus Z)$.*

Neka je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor mjere. Označit ćemo familiju svih podskupova zanemarivih skupova sa $\mathfrak{Z} := \{F \in \mathcal{P}(X) : \ (\exists Z \in \mathfrak{M})\, \mu(Z) = 0 \ \&\ F \subseteq Z\}$. Uočimo da je $\mathfrak{Z}$ zatvorena na prebrojive unije. Mjera μ čija domena sadrži sve podskupove zanemarivih skupova (ako je $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{M}$) je potpuna. Ako μ nije potpuna, definiramo $\bar{\mathfrak{M}} := \{E \cup F : E \in \mathfrak{M} \ \&\ F \in \mathfrak{Z}\}$ i skupovnu funkciju $\bar{\mu} : \bar{\mathfrak{M}} \longrightarrow [0, \infty]$, upotpunjenje mjere μ, formulom $\bar{\mu}(E \cup F) := \mu(E)$, $E \in \mathfrak{M}$, $F \in \mathfrak{Z}$. Možemo uočiti da je $\bar{\mu}$ dobro definirana. Neka je $E \cup F = E_1 \cup F_1$, a $F \subseteq Z$, $F_1 \subseteq Z_1$ (gdje su Z i Z_1 zanemarivi). Tada je:

$$\mu(E) = \mu(E \cup Z) = \mu(E \cup Z \cup Z_1) \geq \mu(E_1 \cup Z_1) = \mu(E_1).$$

Simetrično se pokazuje i obrnuta nejednakost.

Teorem 1.2.7. *Familija $\bar{\mathfrak{M}}$ je σ – algebra koja sadrži $\mathfrak{M}$, a $\bar{\mu}$ je potpuna mjera na $\bar{\mathfrak{M}}$, te je $\bar{\mu}_{|\mathfrak{M}} = \mu$.*

Dokaz. Možemo uočiti da je $\mathfrak{M} \subseteq \bar{\mathfrak{M}}$ jer je $\emptyset \in \mathfrak{Z}$. Uzmimo neki niz $(E_n \cup F_n)$ u $\bar{\mathfrak{M}}$. Podrazumijevamo da je $E_n \in \mathfrak{M}$ i $F_n \in \mathfrak{Z}$. Onda vrijedi sljedeće:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n \cup F_n) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) \in \bar{\mathfrak{M}}.$$

Neka je $F \subseteq Z$ te je skup Z zanemariv. Za uniju $E \cup F \in \bar{\mathfrak{M}}$ tada vrijedi:

$$(E \cup F)^C = (E \cup Z)^C \cup (Z \setminus (E \cup F)) \in \bar{\mathfrak{M}}.$$

Uočimo da je $\bar{\mu}_{|\mathfrak{M}} = \mu$ (u rastavu je $F = \emptyset$), te još moramo pokazati da je $\bar{\mu}$ i potpuna mjera. $\bar{\mathfrak{M}}$ očito sadrži sve podskupove zanemarivih skupova (po konstrukciji), a prebrojiva aditivnost slijedi iz

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n \cup F_n)\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \bar{\mu}(E_n \cup F_n).$$

□

U euklidskim prostorima vrijedi sljedeći teorem o postojanju Lebesguove mjere, koja je osnovni primjer potpune mjere.

Teorem 1.2.8. *Postoji σ – algebra (skupova koji su izmjerivi u Lebesgueovu smislu, odnosno Lebesgue – izmjerivih skupova) $\mathfrak{M}_{\lambda^*}$ nad $\mathbb{R}^d$ i nenegativna mjera λ definirana na $\mathfrak{M}_{\lambda^*}$ sa sljedećim svojstvima:*

(a) $\tau \subseteq \mathfrak{M}_{\lambda^*}$.

(b) $(\forall E \in \mathfrak{M}_{\lambda^*})\ \ \lambda(E) = 0 \Rightarrow ((\forall Z \subseteq E)\ Z \in \mathfrak{M}_{\lambda^*}\ \&\ \lambda(Z) = 0)$.

(c) $\left(\forall a, b \in \mathbb{R}^d\right) a \leq b \Rightarrow \prod_{i=1}^{d} [a^i, b^i\rangle \in \mathfrak{M}_{\lambda^*}\ \&\ \lambda\left(\prod_{i=1}^{d} [a^i, b^i\rangle\right) = \prod_{i=1}^{d} \left(b^i - a^i\right)$.

(d) $(\forall E \in \mathfrak{M}_{\lambda^*})\left(\forall a \in \mathbb{R}^d\right)\ a + E \in \mathfrak{M}_{\lambda^*}\ \&\ \lambda(a + E) = \lambda(E)$. *($\lambda$ je translacijski invarijantna)*

Lebesgueova mjera se podudara s volumenom na skupovima koji su se proučavali u klasičnoj geometriji - to je iskazano trećim svojstvom u gornjem teoremu. Prvo nam svojstvo prethodnog teorema govori da su Borelovi skupovi ujedno i Lebesgue – izmjerivi, dok nam drugo svojstvo izriče potpunost Lebesgueove mjere.

Napomena 1.2.9. *Mjera na topološkom prostoru X je Borelova, ako je svaki otvoren skup izmjeriv (tada je ujedno i $\mathcal{B}_X \subseteq \mathfrak{M}$, gdje je $\mathcal{B}_X$ Borelova σ – algebra na topološkom prostoru (X, τ), tj. σ - algebra generirana familijom otvorenih skupova τ).*

Konstrukcija Lebesgueove mjere ukratko je opisana u sljedeća dva odjeljka. Prvo je opisana općenita konstrukcija mjere iz vanjske mjere, a zatim je to primijenjeno na konstrukciju Lebesgueove mjere.

1.3 Konstrukcija mjere iz vanjske mjere

Definicija 1.3.1. *Vanjska mjera na skupu X je svako preslikavanje $\gamma : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ za koje vrijedi sljedeće:*

(a) $\gamma(\emptyset) = 0$.

(b) $E \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \Rightarrow \gamma(E) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \gamma(E_k)$. *(subaditivnost)*

Možemo uočiti da je vanjska mjera monotona: $A \subseteq B \Rightarrow \gamma(A) \leq \gamma(B)$.
„Vanjska mjera“ je naziv koji dolazi od sljedeće konstrukcije: Dakle, krećemo od proto – mjere na familiji $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$, a proizvoljne podskupove X aproksimiramo izvana prebrojivim skupovima iz $\mathcal{E}$. Preciznije, vrijedi sljedeća lema.

Lema 1.3.2. *Neka je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ familija skupova koja sadrži $\emptyset$. Neka je zadana skupovna funkcija $\nu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ za koju vrijedi $\nu(\emptyset) = 0$. Ako za svaki $E \subseteq X$ definiramo (dogovorno ćemo uzeti da je* $\inf \emptyset = \infty$)

$$\nu^*(E) := \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_n) : E_n \in \mathcal{E} \;\&\; E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \right\},$$

onda je ν^* vanjska mjera na X.

Definicija 1.3.3. *Neka je $\gamma : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ za koju vrijedi da je $\gamma(\emptyset) = 0$ (npr. γ može biti vanjska mjera). Skup $E \subseteq X$ je γ – izmjeriv (odnosno izmjeriv u Carathéodoryjevom smislu) ako vrijedi sljedeće:*

$$(\forall A \in \mathcal{P}(X)) \quad \gamma(A) = \gamma(A \cap E) + \gamma(A \setminus E).$$

Možemo uočiti da je za vanjsku mjeru γ lijeva strana jednakosti iz definicije uvijek manja ili jednaka desnoj strani. Ako uzmemo da je $\gamma(A) = \infty$, onda će i druga nejednakost trivijalno vrijediti.

