Primjena diferencijalnog i integralnog računa u ekonomiji i fizici

Galić, Kristijan

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

GALIĆ KRISTIJAN

PRIMJENA DIFERENCIJALNOG I INTEGRALNOG RAČUNA U EKONOMIJI I FIZICI

Zagreb, 2020. godine

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Kristijan Galić

PRIMJENA DIFERENCIJALNOG I INTEGRALNOG RAČUNA U EKONOMIJI I FIZICI

Voditelj rada:

prof.dr.sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, 2020. godine

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ________________
2. ________________
3. ________________

SADRŽAJ

Velika zahvala, u prvome redu, mojoj mentorici prof. dr. sc. Željki Milin Šipuš kojoj zahvaljujem na ogromnoj pomoći i velikoj količini strpljenja i toleranciji za sve moje nedoumice i probleme vezane uz izradu ovoga diplomskoga rada. Hvala vam puno.

Posebno zahvala mojoj obitelji na podršći tijekom života, a posebno tijekom studiranja.

Velika zahvala svim mojim prijateljima i kolegama koji su bili tu tijekom moga studiranja, sada konačno možete odahnuti, više vam neću jesti živce sa svojim problemima vezanim uz kolokvije i usmene

UVOD

Diferencijalni i integralni račun područje je matematike koje izračunava kako se čestice, tijela, planeti, itd. zapravo kreću, odnosno gibaju, a koristi se kako bi mogli izračunati stopu promjene u stvarnome vremenu. Prije otkrića diferencijalnoga i integralnoga računa matematika je bila statična sve do 17. stoljeća kada su dva matematičara razvila diferencijalni i integralni račun. Bili su to Isaac Newton i Gottfried Wilhelm Leibnitz. Leibnitz je razvio matematičku notaciju koju i dan danas koristimo $(+,-,\times,\div)$ dok je Newton razvio diferencijalni račun i dao mu direktnu primjenu u računanju u fizici (interpretacije derivacije pomoću fizičkoga modela). S tim alatima koje su njih dvojica razvili matematičari su mogli računati nagibe, zakrivljenosti, stopu promjene te gibanje tijela. To im je omogućilo razumijevanje gibanja i dinamiku promjene svemira i elemenata u svijetu.

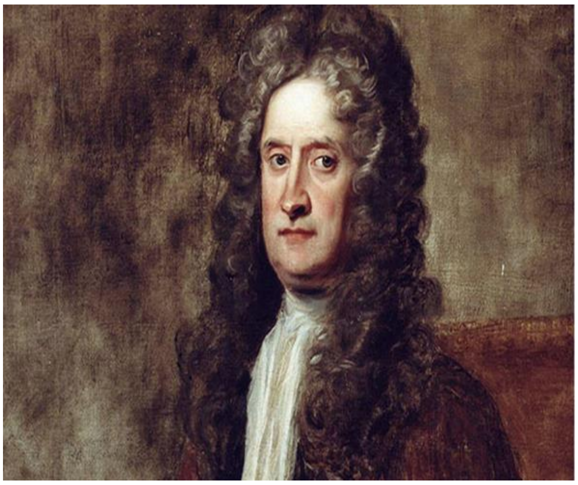
Calculus, kako se naziva diferencijalni račun na latinskome, znači mali šljunak koji su koristili za prebrojavanje u abacusu stari Rimljani. Koristili su se za prebrojavanje beskonačno malih brojeva. Diferencijalni račun je "matematika u pokretu". To je račun promjene koji se koristi kako bi nam pomogao opisati dinamiku prirode našega svijeta.

Od svog otkrića, diferencijalni i integralni račun bio je neizostavan pri razvoju i otkrivanju mnogih znanstvenih dostignuća, posebice u području fizike i inžinjerstva. On nam može reći sve o gibanju astronomskih tijela, promjeni vremena, strujnome krugu, brzini zvuka i svjetlosti, … Diferencijalni i integralni račun vjerojatno je bio korišten i pri izumu velike količine stvari u našem domu. Diferencijalni i integralni račun sastoji se od dvaju područja. Pomoću diferencijalnog računa možemo izračunati ponašanje i stopu kojom opisujemo promjenu (npr. promjena udaljenosti u ovisnosti o vremenu). On pokriva koncept derivacije neke funkcije. Druga grana diferencijalnog računa integralni je račun. To je obratni proces od diferencijanog računa. On nam pomaže izračunati, npr. volumen 3d tijela sa zakrivljenim granicama kao i mnoge druge slične primjene. Integracija "razbija" neku površinu u mnogo malih pravokutnika s jednakim udaljenostima dok ne postanu "beskonačno male". To je proces koji je omogućio mnogim matematičarima da računaju volumene, površine, itd.

Diferencijalni i integralni račun od iznimnog je značaja zbog svoje široke primjene. On nije ograničen samo na matematičare, već se koristi u više manje svemu; od fizike, kemije, ekonomije, biologije, inžinjerstva... Odatle dolazi ogromna važnost diferencijalnoga i integralnoga računa. Diferencijalni i integralni račun bavi se analizom brzine promjene u ovisnosti o varijabli o kojoj funkcija ovisi, kao i o ukupnoj promjeni funkcije u ovisnosti o varijabli o kojoj funkcija ovisi. Mnoga današnja pitanja svode se na problem brzine promjene:

- Kolika je brzina promjene cijene nekog proizvoda?
- Kolika je ukupna promjena cijene nekog proizvoda?
- Kolika je brzina promjene temperature tijela prilikom provođenja topline?
- Kolika je ukupna promjena temperature tijela prilikom provođenja topline?
- Kolika je brzina promjene brzine tijela?
- Kolika je ukupna promjena brzine tijela?
- Kolika je brzina promjene populacije pod nekim uvjetima?
- Kolika je ukupna promjena populacije pod nekim uvjetima?

Kao što možemo vidjeti veoma je važno učiti diferencijalni i integralni račun. Diferencijalni i integralni račun *majka* je matematike i jedan od najvažnijih darova koje nam je matematički svijet dao.



Slika 1.1. Sir Isaac Newton[1]

Slika 1.2. Gottfried Wilhelm Leibnitz[2]

[1] https://medium.com/@jakubferencik/11-things-you-didnt-know-about-the-crazy-genius-isaac-newton-615280f941d4

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz

1. DERIVACIJA

Uz pomoć diferencijalnog i integralnog računa možemo pratiti i analizirati promjene različitih veličina. Derivacija je jedan od dvaju osnovnih pojmova diferencijalnoga i integralnoga računa. Funkcija je matematički pojam kojim možemo opisati ovisnost jedne veličine o drugoj. Računanje derivacije neke funkcije nije ništa drugo nego računanje kvocijenta promjene vrijednosti funkcije u odnosu na promjenu varijable o kojoj funkcija ovisi te ćemo se u ovome dijelu rada, za početak, podsjetiti pojma derivacije služeći se najviše srednjoškolskim udžbenicima ([2]), sveučilišnim udžbenikom ([7]) te jednostavnim pravilima koji nam omogućavaju računanje derivacije određene funkcije.

1.1. Definicija derivacije

Kako bi učenici lakše usvojili pojam derivacije ovu cjelinu započet ćemo s jednim uvodnim primjerom čiji je cilj razumijevanje pojma derivacije, odnosno zadatkom čija je namjena da učenici uoče kako je derivacija funkcije $y = f(x)$ granična vrijednost kojoj se približava kvocijent diferencija $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kada se Δx približava vrijednosti 0.

Primjer 1.1.1. Neka je $(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-2}$.

a) Izračunajmo vrijednost funkcije $f(x)$ za $x = 2.1, x = 1.9, x = 2.01, x = 1.99, x = 2.001\ i\ x = 1.999$.
b) Možemo li na temelju izračunatih vrijednosti pretpostaviti kojoj se graničnoj vrijednosti približavaju vrijednosti funkcije $f(x)$ kada se vrijednosti od x približavaju vrijednosti 2?
c) Dokažimo tu pretpostavku.

Rj:

a)

x	2.1	2.01	2.001
$f(x)$	-0.9	-0.99	-0.999
x	1.9	1.99	1.999
$f(x)$	-1.1	-1.01	-1.001

b) Prema vrijednostima koje smo dobili možemo zaključiti da $f(x)$ teži k -1 kada x teži prema 2.
c) Naime,

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2}$$

Te možemo zaključiti da za $x \neq 2$ je $f(x) = x - 3$. Vidimo da kada se x približava vrijednosti 2 , $x - 3$ će se približavati vrijednosti -1. Uočavamo da funkcija $f(x)$ nije definirana u samoj točki 2 jer točka 2 nije u domeni funkcije. To nas ipak nije spriječilo da nađemo graničnu vrijednost funkcije $f(x)$ u točki 2. Kako se u drugim točkama funkcija podudara s funkcijom $f_1(x) = x - 3$ uočavamo da je limes početne funkcije jednak vrijednosti funkcije $f_1(2)$.

Napomena : Ako je funkcija $f(x)$ definirana u okolini točke x_0, ali ne nužno i u samoj točki x_0 i ako se njezine vrijednosti približavaju vrijednosti a, tada kažemo : "$f(x)$ teži k a, kada x teži k x_0. " To možemo zapisati i na sljedeći način:

$$f(x) \to a \text{ kada } \; x \to x_0$$

isto značenje ima i izraz" limes(granica) od $f(x)$, za x prema x_0, je a" što možemo zapisati i ovako:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Dakle, prethodni primjer smo mogli riješiti i na sljedeći način:

$$\frac{x^2-5x+6}{x-2} \to -1 \text{ kada } x \to 2 \text{ ili } \lim_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = -1$$

Kada se x približava vrijednosti x_0 može se dogoditi da se vrijednosti funkcije $f(x)$ ne približavaju nekom fiksnom broju. U tom slučaju kažemo da $f(x)$ nema limes, odnosno nema granice kada $x \to x_0$,odnosno da limes funkcije $f(x)$ kada $x \to x_0$ ne postoji. Vratimo se sada na derivaciju, za nas trenutno najvažniji limes. Iz toga kako smo uveli pojam derivacije jasno je da je ona granična vrijednost. Budući da smo se sada pobliže upoznali s pojmom granice te s odgovarajućom terminologijom, sada sasvim precizno možemo izreći o kakvom je limesu riječ.

Definicija 1.1. *Neka je $f(x)$ funkcija definirana u nekoj okolini točke x_0. Funkcija f je derivabilna u točki x_0 ako postoji*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Taj limes zovemo derivacijom funkcije f u točki x_0 i označavamo ga sa $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Alternativno, kažemo da je derivacija funkcije $y = f(x)$ granična vrijednost kojoj se približava kvocijent diferencija $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kada se Δx približava vrijednosti 0.

Sada ćemo u jednom jednostavnom primjeru provjeriti jesu li učenici usvojili pojam derivacije, odnosno jesu li usvojili definiciju derivacije kao limesa.

Primjer 1.1.2. Izračunajmo derivaciju od $f(x) = x^2$.

Rj:

Pozivajući se na formulu iz Definicije 1.1. dobivamo sljedeću jednakost:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - {x_0}^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

Prethodni izraz možemo pojednostavniti, te dobivamo:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

Dakle, zaključujemo da je derivacija funkcije $f(x) = x^2$ jednaka $f'(x_0) = 2x_0$

Promotrimo sada na trenutak vezu između derivabilnosti i neprekidnosti.

Definicija 1.2. *Neka je $f: D \to R, D \subseteq R$ funkcija. Funkcija f neprekidna je u točki $x_0 \in D$, gdje je D područje definicije funkcije f ako je $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Funkcija f neprekidna je ako je neprekidna u svakoj točki svoga područja definicije D.*

Propozicija 1.1. *Ako je f derivabilna u x_0,tj. ako postoji $f'(x_0)$, onda je f neprekidna u x_0,tj. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Dokaz: Uočimo prvo da $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ znači isto kao i $\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = 0$. S druge strane $f(x) - f(x_0) = \Delta y$, a $x \to x_0$ znači da $\Delta x \to 0$, pa neprekidnost od f u x_0 možemo izraziti i ovako: $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Dakle, pretpostavljajući derivabilnost mi moramo dokazati da $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x)$$

$$= (\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x})(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x) = (derivacija\ postoji) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Time smo dokazali što se od nas tražilo. Treba još napomenuti da obrat ne vrijedi, tj. da neprekidnost funkcije ne povlači nužno derivabilnost funkcije.

1.2. Osnovna pravila deriviranja

Mi smo derivaciju $f'(x_0)$ definirali kao limes kojemu teži kvocijent diferencija $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kada $\Delta x \to 0$. Međutim, G. W. Leibnitz, koji je zajedno sa I. Newtonom u 17. stoljeću stvorio diferencijalni i integralni račun, je umjesto graničnoga procesa derivaciju doslovno zamišljao kao kvocijent $\frac{dy}{dx}$, ali " beskonačno malih veličina",tzv. infinitezimala, dx i dy.(Zbog toga se diferencijalni i integralni račun danas često naziva i infinitezimalnim računom.) Taj koncept bio je povezan s velikim teškoćama jer kada se priča o infinitezimalima njih se često smatralo kao da su jednaki nuli i kao da su različiti od nule. Taj koncept konačno je napušten i zamjenio ga je koncept derivacije kao granične vrijednosti, ali ono što je ostalo kao trajna vrijednost Leibnitzova je oznaka za derivaciju $\frac{dy}{dx}$. Ta oznaka pokazala se izuzetno plodonosnom i pogodnom za mnoga velika matematička otkrića. I mi ćemo koristiti oznaku $\frac{dy}{dx}$, ali kao sinonim za $f'(x)$, ne davajući joj značenje stvarnoga kvocijenta. Izraz $\frac{dy}{dx}$ čitamo kao " derivacija od y po x" ili kraće "dy po dx" . Prilikom upotrebe Leibnitzova simbola mora uvijek biti jasno o kojoj vezi $y = f(x)$ se radi. Leibnitzovu simboliku možemo upotrijebiti i onda kada su varijable drugačije imenovane, npr. površina kruga P kvadratna je funkcija radijusa r, preciznije $P = r^2\pi$ pa je njezina derivacija $\frac{dP}{dr} = 2r\pi$. Simbol $\frac{d}{dx}$ možemo shvatiti kao simbol operacije deriviranja, kao što shvaćamo i crtu (') u drugoj simbolici za deriviranje.

U ovome ćemo djelu izvesti osnovna pravila deriviranja, pomoću kojih ćemo moći izračunati derivaciju svake racionalne funkcije, dakle i svakoga polinoma. Budući da je svaki polinom i svaka racionalna funkcija građena od potencija x^n, najprije ćemo pronaći njihove derivacije.

1. Derivacija potencije

Neka je $f(x) = x^n$, gdje je n bilo koji pozitivni cijeli broj. Tada je:

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - {x_0}^n}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots {x_0}^{n-1})}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots {x_0}^{n-1}$$

$$= nx^{n-1}$$

U Leibnitzovoj simbolici zapis bi bio sljedeći: (uz $f(x) = x^n$):

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

2. Deriviranje umnoška s konstantom

Pretpostavimo sada da je cf umnožak funkcije f s konstantom c,tj. $(cf)(x) = c \cdot f(x)$. Ako znamo derivacije funkcije f lako možemo pronaći derivaciju funkcije cf. Naime:

$$(cf)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(cf)(x + \Delta x) - (cf)(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot f(x + \Delta x) - c \cdot f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} c \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= c \cdot f'(x)$$

U Leibnitzovoj simbolici zapis bi bio idući:

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Primjenom gore navedenih pravila deriviranja možemo pronaći derivaciju svakoga monoma cx^n. Polinom je zbroj monoma pa problem derivacije polinoma možemo svesti na problem deriviranja zbroja.