Označimo s $\mathfrak{M}_\gamma$ familiju svih γ – izmjerivih podskupova. Definicija γ – izmjerivosti simetrična je po E i E^C:

$$\gamma(A) = \gamma(A \cap E) + \gamma\left(A \cap E^C\right),$$

što znači da je familija $\mathfrak{M}_\gamma$ zatvorena na komplementiranje. Lako se vidi da iz $\gamma(A) = 0$ slijedi da je $A \in \mathfrak{M}_\gamma$, u slučaju kad je γ vanjska mjera. U tom je slučaju ujedno i $X = \emptyset^C \in \mathfrak{M}_\gamma$.

Ključni rezultat ovog odjeljka dan je sljedećim teoremom.

Teorem 1.3.4. (**Carathéodory**) *Neka je γ vanjska mjera na skupu X. Tada je $\mathfrak{M}_\gamma$ σ – algebra i $\gamma_{|\mathfrak{M}_\gamma}$ je potpuna mjera.*

Definicija 1.3.5. *Funkcija ν koja je nenegativna skupovna funkcija definirana na prstenu skupova $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je predmjera ako vrijedi sljedeće:*

(a) $\nu(\emptyset) = 0$.

(b) *(E_n) niz disjunktnih skupova u $\mathcal{E}$ & $E := \cup_{k\in\mathbf{N}} E_k \in \mathcal{E} \Rightarrow \nu(E) = \sum_{k\in\mathbf{N}} \nu(E_k)$. ($\sigma$-aditivnost)*

Definicija 1.3.6. *Predmjera ν je σ – konačna ako postoji niz skupova (A_n) u $\mathcal{E}$ takav da $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ i $\nu(A_n) < \infty$, za svaki n.*

Lema 1.3.7. *Neka je $\mathcal{E}$ prsten skupova na X te neka je ν predmjera na $\mathcal{E}$. Ako je ν^* vanjska mjera (definirana u prethodnoj lemi), onda vrijedi sljedeće:*

(a) $\nu^*_{|\mathcal{E}} = \nu$.

(b) $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{M}_{\nu^*}$.

Teorem 1.3.8. (**Hopfov o proširenju mjere**) *Neka je ν predmjera na prstenu skupova $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Tada postoji mjera μ na $\sigma(\mathcal{E})$, koja se s ν podudara na $\mathcal{E}$ ($\mu_{|\mathcal{E}} = \nu$). Takvo je proširenje jedinstveno za σ – konačnu predmjeru ν.*

1.4 Lebesgueova mjera na euklidskom prostoru

Želimo definirati poopćenje volumena geometrijskih tijela u $\mathbb{R}^d$. Krenut ćemo od zahtjeva da je volumen kvadra $I = \prod_{k=1}^{d} [a_k, b_k]$ jednak $V(I) = \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k)$. Implicitno ćemo podrazumijevati da vrijedi $a_k \leq b_k$. Promjer kvadra I iznosi diam I $= \sqrt{\sum_{k=1}^{d} (b_k - a_k)^2}$. Da bi nam zapis bio lakši gledat ćemo poluotvorene kvadre koji su oblika: $I = \prod_{k=1}^{d} [a_k, b_k\rangle$. Za kvadre ovog oblika i dalje vrijede izrazi za volumen i promjer koji su prethodno navedeni. Dakle, pod riječju „kvadar“ podrazumijevat ćemo jedan takav poluotvoreni kvadar.

Familija svih kvadara $\mathcal{E}^d$ u $\mathbb{R}^d$ čini poluprsten skupova, dok familija $\mathcal{A}^d$ svih konačnih, disjunktnih unija kvadara čini prsten skupova.

Proširit ćemo pojam volumena na familiju $\mathcal{A}^d$. Dakle, za $A \in \mathcal{A}^d$, oblika $A = \bigcup_{k \in \{1,..,n\}} I_k$ definiramo $V(A) = \sum_{k=1}^{n} V(I_k)$. Definicija je dobra jer ako uzmemo neku drugu reprezentaciju $A = \bigcup_{l \in \{1,...,m\}} J_l$ za volumen dobivamo isti broj:

$$\sum_{l=1}^{m} V(J_l) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} V(J_l \cap I_k) = \sum_{k=1}^{n} V(I_k).$$

U gornjem smo računu koristili činjenicu da su presjeci kvadara ponovno kvadri. Za definiciju Lebesgueove mjere na $\mathbb{R}^d$ koristit ćemo konstrukciju iz vanjske mjere.

Definicija 1.4.1. *Vanjska Lebesgueova mjera $\lambda^* : \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right) \to \bar{\mathbb{R}}$ definirana je formulom*

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} V(A_k) : A_k \in \mathcal{A}^d, A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right\}.$$

Uočimo da je u gornjoj definiciji umjesto skupova iz $\mathcal{A}^d$ dovoljno gledati kvadre. Egzistenciju potpune mjere $\lambda : \mathfrak{M}_{\lambda^*} \to [0, \infty]$ daje nam Carathéodoryjev teorem. Upravo tu mjeru nazivamo Lebesgueova mjera, a skupove množine $\mathfrak{M}_{\lambda^*}$ nazivamo skupovima izmjerivim u Lebesgueovu smislu odnosno kraće Lebesgue – izmjerivim skupovima.

Prisjetit ćemo se kada je skup Lebesgue – izmjeriv: skup E je Lebesgue – izmjeriv ako vrijedi

$$\left(\forall A \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \;\; \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \setminus E).$$

Osnovna svojstva Lebesgue-izmjerivih skupova dana su sljedećim teoremom.

Teorem 1.4.2. *Kvadri su Lebesgue – izmjerivi skupovi i njihova je Lebesgueova mjera jednaka geometrijskom volumenu. Nadalje, svaki Borelov skup je Lebesgue – izmjeriv.*

Postavlja se pitanje da li možda, pored Lebesguove mjere, postoji i neka druga potpuna mjera sa svojstvima iskazanim u prethodnom teoremu. S tim u vezi, iz Hopfovog teorema i činjenice da je $V : \mathcal{A}^d \to [0, \infty\rangle$ σ - konačna predmjera možemo zaključiti sljedeće: Svaka mjera koja zadovoljava svojstva prethodnog teorema podudara se na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ s restrikcijom $\lambda_{|\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}}$ Lebesgueove mjere.

U nastavku dajemo još potpuniji opis Lebesgue - izmjerivih skupova.

Lema 1.4.3. (**regularnost izvana**) *Za svaki $E \subseteq \mathbb{R}^d$ vrijedi $\lambda^*(E) = \inf\{\lambda^*(U) : E \subseteq U \in \tau\}$.*

Definicija 1.4.4. *Svaki skup u topološkom prostoru koji se može prikazati kao prebrojiv presjek otvorenih skupova nazivamo G_δ, a svaki skup koji se može prikazati kao prebrojiva unija zatvorenih skupova nazivamo F_σ.*

Upravo takvi skupovi pripadaju Borelovoj σ – algebri $\mathcal{B}_X$. Svaki je otvoren skup F_σ u svakom metričkom prostoru, dok je svaki takav zatvoren skup G_δ skup.
Neposredna je posljedica prethodne leme da postoji G_δ skup B takav da je $\lambda^*(E) = \lambda^*(B)$. Sljedeći teorem daje i više, tj. potpunu karakterizaciju Lebesgue-izmjerivih skupova.

Teorem 1.4.5. *Za skup $E \subseteq \mathbb{R}^d$ sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(a) E je Lebesgue – izmjeriv skup.

(b) Postoji G_δ skup $D \supseteq E$ takav da je $\lambda^*(D \setminus E) = 0$.