3. **Deriviranje zbroja i razlike.**

Neka je funkcija $f+g$ zbroj funkcija f i g,tj. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$. Stoga:

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f+g)(x+\Delta x)-(f+g)(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x+g(x)]}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}]\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=f'(x)+g'(x)
\end{aligned}
$$

Pretpostavili smo da postoje derivacije $f'(x)$ te $g'(x)$. Dakle, uz tu pretpostavku derivacija zbroja je jednaka zbroju derivacija. Isti princip vrijedi i za derivaciju razlike jer $x-y=x+(-y)$.

U Leibnitzovoj simbolici, uz $u=f(x)$ te $v=g(x)$ zapis bi izgledao:

$$\frac{d}{dx}[f(x)\pm g(x)]=\frac{d}{dx}[f(x)]\pm\frac{d}{dx}[g(x)]$$

4. **Derivacija umnoška**

Pravilo za deriviranje zbroja i razlike vrlo je jednostavno, ali pravilo za deriviranje umnoška malo je složenije. Naime, derivacija zbroja zbroj je derivacija, a derivacija razlike razlika je derivacija, ali derivacija umnoška nije umnožak derivacija. Valjano pravilo za deriviranje umnoška malo je kompliciranije. Promotrimo umnožak $f(x)\cdot g(x)$. Označimo faktor $f(x)$ s u, a faktor $g(x)$ sa v, umnožak $y=u\cdot v$. Promijenimo li x za neki Δx u će se promijeniti za $\Delta u=f(x+\Delta x)-f(x)$, a v će se promijeniti za $\Delta v=g(x+\Delta x)-g(x)$ dok će se y promijeniti za neki Δy. Idemo izračunati Δy:

$y=uv, y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)=uv+u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v, \Delta y=u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v$. Iz čega slijedi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

Kada prijeđemo na graničnu vrijednost pronalazimo sljedeće:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta \mathrm{u}}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v)$$

$$= u \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \right] + v \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right] + \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right] + [\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v]$$

$$= u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \cdot 0$$

$$= u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Napomenimo da smo u izvodu pretpostavili da postoje $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$ te $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$, tj. $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$ slijedi iz njene derivabilnosti.

U Leibnitzovoj simbolici koristeći supstituciju $u = f(x)$ i $v = g(x)$ dobivamo sljedeće:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x) \frac{d}{dx}[g(x)] + g(x) \frac{d}{dx}[f(x)]$$

Jednostavnost izvoda pravila za deriviranje umnoška dugujemo spretnosti Leibnitzove simbolike.

5. Derivacija kvocijenta

Prilikom pronalaska derivacije kvocijenta prvo ćemo definirati h kao kvocijent dviju funkcija f i g,tj. $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Ako su funkcije f i g te $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ derivabilne, tada iz $f(x) = h(x)g(x)$ te pravila za deriviranje umnoška dobivamo:

$f'(x) = h'(x)g(x) + h(x)g'(x)$, odakle uz pretpostavku da je $g(x) \neq 0$ pronalazimo:

$$h'(x) = \frac{f'(x) - h(x)g'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{f'(x) - \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] g'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Pravilo za deriviranje kvocijenta izveli smo pomoću pravila za deriviranje umnoška uz pretpostavku da su f, g ali i $\frac{f}{g}$ derivabilne funkcije.

U Leibnitzovoj simbolici derivacija kvocijenta izgledala bi ovako:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x) \frac{d}{dx}[f(x)] - f(x) \frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

6. Derivacija recipročne funkcije

Primjenom pravila za derivaciju kvocijenta na ovaj slučaj dobivamo:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{0 \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}$$

$$= -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

U Leibnitzovoj simbolici derivaciju recipročne vrijednosti prikazujemo kao:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{1}{[f(x)]^2}\frac{d}{dx}[f(x)]$$

7. Deriviranje cjelobrojne potencije

Derivaciju cjelobrojne potencije pokazat ćemo preko primjera.

Primjer 2.2.1. Derivirajmo $f(x) = x^{-3}$

$$\frac{d}{dx}(x^{-3}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^6}3x^2 = \frac{-3}{x^4} = -3x^{-4}$$

Rj: Ovaj primjer upućuje na to da koristeći pravilo za derivaciju recipročne funkcije možemo izreći pravilo za derivaciju cjelobrojne negativne potencije $x^{-n}, n > 0$.

$$\frac{d}{dx}(x^{-k}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^k}\right)$$

$$= -\frac{1}{(x^k)^2}\frac{d}{dx}(x^k)$$

$$= -\frac{1}{x^{2k}}(kx^{k-1})$$

$$= -kx^{(k-1)-2k}$$

$$= -kx^{-k-1}$$

Označimo li negativni cjelobrojni eksponent $-k$ s $n = -k$, možemo uočiti da je $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$. To nam govori da pravilo za deriviranje potencije, osim za cjelobrojne pozitivne, vrijedi i za cjelobrojne negativne eksponente, kao i za $n = 0$.

U Leibnitzvoj simbolici zapis bi izgledao na sljedeći način:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}(\ za\ n < 0\ nužno\ je\ x \neq 0)$$

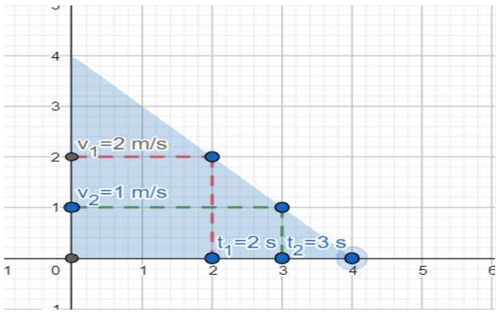
1.3. Dva klasična problema

Brzina gibanja kao fizikalna interpretacija te tangentni nagib kao geometrijska interpretacija osnovne su dvije interpretacije pojma derivacije. One su također i osnovna motivacija za formalno uvođenje pojma derivacije.

1.3.1. Problem brzine

Promotrimo najprije problem nalaženja brzine tijela koje se giba pravocrtno, npr. auta koji se kreće ravnom cestom. Iznos vremena koje je prošlo od početka gibanja označimo s x, dok ćemo s y označiti iznos prijeđenoga puta. Iznos prijeđenoga puta ovisi o proteklome vremenu x, tj. y je funkcija od x. Označimo tu funkciju s f. Dakle, $y = f(x)$. Za početak ćemo definirati pojam *prosječne brzine.*

Definicija 1.3. *Prosječna brzina omjer je prijeđenog puta s vremenskim intervalom za koji smo taj put prošli.*



Slika 1.1. Prosječna brzina.

$$\text{Prosječna brzina} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Budući da je $x = x_0 + \Delta x$, vrijedi i sljedeća formula:

$$\text{Prosječna brzina} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Sljedeći pojam koji ćemo definirati bit će *trenutna brzina.* Trenutna brzina brzina je tijela u nekome vremenu te se intuitivno postavlja pitanje u kakvome su odnosu prosječna i trenutna brzina. S par kratkih primjera prikazat ćemo kako prosječne brzine aproksimiraju trenutnu brzinu.

Primjer 1.3.1. Neka je put što ga auto prijeđe u vremenu x određen funkcijom $y = x^2 + 3$. Izračunajmo interval vremena Δx, interval puta Δy i prosječnu brzinu auta na tim intervalima ako je:

a) $x_0 = 3 \; i \; x = 4$
b) $x_0 = 3 \; i \; x = 3.1$
c) $x_0 = 3 \; i \; x = 3.01$

Rj:

a) Interval vremena je $\Delta x = x - x_0 = 4 - 3 = 1$. Odgovarajući interval puta je $\Delta y = y - y_0 = (x^2 + 3) - ({x_0}^2 + 3) = 19 - 12 = 7$. Prosječna brzina na zadanome interval je $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 7$.

b) Interval vremena je $\Delta x = x - x_0 = 3.1 - 3 = 0.1$. Odgovarajući interval puta je $\Delta y = y - y_0 = (x^2 + 3) - ({x_0}^2 + 3) = 9.61 - 9 = 0.61$. Prosječna brzina na zadanome interval je $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6.1$

c) Interval vremena je $\Delta x = x - x_0 = 3.01 - 3 = 0.01$. Odgovarajući interval puta je $\Delta y = y - y_0 = (x^2 + 3) - ({x_0}^2 + 3) = 9{,}0601 - 9 = 0{,}0601$. Prosječna brzina na zadanome interval je $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6.01$

U prethodnom primjeru izračunali smo prosječne brzine auta na trima intervalima koji su svi počinjali u trenutku $x_0 = 3$, a duljine intervala bile su $\Delta x = 1, \Delta x = 0.1 \; i \; \Delta x = 0.01$. Utvrdili smo da što je interval bio kraći to je aproksimacija bila bolja. U idućemu primjeru pokazat ćemo kako se nalazi vrijednost trenutne brzine.

Primjer 1.3.2. Auto u vremenu x prevali put $\mathrm{y} = 2\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x}$. Kolika je trenutna brzina tijela u proizvoljnom trenutku x_0?

Rj:

Izrazimo prosječnu brzinu auta na interval od x_0 do $x_0 + \Delta x$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{[2(x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x)] - [2{x_0}^2 + 3x_0]}{\Delta x}$$

$$\frac{2{x_0}^2 + 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3x_0 + 3\Delta x - 2{x_0}^2 - 3x_0}{\Delta x}$$

$$= \frac{(4x_0 + 3)\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

Gornji izraz dijelimo s Δx te dobivamo $4x_0 + 3 + 2\Delta x$

Postupak za pronalaženje trenutne brzine formulirat ćemo općenito.

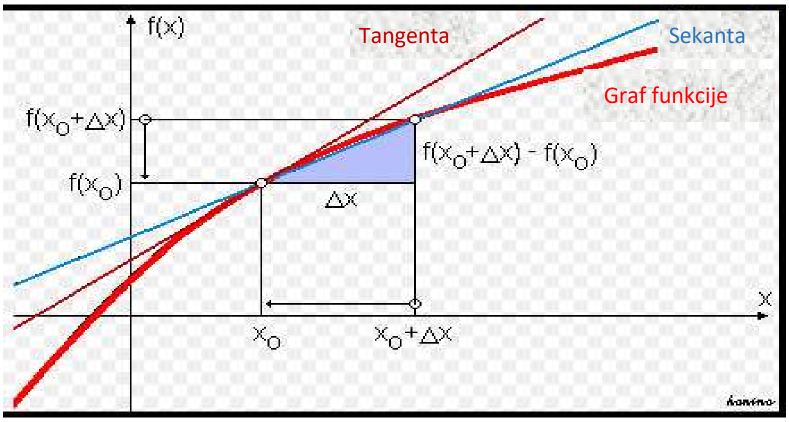
Napomena: Neka je put što ga tijelo prođe u vremenu x određeno funkcijom $y = f(x)$. Trenutnu brzinu gibanja koju tijelo ima u x_0 pronalazimo na sljedeći način:

1. Izrazimo prosječnu brzinu tijela na intervalu od trenutka x_0 do trenutka $x_0 + \Delta x$:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
Te dobiveni izraz sredimo.
2. Pronađemo vrijednost kojoj se približava prosječna brzina kada se Δx približava nuli. Ta je vrijednost tražena trenutna brzina tijela.

1.3.2. Problem tangente

Sada promotrimo geometrijski problem pronalaska nagiba krivulje u Kartezijevom koordinatnom sustavu x, y. G.W. Leibnitz u 17. je stoljeću nezavisno od Newtona razvio osnove diferencijalnoga računa rješavajući problem nalaženja tangente zadane krivulje u nekoj točki. Uređeni par (x, y) točka je krivulje čija je druga koordinata y određena prvom koordinatom x uz pomoć veze $y = f(x)$. Prosječni nagib krivulje od točke (x_0, y_0) do točke (x, y) jednak je omjeru razlika drugih i prvih koordinata tih točaka.

Prosječni nagib $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, odnosno $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$



Slika 1.2. Geometrijska interpretacija derivacije. (slika preuzeta s [3])

Dakle, na grafu funkcije(prema slici 1.2.) prosječni nagib od točke (x_0, y_0) do točke (x, y) jednak je nagibu sekante koja spaja te dvije točke. "Trenutni nagib" u samoj točki (x_0, y_0) jednak je nagibu tangente u toj točki. Kao i kod prosječne brzine, tako i prosječni nagib bolje aproksimira tangentni nagib u samoj točki što je sekanta bliže tangenti, odnosno što je točka (x, y) bliža točki (x_0, y_0). Točka (x, y) približava se točki (x_0, y_0) ako se $x = x_0 + \Delta x$ približava vrijednosti x_0, tj. ako se Δx približava 0.

Primjer 1.3.3. Izračunajmo prosječni nagib parabole $y = x^2 + 1$ od točke (1,2) do točke (1.5,3.25).

Rj: Parabola od točke $\left(1, f(1)\right) = (1,2)$ do točke $\left(1.5, f(1.5)\right) = (1.5,3.25)$ ima prosječni nagib

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1.5) - f(1)}{1.5 - 1}$$

$$= \frac{3.25 - 2}{0.5} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$$

Primjer 1.3.4. Izračunajmo tangentni nagib parabole $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2 + 1$ u točki (1,2). Nađimo jednadžbu tangente na parabolu u toj točki.

Rj: Prosječni nagib parabole $y = x^2 + 1$ od točke $\left(1, f(1)\right) = (1,2)$ do točke $(1 + \Delta x, f(1 + \Delta x))$ jest

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \frac{(1 + \Delta x)^2 + 1 - 2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x$$

Kada se Δx približava nuli, prosječni nagib $2 + \Delta x$ približava se tangentnom nagibu u točki (1,2). Stoga je nagib parabole $y = x^2 + 1$ u točki (1,2) jednak 2. To znači da je nagib tangente na parabolu u toj točki jednak 2, odnosno da je jednadžba tangente na parabolu jednaka:

$$y - 1 = 2(x - 1) \text{ tj. } y = 2x - 1$$

Postupak za pronalaženje tangentnoga nagiba formulirat ćemo općenito.

Napomena: Tangentni nagib grafa funkcije $y = f(x)$ u točki (x_0, y_0) pronalazimo na sljedeći način:

1. Izrazimo nagib sekante od točke $((x_0, y_0)$ do točke $(x, y) = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
Te dobiveni izraz sredimo.
2. Pronađemo vrijednost kojoj se približava nagib sekante kada se Δx približava nuli. Ta vrijednost je traženi tangentni nagib

Bez obzira na to tražimo li brzinu gibanja tijela opisanu funkcijom $f(x)$ ili nagib krivulje opisane funkcijom $f(x)$, sam postupak je isti. Najprije u x_0 izrazimo kvocijent diferencija $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, koji sredimo i skratimo sa Δx, da bismo potom našli vrijednost kojoj se kvocijent približava kada se Δx približava nuli. Tu vrijednost nazivamo derivacijom funkcije f u točki x_0 i označavamo s $f'(x_0)$.

Sada ćemo postupak za pronalaženje derivacije opisati općenito:

Napomena : Derivaciju $f'(x_0)$ funkcije $f(x)$ u točki x_0 nalazimo na sljedeći način:

1. Izrazimo kvocijent diferencija u točki x_0:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Te dobiveni izraz sredimo.

2. Nađemo vrijednost $f'(x_0)$ kojoj se približava kvocijent kada se Δx približava nuli. Ta vrijednost tražena je derivacija funkcije $f(x)$ u točki x_0.

1.4. Implicitno i parametarsko deriviranje

1.4.1. Derivacija složene funkcije

Mogućnost da derivaciju neke funkcije izračunamo gotovo automatski nam daju sistematski postupci kao što je lančano deriviranje. Tako da ćemo prije tehnika implicitnog i parametarskog deriviranja prvo definirati lančano deriviranje. To je postupak koji primjenjujemo kada iz zadane veze među veličinama želimo odrediti brzinu njihove promjene.

Neka su zadane funkcije f i g čije su derivacije poznate. Ako se x promijeni za Δx, onda će se $u = g(x)$ promijeniti za Δu. Mi znamo da je:

$$g'(x) = \frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Prilikom promjene Δu dogodit će se i odgovarajuća promjena od $y = f(u)$ koju ćemo označiti s Δy. Znamo da je:

$$f'(u) = \frac{dy}{du} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

Nas interesira derivacija složene funkcije $y = f\big(g(x)\big)$, odnosno zanima nas $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)$$

$$= \left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)$$

$$= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

$$= f'(g(x))g'(x)$$

1.4.2. Implicitno deriviranje

Jednadžba oblika $F(x, y) = 0$, gdje je $F: D \to R, D \subseteq R^2$, neka funkcija dviju varijabli. Tu jednadžbu možemo interpretirati i kao jednadžbu kojom je implicitno zadana neka funkcija jedne varijable $y = f(x), x \in I \subseteq R$. Jednadžbu $F(x, y) = 0$ prirodno možemo pridružiti $G \subseteq R^2$ definiran s $G = \{(x, y) \in D | F(x, y) = 0\}$ kojeg u pravilu poistovjećujemo sa samom jednadžbom kojoj je taj skup pridružen. Sljedećom definicijom definirat ćemo pojam implicitno zadane funkcije za potrebe nastave u srednjoj školi i na tehničkim fakultetima (vidi [2]):

Definicija 1.4. *Za funkciju jedne varijable $f: I \to R$, gdje je I podskup od R(obično je I interval ili unija intervala u R), za koju vrijedi $F\big(x, f(x)\big) = 0, \forall x \in I$, kažemo da je implicitno zadana jednadžbom $F(x, y) = 0$.*

Napomena: Ako je funkcija $f: I \to R$ implicitno zadana jednadžbom $F(x, y) = 0$ onda je i svaka restrikcija od $f': I' \to R$ implicitno zadana istom tom jednadžbom. Dakle, $F(x, y) = 0$ u pravilu promatramo kao jednadžbu kojom je implicitno zadana ne jedna, već više funkcija jedne varijable. Jednadžbu $F(x, y)$ interpretiramo kao implicitnu vezu između varijabli x i y, pri čemu varijablu x tretiramo kao nezavisnu, a varijablu y kao zavisnu.

Ako su veličine x i y u nekoj vezi, čest je slučaj da se ona može matematički prikazati jednadžbom, npr. $x^2 + y^2 = 9$ ili $3x^3y + y^4 + 5x^2 = 5$. Takvom je jednadžbom za zadani x određen odgovarajući y, pa je njome y implicitno definiran kao funkcija od x. Općenito, jednadžba neće y definirati jednoznačno kao funkciju od x, moguće je da ona definira dvije ili više takvih funkcija. Ilustrirat ćemo na sljedećim primjerima:

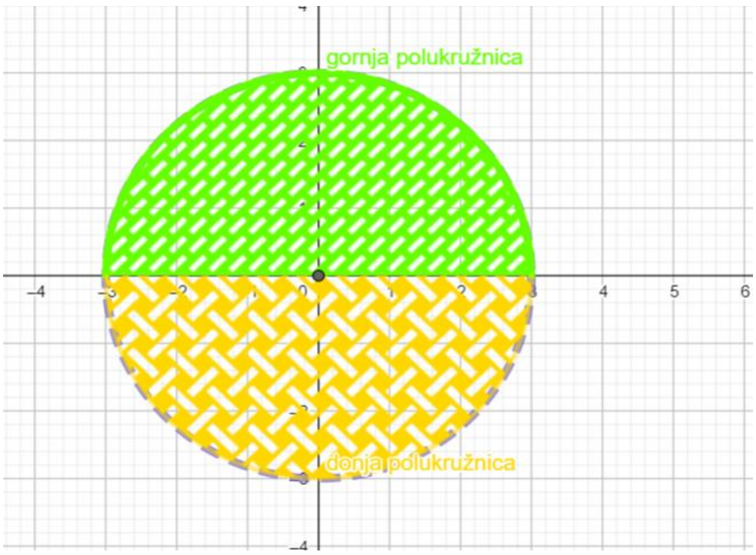
Primjer 1.4.1. Ako su x i y vezani jednadžbom $x^2 + y^2 = 9$, izrazimo y eksplicitno kao funkciju od x.

Rj:

Iz $x^2 + y^2 = 9$ slijedi $y^2 = 9 - x^2, y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Dakle, svakoj vrijednosti x odgovaraju dvije vrijednosti y, tj. jednadžba $x^2 + y^2 = 9$ implicitno definira dvije neprekinute funkcije:

$y = -\sqrt{9 - x^2}$ te $y = \sqrt{9 - x^2}$.

Interpretiramo li x i y kao koordinate Kartezijeva sustava, tada znamo da $x^2 + y^2 = 9$ predstavlja jednadžbu kružnice radijusa 3 sa središtem u ishodištu. Ona nije graf funkcije, ali ako kružnicu podijelimo na gornju polukružnicu $y = \sqrt{9 - x^2}$ i donju polukružnicu $y = -\sqrt{9 - x^2}$ tada možemo govoriti o grafovima funkcija.



Slika 1.3. Podjela kružnice na dvije polukružnice

Prije nego ukratko prepričamo teorem o implicitnoj funkciji definirat ćemo pojam parcijalne derivacije koji će nam trebati za navedeni teorem.

Ako funkcija ima više nezavisnih varijabli, ona se može derivirati po svakoj varijabli zasebno, smatrajući druge varijable konstantama. Takve se derivacije nazivaju parcijalnim derivacijama. Parcijalno deriviranje drugoga i viših redova može se provoditi po istoj varijabli funkcije ili po nekoj drugoj od njezinih varijabli (mješovite derivacije). Parcijalne derivacije označavaju se simbolom ∂. Tako, na primjer, za funkciju f od dvije varijable izraz:

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

predstavlja prvu parcijalnu derivaciju.

Kada imamo implicitnu vezu dviju varijabli $F(x,y) = 0$ definiranu uz pomoć funkcije $F: X \to R$ koja na $X \subseteq R^2$ ima neprekidne parcijalne derivacije F'_x i F'_y, tada za svaku točku $(x_0, y_0) \in X$ u kojoj vrijedi:

$$F(x_0, y_0) = 0, F'_y(x_0, y_0) \neq 0$$

Postojat će okolina $D \subseteq R$ od x_0 i samo jedna funkcija $F: D \to R$ koja je implicitno zadana s $F(x,y) = 0$ i koja je neprekidno derivabilna na okolini D. Derivacija funkcije f u točki $x \in D$ računa se pomoću sljedećeg izraza:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

Primjer 1.4.2. Ako je $y = f(x)$ implicitno definirana jednadžbom $x^2 - y^2 = 1$, izrazimo njezinu derivaciju dy/dx pomoću x i y.

Rj:

Mislimo li na to da je y funkcija od x, jasno je da su obje strane jednadžbe $x^2 - y^2 = 1$ funkcije od x koje su identički jednake pa i njihove derivacije moraju biti identički jednake. Derivacija lijeve strane je:

$\frac{d}{dx}(x^2 - y^2) = \frac{d}{dx}x^2 - \frac{d}{dx}y^2 = 2x - 2y\frac{dy}{dx}$ (u $\frac{d}{dx}(y^2) = 2y\frac{dy}{dx}$ (primijenili smo lančano deriviranje). Derivacija desne strane, koja je konstanta je 0. Stoga,

$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0\ tj. \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$. U ovome primjeru y znamo i eksplicitno izraziti kao funkciju od x, stoga možemo provjeriti taj rezultat. Naime,

$y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$ pa odatle, uz supstituciju $u = x^2 - 1$ te $u = \pm\sqrt{y}$, lančanim deriviranjem slijedi:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{\pm 1}{2\sqrt{u}}2x = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{y}$, što se poklapa s rezultatom dobivenim implicitnim deriviranjem.

Česta je pogreška da se pri implicitnom deriviranju zaboravi lančano deriviranje, tj. da se zaboravi da je y funkcija od x te da i y treba derivirati po x. To se može izbjeći tako da se umjesto y piše $f(x)$, što nas podsjeća da y jest funkcija od x.

Dakle, u prethodnom primjeru smo umjesto $x^2 - y^2 = 1$ pisali $x^2 - [f(x)]^2 = 1$. Deriviranjem obiju strana pronalazimo $2x - 2f(x)f'(x) = 0$. Rješavanjem te jednadžbe po $f'(x)$ nalazimo $f'(x) = \frac{x}{f(x)}$, odnosno u Leibnitzovoj simbolici $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$, kao i prije.

Napomena: Ako su x i y vezani jednadžbom, koja y implicitno definira kao neprekinutu funkciju od x, onda derivaciju dy/dx računamo tako da obje strane jednadžbe deriviramo po x. Pritom primjenjujemo lančano deriviranje, uvažavajući da je y funkcija od x. Tražena je derivacija rješenje dobivene jednadžbe po dy/dx

1.4.3. Parametarsko deriviranje

Ako su dvije veličine x i y, koje ovise o parametru t, povezane, onda su i njihove brzine povezane. Međutim, to ne implicira da je njihova ovisnost o parametru t jednoznačno određena tom vezom. Posebice je zanimljiv slučaj veze x i y u kojemu točno znamo kako one ovise o parametru t, tj. slučaj u kojem znamo da je $x = f(t)$, odnosno $y = g(t)$. Tada kažemo da su veličine x i y vezane parametarski.

Primjer 1.4.3. Ako je $x = t + 2$ i $y = t^2$ nađimo vezu koja povezuje x i y. Predstavimo je u koordinatnom sustavu x, y.

Rj:

Odredimo najprije prostim računom nekoliko vrijednosti x i y koje veže zajednički t:

t	-2	-1	0	1
x	0	1	2	4
y	4	1	0	4

Uređeni par (x, y) u koordinatnom sustavu opisuje krivulju na kojoj posebno ističemo izračunate vrijednosti. Za nju kažemo da je parametarska krivulja određena s $x = t + 2$ te $y = t^2$. U ovome jednostavnom slučaju iz parametarske jednadžbe $x = t + 2$ lako nalazimo $t = x - 2$, odakle uvrštavanjem u drugu parametarsku jednadžbu dobivamo $y = t^2 = (x - 2)^2$ što je eksplicitni oblik veze od x i y. Ta je veza funkcionalna pa kažemo da je funkcija $y = (x - 2)^2$ parametarski zadana s $x = t + 2, y = t^2$.

Napomena : Točka (x, y) čija je ovisnost o parametru t određena parametarskim jednadžbama:

$$x = f(t), y = g(t)$$

Opisuje krivulju koju zovemo parametarskom krivuljom (određenom tim jednadžbama). Ako parametarske jednadžbe vežu x i y tako da je y funkcija od x,tj. $y = h(x)$, onda tu funkciju zovemo parametarski definiranom funkcijom (određenom tim jednadžbama). Slučaj $x = k(y)$ razumijevamo potpuno analogno.

Razmotrimo problem deriviranja parametarski zadane funkcije. Ako $x = f(t)$ i $y = g(t)$ parametarski zadaju funkciju $y = h(x)$, i ako znamo derivirati f i g, onda lančanim deriviranjem lako nalazimo derivaciju od $y = h(x)$. Naime,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \text{ dakle } \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Primjer 1.4.4. Derivirajmo parametarski zadanu funkciju $x = t^2, y = t$, za koju znamo da je parametrizacija od $y = \sqrt{x}$.

Rj:

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = 1, \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2t}$$

Budući da je $t = y$, slijedi da je $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2t} = \frac{1}{2y}$, što je u skladu s $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, jer je $y = \sqrt{x}$

1.5. Derivacija u kontekstu

Ranije smo interpretirali derivaciju kao brzinu gibanja, međutim nije svaka brzina brzina gibanja. Općenito, ako veličina y ovisi o veličini x , tako da je $y = f(x)$, tada i veličina promjene od y ovisi o odgovarajućoj veličini promjene od x. Dakle, Δy ovisi o Δx. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ prosječna je brzina kojom se y mijenja u odnosu na x, dok je brzina kojom se y mijenja u odnosu na x u točki $x_0 : f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(\frac{\Delta y}{\Delta x})$. Kako bi učenici lakše usvojili interpretaciju derivacije kao brzinu promjenu ilustrirat ćemo to na dvama primjerima:

Primjer 1.5.1. Temperatura vode $T(C°)$ ovisi o vremenu t(min) tako da je $T = f(t) = \frac{1}{3}t + 10$. Kojom se brzinom mijenja temperature vode u proizvoljnom trenutku?

Rj:

$f'(t_0) = \frac{1}{3}$. Temperatura T mijenja se brzinom od $\frac{1}{3}$ C/min. Budući da je brzina promjene pozitivna, još je zovemo i brzinom rasta temperature.

Primjer 1.5.2. Napušemo li balon u obliku kugle, njegov će volumen V ovisiti o njegovom radijusu r. Ovisnost je određena poznatom formulom za volumen kugle:

$$V = \frac{4}{3}r^3\pi$$

Kojom se brzinom mijenja volumen V u ovisnosti o radijusu r?

Rj:

$$V(r) = \frac{4}{3}r^3\pi$$

$$\frac{dV}{dr} = 4r^2\pi$$

Dakle, možemo uočiti kako se pri dostignutom radijusu r volumen balona mijenja brzinom od $4r^2\pi$. Učenici će tu formulu odmah povezati s oplošjem kugle koje je dano formulom $O = 4r^2\pi$ te stoga možemo zaključiti kako je mjera za brzinu promjene volumena kugle u ovisnosti o radijusu ustvari samo oplošje kugle.

Ilustrirajmo brzinu promjene jednim primjerom iz područja ekonomije. Pretpostavimo da x radnika u određenom vremenskome periodu proizvede neku vrijednost od $y = f(x)$ kuna. Prosječna brzina $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ u tome se slučaju interpretira kao produktivnost rada, odnosno njena granična vrijednost $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}(\frac{\Delta y}{\Delta x})$ naziva se marginalnom produktivnošću rada na razini x_0. Marginalna produktivnost ne mora biti konstantna. Ona postiže maksimalnu vrijednost na nekoj razini x_m, dok je ispod i iznad te razine manja.

Primjer 1.5.3. Neka pogon s x radnika proizvodi vrijednost od $420\mathrm{x} + 15\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}^3$ tisuća kuna. Pronađite marginalnu produktivnost 10 zaposlenih radnika.