(c) Postoji F_σ skup S i G_δ skup D takvi da vrijedi $S \subseteq E \subseteq D$ i $\lambda^*(D \setminus S) = 0$.

Poglavlje 2

Lebesgueov integral

2.1 Uvod u Lebesgueov integral

Postavlja se jednostavno pitanje: Koji bi koraci bili u definiciji integrala funkcija na prostoru mjere $(X, \mathfrak{M}, \mu)$? Napomenimo da zasad gledamo samo realne funkcije. Ako uzmemo skup A koji je izmjeriv skup konačne mjere, onda integral njegove karakteristične funkcije χ_A možemo definirati kao mjeru skupa $\mu(A)$. Ako to ne bi bilo tako, onda se to ne bi slagalo s intuitivnim shvaćanjem pojma integrala kao površine lika ispod grafa funkcije.

Ako uzmemo linearnu kombinaciju takvih karakterističnih funkcija, odnosno jednostavnu funkciju $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, onda možemo definirati integral na sljedeći način:

$$\int \varphi := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

Ovdje se sada otvaraju različite mogućnosti kako se dalje može poopćiti pojam integrala. Koristit ćemo uređaj na skupu proširenih realnih brojeva $\bar{\mathbb{R}}$ te ćemo prvo definirati integral za nenegativne funkcije.

Definicija 2.1.1. *Neka je (φ_n) rastući niz jednostavnih funkcija koji konvergira k nenegativnoj funkciji f po točkama. Integral funkcije f definiramo kao limes (zapravo supremum) na sljedeći način:*

$$\int f := \lim_n \int \varphi_n.$$

Sada kada imamo integral nenegativne funkcije, funkciju f koja poprima vrijednosti iz $\bar{\mathbb{R}}$ prvo ćemo rastaviti na razliku dviju nenegativnih funkcija $f = f^+ - f^-$.

Da smo kojim slučajem imali kompleksne funkcije, tada bismo ih prije morali rastaviti na realni i imaginarni dio, a slično bismo napravili i da je riječ o funkcijama koje poprimaju vrijednosti u konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima.

Integral naše realne funkcije rastavljene na razliku dviju nenegativnih funkcija je onda:

$$\int f := \int f^+ - \int f^-.$$

Ovime smo definirali Lebesgueov integral. No, javlja se poteškoća u tome što nije jasno da su gornje definicije dobre kao na primjer da definicija $\int f$ ne ovisi o izboru samog aproksimirajućeg niza (φ_n). Zato u sljedećem odjeljku detaljnije opisujemo ovu konstrukciju.

2.2 Konstrukcija Lebesgueovog integrala

2.2.1 Integral nenegativnih jednostavnih funkcija

Znamo već da integral za karakterističnu funkciju izmjerivog skupa A definiramo kao mjeru tog skupa: $\int_X \chi_A d\mu := \mu(A)$. Mjera tog skupa je općenito broj iz proširenog skupa realnih brojeva $\bar{\mathbb{R}}$.

Definicija 2.2.1. *Neka je $\varphi \in \mathcal{L}^+$ elementarna funkcija koja ima standardni prikaz $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$, gdje je $\alpha_j \in \mathbb{R}_0^+$, $\mu\left(A_j\right) < \infty$. Njezin integral prirodno definiramo kao:*

$$\int_x \varphi \, d\mu := \sum_{\alpha \in \varphi(X)} \alpha \, \mu\left(\varphi^{\leftarrow}(\{\alpha\})\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j).$$

Prethodnu definiciju možemo proširiti i na sve nenegativne jednostavne funkcije uz dogovor da je $0 \cdot \infty = 0$. No, može se dogoditi da nam integral bude jednak $+\infty$.
Prije nego proširimo samu definiciju integrala na općenitije funkcije, provjerit ćemo da li je gornja definicija konzistentna, tj. moramo provjeriti da definicija integrala za jednostavne funkcije ne ovisi o samom izboru prikaza, što znači da jednakost u prethodnoj definiciji zaista vrijedi. To dobivamo uz pomoć sljedeće leme.

Lema 2.2.2. *Neka su $A_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{M}$ i $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{M}$ dva konačna niza. Skupovi u svakom nizu su međusobno disjunktni. Neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}_0^+$ te $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}_0^+$.
Ako je $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i} \leq \sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{B_j}$, onda je također*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i) \leq \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mu\left(B_j\right).$$

Dokaz. Označimo $\alpha_0 := \beta_0 := 0$ i definirajmo skupove A_0 i B_0 na sljedeći način:

$$A_0 := X \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i \quad \text{i} \quad B_0 := X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} B_j.$$

Možemo uočiti da je ispunjeno $X = \bigcup_{i=0}^{m} A_i = \bigcup_{j=0}^{n} B_j$. Upravo zbog toga za proizvoljne $i \in \{0, \ldots, m\}$ i $j \in \{0, \ldots, n\}$ vrijedi da je $A_i \cap B_j = \emptyset$ ili $\alpha_i \leq \beta_j$. Stoga vrijedi sljedeće:

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \alpha_i \mu\left(A_i \cap B_j\right) \leq \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \beta_j \mu\left(A_i \cap B_j\right) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j \mu\left(B_j\right).$$

□

Ovako definiran integral posjeduje očekivana svojstva linearnosti i monotonosti. Preciznije, vrijedi

Lema 2.2.3. *Neka su φ i ψ jednostavne nenegativne funkcije. Za proizvoljne brojeve $\alpha, \beta \in [0, \infty\rangle$ vrijedi:*

$$\int_X (\alpha\varphi + \beta\psi)\, d\mu = \alpha \int_X \varphi d\mu + \beta \int_X \psi d\mu.$$

Posebno, ako je k tome $\varphi \leq \psi$, onda je i $\int_X \varphi d\mu \leq \int_X \psi d\mu$. Uz dodatnu pretpostavku da je $\int_X \varphi d\mu < \infty$, vrijedi također:

$$\int_X (\psi - \varphi)\, d\mu = \int_X \psi d\mu - \int_X \varphi d\mu.$$

Dokaz. Neka su $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ različite vrijednosti funkcije φ i neka su njihove pripadne praslike $\{A_1, \ldots, A_m\}$. Neka su $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ različite vrijednosti funkcije ψ i neka su njihove pripadne praslike $\{B_1, \ldots, B_n\}$. Praslike vrijednosti funkcija su disjunktne. Stoga za navedene funkcije možemo zapisati:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i} \text{ i } \psi = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{B_j}.$$

Tada je linearna kombinacija tih dviju funkcija jednaka:

$$\alpha\varphi + \beta\psi = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha\alpha_i + \beta\beta_j\right) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Integral prethodne linearne kombinacije koristeći disjunknost te konačnu aditivnost mjere dobijemo na sljedeći način:

$$\int_X (\alpha\varphi + \beta\psi)\, d\mu = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha\alpha_i + \beta\beta_j\right)\mu\left(A_i \cap B_j\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha\alpha_i\mu\left(A_i \cap B_j\right) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\beta\beta_j\mu\left(A_i \cap B_j\right) =$$

$$\alpha\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\sum_{j=1}^{n}\mu\left(A_i \cap B_j\right) + \beta\sum_{j=1}^{n}\beta_j\sum_{i=1}^{m}\mu\left(A_i \cap B_j\right) = \alpha\int_X \varphi d\mu + \beta\int_X \psi d\mu.$$

Dakle, dobili smo da je integral linearne kombinacije jednak linearnoj kombinaciji integrala. Možemo uočiti da smo koristili neovisnost integrala jednostavne funkcije o prikazu.

Druga tvrdnja da je $\int_X \varphi d\mu \le \int_X \psi d\mu$ ako je $\varphi \le \psi$ neposredno slijedi iz prethodne leme.