Rj:

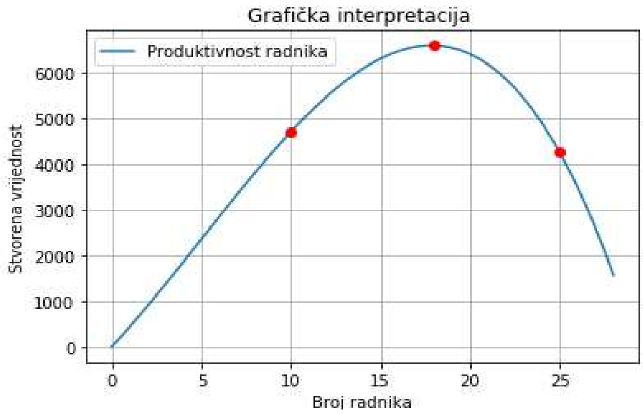
Budući da x radnika proizvede vrijednost od $f(x) = 420x + 15x^2 - x^3$ tisuća kuna, slijedi da je granična, odnosno marginalna produktivnost x_0 radnika $f'(x_0) = 420 + 39x - 3x^2$, odnosno za $x_0 = 10$ slijedi da je marginalna produktivnost jednaka 510 tisuća kuna.

Na sličnom primjeru ilustrirat ćemo grafički kako derivaciju interpretiramo kao brzinu promjene. U prethodnoj cjelini govorili smo o geometrijskoj interpretaciji derivacije kao o tangentnome nagibu, a sada ćemo na jednom primjeru pokazati kako učenici pomoću grafa funkcije mogu uočiti ponašanje grafa funkcije u određenim točkama.

Prije rješavanja zadatka kratko ćemo se prisjetiti nekih pojmova koje ćemo koristiti u zadatku, a to su:

- ***Stacionarne točke*** **-** Točke x_0 sa svojstvom $f'(x_0) = 0$ koje nazivamo stacionarnim točkama samo su kandidati za lokalne ekstreme.
- ***Lokalni ekstremi*** **-** Derivabilna funkcija postiže lokalni ekstrem u točki x_0 ako derivacija $f'(x_0)$ prolazi kroz tu točku mijenjajući predznak i to na način da, ako je ta promjena od "-" na "+", imamo točku lokalnog minimuma odnosno, ako je u pitanju promjena predznaka derivacije od "+" na "-", imamo točku lokalnog maksimuma.
- ***Lokalni minimum*** **-** Neka je funkcija f definirana na svojoj prirodnoj domeni D. Kažemo da funkcija f u točki x_0 ima lokalni minimum ako postoji interval $< x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon > \subseteq D, \varepsilon > 0$ oko točke x_0 takav da je $f(x_0) \geq f(x), \forall x \in < x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon >$
- ***Lokalni maksimum*** **-** Neka je funkcija f definirana na svojoj prirodnoj domeni D. Kažemo da funkcija f u točki x_0 ima lokalni minimum ako postoji interval $< x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon > \subseteq D, \varepsilon > 0$ oko točke x_0 takav da je $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in < x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon >$

Primjer 1.5.4. Zadan je graf funkcije $f(x)$ iz gornjega primjera (Primjer 2.5.3.). Opišite kako se marginalna produktivnost mijenja kako se količina radnika povećava.



Slika 1.4. Graf funkcije $f(x)$.

Rj:

Kako se količina radnika povećava, tako se inicijalno i marginalni profit poveća, ali u određenoj točki marginalni profit kreće se smanjivati. Graf ima horizontalnu tangentu u $x = 18$, stoga možemo zaključiti da je ta točka ujedno i stacionarna točka, a samim time i kandidat za lokalni ekstrem, a s obzirom na to da derivacija mijenja predznak dok prolazi kroz tu točku zaključujemo da je ona lokalni ekstrem, tj. da budemo precizniji; s obzirom na to da derivacija mijenja predznak iz " + " u " - " govorimo o točki lokalnoga maksimuma.

1.6. Primjena derivacije

1.6.1. Primjena derivacije u ekonomiji

Za početak ćemo prikazati koliko nam diferencijalni račun može pomoći interpretirati informacije i odnose za usporedbu ukupne, prosječne te marginalne funkcije. Za početak uzmimo funkciju troška u ovisnosti o broju proizvoda x:

$$C(x) = 0.0001x^3 - 0.06x^2 + 12x + 100$$

I sada vidimo da za npr. $x = 10$, možemo interpretirati što nam funkcija troška govori, odnosno da kada proizvedemo 10 proizvoda ukupni trošak proizvodnje je 214,1. Nas ipak zanima malo više informacija kako se trošak razvija tokom produkcijskoga ciklusa pa nam je idući korak izračunati prosječni trošak koji interpretiramo kao ukupni trošak podijeljen s brojem proizvedenih proizvoda:

$$\frac{C(x)}{x} = \frac{214,1}{10} = 21,41$$

Odnosno, kada proizvedemo 10 proizvoda, prosječni trošak je 21,41. To nas jednim dijelom može zavarati s obzirom na to da mi još ne znamo kako se trošak mijenja kako proizvodimo, npr. za $x = 1$ trošak je 111,94. Očito, ako je prosječni trošak 21,41, a proizvodnja prvoga proizvoda košta 111,95 da se trošak proizvodnje mora mijenjati kako proizvodimo više. Alternativno, da budemo precizniji, promjena ukupnoga troška proizvodnje nije isto kao i svaka promjena funkcije. Definirajmo sada funkciju troška za određenu promjenu funkcije kao marginalni trošak.

Učenicima će ovo možda zvučati poznato jer nagib definiramo kao promjenu y varijable (u našemu slučaju trošak proizvodnje) za određenu promjenu x varijable (u našemu slučaju broj proizvoda). Zato, uzimajući prvu derivaciju ili računajući formulu za nagib, možemo utvrditi marginalni trošak za određeni broj proizvoda.

Sada se pitamo što se događa s promjenom marginalnog troška? Na taj način, ne samo da možemo napraviti evaluaciju troškova na određenoj razini, već možemo vidjeti i kako se marginalni trošak mijenja kada povećavamo ili smanjujemo razinu proizvodnje. Upotrebom znanja koje imamo o derivaciji jasno vidimo da se promjena u marginalnom trošku ili promjena nagiba može izračunati kada uzmemo drugu derivaciju:

$$C(x) = 0.0001x^3 - 0.06x^2 + 12x + 100$$

Uzmemo prvu derivaciju da dobijemo funkciju marginalnog troška:

$$C'(x) = 0.0003x^2 - 0.12x + 12$$

Uzmemo drugu derivaciju kako bismo vidjeli promjenu marginalnog troška:

$$C''(x) = 0.0006x - 0.12$$

Ove tri jednadžbe sada nam daju ogromnu količinu informacija koje se odnose na proces troška. Na primjer, sada možemo izračunati marginalni trošak za proizvodnju stotog proizvoda:

$$C'(x = 100) = 0.0003x^2 - 0.12x + 12 = 3$$

Definicija 1.5. ***Marginalni trošak (MC)*** *u ekonomiji definira se kao promjena nastalih troškova proizvodnjom dodatnih jedinica nekog dobra.*

Zadatak 1. Ako je ukupna funkcija troška $C(x) = 0.0001x^3 - 0.06x^2 + 12x + 100$ povećava li se marginalni trošak, smanjuje li se ili se ne mijenja za $x = 100$? Pronađite minimalni marginalni trošak.

Rj:

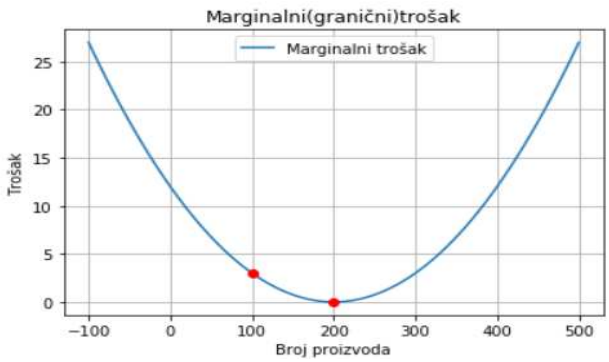
Slika 1.5. Graf funkcije troška $C(x)$.

$$C(x) = 0.0001x^3 - 0.06x^2 + 12x + 100$$

Nas sada zanima što to predstavlja marginalni trošak. Marginalni trošak još zovemo i graničnim troškom, odnosno promjenom koja nastane kada proizvedemo dodatno robe (u ovome konkretnom slučaju za $x = 100$). Promjena nas odmah može asocirati na derivaciju jer derivacija ustvari to i jest. Ona je brzina promjene pa ćemo sada izderivirati gore zadanu funkciju troška:

$$C'(x) = 0.0003x^2 - 0.12x + 12$$

Za provjeru ponašanja funkcije u $x = 100$ promatramo prvo graf funkcije $C'(x)$ i gledamo ima li ekstrema:



Slika 1.6. Graf funkcije $C'(x)$.

Možemo primjetiti da će naša parabola $C'(x) = 0.0003x^2 - 0.12x + 12$ imati horizontalnu tangentu u $x = 200$ tako da možemo zaključiti da će minimalni marginalni trošak biti u $x = 200$ što možemo provjeriti i deriviranjem funkcije marginalnoga troška:

$$C''(x) = 0.0006x - 0.12 = 0 \leftrightarrow 0.0006x = 0.12$$

$$x = 200$$

Za marginalni trošak kada je $x = 100$ uočavamo kako se on smanjuje

Sada nam je cilj uvesti pojam marginalnoga prihoda kojega definiramo kao funkciju $R(x) = x \cdot p(x)$, gdje x predstavlja broj proizvoda, a $p(x)$ predstavlja funkciju potražnje u ovisnosti o broju prodanih proizvoda. Prije nego prijeđemo na primjer zadatka vezan uz marginalni prihod jednu stvar ćemo morati detaljnije objasniti, a to je pojam funkcije potražnje. Funkcija potražnje govori nam koliko će proizvoda biti kupljeno, odnosno kolika će biti potražnja za nekim proizvodom znajući cijenu proizvoda. Što je manja cijena, naravno da će potražnja biti veća.

Definicija 1.6. ***Marginalni prihod (MR)*** *definiramo kao promjenu ukupnog prihoda dobivenog prodajom dodatnih jedinica robe ili dobara.*

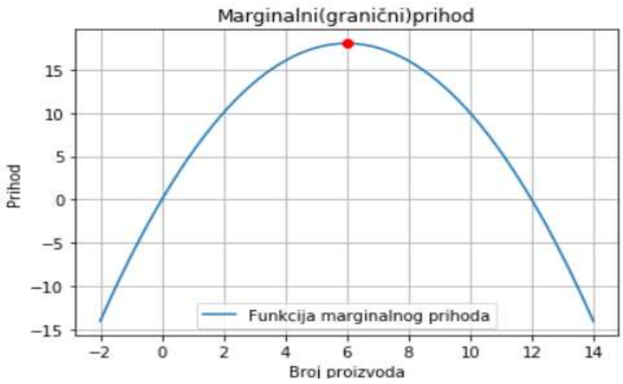
Zadatak 2. Funkcija potražnje za određeni proizvod je $p = 6 - \frac{1}{2}x$ dolara. Pronađite razinu produkcije koja rezultira maksimalnim prihodom.

Rj:

Funkciju marginalnog prihoda definiramo kao $R(x) = x \cdot p(x) = x \cdot \left(6 - \frac{1}{2}x\right) = 6x - \frac{1}{2}x^2$, gdje je x broj prodanih proizvoda, te $p(x)$ funkcija prihoda:

$$R'(x) = 6 - x = 0 \leftrightarrow x = 6$$

$$R(6) = 18$$



Slika 1.7. Graf funkcije $R(x)$.

Iz grafa možemo vidjeti da će maksimalni prihod biti kada je broj proizvoda jednak 6. U tome trenutku prihod je jednak 18.

Definicija 1.7. ***Marginalni profit $P(x)$*** *granična je dobit. To je dobit koju tvrtka ili pojedinac ostvaruje kada se proizvede i proda jedna dodatna (marginalna) jedinica. To je razlika između marginalnoga troška i marginalnoga proizvoda (poznatog i kao marginalni prihod), a često se koristi za određivanje hoće li proširiti ili ugovoriti proizvodnju ili potpuno zaustaviti proizvodnju.*

Prema osnovnoj ekonomskoj teoriji, tvrtka će maksimizirati svoj ukupni profit kada je granični trošak jednak marginalnom proizvodu ili kada je granični profit točno nula. Stoga će poduzeća težiti povećanju proizvodnje sve dok granični trošak ne bude jednak marginalnom proizvodu, koji je kada je granični profit jednak nuli. Ta će točka također biti tendencija razine primijećene na tržištu pod pretpostavkom da postoji konkurencija među proizvođačima. Ako se marginalna dobit poduzeća pretvori u negativnu vrijednost rukovodstvo može odlučiti smanjiti proizvodnju, privremeno zaustaviti proizvodnju ili potpuno napustiti posao ako se čini da se pozitivni marginalni profit neće vratiti. Granična dobit razlikuje se od prosječne dobiti, neto dobiti i ostalih mjera profitabilnosti u tome što se gleda u novcu koji će se zaraditi od proizvodnje jedne dodatne jedinice. Važno je napomenuti da granična dobit jednostavno označava dobit koja je ostvarena proizvodnjom jedne dodatne stavke, a ne ukupna profitabilnost poduzeća, odnosno tvrtka bi trebala zaustaviti proizvodnju na razini kada proizvodnja još jedne jedinice počne smanjivati ukupnu profitabilnost. Varijable koje doprinose graničnim troškovima jesu faktori kao što su rad, troškovi zaliha ili sirovina, kamate i porezi. Fiksni troškovi ne bi se trebali uključivati u izračun marginalne dobiti jer se ti jednokratni troškovi ne mijenjaju, ili ne mijenjaju profitabilnost proizvodnje, već sljedeće jedinice.

Zadatak 3. Pretpostavimo da je funkcija potražnje za monopolista $p(x) = 100 - 0.01x$ te da je funkcija troška $C(x) = 50x + 10,000$. Pronađite vrijednost x koja maksimizira profit te odredite pripadajuću cijenu i ukupni profit za tu razinu produkcije.

Rj:

$$C(x) = 50x + 10000$$

$$R(x) = x \cdot p(x) = x(100 - 0.01x) = 100x - 0.01x^2$$

$$P(x) = R(x) - C(x) = 100x - 0.01x^2 - 50x - 10000 = -0.01x^2 + 50x - 10000$$

$$P'(x) = -0.02x + 50 = 0 \leftrightarrow 0.02x = 50$$

$$x = 2500$$

$$P(2500) = -62500 + 125000 - 10000 = 52500$$

$$p(2500) = 100 - 25 = 75$$

Da bi maksimizirali profit potrebno je proizvesti 2500 proizvoda i prodavati ih po cijeni od 75 dolara po komadu. Profit će tada biti 52 500 dolara.

Zadatak 4. Promotori organizacije koja organizira dobrotvorne koncerte balansiraju između profita i gubitka, posebno kada određuju cijenu koju naplaćuju za prava za zatvorene koncerte u lokalnim kazalištima. Prateći prijašnje poslovanje, kazalište je odredilo da je za pristojbu od 26 dolara, prosječno bilo 1000 ljudi u publici. Za svako spuštanje cijene od 1 dolara, kazalište dobije 50 gledatelja više. Koju pristojbu bi kazalište trebalo naplaćivati kako bi maksimiziralo svoje prihode?

Rj:

p – broj gledatelja, x – cijena ulaznica

$$(x, p) = (26,1000)$$

- za svaki dolar za koji se spusti cijena → broj gledatelja poraste za 50

$$p(x) = -50x + 2300$$

$$R(x) = x \cdot p(x) = x(-50x + 2300) = -50x^2 + 2300x$$

$$R'(x) = -100x + 2300 = 0 \leftrightarrow 100x = 2300$$

$x = 23$- Da bi maksimiziralo prihod, kazalište mora naplaćivati cijenu ulaznice od 23 dolara.

Napomena:

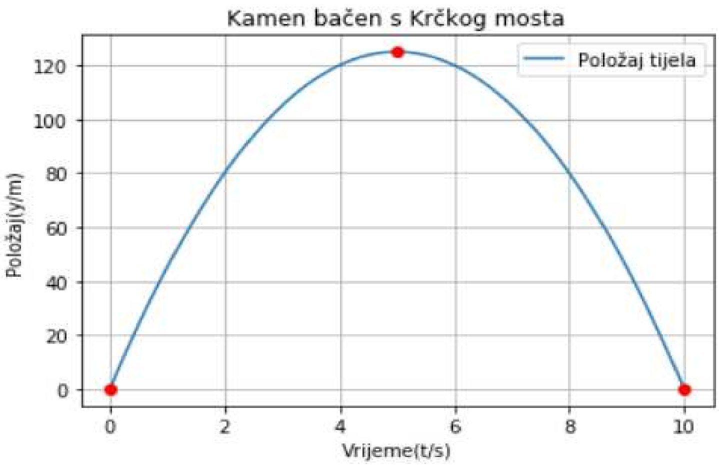
- $\boldsymbol{C(x)}$ predstavlja funkciju troška u ovisnosti o broju proizvoda x
- $\boldsymbol{p(x)}$ predstavlja funkciju potražnje u ovisnosti o broju proizvoda x
- $\boldsymbol{R(x) = x \cdot p(x)}$ predstavlja funkciju prihoda
- $\boldsymbol{P(x) = R(x) - C(x)}$ predstavlja funkciju profita, odnosno razliku prihoda i troška nastalih proizvodnjom nekoga proizvoda.

1.6.2. Primjena derivacije u fizici

Zadatak 1. Položaj kamena koji je bačen uvis s Krčkoga mosta, opisan je funkcijom $y = 50t - 5t^2$, ako vrijeme $t \geq 0$ mjerimo u sekundama, a položaj y u metrima.

a) U kojim je vremenskim intervalima kamen iznad mosta, a u kojim je ispod mosta ako je razina Krčkog mosta definirana kao $y(t) = 0$?
b) U kojim vremenskim intervalima kamen leti uvis, a u kojim pada?
c) Kojom se brzinom kreće kamen u najvišoj točki svoje putanje?

Napomena: Ako je ishodište $y = 0$ na razini Krčkog mosta, onda $y = 30$ označava mjesto koje je 30 m iznad mosta, a $y = -20$ mjesto koje je 20 m ispod mosta.



Slika 1.8. Graf funkcije $\boldsymbol{y(t)}$.

Rj:

Graf funkcije $y = 50t - 5t^2 = 5t(10 - t)$, koja opisuje položaj kamena siječe os t u $t = 0$ te u $t = 10$. Brzina kamena opisuje se derivacijom $\frac{dy}{dt} = 50 - 10t$.

a) Iz grafa položaja y možemo vidjeti da je kamen iznad mosta ($y \geq 0$) od trenutka $t = 0$ do trenutka $t = 10$. Poslije toga, kamen je ispod mosta.

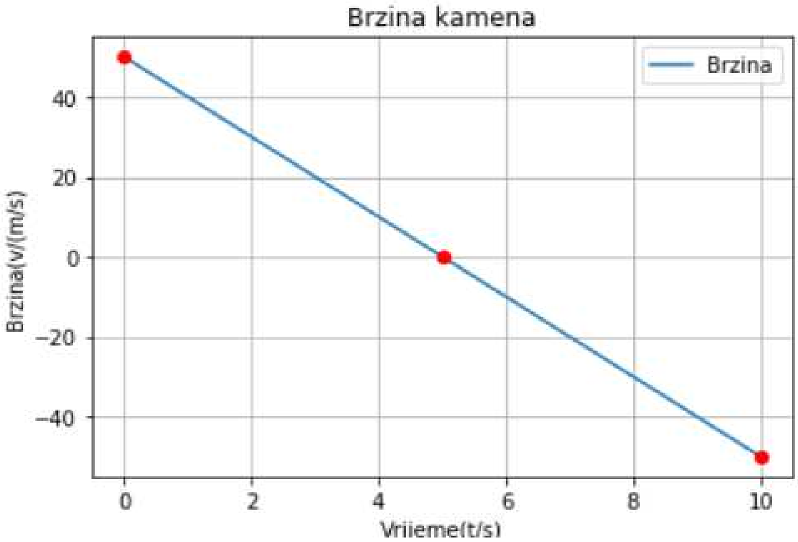
b) Kamen leti uvis od trenutka $t = 0$ do trenutka $t = 5$, odnosno u prvih 5 sekundi. To je period u kojem je brzina kamena pozitivna ($\frac{dy}{dt} > 0$) što lako možemo vidjeti na grafu brzine. Nakon toga perioda vidimo da je brzina negativna, tj. da kamen pada poslije prvih 5 sekundi leta uvis.

c) Najvišu točku svoje putanje kamen dostiže u trenutku $t = 5$, što možemo vidjeti s grafa položaja y. U tome trenutku njegova je brzina 0, što možemo vidjeti s grafa brzine. U tome trenutku kamen mijenja smjer pa mora stati.

Sljedeći pojam koji nas zanima je ubrzanje. Pretpostavimo da se tijelo giba tako da joj se položaj x mijenja u vremenu t po pravilu $x = f(t)$. Brzina čestice $v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$ i sama se mijenja u ovisnosti o vremenu. Brzinu promjene od v zovemo ubrzanjem, odnosno akceleracijom tijela. Stoga, ako je brzina derivacija, onda je ubrzanje derivacija derivacije.

Na prethodnome primjeru pokazali smo kako se pronalazi brzina tijela, a sada ćemo na Zadatku 1. pokazati kako se pronalazi akceleracija tijela.

Brzina kamena opisana je funkcijom $v = \frac{dy}{dx} = 50 - 10t$.



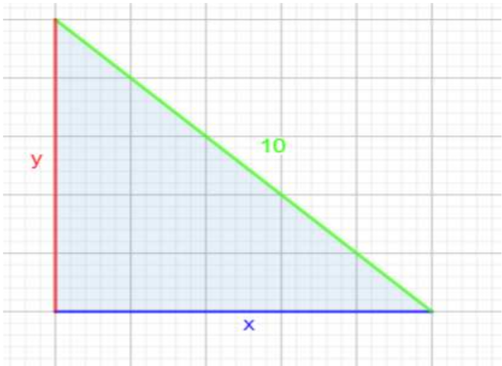
Slika 1.9. Graf funkcije $y'(t)$.

Akceleracija gibanja konstantna je i negativna te ona iznosi – 10. To bi značilo da brzina opada konstantnom brzinom, što možemo vidjeti i iz grafa. Iz drugoga grafa možemo uočiti kako kamen kada leti uvis gubi brzinu dok u petoj sekundi ne dođe do najviše točke putanje u kojoj je iznos brzine 0. Potom kamen pada, a apsolutni iznos brzine konstantno mu raste. Općenito, apsolutni iznos brzine pada kada su akceleracija i brzina suprotnoga predznaka, a raste kada su istoga predznaka.

Napomena: Drugu derivaciju funkcije $f(x)$ računamo tako da prvo izračunamo prvu derivaciju $f'(x)$ te potom prvu derivaciju još jednom deriviramo. Rezultat drugoga deriviranja druga je derivacija $f''(x)$. Ubrzanje, odnosno akceleracija gibanja druga je derivacija položaja y u ovisnosti o vremenu t.

Zadatak 2. Ljestve koje su dugačke 10 metara postavljene su na zid tako da im je drugi kraj na podu. Vrh ljestvi klizi niza zid. Kada je gornji dio 6 metara udaljen od poda ljestve klize brzinom od 2 m/s. Kolikom brzinom se donji dio ljestvi odmiče u tome trenutku?

Rj:



Slika 1.10. Prikaz ljestvi postavljenih na zid.

- y → udaljenost vrha ljestvi do poda

- x → udaljenost ljestvi do zida

- imamo odnos $x^2 + y^2 = 100$ (jer imamo pravokutni trokut pa vrijedi Pitagorin teorem) te znamo da kada je $y = 6$ brzina $\frac{dy}{dt} = -2\ m/s$ (jer se udaljenost vrha ljestvi do poda smanjuje)

- od nas se traži da nađemo brzinu kojom se ljestve udaljuju od zida (brzina će biti pozitivna jer se ljestve udaljavaju od zida). Sada ćemo derivirati gornji odnos:

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \leftrightarrow x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y\frac{dy}{dt}}{x}$$

- nama je poznato da pri visini $y = 6$ imamo brzinu $\frac{dy}{dt} = -2\ m/s$ te možemo dobiti i udaljenost x kada je $y = 6$ iz početne relacije

$$x^2 = 100 - 36 = 64 \rightarrow x = 8$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{6}{8} \cdot -2\ {}^{m}/_{s} = 1.5\ {}^{m}/_{s}$$

Time smo dobili brzinu kojom se donji dio ljestvi odmiče.

2. INTEGRAL

2.1. Definicija određenoga i neodređenoga integrala

2.1.1. Sume

Integriranje, kao jednu od dviju osnovnih komponenti, uključuje nalaženje zbrojeva ili suma. Stoga, zbog lakšeg usvajanja pojma integrala uvodimo sustavnu notaciju koja će nam olakšati rad sa sumama.

Sumu n zadanih brojeva $a_1, a_2, .., a_n$ koju inače označavamo sa $a_1 + a_2 + \cdots \ a_n$ kraće ćemo označiti sa $\sum_{i=1}^{n} a_i$.

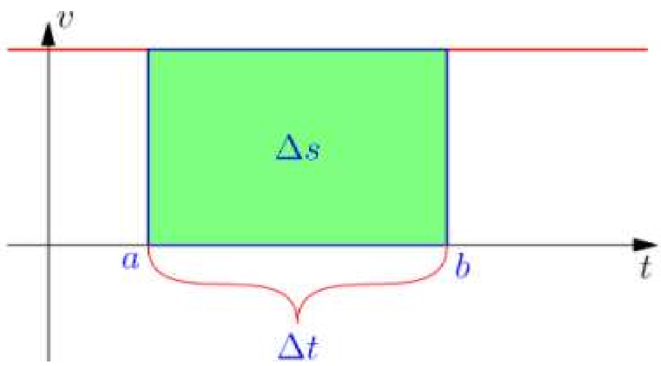
Sada ćemo navesti osnovna svojstva sume:

1. $\sum_{i=m}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$
2. $\sum_{i=m}^{n} ca_i = c \sum_{i=m}^{n} a_i$
3. Ako je $m \leq p$ te $p + 1 \leq n$ tada je $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{p} a_i + \sum_{i=p+1}^{n} a_i$
4. Ako je $a_i \leq b_i \ za \ sve \ m \leq i \leq n$ tada je $\sum_{i=m}^{n} a_i \leq \sum_{i=m}^{n} b_i$.

Kao uvod u temeljne ideje integriranja još jednom ćemo se vratiti na vezu prijeđenog puta i brzine kod pravocrtnoga gibanja. Prilikom uvođenja pojma derivacije mogli smo vidjeti da je brzina vremenska derivacija puta, odnosno:

$$v \approx \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

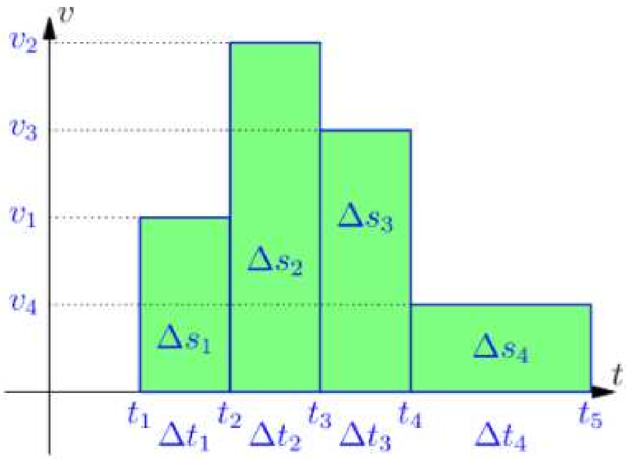
Pretpostavimo sada da se tijelo giba ravnom cestom te da mu je položaj opisan funkcijom $s = F(t)$, gdje s predstavlja prijeđeni put izražen u metrima, dok t predsavlja vrijeme koje je proteklo mjereno u sekundama. Poznavajući brzinu v, naš je cilj izračunati prijeđeni put s. Ako je brzina konstantna, tijekom određenog vremenskoga intervala Δt, onda je aproksimacija iz gornje formule ($\Delta s \approx v\Delta t$) zapravo jednakost $\Delta s = v\Delta t$ i naš je problem riješen (u tome vremenskome intervalu).



Slika 2.1. Prijeđeni put. (slika preuzeta s [9])

Taj jednostavni slučaj navodi na rješenje i u nešto općenitijem (idealiziranom) slučaju: Ako se tijelo giba konstantnom brzinom v_1 tijekom početnoga vremenskoga intervala t_1, brzinom v_2 prilikom idućega vremenskoga interval ,…., i konačno brzinom v_n tijekom posljednjega vremenskoga interval t_n, tada je prevaljeni put određen sumom:

$$\Delta s = \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta t_i$$

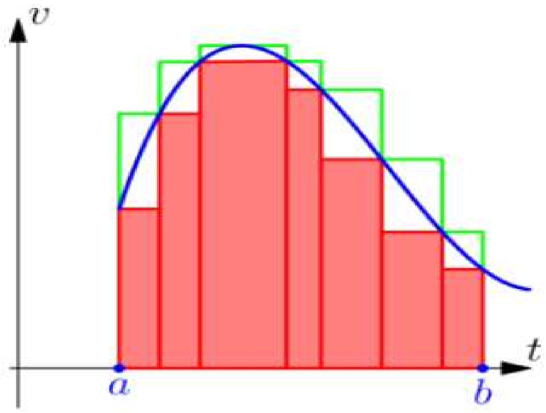


Slika 2.2. Ukupni put. (slika preuzeta s [9])

Iz slike 2.2. možemo uočiti kako je ukupni put $\Delta s = \sum_{i=1}^{4} v_i \Delta t_i$ jednak površini zalene površine ispod grafa funkcije brzine $v = f(t)$. U realnijemu slučaju pravocrtnoga gibanja očekujemo da će se brzina tijela mijenjati kontinuirano s vremenom. Pretpostavimo stoga da je $v = f(t)$ neprekinuta funkcija definirana na vremenskome intervalu $a \leq t \leq b$ i podijelimo taj interval na n dijelova, diobenim točkama $t_0, t_1, .., t_n$ te odaberimo konstante d_i te g_i takve da vrijedi:

$$d_i \leq f(t) \leq g_i za\ t \in < t_{i-1}, t_i >$$

Prihvatimo li činjenicu da tijela koja se brže gibaju prevaljuju veće puteve, dolazimo do zaključka da će tijelo tijekom intervala $< t_{i-1}, t_i >$ prijeći udaljenost veću od $d_i \Delta t_i$, ali jednako tako i manju od $g_i \Delta t_i$. Dakle, ukupni prevaljeni put od trenutka a do trenutka b veći je od $\sum_{i=1}^{n} d_i \, \Delta t_i$, ali je i manji od $\sum_{i=1}^{n} g_i \, \Delta t_i$, odnosno:



Slika 2.3. Donja i gornja procjena. (slika preuzeta s [9])

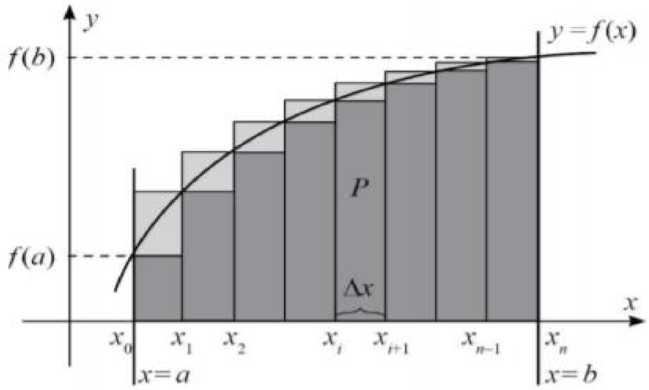
$$\sum_{i=1}^{n} d_i\,\Delta t_i \leq \Delta s \leq \sum_{i=1}^{n} g_i\,\Delta t_i$$

Površina crvenoga područja donja je procjena $\sum_{i=1}^{n} d_i\,\Delta t_i$ dok je površina zelenoga područja gornja procjena,tj. $\sum_{i=1}^{n} g_i\,\Delta t_i$ toga istoga puta. Razlika između zelene i crvene površine predstavlja okvir u kojem se kreću greške gornje i donje procjene. Smanjivanjem diobenih intervala možemo postići smanjenje razlike između gornje i donje konstante,tj. kako razlike postaju sve manje, tako naše gornje i donje procjene postaju sve točnije.