Treću tvrdnju ćemo pokazati analogno kao i prvu:

$$\int_X (-\varphi + \psi)\, d\mu = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(-\alpha_i + \beta_j\right)\mu\left(A_i \cap B_j\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-1)\cdot\alpha_i\mu\left(A_i \cap B_j\right) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\beta_j\mu\left(A_i \cap B_j\right) =$$

$$(-1)\cdot\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\sum_{j=1}^{n}\mu\left(A_i \cap B_j\right) + \sum_{j=1}^{n}\beta_j\sum_{i=1}^{m}\mu\left(A_i \cap B_j\right) = -\int_X \varphi d\mu + \int_X \psi d\mu,$$

tj. dodatna pretpostavka je bila bitna samo zato da izbjegnemo izraz $\infty - \infty$ u računu.

□

2.2.2 Integral nenegativnih funkcija

Sada ćemo proširiti integral nenegativnih jednostavnih funkcija na integral proizvoljnih nenegativnih izmjerivih funkcija. Da bismo dalje proširili integral morat ćemo koristiti granični prijelaz. Ako uzmemo funkciju $f : X \to [0, \infty]$ koja je izmjeriva ($f \in \mathcal{L}^+$), za $n \in \mathbb{N}$ gledamo njezinu aproksimaciju odozdo danu Teoremom 1.1.10.:

$$\varphi_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}\chi_{f^{\leftarrow}[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\rangle} + n\chi_{f^{\leftarrow}[n,\infty]}.$$

Svaka takva funkcija φ_n je jednostavna te $\varphi_n \nearrow f$.

Definicija 2.2.4. *Integral definiramo sljedećom formulom:*

$$\int_X f d\mu := \lim_n \int_X \varphi_n d\mu = \lim_n \left(\sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mu \left(f^{\leftarrow} \left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right\rangle \right) \right) + n\mu \left(f^{\leftarrow} \left([n, \infty] \right) \right) \right).$$

Po prethodnoj lemi limes postoji u proširenom skupu realnih brojeva $\bar{\mathbb{R}}$ jer je niz integrala rastući niz (limes je jednak supremumu). Sada opet moramo provjeriti da je definicija dobra, odnosno da ne ovisi o izboru aproksimirajućeg niza (φ_n). Moramo također vidjeti da se ova definicija podudara s ranijom definicijom integrala za jednostavne funkcije. Upravo to je posljedica sljedeće leme, koju zbog njene kompleksnosti navodimo bez dokaza.

Lema 2.2.5. *Neka je (φ_n) rastući niz nenegativnih jednostavnih funkcija. Neka je ψ zadana nenegativna jednostavna funkcija. Ako je $\psi \leq \lim_n \varphi_n$, onda za integrale vrijedi:*

$$\int_X \psi d\mu \leq \lim_n \int_X \varphi_n d\mu.$$

Posebno, za proizvoljnu nenegativnu izmjerivu funkciju f i rastući niz nenegativnih jednostavnih funkcija (ψ_n), takav da je $f = \lim_n \psi_n$, vrijedi

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X \psi_n d\mu.$$

Sada se lako pokazuje da se tvrdnja Leme 2.2.3. proširuje i na proizvoljne nenegativne izmjerive funkcije: svaka se nenegativna funkcija aproksimira jednostavnima i prijeđe se na limes.

2.2.3 Integral realnih i kompleksnih funkcija

Zadnji korak u definiciji Lebesgueovog integrala sastoji se u proširenju definicije integrala na negativne funkcije te analogno i na imaginarne funkcije. Prvo se za izmjerivu funkciju $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ definira

$$f^+ := f\chi_{f^{\leftarrow}\langle 0,\infty]} \text{ i } f^- := -f\chi_{f^{\leftarrow}[-\infty,0\rangle}.$$

Tada vrijedi $f = f^+ - f^-$, a f^+ i f^- su izmjerive nenegativne funkcije, čiji je integral definiran. Zato ćemo za definiciju uzeti sljedeće:

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu,$$

ukoliko ima smisla razlika integrala na desnoj strani. Točnije, ako je bar jedan od integrala, koji je nenegativan, konačan.
Kažemo da je funkcija f Lebesgue – integrabilna na X u tom slučaju, a broj $\int_X f d\mu \in \bar{\mathbb{R}}$ nazivamo Lebesgueovim integralom funkcije f po X s obzirom na mjeru μ.

Definicija 2.2.6. *Kažemo da je kompleksna funkcija $f = f_r + i f_i$ Lebesgue – integrabilna na X ako su realne funkcije f_r i f_i Lebesgue – integrabilne, a za vrijednost integrala uzimamo*

$$\int_X f d\mu := \int_X f_r d\mu + i \int_X f_i d\mu.$$

Lema 2.2.7. *Neka su f i g Lebesgue – integrabilne funkcije za koje vrijedi $f \leq g$. Tada je*

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

Dokaz. Rastavimo funkcije f i g na funkcije f^+, f^-, g^+ i g^-. Možemo uočiti da iz $f \leq g$ slijedi da vrijedi sljedeće:

$$f^+ \leq g^+ \text{ i } f^- \geq g^-.$$

Stoga prema monotonosti koja vrijedi za nenegativne funkcije imamo da je

$$\int_X f^+ d\mu \leq \int_X g^+ d\mu \quad \text{i} \quad \int_X f^- d\mu \geq \int_X g^- d\mu.$$

Oduzimanjem gornjih nejednakosti slijedi tvrdnja. □

Definicija 2.2.8. *Neka je f izmjeriva funkcija. Kažemo da je f Lebesgue – integrabilna na izmjerivom skupu $E \subseteq X$ ako je funkcija $f\chi_E$ integrabilna na X i tada*

$$\int_E f d\mu := \int_X f \chi_E d\mu$$

nazivamo Lebesgueovim integralom funkcije f na skupu E.

Ako je funkcija f integrabilna na X, onda je integrabilna i na svakom izmjerivom podskupu $E \subseteq X$ jer je

$$\int_X (f\chi_E)^{\pm} d\mu = \int_X f^{\pm} \chi_E d\mu \leq \int_X f^{\pm} d\mu$$

pa je bar jedan od integrala s lijeve strane konačan. Uočimo da smo u računu koristili prethodnu lemu. Također, za disjunktne izmjerive skupove $A, B \subseteq X$ vrijedi

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

Teorem 2.2.9. (**Markovljeva nejednakost**) *Za nenegativnu izmjerivu funkciju f vrijedi*

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R}^+) \quad \mu\left(f^{\leftarrow}[\lambda, \infty]\right) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{f^{\leftarrow}[\lambda,\infty]} f d\mu \leq \frac{1}{\lambda} \int_X f d\mu.$$

Posebno, za nenegativnu izmjerivu funkciju f vrijedi $\int_X f d\mu = 0$ ako i samo ako je $\mu\left(f^{\leftarrow}\langle 0, \infty]\right) = 0$, tj. $f = 0$ skoro svuda na X, dok iz $\int_X f d\mu < \infty$ slijedi $\mu\left(f^{\leftarrow}\{\infty\}\right) = 0$.