Napomena: **Relativna površina** područja u koordinatnoj ravnini površina je dijela područja iznad osi x umanjenog za površinu onog dijela područja koje je ispod osi x.

Napomena: Ako je položaj tijela koje se pravocrtno giba zadan funkcijom $s = F(t)$, a njegova brzina njezinom derivacijom $v = F'(t) = f(t)$, onda je relativni put $F(b) - F(a)$, što ga tijelo prijeđe od trenutka a do trenutka b jednak relativnoj površini ispod grafa brzine $v = f(t)$

Sada ćemo, prije uvođenja općega pojma integrala površine, razmotriti neovisno o konkretnim veličinama (putu i brzini) uz koje smo ih vezali u ovome dijelu.



Slika 2.4. Relativna površina. (slika preuzeta s [13])

Područje ispod grafa funkcije f na intervalu $[a, b]$ definiramo kao područje omeđeno grafom $y = f(x)$, osi x i pravcima $x = a$ i $x = b$. Za sada ćemo pretpostaviti da f ne poprima negativne vrijednosti na $[a, b]$, tj. da je $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a, b]$. U tome slučaju područje ispod grafa funkcije f možemo predstaviti slikom 2.4.

Sada ćemo promotriti problem izračunavanja površine takvoga područja koje se nalazi ispod grafa funkcije f.

U prethodnome dijelu mogli smo vidjeti da je vrlo jednostavno izračunati površinu ispod grafa funkcije koja poprima konstantne vrijednosti na podintervalima intervala $[a, b]$. Za ovaj problem za početak ćemo morati definirati tzv. stepenaste funkcije.

Defincija 2.1. *Funkciju g definiranu na $[a, b]$ zovemo stepenastom funkcijom, ako postoji razdioba intervala [a,b] točkama $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ (koju zovemo particijom intervala [a,b]) takva da je funkcija g konstantna na svakom od interval $< x_0, x_1 >$ $, \dots, < x_{n-1}, x_n >$.*

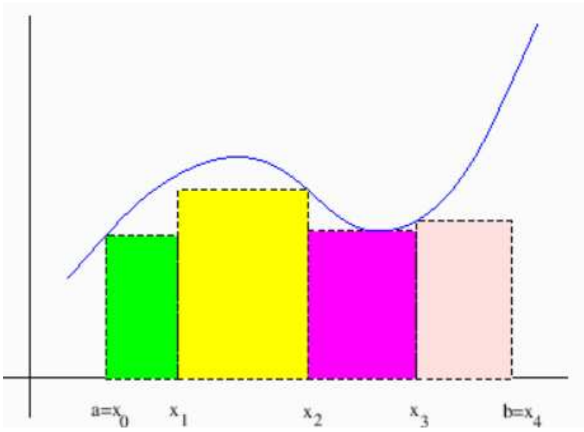
Područje ispod grafa nenegativne stepenaste funkcije sastoji se od konačno mnogo pravokutnika čija se površina može izraziti kao suma površina tih pravokutnika. Označimo li konstantnu vrijednost stepenaste funkcije g na intervalu $< x_{i-1}, x_i >$ s g_i, suma koja mjeri površinu ispod stepenastoga grafa je:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i - x_{i-1}).$$

Sada ćemo detaljnije opisati postupak kako po volji možemo točno izračunati traženu površinu ispod grafa funkcije f, koja nije stepenasta, ali ju možemo odozdo i odozgo aproksimirati površinama stepenastih funkcija.

Neka je f nenegativna funkcija definirana na $[a, b]$. D je donja suma za f na $[a, b]$ ako postoji nenegativna stepenasta funckija d na $[a, b]$ takva da za $\forall x \in [a, b]$ vrijedi:

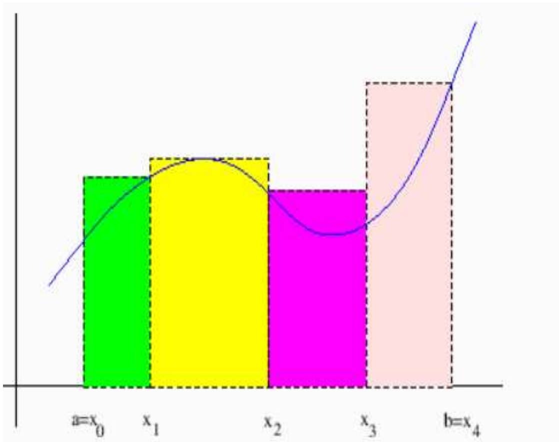
$$d(x) \leq f(x) \text{ i } D = \sum_{i=1}^{n} d_i \Delta x_i$$



Slika 2.5. Donja integralna suma. (slika preuzeta s [8])

G je gornja suma za f na $[a, b]$ ako postoji nenegativna stepenasta funkcija g na $[a, b]$ takva da za $\forall x \in [a, b]$ vrijedi:

$$g(x) \geq f(x) \text{ i } G = \sum_{j=1}^{m} g_j \, \Delta x_j$$



Slika 2.6. Gornja integralna suma. (slika preuzeta s [8])

Očito je da je površina P, ispod grafa od f na $[a, b]$ veća od svake donje sume te manja od svake gornje sume za f na $[a, b]$. Odnosno,

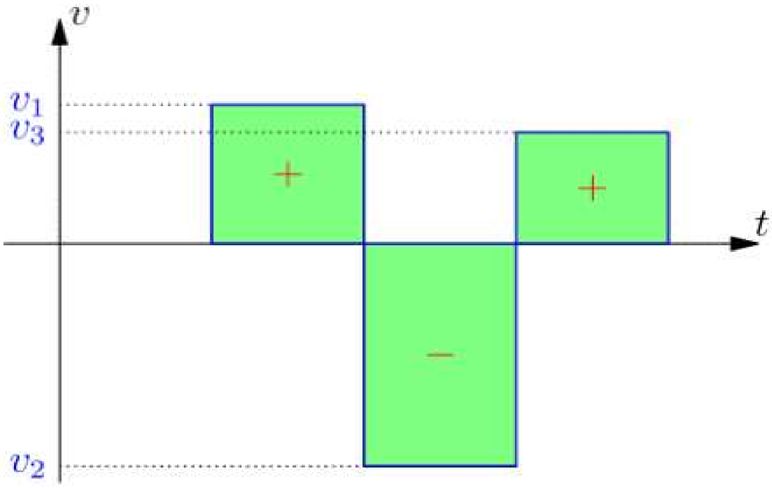
$$D = \sum_{i=1}^{n} d_i \Delta x_i \leq P \leq \sum_{j=1}^{m} g_j \Delta x_j = G$$

Upotrebom particija s dovoljno malim podintervalima priželjkujemo da ćemo moći odabrati stepenaste funkcije koje se nalaze iznad i ispod f, čije će se gornje i donje sume razlikovati po volji malo.

Napomena: Površinu ispod grafa funkcije f određujemo tako da nađemo gornje i donje sume za f koje su sve bliže jedna drugoj. Te sume aproksimiraju traženu površinu. Površina P broj je koji je veći od svih donjih suma D te manji od svih gornjih suma G:

$$D \leq P \leq G$$

Područje ispod grafa od f na intervalu $[a, b]$ definirali smo kao područje omeđeno osi x, grafom $y = f(x)$ te pravcima $x = a$ te $x = b$. Do sada smo govorili samo o područjima ispod grafa nenegativnih funkcija, međutim u općem slučaju područje ispod grafa od f predstavljeno je zelenim područjem na slici. Relativna površina područja ispod grafa od f razlika je " + površina " i " – površina " na slici 2.7.



Slika 2.7. Relativna površina ispod grafa. (slika preuzeta s [9])

2.1.2. Definicija određenog integrala

Definicija 2.2. *Neka je f funkcija definirana na intervalu $[a, b]$. Ako na $[a, b]$ postoje gornje i donje sume za f koje se po volji malo razlikuju, onda postoji jedan jedini broj I koji je veći od svih donjih suma D i manji od svih gornjih suma G, $D \leq I \leq G$. Taj broj zovemo integralom funkcije f na intervalu $[a, b]$ te ga označavamo s:*

$$\int_a^b f(x)dx$$

Znak $\int$ zovemo znakom integracije, konstante a i b granicama integracije, a f podintegralnom funkcijom.

Ako je f integrabilna funkcija na intervalu $[a, b]$ tada vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \Delta x_i \leq \int_a^b f(x)dx \leq \sum_{j=1}^{m} g_j \, \Delta x_j$$

Vrijedi za sve stepenaste funkcije d i g, tako da je $d(x) \leq f(x) \leq g(x)$ za $x \in [a, b]$, i $\int_a^b f(x)dx$ jedini je broj koji ima to svojstvo.

Integral je definiran pomoću suma, tako da je i sama notacija za integral izvedena iz notacije za sumu. (Σ je pretvoren u izduženi $\int$, Δx_i je pretvoren u dx, a granice sumacije 1 i n pretvorene su u granice integracije a i b)

Napomena: Ako postoji jedan jedini broj koji donje sume za f na $[a, b]$ razdvaja od gornjih, to je integral funkcije f na intervalu $[a, b]$, oznakom:

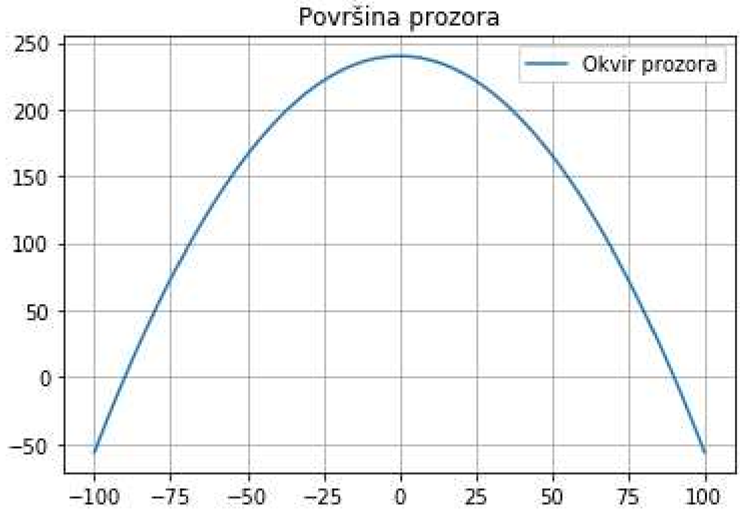
$$\int_a^b f(x)dx.$$

Taj je broj jednak relativnoj površini ispod grafa od f na $[a, b]$. (Ona postoji samo ako postoji takav jedinstveni broj.)

Primjer 2.1.1. Prozori renesansne palače imaju parabolični oblik s donjom osnovnicom širine $180\ cm$ i visinom $240\ cm$. Kolika je površina svakog prozora?

Rj:

Smjestimo li koordinatni sustav u ravninu prozora, parabolični oblik prozora predstavlja graf $y = ax^2 + b$ na intervalu $[-90,90]$. S obzirom na to da je $y = 240$ za $x = 0$ zaključujemo da je $b = 240$, dok iz $y = 0$ za $x = 90$ slijedi da je $a = -\frac{4}{135}$. Dakle, tražena funkcija glasi $f(x) = -\frac{4}{135}x^2 + 240$ pa traženu površinu svakog prozora možemo interpretirati kao površinu ispod grafa, odnosno:



Slika 2.8. Graf funkcije $\boldsymbol{f(x)}$.

$$P = 2\int_0^{90}\left(-\frac{4}{135}x^2 + 240\right)dx = 2\left(-\frac{4}{405}x^3 + 240x\right) = 2\left(-\frac{4}{405}\cdot 90^3 + 240\cdot 90\right)$$
$$= 2(-7200 + 21600) = 28800$$

2.1.3. Definicija neodređenoga integrala

Za početak navedimo jedan primjer prije nego definiramo pojam neodređenoga integrala.

Primjer 2.1.2. Nađimo funkciju $F(x)$ čija je derivacija zadana s $F'(x) = f(x) = 3x^2 + 4x + 2$.

Rj:

Prisjetimo se za početak da je $3x^2$ derivacija od x^3. Znamo također i da je $2x$ derivacija od x^2, stoga znamo i da je $4x$ derivacija od $2x^2$ te na kraju znamo i da je konstanta 2 derivacija od $2x$. Stoga:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2 \\ \frac{d}{dx}(2x^2) = 4x \\ \frac{d}{dx}(2x) = 2 \end{cases} \rightarrow \frac{d}{dx}(x^3 + 2x^2 + 2x) = 3x^2 + 4x + 2.$$

Dakle, funkcija $F(x) = x^3 + 2x^2 + 2x$ funkcija je koju tražimo; koja zadovoljava uvjet da je njena derivacija $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$ te nju zovemo antiderivacijom funkcije $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$. Kasnije ćemo uočiti da to nije jedina antiderivacija od $f(x)$. Naime, ako je $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$, tada je i $\frac{d}{dx}(F(x) + 12) = f(x)$ te $\frac{d}{dx}(F(x) - 9) = f(x)$, tj. za svaku konstantu C je

$\frac{d}{dx}(F(x)+C)=f(x)$. To znači da je osim $F(x)$ i svaka funkcija $F(x) + C$ također antiderivacija od $f(x)$.

Napomena: Antiderivacija funkcije $f(x)$ takva je funkcija $F(x)$ za koju vrijedi sljedeće:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

Ako je $F(x)$ jedna od antiderivacija funkcije $f(x)$, tada je i funkcija $F(x) + C$ antiderivacija od $f(x)$ za svaku konstantu C. To su ujedno i sve antiderivacije od $f(x)$.

Antiderivaciju od f često nazivamo i primitivnom funkcijom od f.

Dakle, svaka antiderivacija $G(x)$ razlikuje se od neke proizvoljno odabrane antiderivacije $F(x)$ samo za neku konstantu C, tj. $G(x) = F(x) + C$, tj. razlika dviju antiderivacija funkcije $f(x)$ uvijek je konstanta. To možemo vrlo lako i pokazati:

$\frac{d}{dx}G(x) = f(x)$ i $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$, tada je $\frac{d}{dx}\big(G(x) - F(x)\big) = f(x) - f(x) = 0$.