Dokaz. Za funkciju f vrijedi sljedeća nejednakost

$$\lambda\chi_{f^{\leftarrow}[\lambda,\infty]} \leq f\chi_{f^{\leftarrow}[\lambda,\infty]} \leq f.$$

Stoga prva tvrdnja teorema slijedi iz monotonosti integrala integriranjem gornje nejednakosti.
Ako je $\int_X f d\mu = 0$, iz gornje nejednakosti slijedi da je $(\forall\lambda \in \mathbb{R}^+)\ \mu\left(f^{\leftarrow}[\lambda,\infty]\right) = 0$, pa ako uzmemo padajući niz pozitivnih brojeva (λ_n) koji teži prema 0, prema Teoremu 1.2.4.(c) slijedi

$$\mu\left(f^{\leftarrow}\langle 0,\infty]\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{\leftarrow}[\lambda_n,\infty]\right) = \lim_{n\to\infty}\mu\left(f^{\leftarrow}[\lambda_n,\infty]\right) = 0.$$

Obratno, ako je $\mu\left(f^{\leftarrow}\langle 0,\infty]\right) = 0$, tj. $f = 0$ skoro svuda na X, onda su u Definiciji 2.2.4. sve mjere (osim one za $k = 0$) jednake nuli, pa je i $\int_X f d\mu = 0$.
Konačno, ako je $\int_X f d\mu < \infty$, i ako uzmemo rastući niz pozitivnih brojeva (λ_n) koji teži prema $+\infty$, onda iz nejednakosti $\mu\left(f^{\leftarrow}[\lambda_n,\infty]\right) \leq \frac{1}{\lambda_n}\int_X f d\mu$ na limesu dobivamo $\lim_{n\to\infty}\mu\left(f^{\leftarrow}[\lambda_n,\infty]\right) = 0$, pa je i (koristeći Teorem 1.2.4.(d))

$$\mu\left(f^{\leftarrow}\{\infty\}\right) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{\leftarrow}[\lambda_n,\infty]\right) = \lim_{n\to\infty}\mu\left(f^{\leftarrow}[\lambda_n,\infty]\right) = 0.$$

$\square$

Aditivnost integrala funkcija s vrijednostima u proširenom skupu realnih brojeva $\bar{\mathbb{R}}$ je nešto složenija jer zbrajanje u $\bar{\mathbb{R}}$ nije uvijek definirano. Točnije, vrijedi sljedeća lema.

Lema 2.2.10. *Neka su f i g Lebesgue – integrabilne funkcije na $(X,\mathfrak{M},\mu)$ te neka je $\left(\int_X f d\mu, \int_X g d\mu\right) \in \widehat{\mathbb{R}^2} = \bar{\mathbb{R}}^2 \setminus \{(-\infty,\infty)(\infty,-\infty)\}$. Tada je $\mu\left(E^C\right) = 0$, gdje je skup $E := \left\{x \in X : (f(x), g(x)) \in \widehat{\mathbb{R}^2}\right\}$, zatim $f + g$ je Lebesgue – integrabilna na E te vrijedi aditivnost:*

$$\int_E (f+g)\, d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Posebno, ako su f i g realne funkcije, onda je $E = X$.

2.2.4 Integrabilne i sumabilne funkcije

Definicija 2.2.11. *Neka je $E \in \mathfrak{M}$ takav da je skup $X \setminus E$ zanemariv. Neka je funkcija $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ izmjeriva u paru $(E,\mathfrak{M}_E)$ i $\left(\bar{\mathbb{R}},\mathcal{B}_{\bar{\mathbb{R}}}\right)$. Tada kažemo da je funkcija f μ – izmjeriva na X, te definiramo njezin Lebesgueov integral*

$$\int_X f d\mu := \int_E f d\mu$$

ako integral na desnoj strani postoji.

Gornja definicija ne ovisi o izboru skupa E čiji je komplement zanemariv. Također, za kompleksnu funkciju kažemo da je μ – izmjeriva ako su joj realni i imaginarni dio takvi i na gornji način joj pridružimo Lebesgueov integral (ako postoji).

Definicija 2.2.12. *Neka je $\mathcal{L}^*$ ili $\mathcal{L}^*(\mu)$ skup svih μ – izmjerivih funkcija na X. Funkcije u $\mathcal{L}^*$ za koje Lebesgueov integral postoji (premda možda pripada skupu $\bar{\mathbb{R}}$ odnosno $\bar{\mathbb{R}} + i\bar{\mathbb{R}}$) nazivamo Lebesgue – integrabilnim funkcijama. Posebno, definiramo skup Lebesgue – sumabilnih funkcija*

$$\mathcal{L}^1 := \left\{ f \in \mathcal{L}^* : \int_X |f| d\mu < \infty \right\}.$$

U daljnjem tekstu ćemo takve funkcije radi jednostavnosti često zvati integrabilnima odnosno sumabilnima.
Zbog rastava

$$|f|^2 = (f_r^+)^2 + (f_r^-)^2 + (f_i^+)^2 + (f_i^-)^2,$$

gdje su f_r i f_i realni i imaginarni dio funkcije f, slijedi da su integrali $\int f_r^{\pm}$ i $\int f_i^{\pm}$ konačni pa možemo reći da se skup $\mathcal{L}^1$ sastoji od onih integrabilnih funkcija čiji integral pripada skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ odnosno skupu kompelsknih brojeva $\mathbb{C}$.

Koristimo još oznake $\mathcal{L}^1(X)$ ili $\mathcal{L}^1(\mu)$ ukoliko je potrebno izbjeći moguće zabune te s $\mathcal{L}^*_+$ označavamo skoro svuda nenegativne funkcije iz $\mathcal{L}^*$, a $\mathcal{L}^1_+ := \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^*_+$.
Prema zadnjoj tvrdnji Teorema 2.2.9. je za funkciju $f \in \mathcal{L}^1$, gdje funkcija f poprima vrijednosti u $\bar{\mathbb{R}}$, skup $f^{\leftarrow}\{-\infty, \infty\}$ zanemariv. Prema tome, svakoj takvoj funkciji možemo pridružiti realnu funkciju koja se od nje razlikuje samo na zanemarivom skupu. Pridružena realna funkcija je definirana na cijelom X. Stoga se uvodi skup svih realnih sumabilnih funkcija označen s $\mathcal{L}^1(X;\mathbb{R})$, dok je s $\mathcal{L}^1(X;\mathbb{C})$ označen skup svih kompleksnih sumabilnih funkcija. Strukturom realnog (kompleksnog) vektorskog prostora moći ćemo opskrbiti te skupove.

Možemo navesti kao primjer da je svaka omeđena λ – izmjeriva funkcija f na omeđenom segmentu u $\mathbb{R}$ Lebesgue – sumabilna (λ je podsjetimo se oznaka za Lebesgueovu mjeru na euklidskom prostoru). Treba napomenuti da je za ovakvu funkciju f od praktične važnosti provjeriti da su integrali $f^{\pm}$ konačni. Naime, ako u konstrukciji funkcije f ne koristimo aksiom izbora, onda je riješeno i pitanje izmjerivosti.
Polunorma na vektorskom prostoru je funkcija koja zadovoljava sve aksiome norme osim nedegeneriranosti. Točnije, ne mora vrijediti da je vektor nužno nul – vektor, ako mu je polunorma nula. U prethodnim razmatranjima dokazali smo sljedeći teorem.

Teorem 2.2.13. *Skup $\mathcal{L}^1(X;\mathbb{R})\left(\mathcal{L}^1(X;\mathbb{C})\right)$ je, uz uobičajeno zbrajanje i množenje funkcija brojem, realni (kompleksni) vektorski prostor, na kome je integral linearan funkcional. Štoviše, funkcija*

$$f \mapsto \int_X |f| d\mu$$

je polunorma na $\mathcal{L}^1(X;\mathbb{R})\left(\mathcal{L}^1(X;\mathbb{C})\right)$.

U daljnjem tekstu označavat ćemo skup $\mathcal{L}^1(X;\mathbb{R})$ (odnosno $\mathcal{L}^1(X;\mathbb{C})$) s $\mathcal{L}^1(X)$ ovisno o kontekstu.

Iz nejednakosti trokuta za polunormu slijedi da je skup svih vektora kojima je polunorma nula vektorski potprostor, koji ćemo privremeno označiti s $\mathcal{N}$. Prema Teoremu 2.2.9. vrijedi $\mathcal{N} = \left\{f \in \mathcal{L}^1(X) : f = 0 \text{ skoro svuda na } X\right\}$.
S $L^1(X)$ ćemo označiti faktorski (kvocijentni) prostor $\mathcal{L}^1(X)/\mathcal{N}$. Lako se provjeri da je polunorma dobro definirana na klasama ekvivalencije, te da je zapravo norma. Zapisat ćemo navedeno kao korolar.

Korolar 2.2.14. *Prostor* $L^1(X)$ *je normiran vektorski prostor, s normom definiranom formulom* $f \mapsto \int_X |f| d\mu$ *na reprezentantima.*

2.3 Konvergencija Lebesgueovog integrala

Teorem 2.3.1. (**Levijev o monotonoj konvergenciji**) *Neka je (f_n) niz nenegativnih izmjerivih funkcija na prostoru mjere $(X, \mathfrak{M}, \mu)$. Ako niz funkcija (f_n) konvergira k f po točkama $(f_n \nearrow f)$, onda vrijedi:*

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Dokaz. Zbog monotonosti integrala koju smo pokazali u Lemi 2.2.7. vrijedi sljedeća nejednakost

$$\lim_n \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu.$$

Trebamo još pokazati i obratnu nejednakost. Za neki prirodan broj m odabrat ćemo rastući niz nenegativnih jednostavnih funkcija φ_n^m koje konvergiraju k f_m $(\varphi_n^m \nearrow f_m)$. Definirat ćemo sljedeći niz $\psi_n := \max\{\varphi_n^1, \dots, \varphi_n^n\}$.
Funkcije ψ_n su jednostavne nenegativne funkcije te je niz rastući. Za $m \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi sljedeće:

$$\varphi_n^m \leq \psi_n \leq f_n,$$

pa kada prijeđemo na limes po n, za svaki prirodan broj m je ispunjeno :

$$f_m \leq \lim_n \psi_n \leq f.$$

Budući da f_m konvergira k f, slijedi da i niz ψ_n konvergira k f $(\psi_n \nearrow f)$. Po definiciji integrala vrijedi da je

$$\lim_n \int_X \psi_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

S druge strane je $\psi_n \leq f_n$. Ta nejednakost vrijedi za integrale, a i na limesu. Prema tome smo dokazali traženu tvrdnju, tj.

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X \psi_n d\mu \leq \lim_n \int_X f_n d\mu.$$

□

Za niz izmjerivih funkcija (f_n) na $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ kažemo da konvergira μ – skoro svuda ako postoji zanemariv skup Z tako da za svaki $x \in Z^C$ postoji limes $\lim_n f_n(x)$.

Ako je $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ funkcija, kažemo da niz (f_n) konvergira k f μ – skoro svuda ako je mjera skupa u kojem f_n ne konvergira ili konvergira k limesu koji nije jednak $f(x)$ jednaka nuli.

Po Lemi 1.1.9., ako niz (f_n) konvergira μ – skoro svuda, onda postoji izmjeriva funkcija f koja je μ – skoro svuda limes niza (f_n), što ćemo zapisati na sljedeći način:

$$\lim_n f_n(x) = f(x)\ (\mu\text{–ss}).$$

Ukoliko nema nedoumica o kojoj se mjeri radi, ispustit ćemo eksplicitno pisanje mjere μ.

Primijetimo da u prethodnom teoremu možemo pretpostaviti da $f_n \nearrow f$ skoro svuda umjesto po točkama. Za dokaz je dovoljno uočiti da se predefiniranjem funkcija f_n i f nulom na skupu mjere nula na kojem ne vrijedi $f_n \nearrow f$ vrijednost njihovih integrala ne mijenja.

Lema 2.3.2. (**Fatou**) *Neka je niz (f_n) izmjerivih funkcija zadan na prostoru mjere $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.*

(a) Ako su f_n nenegativne, onda vrijedi

$$\int_X \left(\liminf_n f_n\right) d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu.$$

(b) Ako postoji sumabilna funkcija g koja dominira f_n ($f_n \leq g,\ n \in \mathbb{N}$), onda vrijedi

$$\int_X \left(\limsup_n f_n\right) d\mu \geq \limsup_n \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz. Pokažimo prvo tvrdnju (a). Definirat ćemo sljedeći niz $h_m := \inf_{n \geq m} f_n$.
Tada je $f_m \geq h_m \nearrow \sup_m h_m = \liminf_n f_n$. Po Levijevom teoremu o monotonoj konvergenciji tada slijedi da je

$$\int_X \liminf_n f_n d\mu = \int_X \lim_m h_m d\mu = \lim_m \int_X h_m d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu.$$

Pokažimo sada tvrdnju (b). Definirat ćemo sljedeći niz $h_n := g - f_n \geq 0$. Tada je

$$\liminf_n h_n = g - \limsup_n f_n$$

i vrijedi da je

$$\liminf_n \int_X h_n d\mu = \int_X g d\mu - \limsup_n \int_X f_n d\mu.$$

Sada primijenimo tvrdnju (a) na definirani niz (h_n) pa slijedi

$$\begin{aligned}\limsup_n \int_X f_n d\mu &= \int_X g d\mu - \liminf_n \int_X h_n d\mu \leq \int_X g d\mu - \int_X \left(\liminf_n h_n\right) d\mu \\ &= \int_X g d\mu - \int_X \left(g - \limsup_n f_n\right) d\mu = \int_X \left(\limsup_n f_n\right) d\mu.\end{aligned}$$

□

Teorem 2.3.3. (**Lebesgueov o dominiranoj konvergenciji**) *Neka je* (f_n) *niz izmjerivih funkcija na prostoru mjere* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *koji skoro svuda konvergira k (izmjerivoj) funkciji* f. *Ako postoji sumabilna funkcija* g *koja dominira* $|f_n|$ *(tj.* $|f_n| \leq g$ *skoro svuda, za svaki prirodan broj* n*), onda je i funkcija* f *sumabilna te je* $\lim_n \int_X |f_n - f| d\mu = 0$. *Posebno je*

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Dokaz. Definirat ćemo skup E na sljedeći način:

$$E := \{x \in X : \lim_n f_n(x) = f(x) \ \& \ \sup_n |f_n(x)| \leq g(x)\}.$$

Za definirani skup E možemo uočiti da je izmjeriv (koristeći tvrdnje Leme 1.1.9.) te da mu je komplement zanemariv (kao unija dva zanemariva skupa iz pretpostavki teorema). Prema tome, integral svake funkcije po E jednak je onome po X. Stoga, bez smanjenja općenitosti pretpostavit ćemo da je $E = X$ pa će nam sve tvrdnje vrijediti svuda.
Koristeći tvrdnju (b) iz Fatouove leme vrijedi nam sljedeće:

$$0 \leq \limsup_n \left| \int_X f d\mu - \int_X f_n d\mu \right| \leq \limsup_n \int_X |f - f_n| \, d\mu \leq \int_X \limsup_n |f - f_n| \, d\mu = 0,$$

tj. sve gornje nejednakosti su u stvari jednakosti, i time slijedi tvrdnja. □

Možemo uočiti da je nužna pretpostavka dominiranosti. Ako na $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ definiramo niz funkcija $f_n := n\chi_{\langle 0, \frac{1}{n} \rangle}$, onda $f_n \to 0$ po točkama, a $\|f_n\|_{\mathrm{L}^1} = 1$ pa nije moguće da $f_n \to 0$ u L^1.
Eksplicitno korištenje dominirajuće funkcije, uz nešto drugačije pretpostavke, izbjegava se u sljedećem teoremu:

Teorem 2.3.4. (**Liebov oblik Fatouove leme**) *Neka su* $f_n, f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *te neka* $f_n \to f$ *skoro svuda. Tada vrijedi sljedeće:*

$$\lim_n \left| \|f_n\|_{\mathrm{L}^1} - \|f\|_{\mathrm{L}^1} - \|f_n - f\|_{\mathrm{L}^1} \right| = \lim_n \int_X \left| |f_n| - |f| - |f_n - f| \right| d\mu = 0.$$

Posebno, ako $\|f_n\|_{\mathrm{L}^1} \to \|f\|_{\mathrm{L}^1}$, *tada i* $\|f_n - f\|_{\mathrm{L}^1} \to 0$.