Očito je da samo konstanta može imati derivaciju 0 pa stoga slijedi da je $G(x) - F(x)$ konstanta što smo htjeli i pokazati.

U Leibnitzovoj simbolici derivaciju od $F(x)$ označavamo s $\frac{d}{dx}F(x)$. Leibnitz je također uveo i simbol za antiderivaciju. On je svaku antiderivaciju funkcije $f(x)$ označavao s $\int f(x)dx$. Dakle, ako je $F'(x) = f(x)$, tada je $\int f(x)dx = F(x) + C$. Antiderivaciju još zovemo i neodređenim integralom.

Pojam neodređenoga integrala koristimo kao sinonim za antiderivaciju. To je potpuno opravdano s obzirom na to da “ neodređenim integralom “ funkcije $f(x)$ zovemo njezin integral s promjenjivom granicom:

$$\int_a^x f(t)dt$$

Tako definirani “neodređeni integral“ funkcije $f(x)$ nije broj, već funkcija od x. Ta funkcija antiderivacija je funkcije $f(x)$, ako ih $f(x)$ uopće i ima. Naime, ako je $F(x)$ antiderivacija funkcije $f(x)$ tada je i:

$$\int_a^x f(t)dt = F(t)|_a{}^x = F(x) - F(a)$$

Antiderivacija funkcije $f(x)$ jer se od antiderivacije $F(x)$ razlikuje samo za konstantu – $F(a)$. Ipak "neodređeni integrali" oblika $\int_a^x f(t)dt$ ne obuhvaćaju sve antiderivacije funkcije f što ćemo dokazati sljedećim primjerom.

Primjer 2.1.3. Funkcije $F(x) = -\frac{1}{x}$ i $f(x) = \frac{1}{x^2}$ definirane su za $x > 0$. Dokažimo da je $\int_a^x \frac{1}{t^2} dt \neq -\frac{1}{x}$ (za svaki izbor od a), iako je F antiderivacija od f.

Rj:

$$\int_a^x \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{a}$$

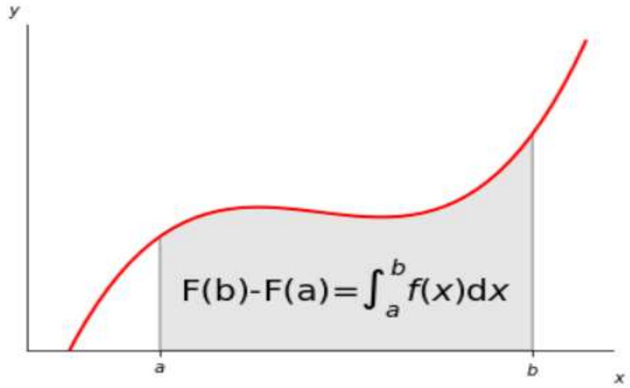
Što je različito od $-\frac{1}{x}$ za svaki izbor od a, a to je trebalo i dokazati.

2.2. Osnovni teorem diferencijalnoga i integralnoga računa

Derivaciju smo ranije definirali, a u ovome dijelu smo definirali integral. Sada kada smo upoznali oba ključna pojma diferencijalnoga i integralnoga računa vrijeme je da otkrijemo njihovu fundamentalnu vezu. Za početak krenut ćemo od već sada dobro poznate interpretacije obaju pojmova. Neka $F(x)$ predstavlja put što ga tijelo prijeđe do trenutka x, a derivacija $F'(x)$ predstavlja brzinu tijela u trenutku x. Vezu brzine i puta već smo ranije definirali, a sada ćemo se posvetiti relativnom putu. Relativni put $F(b) - F(a)$ što ga tijelo prijeđe od trenutka a do trenutka b jednak je relativnoj površini ispod grafa brzine $F'(x)$, odnosno:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx$$

Ta veza između integrala i derivacije vrijedi neovisno kako interpretiramo funkciju F te predstavlja osnovni teorem diferencijalnoga i integralnoga računa.



Slika 2.9. Osnovni teorem diferencijalnoga i integralnoga računa.

Sada kada smo se upoznali s glavnom primjenom osnovnoga teorema diferencijalnoga i integralnoga računa, idući korak bio bi dokazati ga. Ideja dokaza vrlo je jednostavna. Neka je F antiderivacija od f. Potrebno je pokazati da je broj $F(b) - F(a)$ veći od svih donjih suma za f na $[a, b]$ te manji od svih gornjih suma za f na $[a, b]$. Budući da pretpostavljamo da je f integrabilna, tada je $\int_a^b f(x)dx$ jedini takav broj, odnosno zaključujemo da je $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.

Teorem 2.1. *Ako je funkcija* F *diferencijabilna na* $[a, b]$, *a njezina derivacija* F' *je integrabilna na* $[a, b]$ *, tada je:*

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Odnosno, ako je funkcija f *integrabilna na* $[a, b]$ *te ima antiderivaciju* F, *tada:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Dokaz:

Što se tiče gornjih suma, potrebno je dokazati da je $\sum_{i=1}^{n} g_i \Delta x_i \geq F(b) - F(a)$ za svaku stepenastu funkciju g koja je veća od f na intervalu $[a, b]$. Neka su g_i vrijednosti od g na intervalima particije $< x_{i-1}, x_i >, i = 1, \ldots, n$. Na intervalu $< x_{i-1}, x_i >$ vrijedi $f(x) = F'(x) \leq g_i$, iz čega slijedi $g_i \Delta x_i \geq F(x_i) - F(x_{i-1})$. Naime, ako je brzina kojom se F mijenja na intervalu $< x_{i-1}, x_i >$ konstantno manja od konstantne brzine g_i, tada je i ukupna promjena $F(x_i) - F(x_{i-1})$ manja od $g_i(x_i - x_{i-1})$. Zbrajajući te nejednakosti od $i = 1$ do $i = n$, dobivamo traženu procjenu gornje sume:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i \Delta x_i \geq \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

Analogno pokazujemo i za donje sume te dobivamo slično kao i za gornje sljedeće:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

Dakle, $F(b) - F(a)$ broj je koji je veći od svake donje, te manji od svake gornje sume, odnosno $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ što smo trebali i dokazati.

Spomenimo još i kako integral ovisi o granicama integracije, odnosno:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt, \text{ ali } \int_a^s f(x)dx \neq \int_a^t f(t)dt$$

Recimo još nešto o osnovnim svojstvima integrala. Budući da smo ga ranije definirali pomoću gornjih i donjih suma, neće nas iznenaditi da su osnovna svojstva integrala identična osnovnim svojstvima suma.

Napomena: Osnovna svojstva integrala.

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
3. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
4. Ako je $f(x) \leq g(x), x \in [a,b]$, tada je:
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Ta svojstva vrijede za sve integrabilne funkcije f i g. Osnovna svojstva integrala mogu se lako izvesti iz odgovarajućih svojstva antiderivacije te primjenom osnovnoga teorema diferencijalnoga i integraloga računa ako pretpostavimo da funkcije f i g imaju antiderivaciju F, odnosno G.

Spomenimo još i tzv. "krivo usmjerene" integrale. Integral $\int_a^b f(x)dx$ definirali smo za $a < b$. Međutim, desna strana osnovnoga teorema diferencijalnoga i integralnoga računa

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

ima smisla i ako je $a \geq b$.

Definicija 2.3. *Ako je* $a > b$ *i* f *integrabilna funkcija na* $[b,a]$, *tada je:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Ako je $a = b$, onda je $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Možemo uočiti da za integrabilni F' i $a > b$ iz naše definicije i osnovnoga teorema diferencijalnoga i integralnoga računa slijedi:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = -\big(F(a) - F(b)\big) = F(b) - F(a)$$

Odnosno, da osnovni teorem diferencijalnoga i integralnoga računa vrijedi i za tzv. "krivo usmjerene" integrale.

Napomena: "Krivo" usmjereni integrali.

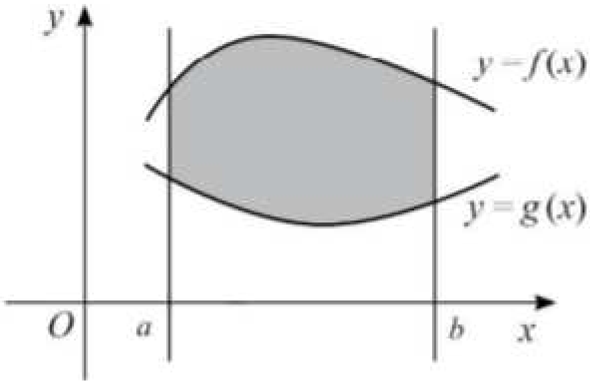
1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2.3. Integral u kontekstu

2.3.1. Površina geometrijskih likova

U prethodnome dijelu vidjeli smo da je površina ispod grafa od f na intervalu $[a,b]$ jednaka $\int_a^b f(x)dx$.

Postupak iz prethodnoga djela možemo upotrijebiti za računanje površine svakoga područja koje je nad intervalom $[a,b]$ omeđeno grafovima takvih funkcija f i g za koje vrijedi nejednakost $0 \leq g(x) \leq f(x)$ za $x \in [a,b]$. Površina takvog područja je $\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$



Slika 2.10. Površina lika jednaka je razlici površina određenih grafovima funkcija f i g.
(Slika preuzeta s [12])

Napomena: Ako su funkcije f i g integrabilne na $[a,b]$ i $f(x) \geq g(x)$ za $x \in [a,b]$, onda površina područja nad $[a,b]$ koje je između grafa od f i grafa od g iznosi:

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

Područje između dvaju grafova možemo zamisliti kao "kontinuirani niz beskonačnih tankih pravokutnika", a njegovu površinu, točnije odgovarajući integral kao "beskonačnu sumu svih tih beskonačno tankih pravokutnika". Nad svakom točkom x površina "beskonačno tankog pravokutnika" širine dx i visine $f(x) - g(x)$ je $(f(x) - g(x))\, dx$. Integral je "kontinuirana beskonačna suma" svih tih pravokutnika $\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$.

2.3.2. Integral kao prijeđeni put

Vratimo se sada brzinama. Relativni put što ga tijelo prijeđe u pravocrtnome gibanju brzinom $v = f(t)$ od trenutka $t = a$ do trenutka $t = b$ je:

$$\Delta s = \int_a^b v dt$$

Pokažimo idućim primjerom kako možemo iz zadane brzine odrediti put što ga tijelo prevali vremenskom intervalu.

Primjer 2.3.1. Brzina gibanja čestice u trenutku t iznosi $v(t) = 12t - 3t^2\ m/s$.

a) Odredite put koji je čestica prošla od početka gibanja do zaustavljanja.
b) Koliki je relativni put između druge i pete sekunde?

Rj:

a) Put koji je tijelo prošlo od početka gibanja do zaustavljanja računamo na sljedeći način:

$$v(t) = 0 = 12t - 3t^2 = 3t(4 - t)$$

Odnosno, tijelo će se zaustaviti u četvrtoj sekundi gibanja pa, stoga, kako bi odredili put koji je čestica prošla od početka gibanja do zaustavljanja računamo:

$$\int_0^4 (12t - 3t^2)dt = 6t^2 - t^3 = 6 \cdot 4^2 - 4^3 = 32\ m$$

b) Relativni put između druge i pete sekunde računamo na sljedeći način:

$$\int_2^5 (12t - 3t^2)dt = s(5) - s(2) = 25 - 16 = 9m$$

2.3.3. Integral kao ukupna promjena

Ta jako važna veza puta i brzine također vrijedi i za ukupnu promjenu svake veličine V koja ovisi o veličini x i mijenja se u odnosu na x brzinom $\frac{dV}{dx}$, što slijedi iz osnovnoga teorema diferencijalnoga i integralnoga računa:

$$\Delta V = V(b) - V(a) = \int_a^b (\frac{dV}{dx})dx$$

Sad ćemo na dvama primjerima interpretirati integral kao ukupnu promjenu.

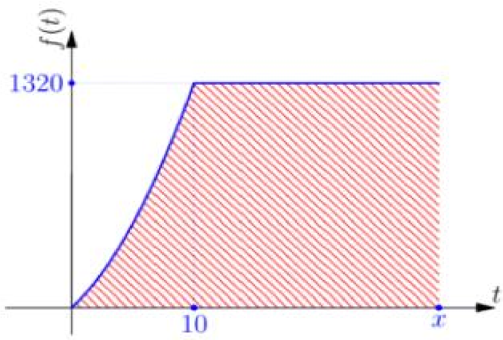
Primjer 2.3.2. Bazen se puni vodom, od početnog trenutka $t = 0$ brzinom $12(t^2 + t)\ l/min$. Dakle, brzina punjenja vodom raste, ali samo do trenutka kada brzina punjenja dostigne brzinu od $1320\ l/min$ te nakon tog trenutka brzina punjenja postane konstantna.

a) S koliko vode se napuni bazen do toga trenutka?
b) Koliko vremena treba da se bazen od 783400 litara napuni?

Rj:

Maksimalna brzina punjenja postignuta je u trenutku t za koji je $12(t^2 + t) = 1320$, odnosno u trenutku $t = 10\ min$. Brzina punjenja je, stoga, definirana funkcijom:

$$f(t) = \begin{cases} 12(t^2 + t), & 0 \leq t \leq 10 \\ 1320, & 10 < t \end{cases}$$



Slika 2.11. Graf funkcije koja opisuje punjenje bazena vodom. (Slika preuzeta s [9])

Količina vode koja uđe u bazen do trenutka postizanja maksimalne brzine predstavljena je na slici 2.11 crvenom površinom, a ona iznosi:

$$\int_0^{10} 12(t^2 + t)dt = 4t^3 + 6t^2 = 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 = 4\,600\ l$$

b) Trenutak u kojem se potpuno napuni bazen od 783400 litara predstavljen je na slici 2.11 točkom x u kojoj ukupna crvena površina postigne vrijednost 783400, a ona je određena jednadžbom

$$783400 = \int_0^x 12(t^2 + t)dt + \int_{10}^x 1320\ dt = 4600 + 1320(x - 10)$$

Riješimo tu jednadžbu:

$$1320x - 13200 = 783400 - 4600,$$

$$1320x = 783400 + 13200 - 4600 = 79200$$

$$x = 600\ min = 10h$$

Odnosno, pronalazimo da će se bazen u potpunosti napuniti za 10 sati

Za idući primjer trebat će nam ekonomska pozadina. Stoga ćemo za početak definirati pojmove koji će nam trebati prilikom rješavanja idućega primjera.

Potrebno je znati da je akumulacija kapitala $K(t)$ funkcija vremena te da je ona proces uvećanja danog kapitala u danom vremenskom intervalu. Stopa (odnosno brzina) akumulacije kapitala predstavlja prvu derivaciju funkcije $K(t)$, tj. $\frac{dK}{dt}$, a identično je jednaka stopi (brzini) neto investicija $I(t)$, tj. $I(t) = \frac{dK}{dt}$, odakle je $K(t) = \int I(t)dt$. Na osnovi prethodnog zaključujemo da se količina akumuliranog kapitala u vremenu t, mjereno od početka, za bilo koju investiciju $I(t)$, može izraziti pomoću određenog integrala kao $\int_0^t I(t)dt = K(t)|^t{}_0 = K(t) - K(0)$, odakle je $K(t) = K(0) + \int_0^t I(t)dt$, tj. količina kapitala u bilo kojem vremenu t jednaka je zbroju početnoga kapitala i ukupno akumuliranoga kapitala do toga vremena.