Dokaz. Budući da vrijedi $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$, slijedi da je

$$\left| \|f_n\|_{\mathrm{L}^1} - \|f\|_{\mathrm{L}^1} - \|f_n - f\|_{\mathrm{L}^1} \right| \leq \int_X \left| |f_n| - |f| - |f_n - f| \right| d\mu.$$

Stoga je dovoljno pokazati da vrijedi samo druga jednakost. Međutim, $||f_n| - |f| - |f_n - f|| \to 0$ μ - skoro svuda, dok je

$$||f_n| - |f| - |f_n - f|| \leq ||f_n| - |f_n - f|| + |f| \leq 2|f|.$$

Dakle, tvrdnja nam slijedi iz Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji.

□

Pokažimo još dvije primjene Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji na funkcijama koje ovise i o realnom parametru, koje se često koriste, a dokazao ih je Lebesgue još 1910. godine.

Korolar 2.3.5. *Neka je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor mjere te (Y, d) metrički prostor. Neka je $y_0 \in Y$ i U okolina točke y_0. Pretpostavimo da funkcija $F : U \times X \to \mathbb{R}$ ima sljedeća svojstva:*

(a) Postoji zanemariv skup Z u X takav da je $F(\cdot, x)$ neprekinuta u y_0 za svaki $x \in Z^C$.

(b) Za svaki $y \in U$ funkcija $F(y, \cdot)$ je μ – izmjeriva.

(c) Postoji funkcija $g \in \mathcal{L}^1(X)$ takva da za svaki $y \in U$ vrijedi sljedeća nejednakost $|F(y, \cdot)| \leq g$ skoro svuda.

Tada je za svaki $y \in U$ funkcija $F(y, \cdot) \in \mathcal{L}^1(X)$, dok je funkcija $f : y \mapsto \int_X F(y, \cdot)$ neprekinuta u y_0.

Dokaz. Pogledajmo svojstvo (c) te uočimo da je $F(y, \cdot) \in \mathcal{L}^1$ za $y \in U$ zato što je

$$\int |F(y, \cdot)| \leq \int g < \infty.$$

Kako bismo pokazali neprekidnost funkcije, dovoljno nam je provjeriti da za $y_n \to y_0$, vrijedi i

$$\int F(y_n, \cdot) \to \int F(y_0, \cdot).$$

Sada ćemo provjeriti da su za niz funkcija (f_n), definiranih s $f_n := F(y_n, \cdot)$ zadovoljeni uvjeti Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji. Zbog pretpostvake (c) slijedi da je $|f_n| \leq g$ skoro svuda. Zbog neprekidnosti funkcije F po prvoj varijabli u točki y_0 za skoro svaki x (pretpostavka (a)) vrijedi sljedeće:

$$f_n(x) = F(y_n, x) \to F(y_0, x) = f(x) \ \ (\text{ss } x).$$

Stoga zaključujemo da $\int f_n \to \int f$. □

Korolar 2.3.6. *Neka je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor mjere te neka je $U \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval. Pretpostavimo da funkcija $F : U \times X \to \mathbb{R}$ ima sljedeća svojstva:*

(a) Postoji zanemariv skup Z u X takav da je $F(\cdot, x)$ diferencijabilna na U za svaki $x \in Z^C$.

(b) Za svaki $y \in U$ funkcija $F(y, \cdot)$ je μ – izmjeriva.

(c) Postoji funkcija $g \in \mathcal{L}^1(X)$ takva da za svaki $y \in U$ vrijedi sljedeća nejednakost $\left|\partial_y F(y, \cdot)\right| \leq g$ skoro svuda.

(d) Postoji $y_0 \in U$ takav da je $F(y_0, \cdot) \in \mathcal{L}^1(X)$.

Tada je za svaki $y \in U$ funkcija $F(y, \cdot) \in \mathcal{L}^1(X)$, dok je funkcija

$$f : y \mapsto \int_X F(y, \cdot)$$

diferencijabilna na U i njezina je derivacija jednaka

$$f'(y) = \int_X \partial_y F(y, x)\, d\mu(x).$$

Dokaz. Neka su $a, b \in U$ različiti te neka je $x \in Z^C$. Tada za dane a, b i x po teoremu srednje vrijednosti postoji broj ξ koji se nalazi između a i b takav da vrijedi sljedeće:

$$\left|\frac{F(b, x) - F(a, x)}{b - a}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial_y} F(\xi, x)\right| \leq g(x),$$

gdje nejednakost vrijedi zbog pretpostavke (c).
Budući da je $F(b, \cdot)$ sumabilna funkcija za $b = y_0$, iz gornje nejednakosti slijedi da je sumabilna i za svaki b.
Neka je sada $y \in U$ i (y_n) niz u U takav da $y_n \to y$. Budući da je

$$f'(y) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(y)}{y_n - y} = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_X F(y_n, x)\, d\mu(x) - \int_X F(y, x)\, d\mu(x)}{y_n - y}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_X \frac{F(y_n, x) - F(y, x)}{y_n - y} d\mu(x),$$

gornja nejednakost je upravo dominiranost podintegralne funkcije, pa slijedi tvrdnja po Teoremu 2.3.3. □

Poglavlje 3

Produktni prostori i L^p prostori

Kada se usporede Lebesgueov integral i Riemannov integral, Lebesgueov integral obuhvaća širu klasu integrabilnih funkcija u odnosu na Riemannov. Također, u prethodnom poglavlju pokazani su dobri rezultati konvergencije Lebesgueovog integrala. No, osim navedenih svojstava Lebesgueov integral ima i neka druga dobra svojstva.
Lebesgueov integral daje dobra svojstva na produktnim prostorima. Ograničit ćemo se na produkt dvaju prostora mjere.

Definicija 3.0.1. *Neka su* $(X_1, \mathfrak{M}_1)$ *i* $(X_2, \mathfrak{M}_2)$ *izmjerivi prostori. Produkt dvaju izmjerivih prostora* $(X_1, \mathfrak{M}_1)$ *i* $(X_2, \mathfrak{M}_2)$ *je izmjeriv prostor koji označavamo s* $(X_1 \times X_2, \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2)$*, pri čemu je produkt* σ *– algebri definiran na sljedeći način:*

$$\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2 := \sigma\left(\{E_1 \times E_2 : E_1 \in \mathfrak{M}_1 \ \& \ E_2 \in \mathfrak{M}_2\}\right).$$

Za funkcije koje su definirane na produktu prostora mjere kod Lebesgueovog integrala je moguće zamijeniti poredak integracije za svaku nenegativnu funkciju i za svaku sumabilnu funkciju. To nam omogućavaju sljedeća dva teorema. Prvi od njih ujedno govori i o tome kako uopće definirati mjeru na produktnom prostoru.