Primjer 2.3.3. Pretpostavimo da je tijek neto investicije dan s $I(t) = \frac{1}{2}\sqrt{t}$ (milijuna dolara godišnje). Izračunajmo koliko će biti akumuliranje kapitala u vremenskom razdoblju između kraja prve i kraja šeste godine.

Rj:

Koristeći relaciju $\int_0^t I(t)dt = K(t)|^t{}_0 = K(t) - K(0)$ dobivamo sljedeće:

$$\int_1^6 I(t)dt = K(6) - K(1) = \left(K(0) + \int_0^6 I(t)dt\right) - \left(K(0) + \int_0^1 I(t)dt\right)$$
$$= \int_0^6 I(t)dt - \int_0^1 I(t)dt = \int_1^6 I(t)dt = \int_1^6 \frac{1}{2}\sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\left(\sqrt{6} - 1\right) = 0{,}225$$

2.4. Primjena integrala

2.4.1. Primjena integrala u ekonomiji

Pretpostavimo da će dva investicijska projekta nakon x godina generirati dobit brzinama $D_1'(x)$ i $D_2'(x)$ kuna godišnje, redom te da će u narednih n godina brzina $D_1'(x)$ biti veća od brzine $D_2'(x)$. Neto višak dobiti, odnosno razlika $D_1'(x) - D_2'(x)$ predstavlja brzinu kojom dobit generirana prvim projektom prekoračuje dobit generiranu drugim projektom. Određeni integral ove stope promjene od $x = 0$ do $x = n$ predstavlja neto višak dobiti generiran prvim projektom tijekom narednih n godina,tj. neto višak dobiti $\int_0^n [D_1'(x) - D_2'(x)]\, dx$. Neto višak dobiti geometrijski se interpretira kao površina lika između krivulja $D_1'(x)$ i $D_2'(x)$ od $x = 0$ do $x = n$.

Neto dobit zapravo je višak ukupnih prihoda nad ukupnim rashodima koje tvrtka realizira u određenome razdoblju. Drugim riječima, neto dobit pokazuje nam koliko je od prihoda ostalo na raspolaganju tvrtki i vlasnicima nakon što se oduzmu baš svi troškovi. Iskazuje se u računu dobiti i gubitka i izražena je u novčanim jedinicama. To je najvažnija stavka tog izvještaja i predstavlja iznos kojeg tvrtka može koristiti za različite svrhe kao npr.:

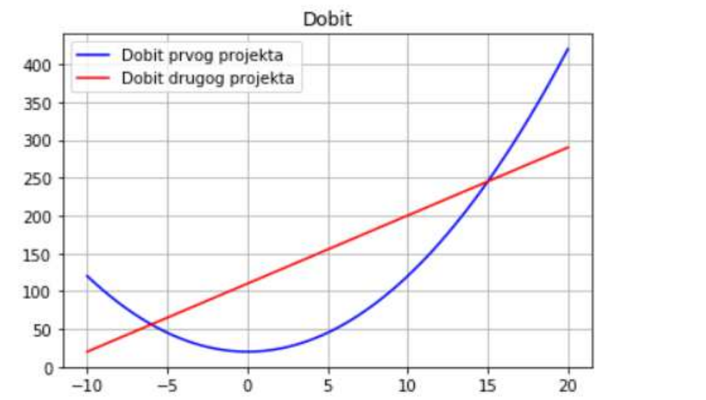
- rezerve za teža vremena
- isplata kredita i drugih dugova
- investicije u nove projekte
- isplata vlasnicima (dividenda)

Smisao izračunavanja neto dobiti ocijeniti je uspješnost poduzeća kod stvaranja vrijednosti za svoje vlasnike.

Zadatak 1. Pretpostavimo da će u narednih x godina jedan investicijski projekt generirati dobit brzinom $D_1'(x) = 20 + x^2$ kuna godišnje, dok će drugi projekt generirati dobit brzinom $D_2'(x) = 110 + 9x$ kuna godišnje. Odredimo:

a) Koliko će godina drugi projekt biti profitabilniji od prvoga
b) Izračunajmo neto višak dobiti ako se investira u drugi projekt umjesto u prvi za vremenski interval dobiven u dijelu pod a)

Rj:

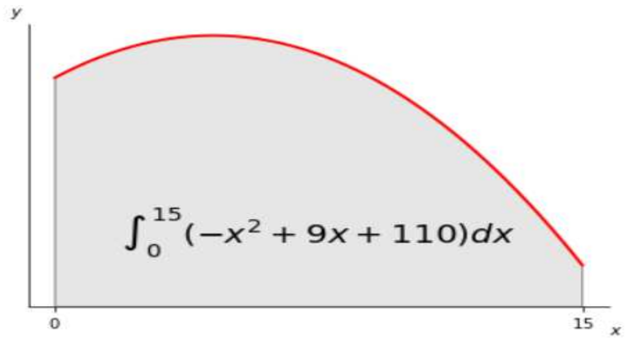


Slika 2.12. Grafovi funkcija $D_1{}'(x)$ i $D_2'(x)$.

a) Drugi projekt bit će profitabilniji od prvoga sve dok ne bude $D_1{}'(x) = D_2{}'(x)$,tj. $20 + x^2 = 110 + 9x$, odnosno:

$$x^2 - 9x - 90 = 0$$

Odakle je $x = 15$($x = -6$ ne uzimamo jer nema ekonomskog smisla)
Prema tome, drugi projekt bit će profitabilniji od prvoga u narednih 15 godina.



Slika 2.13. Neto višak dobiti.

b)

Za $0 \leq x \leq 15$ brzina kojom dobit generirana drugim projektom prekoračuje prvi projekt je $D_2{}'(x) - D_1{}'(x)$ kuna godišnje. Prema tome, neto višak dobiti tijekom petnaestogodišnjeg perioda ako se investira u drugi projekt određeni je integral:

$$\int_0^{15} [(110 + 9x) - (20 + x^2)]\, dx$$

$$= \int_0^{15} (110 + 9x - 20 - x^2)\, dx$$

$$= \int_0^{15} (9x - x^2 + 110)\, dx$$

$$= \frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 110x \Big|_0^{15}$$

$$= (1012{,}5 - 1125 + 1650) - 0 = 1537{,}5$$

2.4.2. Primjena integrala u fizici

U slučaju kada sila nije konstantna, postupamo na sljedeći način: neka se tijelo giba duž $x - osi$ od točke $x = a$ do točke $x = b$ i neka u točki x na tijelo djeluje sila $f(x)$. Neka je $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ podjela segmenta $[a, b]$ takva da su svi podintervali jednake duljine, $x_i - x_{i-1} = \Delta x, i = 1, \ldots, n$. U podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ odaberemo točku ε_i. Kako je za veliki n duljina intervala Δx mala, a funkcija f neprekidna je, možemo pretpostaviti da je f gotovo konstantna na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$. Stoga je rad koji se izvrši prilikom pomicanja tijela od točke $x = x_{i-1}$ do točke $x = x_i$ približno jednak:

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x$$

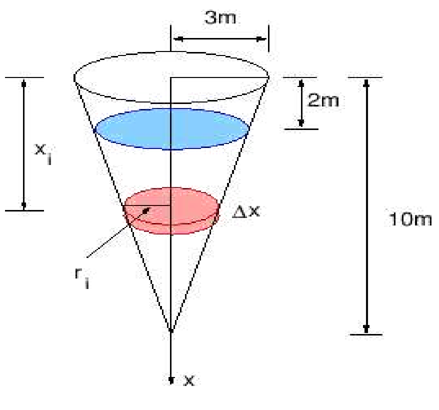
- intuitivno je jasno da ova aproksimacija postaje sve bolja što je n veći. Kako je izraz na desnoj strani jedan oblik integralne sume, rad izvršen prilikom pomicanja tijela od točke $x = a$ do točke $x = b$ definiramo kao:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Zadatak 1. Rezervar oblika obrnutog stošca visine $h = 10\ m$ i radijusa baze $r = 3m$ napunjen je vodom do visine 8 m. Izračunajmo rad koji je potreban za pražnjenje rezervara i to tako da se voda ispumpa preko gornjega ruba.

U ovom slučaju prvo treba postaviti integral. Uvedimo koordinatni sustav kao na slici. Voda se nalazi od dubine 2 m do dubine 10 m. Neka je $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ podjela intervala $[2,10]$, takva da su svi podintervali jednake duljine, $x_i - x_{i-1} = \Delta x, i = 1, \ldots, n$. Na taj način smo i vodu u rezervaru podijelili na n dijelova pri čemu je $i - ti$ dio približno jednak cilindru visine Δx i radijusa baze r_i. Iz sličnosti trokuta slijedi:

$$\frac{r_i}{10-x_i} = \frac{3}{10},\ r_i = \frac{3}{10}(10 - x_i).$$



Slika 2.14. Rezervar oblika stošca (Slika preuzeta s [10])

Volumen i-tog dijela vode stoga je približno jednak:

$$V_i \approx r_i{}^2 \Delta x \pi = \frac{9}{100}\,(10 - x_i\,)^2\,\Delta x \pi$$

pa je masa i$-tog$ dijela vode približno jednaka (masa je umnožak gustoće i volumena, a gustoća vode je $1000\ \ kg\ /\ m^3$)

$$m_i \approx 90(10 - x_i\,)^2 \Delta x \pi$$

Sila potrebna za podizanje $i - tog$ dijela vode mora nadići silu težu pa je:

$$F_i = m_i g \approx 9.81 \cdot 90(10 - x_i)^2 \Delta x \pi \approx 2774(10 - x_i)^2 \Delta x$$

Svaka čestica u $i - tom$ dijelu vode mora prijeći put koji je približno jednak x_i. Stoga je rad potreban za ispumpavanje $i - tog$ dijela vode približno jednak:

$$W_i \approx F_i x_i \approx 2774(10 - x_i)^2 x_i \Delta x$$

Ukupni rad potreban za ispumpavanje čitavog rezervara dobit ćemo zbrajanjem doprinosa svih n dijelova i prelaskom na limes kada $n \to \infty$:

$$W \approx \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2774(10 - x_i)^2\, x_i \Delta x$$

$$= 2774 \int_2^{10} (10 - x^2) x dx$$

$$= 2774(50x^2 - 20\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4})\Bigg|_2^{10}$$

$$\approx 1.90 \cdot 10^6\, J$$

POPIS LITERATURE

[1] Applications of the Derivative, dostupno na http://math.hawaii.edu/~mchyba/documents/syllabus/Math499/extracredit.pdf/ (rujan 2020.)

[2] B. Dakić, N. Elezović, Matematika 4, II. dio, Element d. o. o., Zagreb, 2014.

[3] Derivacija, dostupno na https://hr.wikipedia.org/wiki/Derivacija (srpanj 2020.)

[4] H. D. Young, R. A. Freedman, Sears & Zemansky University Physics, Vol. 1, 13th edition, 2012.

[5] I. Slapničar, Matematika 1, Kartular, Split, 2018.

[6] I. Slapničar: Matematika 2, Kartular, Split, 2019.

[7] L. Krnić, Z. Šikić, Diferencijalni i integralni račun, I. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[8] Matematika 2: Definicija i osnovna svojstva integrala, dostupno na http://lavica.fesb.unist.hr/matematika2/predavanja/node26.html (kolovoz 2020.)

[9] Matematika 2: Određeni integral, dostupno na https://www.fsb.unizg.hr/matematika/poglavlje1.1 (kolovoz 2020.)

[10] Matematika 2: Primjene određenog integrala, dostupno na http://lavica.fesb.hr/mat2/predavanja/node37.html (svibanj 2020.)

[11] M. L. Bittinger, D. J. Ellenbergen, S. A. Surgent, Calculus and its Application, 10th edition, 2012., dostupno na https://www2.math.binghamton.edu/lib/exe/fetch.php/people/mckenzie/bittinger_et_al..pdf (kolovoz 2020.)

[12] M. Petrinović, Primjene diferencijalnog i integralnog računa u ekonomiji, dostupno na http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/PET46.pdf (srpanj 2020.)

[13] T. Perić, Matematika 1: Integralni račun i primjene, dostupno na http://www.efzg.unizg.hr/UserDocsImages/MAT/tperic/4.%20Integrealni%20ra%C4%8Dun%20i%20primjene_3_1.pdf (srpanj 2020.)

SAŽETAK

Osim strogoga formiranja pojmova derivacije i integrala, važno je razumjeti i ulogu i korištenje, odnosno svrhu tih pojmova izvan matematičkoga konteksta. U ovome radu dajemo im značenje u područjima fizike i ekonomije. Matematičko uvođenje tih pojmova primjereno je učenicima četvrtoga razreda gimnazije te prvoj godini tehničkih fakulteta. U prvome poglavlju upoznali smo se s interpretacijom derivacije, kako fizikalnom tako i geometrijskom. Upoznali smo se s definicijom derivacije te s osnovnim pravilima deriviranja. Spomenuli smo metode deriviranja implicitnih te parametarski zadanih funkcija. Pomoću par kratkih primjera upoznali smo se s derivacijom u kontekstu te smo na kraju pomoću ekonomskog i fizikalnog modela predstavili derivaciju u "svakodnevnom životu".

U drugome poglavlju upoznali smo se s integralima, kako određenim tako i neodređenim integralima. Pokazali smo kako se uvode određeni i neodređeni integral u nastavu. Potom smo uveli osnovni teorem diferencijalnog i integralnog računa koji je poveznica između derivacije i integrala te samim time jedan od najbitnijih teorema u matematici. Nakon toga pomoću par kratkih primjera predstavili smo integral u kontekstu, te smo na kraju pomoću par zadataka iz područja ekonomije i fizike predstavili upotrebu integrala u "svakodnevnom životu".

SUMMARY

In addition to the strict formation of the concepts of derivation and integration it is important to understand their role and purpose outside of the mathematical context. In this paper we give them meaning in the fields of physics and ecnonomics. The mathematical introduction of these concepts is appropriate for students in the fourth grade of high schoold and the first year of technical faculties.

In the first chapter we are introduced to the interpretation of derivation, both physical and geometric. We got acquainted with the definition of derivation and the basic rules of derivation. We mentioned methods of deriving implicit and parametrically given functions. With the help of few short examples, we were introduced to derivation in context and finally, using an economic and physical model we presented derivation in „everyday life".

In the second chapter, we are introduced to integrals, both definite and indefinite. We have shown how definite and indefinite integrals are introduced in teaching. Then we introduced the basic theorem of differential and integral calculus, which is the connection between the derivative and the integral, and thus one of the most important theorems in mathematics. After that, with the help of few short examples, we presented integral in the context, and finally, with the help of few examples from the field of economics and physics we presented the use of integrals in „everyday life".

ŽIVOTOPIS

Kristijan Galić,roden je 10. veljače 1995. godine u Zagrebu. Osnovnu školu Frana Galovića pohađao je u Zagrebu te kasnije upisao srednju školu, I. gimnaziju u Zagrebu. 2013. godine upisuje Prirodoslovno – matematički fakultet u Zagrebu, smjer nastavnički studij matematike i fizike te se nakon druge godine prebacuje na preddiplomski nastavnički studij matematike. 2017. godine upisuje diplomski studij Matematike, smjer nastavnički u Zagrebu. Tokom pisanja diplomskoga rada krenuo je na studentsku praksu, prvo u informatičkoj tvrtci *S&T Hrvatska* gdje se upoznao s osnovnim principima strojnoga učenja, te potom u informatičkoj firmi *CROZ* gdje se krenuo upoznavati s radom sa skladištenjem podataka te analizom podataka na projektu vezanim s kvalitetom života u gradu Zagrebu.