Teorem 3.0.2. **(Tonelli)** *Neka su* $(X_1, \mathfrak{M}_1, \mu_1)$ *i* $(X_2, \mathfrak{M}_2, \mu_2)$ *prostori* σ *– konačne mjere. Tada postoji jedinstvena mjera* ν *na izmjerivom prostoru* $(X_1 \times X_2, \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2)$ *takva da vrijedi*

$$(\forall E_1 \in \mathfrak{M}_1)\,(\forall E_2 \in \mathfrak{M}_2) \quad \nu\,(E_1 \times E_2) = \mu_1\,(E_1)\,\mu_2\,(E_2)\,.$$

Štoviše, za svaku nenegativnu izmjerivu funkciju f *na* $X_1 \times X_2$ *integrali prereza*

$$\int_{X_2} f\,(\cdot, x_2)\,d\mu_2\,(x_2) \ \ i \ \int_{X_1} f\,(x_1, \cdot)\,d\mu_1\,(x_1)$$

su izmjerive funkcije na $(X_1, \mathfrak{M}_1)$, odnosno na $(X_2, \mathfrak{M}_2)$, te vrijedi

$$\int_{X_1 \times X_2} f d\nu = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1).$$

Mjeru ν konstruiranu Tonellijevim teoremom zovemo produkt mjera μ_1 i μ_2, te označavamo s $\mu_1 \otimes \mu_2$.

Teorem 3.0.3. (**Fubini**) *Neka su $(X_1, \mathfrak{M}_1, \mu_1)$ i $(X_2, \mathfrak{M}_2, \mu_2)$ prostori σ – konačne mjere. Neka je f izmjeriva funkcija na produktu $(X_1 \times X_2, \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2)$. Tada je funkcija f $\mu_1 \otimes \mu_2$ – sumabilna ako i samo ako je*

$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} |f(x_1, x_2)|\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) < \infty,$$

odnosno ako i samo ako je

$$\int_{X_2} \left(\int_{X_1} |f(x_1, x_2)|\, d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2) < \infty.$$

Nadalje, definirajmo

$$E_1 := \left\{ x_1 \in X_1 : \int_{X_2} |f(x_1, x_2)|\, d\mu_2(x_2) < \infty \right\},$$

$$E_2 := \left\{ x_2 \in X_2 : \int_{X_1} |f(x_1, x_2)|\, d\mu_1(x_1) < \infty \right\},$$

te funkcije f_1 na X_1 i f_2 na X_2 sljedećim formulama

$$f_1(x_1) := \begin{cases} \int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2), & x_1 \in E_1 \\ 0, & \textit{inače}, \end{cases}$$

$$f_2(x_2) := \begin{cases} \int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1), & x_2 \in E_2 \\ 0, & \textit{inače}. \end{cases}$$

Funkcije f_1 i f_2 su realne i izmjerive na $(X_1, \mathfrak{M}_1)$, odnosno $(X_2, \mathfrak{M}_2)$. Konačno, ako je f $\mu_1 \otimes \mu_2$ – sumabilna funkcija, onda je $\mu_1\left(E_1^C\right) = \mu_2\left(E_2^C\right) = 0$, $f_1 \in \mathcal{L}^1(X_1)$, $f_2 \in \mathcal{L}^1(X_2)$, te vrijedi

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) = \int_{X_1} f_1(x_1)\, d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} f_2(x_2)\, d\mu_2(x_2).$$

Osim dobrog ponašanja na produktnim prostorima Lebesgueov integral nam omogućuje definiciju klasa Banachovih funkcijskih prostora koje kraće nazivamo L^p prostorima s velikom primjenom kod proučavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Jedan takav prostor (za $p = 1$) je već opisan u Korolaru 2.2.14., a sada dajemo općenitu definiciju.

Definicija 3.0.4. *Neka je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor mjere. Neka je $f : X \to \mathbb{C}$ i neka je $p \in \mathbb{R}^+$. Definiramo broj:*

$$\|f\|_{L^p(X)} := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \in [0, \infty] .$$

Za $p = \infty$ definiramo $\|f\|_{L^\infty(X)} := \inf\{C \geq 0 : |f| \leq C$ skoro svuda$\}$.
Skup svih izmjerivih funkcija f za koje je $\|f\|_{L^p(X)} < \infty$ označavamo $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$, odnosno kraće zapisano $\mathcal{L}^p(\mu)$ ili $\mathcal{L}^p(X)$. Za takve funkcije ćemo često reći da su p - sumabilne.

Za općenitu funkciju $f : X \to A$, gdje je $(A, |\cdot|)$ normiran prostor, pišemo $\mathcal{L}^p(X; A)$ te slično za funkcije koje poprimaju vrijednosti u nekom podskupu, na primjer $\mathcal{L}^p(X; [0, 1])$.

$\mathcal{L}^p(X)$ je vektorski prostor (odnosno potprostor svih funkcija $f : X \to \mathbb{C}$ ili $f : X \to A$). Na tom prostoru definira se relacija ekvivalencije: za izmjerive funkcije f i g vrijedi $f \sim g$ ako je $f = g$ skoro svuda. Kvocijentni vektorski prostor označavamo s $L^p(X) := \mathcal{L}^p(X) / \sim$ i zovemo ga Lebesgueovim prostorom. Pokazuje se da je $\|\cdot\|_{L^p(X)}$ (dana u Definiciji 3.0.4.) norma na prostoru $L^p(X)$, uz koju je taj prostor i potpun, tj. Banachov.

Jedno od najvažnijih svojstava L^p prostora iskazano je u sljedećoj lemi koja je poznata pod nazivom Hölderova nejednakost.

Lema 3.0.5. (**Hölderova nejednakost**) *Neka je $p \in [1, \infty]$, a p' njegov konjugirani eksponent $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$. Ako su f i g izmjerive funkcije na X, onda vrijedi*

$$\|fg\|_{L^1(X)} \leq \|f\|_{L^p(X)} \|g\|_{L^{p'}(X)} .$$

Bibliografija

[1] A. Antonić, M. Vrdoljak, *Mjera i integral*, Prirodoslovno - matematički fakultet - Matematički odjel Sveučilišta u Zagrebu, 2001.

[2] D. Jukić, *Mjera i integral*, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, 2012.

Sažetak

Cilj ovog rada jest prikazati konstrukciju Lebesgueovog integrala i prednosti u odnosu na Riemannov integral. U tu svrhu smo, nakon kratkog uvoda, definirali izmjerive funkcije te naveli neka njihova osnovna svojstva. Zatim smo definirali mjeru i naveli njezina svojstva te smo konstruirali mjeru iz vanjske mjere. Nakon toga smo pogledali Lebesgueovu mjeru na euklidskom prostoru. Potom smo konstruirali Lebesgueov integral za jednostavne nenegativne funkcije, nenegativne funkcije, realne i kompleksne funkcije. Zatim smo proučili konvergenciju Lebesgueovog integrala. Na kraju smo naveli još neka dobra svojstva Lebesgueovog integrala u odnosu na Riemannov integral.

Summary

The aim of this paper is to show the construction of the Lebesgue integral and its advantages over the Riemann integral. For this purpose, after a short introduction, we have defined measurable functions and listed some of their basic properties. After that, we defined the measure and listed its properties and constructed the measure from an outer measure. Then we constructed Lebesgue measure in Euclidean space. We then constructed the Lebesgue integral for simple nonnegative functions, nonnegative functions, real and complex functions. Next, we investigated the convergence of the Lebesgue integral. Finally, we have listed some other good properties of the Lebesgue integral in relation to the Riemann integral.

Životopis

Rođena sam 10. travnja 1993. godine. Završila sam Osnovnu Školu „Braća Ribar“ u Posedarju te sam nakon toga upisala i završila Klasičnu Gimnaziju Ivana Pavla II. u Zadru. Nakon završene srednje škole 2011. godine upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički. Nakon završetka preddiplomskog studija 2016. godine upisala sam Diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički.