Mohr-Mascheronijeve konstrukcije i primjena u školskoj nastavi matematike

Cindrić, Lidija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lidija Cindrić

MOHR-MASCHERONIJEVE KONSTRUKCIJE I PRIMJENA U ŠKOLSKOJ NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, srpanj 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem mentorici, prof. dr. sc. Željki Milin Šipuš, na uloženom vremenu, trudu i stručnoj pomoći prilikom pisanja ovog diplomskog rada.
Posebno se želim zahvaliti svojim roditeljima, bratu, ujaku, bakama i djedu koji su mi omogućili studiranje i bili podrška na mom obrazovnom putu. Hvala im na strpljenju, iskrenim savjetima, ohrabrenju i molitvama.
Hvala mojim prijateljicama i kolegicama na uzajamnoj pomoći i vremenu kojeg smo provele zajedno čime je ovo studiranje bilo još ljepše.
Najveću zahvalu upućujem dragom Bogu koji me je cijelo vrijeme vodio, pratio i dao obilje milosti.

Sadržaj

Uvod

U ovom se diplomskom radu razmatraju konstrukcije izvodljive samo šestarom. U prvom su poglavlju navedeni aksiomi planimetrije i povijesni razvoj jedne od najstarijih grana matematike, geometrije. U drugom je poglavlju istaknuta teorija o inverznom preslikavanju ravnine dok se u trećem poglavlju objašnjava pomoću kojih se pomagala provode geometrijske konstrukcije i što se može konstruirati pomoću tih pomagala.

U četvrtom se poglavlju iskazuje i dokazuje Mohr-Mascheronijev teorem dok se u petom poglavlju navode primjeri konstrukcija izvodljivih samo šestarom.

Dio ovog rada namijenjen je osvrtu na geometrijske konstrukcije u školskoj matematici pa su u petom poglavlju navedeni i primjeri prikladni za školu gdje se konstrukcije vrše isključivo šestarom. Potom slijedi i aktivnost za istraživačku nastavu, koja nije u sustavu redovne nastave, a koja bi učenicima mogla približiti ovu temu, a samim time i naučiti ih provoditi jednostavne konstrukcije samo pomoću šestara.

Poglavlje 1

Geometrija ravnine i njezina povijest

1.1 Aksiomi planimetrije

Prije samog Mohr-Mascheronijevog teorema, osvrnut ćemo se na planimetriju, a potom i na geometrijske konstrukcije općenito. Kad kažemo geometrija, većinom se podrazumijeva da govorimo o euklidskoj geometriji. Iako postoje i neeuklidske geometrije, mi ćemo se zadržati na prvoj. U euklidskoj su geometriji osnovni objekti u ravnini točke, pravci i ravnine koji se ne definiraju. Svi se ostali objekti izvode pomoću navedenih osnovnih objekata. Također, postoje aksiomi koji opisuju svojstva osnovnih objekata. Aksiome ćemo navesti iz [13]. Da bi aksiomi bili valjani, trebaju zadovoljavati određene principe, a to su:

1. Princip nezavisnosti
2. Princip neproturječnosti
3. Princip potpunosti.

Euklidska ravnina, ili kraće ravnina, je skup M čije elemente nazivamo točkama, a neke njezine istaknute podskupove nazivamo pravcima. Ta dva tipa objekata zadovoljavaju sljedeće aksiome:

Aksiomi incidencije:

A1. Za svake dvije točke $A, B \in M$ postoji jedinstveni pravac iz M kojemu one pripadaju. Taj se pravac označava s AB.

A2. Na svakom pravcu leže barem tri različite točke.

A3. Postoje tri nekolinearne točke (tri točke koje ne leže na jednom pravcu).

Aksiomi uređaja:

A4. Na svakom pravcu u ravnini postoje točno dva međusobno suprotna linearna uređaja.

A5. Paschov aksiom: Ako pravac siječe jednu stranicu trokuta i ne prolazi niti jednim vrhom na toj stranici, onda on siječe još barem jednu stranicu.

Aksiomi metrike:

Neka za funkciju $d : M \times M \to \mathbb{R}$ vrijedi:

A6. $d(A, B) \geq 0, \ A, B \in M$.

A7. $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

A8. $d(A, B) = d(B, A), \ A, B \in M$.

A9. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B), \ A, B, C \in M$.

A10. Za svaki polupravac (Ou) s vrhom u O i za svaki realni broj $x > 0$ postoji (jedinstvena) točka T na tom polupravcu takva da je $d(O, T) = x$.

Tada funkciju d zovemo **metrika** na M. Kažemo da je uređeni par (M, d) sa svojstvima A6. - A9. metrički prostor.

Aksiomi simetrije:

A11. Za svaki pravac $p \subset M$ postoji jedinstvena izometrija $s_p : M \to M$ različita od identitete, za koju je

$$s_p(T) = T, \ T \in p.$$

Ta se izometrija zove **osna simetrija** obzirom na pravac p. Pravac p se zove os simetrije.

A12. Za svaki par (Ox, Oy) polupravaca s vrhom u O postoji barem jedan pravac p takav da je

$$s_p(Ox) = Oy.$$

Aksiom o paralelama:

A13. Zadanom točkom T izvan zadanog pravca p prolazi najviše jedan pravac q paralelan s p.

1.2 Povijesni razvoj geometrije

Vratimo se malo u povijest i pogledajmo tijek razvoja jedne od najstarijih grana matematike, geometrije [3], [4]. Geometrija se počela razvijati vrlo rano. Do njenog razvoja, kao i do razvoja ostalih grana matematike, došlo je zbog potrebe ljudi za što točnijim procjenama opsega, površina, volumena, visina objekata i sl. Smatra se da početci geometrije sežu u doba starog Egipta, a odnose se upravo na računanje površina i volumena konkretnih predmeta. Zbog potrebe računanja opsega kružnice, površine kruga i volumena kugle, razvila se potreba za procjenom broja π. Tim složenim problemom bavili su se i ostali drevni narodi kao npr. Mezopotamci, Kinezi i Indijci. Svi su oni pokušavali naći aproksimaciju broja π kako bi mogli što točnije računati površine kruga i volumene valjka. Budući da su se mnogi narodi, ali i pojedinci bavili otkrićem što preciznije aproksimacije broja π, postoje različite metode procjenjivanja broja π na nekoliko znamenki. Iako su nabrojani drevni narodi ostavili svoje doprinose u području geometrije, možemo reći da je geometrija doživjela znatniji razvoj tek u starogrčkoj matematici.

Prvi poimence poznati matematičar u povijesti bio je Tales iz Mileta (oko 624.-527. pr. Kr.). Živio je u jonskom razdoblju (1. razdoblje starogrčke matematike) i ostavio je veliki doprinos na području geometrije. Pripisuju mu se dva bitna torema u geometriji, a to su: Teorem o obodnom kutu nad promjerom kružnice i teorem o proporcionalnosti [10].

Teorem 1.2.1 (**Talesov teorem o obodnom kutu nad promjerom kružnice**). *Ako je $\overline{AB}$ promjer kružnice, a C bilo koja točka kružnice različita od A i B, tada je $\sphericalangle ACB$ pravi kut.*

Teorem 1.2.2 (**Talesov teorem o proporcionalnosti**). *Paralelni pravci a i b na krakovima kuta $\sphericalangle pOp'$ odsijecaju proporcionalne dužine.*

Nadalje, Proklo pripisuje Talesu sljedeća četiri teorema:

Teorem 1.2.3. *Svaki promjer kruga raspolavlja krug.*

Teorem 1.2.4. *Kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta su jednaki.*

Teorem 1.2.5. *Vršni kutovi su jednaki.*

Teorem 1.2.6 (**K-S-K teorem o sukladnosti trokuta**). *Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i dva kuta uz tu stranicu.*

Tijekom 5. st. pr. Kr. starogrčki su matematičari počeli zahtijevati da se geometrijske konstrukcije provode samo ravnalom i šestarom. Zbog ograničenja uporabe geometrijskog pribora samo na ravnalo i šestar, početkom atenskog razdoblja (2. razdoblje starogrčke matematike) javila su se tri klasična problema:

1. Problem udvostručenja kocke

2. Problem kvadrature kruga

3. Problem trisekcije kuta.

U doba helenizma (3. razdoblje starogrčke matematike) djelovao je matematičar Euklid čije je najznačajnije djelo pod nazvom *Elementi* ostavilo neizbrisiv trag u matematici. Djelo *Elementi* je sinteza tada poznate matematike u 13 knjiga, a posebno je po stilu pisanja. Naime, tada se prvi puta nastoji čitava matematika izvesti iz malog broja početnih pretpostavki (aksioma i postulata). Zbog toga je opisano djelo predstavljalo uzor za sva matematička djela do 20. st. Za ovaj je diplomski rad važno djelo *Elementi* jer se upravo u njemu javljaju pojmovi koje smo zapisali u prethodnom odjeljku. Iako smo naveli da se točka, pravac i ravnina ne definiraju, Euklid ih je u svojim *Elementima* definirao.

Također, Euklid je u *Elementima* naveo svojih pet postulata, koji imaju ulogu aksioma, (euklidske) geometrije, koji se razlikuju u odnosu na aksiome iz prethodnog odjeljka. Među njegovim postulatima najbitniji je onaj koji se po njemu naziva *Euklidov peti postulat*. Taj je postulat zapravo drugi zapis za *aksiom o paralelama*, koji je spomenut u prethodnoj točki. *Aksiom o paralelama*, koji je zapisan u prethodnom odjeljku, nazivamo Playfairov [1] oblik *Euklidovog petog postulata*, a prijevod Euklidove verzije *aksioma o paralelama* glasi: Ako pravac siječe dva pravca tako da je zbroj unutrašnjih kutova s iste strane manji od dva prava kuta, onda se ta dva pravca (ako se dovoljno produže) sijeku na toj strani. Prijevodi ostala četiri Euklidova postulata iz *Elemenata* glase:

1. Od jedne točke k drugoj možemo povući dužinu.

2. Možemo proizvoljno produljiti dužinu.

3. Oko proizvoljne točke možemo nacrtati kružnicu proizvoljnog polumjera.

4. Svi su pravi kutovi jednaki.

U Euklidovim su *Elementima* napisane razne propozicije koje se, između ostalog, odnose i na razne konstrukcije. Te se konstrukcije provode isključivo ravnalom i šestarom, kao što je bio slučaj i u atenskom razdoblju.

Kako je vrijeme prolazilo, matematičari su pokušavali riješiti tri klasična problema, s većim ili manjim uspjesima, unaprjeđivali su geometriju kao i samu matematiku. Primjerice, Apolonije je potpuno razvio teriju konika, Arhimed je opisao 13 tipova polupravilnih tijela koje po njemu nazivamo Arhimedova tijela.

[1] John Playfair (1748.-1819.) engleski matematičar. Ponekad se Playfairov oblik aksioma naziva Proklov aksiom prema starogrčkom matematičaru Proklosu (410.-485.).

S vremenom su se razvile analitička geometrija, projektivna i nacrtna geometrija, a javile su se i neeuklidske geometrije. Mnogi su matematičari pokušavali dokazati peti Euklidov postulat jer su smatrali da je to teorem koji se može dokazati. Međutim, nitko ga nije uspio dokazati već su ti pokušaji doveli do nečeg sasvim drugog, a to su neeuklidske geometrije. One su karakteristične po tome što u njima ne vrijedi Euklidov peti postulat. Tako npr. za hiperboličku (neeuklidsku) geometriju vrijedi da kroz svaku točku izvan pravca postoji beskonačno mnogo paralela s tim pravcem, a za sfernu geometriju vrijedi da se kroz točku izvan zadanog pravca ne može povući niti jedan pravac paralelan s tim pravcem.

Osvrnimo se sada na matematičare koji su zaslužni za teorem koji proučavamo u ovom radu. To su matematičari Georg Mohr i Lorenzo Mascheroni.

Kako je navedeno u [11] i [12], Georg Mohr (1640.-1697.) je danski matematičar, rođen u Kopenhagenu. Značajan je matematičar jer je 1672. godine u Amsterdamu na danskom i nizozemskom jeziku objavio knjigu pod nazivom *Euclides Danicus* u kojoj se nalaze rezultati tzv. geometrije šestara. Mohr je tako postao prva osoba koja je dokazala tvrdnju da su sve geometrijske konstrukcije izvodljive ravnalom i šestarom izvodljive samo šestarom. Knjiga *Euclides Danicus* bila je zaboravljena sve do 1928. godine kada su je Johannes Hjelmslev i Julius Pàl (pravim imenom Gyula Pàl) preveli na njemački jezik i izdali. Mohr je umro 1697. godine u Njemačkoj.

Također, u [11] je navedeno da je Lorenzo Mascheroni (1750.-1800.) talijanski matematičar i pjesnik, rođen u blizini Bergama u pokrajini Lombardija. Kao mlad se zaredio za svećenika, bio je profesor grčkog i poezije u Bergamu, a matematiku je otkrio kasno. Nakon studija je radio kao profesor algebre i geometrije u Paviji. Osim navedenog, bavio se fizikom i matematičkom analizom, a po njemu je naziv dobila sljedeća konstanta:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = 0.57721566...$$

Ipak, njegov je najveći doprinos matematici u tzv. geometriji šestara, a svoje je rezultate iz tog područja opisao u knjizi *Geometria del compasso* koja je objavljena 1797. u Paviji. U ovom je djelu Mascheroni dao svoj dokaz tvrdnje koju je dokazao i Mohr 125 godina prije njega. Mascheroni je umro u Parizu 1800. godine.

Budući da su Mohr i Mascheroni živjeli u različitim stoljećima, oboje su neovisno jedan o drugom dokazali isti teorem.

Poglavlje 2

Preslikavanja ravnine

Budući da će jedan od dva navedena dokaza Mohr-Mascheronijevog teorema uključivati preslikavanje ravnine pomoću inverzije, istaknut ćemo osnove teorije o inverziji, koja nam je potrebna za dokaz. Dokaz pomoću inverzije zahtijeva više znanja iz područja preslikavanja ravnine pa ga smatramo prikladnijim za višu matematiku.

2.1 Inverzija

Prije definicije inverzije definirat ćemo izometriju ravnine jer su temeljna preslikavanja ravnine upravo izometrije. Definicija izometrije ravnine prema [13] glasi:

Definicija 2.1.1. *Preslikavanje $f : M \to M$ je izometrija ravnine M ako vrijedi*

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B),\ \forall A, B \in M.$$

Izometrija ravnine preslikava, primjerice, pravce u pravce, a kružnice u kružnice. Inverzija je preslikavanje koje može preslikavati pravce u pravce, kružnice u kružnice, ali također može preslikati i pravac u kružnicu, odnosno, kružnicu u pravac. Definirajmo inverziju prema [13]:

Definicija 2.1.2. *Neka je M ravnina i $O \in M$ čvrsta točka, a $R > 0$ zadani pozitivan broj. Preslikavanje*

$$\mathcal{I}_o : M \setminus \{O\} \to M \setminus \{O\},\ T \mapsto T' = \mathcal{I}_o(T),$$

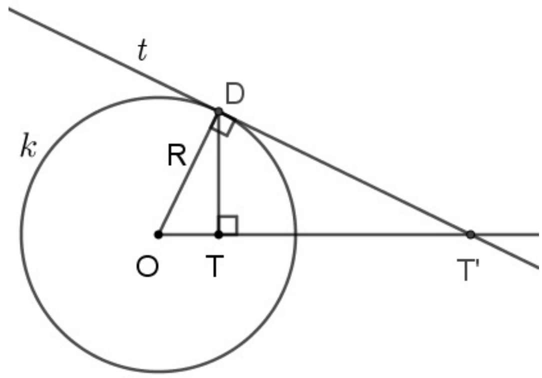
zove se inverzija s centrom O i radijusom $R > 0$, ako su točke O, T i T' kolinearne, T i T' s iste strane točke O i ako vrijedi

$$|OT| \cdot |OT'| = R^2.$$

Kružnica $k = k(O, R)$ se zove kružnica inverzije $\mathcal{I}_o$.

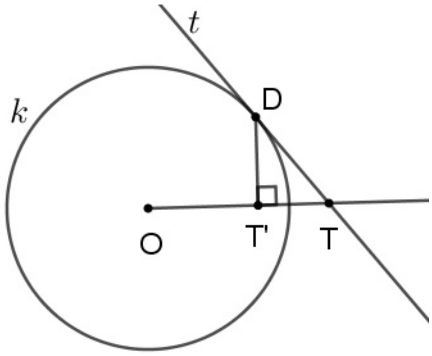
Jedine fiksne točke inverzije $\mathcal{I}_o$ su sve točke kružnice inverzije i ta je inverzija potpuno određena s centrom O i radijusom R, što možemo zapisati kao $\mathcal{I}_o^R$. Objasnit ćemo kako se konstruira slika T' neke točke T koja nije na kružnici inverzije.

1. Neka je točka T unutar kružnice inverzije k. Slika T' točke T nalazit će se na polupravcu OT s početkom u točki O. Označimo s D sjecište kružnice k i okomice iz T na OT. Sada konstruirajmo tangentu t u D na k. Presjek tangente t i polupravca OT je točka T', odnosno slika točke T (kao na slici).



   T' je doista točka pridružena po inverziji točki T jer zbog sličnosti trokuta $\triangle OTD$ i $\triangle OT'D$ vrijedi omjer:
$$\frac{|OT'|}{R} = \frac{R}{|OT|}$$
   iz čega slijedi
$$|OT| \cdot |OT'| = R^2.$$

2. Neka je točka T izvan kružnice k. Iz točke T povucimo tangentu t na kružnicu k i diralište tangente i kružnice označimo s D. Slika T' točke T dobivena je presjekom polupravca OT s početkom u O i okomice iz D na OT.



I u ovom slučaju se dobije da vrijedi

$$|OT| \cdot |OT'| = R^2.$$

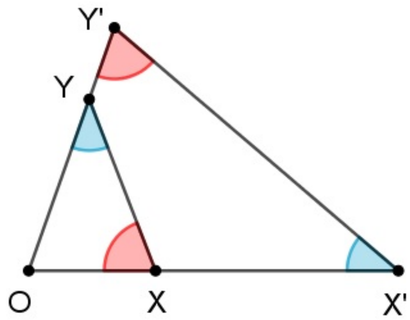
Primijetimo da se unutrašnjost kružnice k inverzijom preslikava u njenu vanjštinu, kao što se vanjština kružnice inverzijom preslikava u njenu unutrašnjost.

Dokazat ćemo prema [13] dvije propozicije vezane uz preslikavanje pravca u kružnicu i obratno. Za dokaze tih propozicija trebat će nam sljedeća propozicija.

Propozicija 2.1.3. *Neka su X, X' i Y, Y' parovi pridruženih točaka pri inverziji $\mathcal{I}_o = \mathcal{I}_o^R$. Tada vrijedi*

$$\sphericalangle OXY = \sphericalangle OY'X' \text{ i } \sphericalangle OYX = \sphericalangle OX'Y'.$$

Dokaz. Na slici označimo dane kutove.



Budući da su točke X, X' i Y, Y' pridružene točke inverzije $\mathcal{I}_o$, po definiciji inverzije za njih vrijedi

$$|OX| \cdot |OX'| = R^2$$

$$|OY| \cdot |OY'| = R^2.$$

Izjednačavanjem ovih dviju jednakosti dobivamo

$$|OX| \cdot |OX'| = |OY| \cdot |OY'|$$

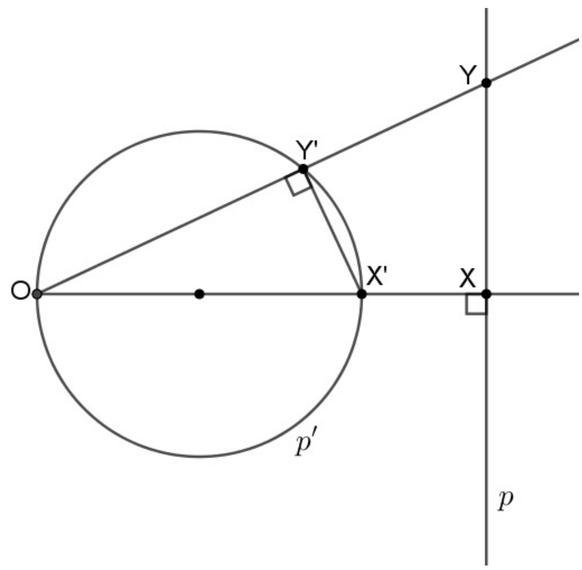
odnosno

$$|OX| : |OY| = |OY'| : |OX'|.$$

Uočimo da trokuti $\triangle OXY$ i $\triangle OY'X'$ imaju proporcionalne odgovarajuće stranice i zajednički kut u vrhu O pa po SKS poučku o sličnosti trokuta slijedi da su ti trokuti slični. Sada iz sličnosti tih trokuta slijedi tvrdnja koju smo trebali i dokazati, tj. $\sphericalangle OXY = \sphericalangle OY'X'$ i $\sphericalangle OYX = \sphericalangle OX'Y'$. □

Propozicija 2.1.4. *Pravac p koji ne prolazi centrom O inverzije $\mathcal{I}_o$ preslikava se u kružnicu kroz O. $\mathcal{I}_o(p)$ je kružnica kroz O, ali bez točke O.*

Dokaz. Neka je p pravac u ravnini M koji ne prolazi točkom O. Neka je X nožište okomice iz točke O na pravac p, a $X' = \mathcal{I}_o(X)$, tj. inverzna slika točke X. Neka je Y bilo koja točka pravca p, a $Y' = \mathcal{I}_o(Y)$ njoj inverzna točka.

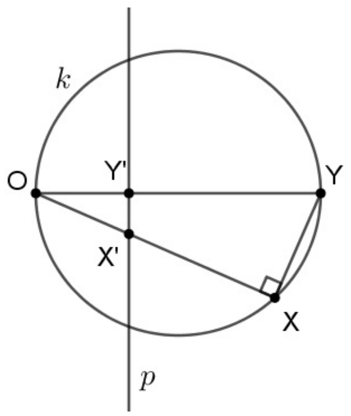


Kako su X, X' i Y, Y' parovi pridruženih točaka pri inverziji $\mathcal{I}_o$, po propoziciji 2.1.3 zaključujemo da vrijedi $\sphericalangle OXY = \sphericalangle OY'X' = 90°$. Sad po Talesovom teoremu o obodnom kutu nad promjerom kružnice (teorem 1.2.1) zaključujemo da se točka Y' nalazi na kružnici p' kojoj je promjer dužina $\overline{OX'}$. Dakle, svaka točka pravca p se preslikava u točku kružnice p', odnosno pravac se preslikava u kružnicu po inverziji ravnine $\mathcal{I}_o(X)$. Tvrdnja slijedi zbog bijektivnosti inverzije $\mathcal{I}_o$. □

Propozicija 2.1.5. *Neka je k kružnica u ravnini M. Ako k prolazi centrom O inverzije $\mathcal{I}_o$, onda je slika $\mathcal{I}_o(k)$ pravac koje ne prolazi točkom O. Ako k ne prolazi centrom O, onda je slika $\mathcal{I}_o(k)$ kružnica koja ne prolazi točkom O.*

Dokaz. Dokaz ćemo podijeliti u dva dijela kako je navedno i u iskazu propozicije.

1. Neka je k kružnica koja prolazi centrom O i $\overline{OY}$ promjer kružnice k. Neka je X bilo koja točka te kružnice, a neka su $X' = \mathcal{I}_o(X)$ i $Y' = \mathcal{I}_o(Y)$ inverzne slike točaka X i Y. Neka je p pravac koji prolazi točkom Y' i koji je okomit na pravac OY. Trebamo dokazati da je $p = \mathcal{I}_o(k)$. Uočimo da je $\sphericalangle YXO = 90°$. Kako su X, X' i Y, Y'

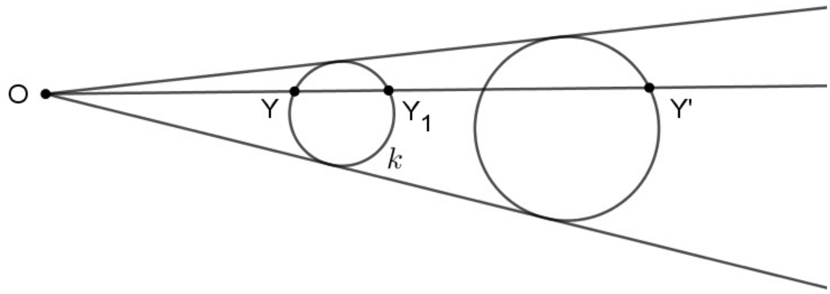


parovi pridruženih točaka pri inverziji $\mathcal{I}_o$, po propoziciji 2.1.3 zaključujemo i da je $\sphericalangle OY'X' = 90°$ pa je točka X' na pravcu p zbog okomitosti pravca p na OY. Budući da se svaka točka kružnice k po inverziji preslika u točku na pravcu p, zaključujemo da je $\mathcal{I}_o(k) \subseteq p$. Zbog bijektivnosti inverzije $\mathcal{I}_o$, slijedi da je $\mathcal{I}_o(k) = p$.

2. Neka je k kružnica koja ne prolazi centrom O, neka je točka Y na kružnici k i $Y' = \mathcal{I}_o(Y)$. Kako je Y, Y' par pridruženih točaka, po definiciji inverzije vrijedi

$$|OY| \cdot |OY'| = R^2. \tag{2.1}$$

Neka je sada točka Y_1 drugo sjecište pravca OY i kružnice k.



Promotrimo potenciju točke O s obzirom na kružnicu k. Tada dobivamo

$$|OY| \cdot |OY_1| = r^2, \tag{2.2}$$

gdje je r radijus kružnice k.
Izrazimo li $|OY|$ iz jednadžbi 2.1 i 2.2 i izjednačimo li ih, slijedi

$$\frac{R^2}{|OY'|} = \frac{r^2}{|OY_1|}$$

odnosno

$$|OY'| = \left(\frac{R}{r}\right)^2 |OY_1|.$$

Uočavamao da je točka Y' slika točke Y_1 pri homotetiji s centrom u O i konstantom homotetije $\left(\frac{R}{r}\right)^2$. Budući da homotetija preslikava kružnicu u kružnicu, tvrdnja je dokazana.

$\square$

Poglavlje 3

Geometrijske konstrukcije

Kao što je spomenuto ranije, geometrijske se konstrukcije u euklidskoj geometriji provode ravnalom i šestarom. Ravnalo označava jednobridno ravnalo bez istaknutih jedinica mjere kojim možemo povući spojnicu dviju različitih točaka, tj. konstruirati pravac kroz dvije različite točke. Također, smatramo da znamo odrediti sjecište dvaju pravaca pri čemu je svaki od tih pravaca zadan s dvije točke, a ravnalom znamo nacrtati spojnice tih točaka. Šestar označava šestar kojim se oko svake točke može opisati kružnica s po volji zadanim polumjerom.

U geometriji, u kojoj konstrukcije izvodimo ravnalom i šestarom, pretpostavljamo da znamo odrediti presjek pravca zadanog s dvije točke i kružnice određene središtem i polumjerom tako da vizualno odredimo njihova sjecišta nakon što ravnalom nacrtamo pravac kroz zadane točke, a šestarom kružnicu oko zadanog središta zadanog polumjera. Također, točka je konstruirana ako je dobivena kao sjecište dvaju pravaca, pravca i kružnice ili kao sjecište dviju kružnica.

Budući da smo u odjeljku 1.2 napravili kratki povijeni pregled geometrije, a u ovom odjeljku opisali značajke konstrukcija u euklidskoj geometriji, u idućem ćemo poglavlju iskazati i dokazati Mohr-Mascheronijev teorem.

Poglavlje 4

Mohr-Mascheronijev teorem

Teorem 4.0.1 (**Mohr-Mascheronijev teorem**). *Svaka geometrijska konstrukcija koja se može izvesti ravnalom i šestarom izvodljiva je i samo šestarom.*

Primjećujemo da ne možemo konstruirati pravce budući da se ne može koristiti ravnalo u ovim konstrukcijama. Međutim, neki pravac smatramo konstruiranim ako su nam poznate njegove dvije točke.

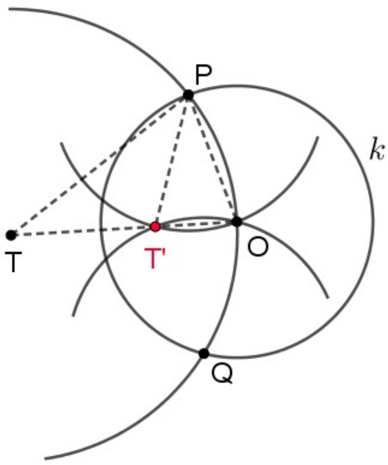
4.1 Dokaz pomoću inverzije

Za dokaz Mohr-Mascheronijevog teorema [13] pomoću inverzije bit će potrebne dvije leme iz [13]. Stoga ćemo prvo dokazati te dvije leme da bismo mogli rezultate tih lema upotrijebiti za dokaz teorema 4.0.1.

Lema 4.1.1. *Ako je zadana inverzija svojim centrom O i kružnicom inverzije k, onda je za svaku točku $T \neq O$ ravnine moguće samo šestarom konstruirati njezinu sliku T'.*

Dokaz. Dokaz ćemo podijeliti u tri dijela. U prvom ćemo promatrati točku T izvan kružnice inverzije, u drugom točku T unutar kružnice inverzije koja je bliža kružnici nego središtu, a u trećem točku T unutar kružnice bližu središtu kružnice.

1. Neka je zadana inverzija s centrom O i kružnicom inverzije k i neka je točka T izvan kružnice. Slika T' točke T može se konstruirati na ovaj način:
   Oko točke T se opiše kružnica koja prolazi točkom O i siječe kružnicu k u točkama P i Q. Zatim opišemo kružnice oko točaka P i Q koje prolaze točkom O. Kako se kružnice oko točaka P i Q sijeku u točki O i u još jednoj točki, ta je druga točka tražena točka T' (kao na slici). Točka T' je inverzna slika od točke T.



Po definiciji inverzije mora vrijediti da su točke O, T i T' kolinearne, T i T' moraju biti s iste strane točke O i mora vrijediti

$$|OT| \cdot |OT'| = R^2.$$

Uočavamo da su točke O, T i T' kolinearne i da točke T i T' leže s iste strane točke O. Potrebno je još pokazati da vrijedi jednakost. Trokuti $\triangle OT'P$ i $\triangle OPT$ su slični jer su jednakokračni i jer imaju zajednički kut pri vrhu O. Stoga se podudaraju i u ostalim kutovima. Zbog sličnosti vrijedi:

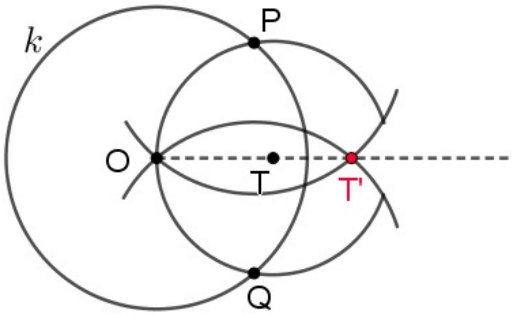
$$|OT| : |OP| = |OP| : |OT'|$$
$$|OT| \cdot |OT'| = |OP|^2$$
$$|OT| \cdot |OT'| = R^2$$

jer je P točka na kružnici inverzije radijusa R. Zaključujemo da su točke T i T' doista pridružene točke.

2. Neka je u ovom slučaju T unutar kruga, bliže kružnici nego središtu, tj.

$$|OT| > \frac{r}{2}.$$

Trebamo konstruirati točku T' kao u prethodnom dijelu:
Oko točke T se opiše kružnica koje prolazi točkom O i siječe kružnicu k u točkama P i Q. Zatim opišemo kružnice oko točaka P i Q koje prolaze točkom O. Kako se



kružnice oko točaka P i Q sijeku u točki O i u još jednoj točki, ta je druga točka tražena točka T' (kao na slici).

Kao i u 1. dijelu, zbog sličnosti trokuta $\triangle OT'P$ i $\triangle OPT$ vrijedi:

$$|OT| : |OP| = |OP| : |OT'|$$
$$|OT| \cdot |OT'| = |OP|^2$$
$$|OT| \cdot |OT'| = R^2$$

pa su T i T' pridružene točke.

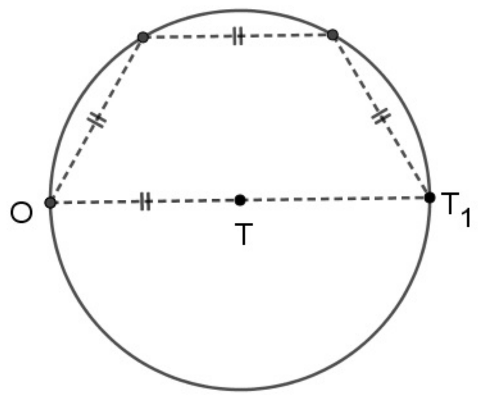
3. Neka je u ovom slučaju T unutar kruga, bliže središtu kružnice, tj.

$$|OT| \leq \frac{r}{2}.$$

Ako bi u ovom koraku proveli konstrukciju kao i u prva dva dijela, kružnica sa središtem u točki T ne bi sjekla kružnicu sa središtem u točki O pa je potrebno provesti drugačiju konstrukciju:
Konstruirajmo na polupravcu OT s početkom u točki O točku T_1 tako da vrijedi

$$|OT_1| = 2 \cdot |OT|.$$

Pomoću šestara možemo provesti konstrukciju kao na slici.



Ovaj postupak ponavljamo kako bi konstruirali točke $T_2, T_3, ..., T_n$ na polupravcu OT takve da vrijedi:

$$|OT_2| = 3 \cdot |OT|, ..., |OT_n| = (n+1) \cdot |OT|$$

i takve da vrijedi

$$|OT_n| > \frac{r}{2}.$$

To je moguće učiniti samo šestarom, a takav n postoji zbog posljedice Arhimedovog aksioma. Sada možemo prema 2. konstruirati točku T'_n jer vrijedi

$$|OT_n| > \frac{r}{2}.$$

Za tu točku vrijedi

$$|OT_n| \cdot |OT'_n| = k^2, \ |OT| \cdot |OT'| = k^2$$

pa slijedi

$$|OT_n| \cdot |OT'_n| = |OT| \cdot |OT'|.$$

Budući da je

$$|OT_n| = (n+1) \cdot |OT|,$$

uvrštavanjem u prethodnu jednakost dobivamo

$$|OT'| = (n+1) \cdot |OT'_n|.$$

Drugim riječima, T' dobijemo tako da od točke O $(n+1)$-puta nanesemo $|OT'_n|$.

□

Propozicija 4.1.2 (Arhimedov aksiom). *Za $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$, tako da je $na > b$.*

Geometrijska interpretacija Arhimedovog aksioma je ta da ćemo nanošenjem male dužine na veliku dužinu jednom premašiti veliku.

Lema 4.1.3. *Neka su A, B, C tri nekolinearne točke. Moguće je konstruirati samo šestarom središte kružnice koja prolazi tim točkama.*

Dokaz. Neka su zadane točke A, B i C. Uzmimo inverziju s centrom u A takvu da kružnica inverzije k prolazi kroz točku B. Sliku C' točke C možemo konstruirati kao u dokazu leme 4.1.1. Za pravac l', koji prolazi točkama B i C', vrijedi da ga navedena inverzija preslikava u traženu kružnicu. Sliku l tog pravca l' možemo naći tako da odredimo središte kružnice S u koju se preslikava pravac l'. Središte S te kružnice je inverzna slika zrcalne točke S_1' točke A s obzirom na l'. Konstrukcijom iz dokaza leme 4.1.1 nađemo točku $S = S_1''$ i S je središte tražene kružnice. □

Konačno možemo prijeći na dokazivanje Mohr-Mascheronijevog teorema (teorem 4.0.1):

Dokaz. Svaka se geometrijska konstrukcija, izvodljiva ravnalom i šestarom, svodi na tri temeljne konstrukcije:

1. Sjecište dvaju pravaca.
2. Sjecište pravca i kružnice.
3. Sjecište dviju kružnica.

Da bi vrijedila tvrdnja iz teorema, potrebno je dokazati da je svaka od navedenih temeljnih konstrukcija izvodljiva samo šestarom. Očito je da je konstrukcija pod brojem 3. izvodljiva samo šestarom budući da se kružnice konstruiraju samo šestarom. Dokažimo sada da se konstrukcije pod rednim brojevima 1. i 2. mogu konstruirati samo šestarom. Pretpostavljamo da je pravac zadan svojim dvjema točkama. Dokazali smo u lemama 4.1.1 i 4.1.3 da su sljedeće dvije konstrukcije izvodljive samo šestarom:

K_1. Konstrukcija inverzne slike točke.

K_2. Konstrukcija središta kružnice koja je zadana sa svoje tri točke.

Prema tome, da bi do kraja dokazali teorem, potrebno je pokazati da su u ovim slučajevima temeljne konstrukcije 1. i 2. izvodljive samo šestarom:

1. Neka su zadana dva pravca p i q pri čemu je svaki određen s po dvije točke. Neka je pravac p zadan s točkama A i B, a pravac q s točkama C i D. Odaberimo točku O koja ne leži na tim pravcima. Odredimo inverziju s centrom u O bilo kojeg polumjera. Pravci p i q ne prolaze centrom inverzije pa su njihove slike kružnice koje prolaze tim centrom. Po K_1 možemo odrediti točke A', B', C' i D', tj. inverzne točke točkama A, B, C i D. Po K_2 možemo odrediti kružnicu p' koja prolazi kroz tri točke O, A' i B'. Analogno, po K_2 odredimo kružnicu q' koja prolazi kroz tri točke O, C' i D'. Sada možemo odrediti sjecište T' kružnica p' i q', a primjenom K_1 nađemo sjecište T početnih pravaca p i q.

2. Neka je pravac p zadan točkama A i B, a kružnica k s točkama C, D i E. Odaberimo točku O koja ne leži niti na pravcu p niti na kružnici k. Ponovno odredimo inverziju s centrom u O i polumjerom po volji odabranim. Po K_1 možemo odrediti točke A', B', C', D' i E', tj. inverzne točke točkama A, B, C, D i E. Po K_2 odredimo kružnicu p' koja prolazi točkama O, A' i B'. Također, po K_2 odredimo i kružnicu k' koja prolazi točkama C', D' i E'. Sada po K_1 odredimo sjecišta T_1 i T_2 početnog pravca p i početne kružnice k preslikavanjem sjecišta T_1' i T_2' dobivenih kružnica p' i k'.

$\square$

4.2 Direktni dokaz

Kao što smo već rekli, dokaz ćemo provesti na dva načina. Osim pomoću inverzije, teorem ćemo dokazati i direktno. Za direktni dokaz nije potrebno dodatno znanje, kao što je slučaj s dokazom pomoću inverzije. Nadalje, postupak koji provodimo u drugom dokazu je vrlo sličan postupku koji provodimo prilikom samog konstruiranja isključivo šestarom. Zbog toga je dobro znati dokazati Mohr-Mascheronijev teorem i na ovaj način.

Dokaz. Ovaj dokaz ćemo provesti prema [12] i [8] tako da konstruiramo samo pomoću šestara sljedeća sjecišta:

a) sjecišta pravca i kružnice k pri čemu taj pravac ne prolazi središtem O kružnice k,

b) sjecišta pravca i kružnice k pri čemu taj pravac prolazi središtem O kružnice k,

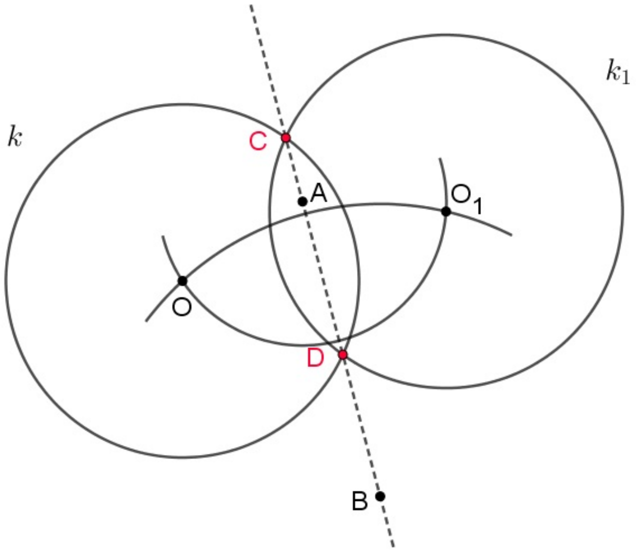
c) sjecište dvaju neparalelnih pravaca pri čemu oni nisu međusobno okomiti,

d) sjecište dvaju pravaca pri čemu su oni međusobno okomiti,

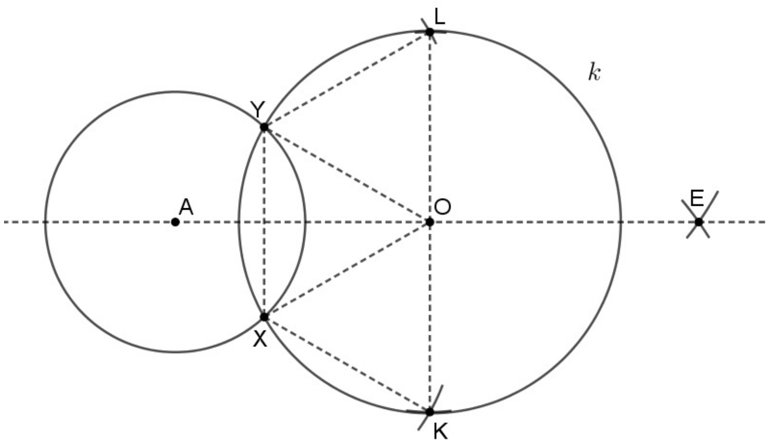
e) sjecište dviju kružnica.

Uočimo da šestarom znamo odrediti presjek dviju kružnica pa za $e)$ slučaj nije potrebno provoditi dokaz. Preostaje nam provesti dokaz za $a) - d)$. Prilikom izvođenja ovih konstrukcija, provodit ćemo manje konstrukcije koje ćemo putem objašnjavati.

a) Neka su dani pravac AB i kružnica $k(O,r)$ pri čemu pravac AB ne prolazi točkom O. Odredimo točku O_1 simetričnu točki O s obzirom na pravac AB. Točku O_1 odredimo kao presjek kružnice s centrom u A koja prolazi kroz O i kružnice s centrom u B koja prolazi kroz O. Sada konstruirajmo kružnicu k_1 sa središtem u O_1 s polumjerom jednakim polumjeru kružnice k. Zbog simetrije s obzirom na pravac AB, sjecišta C i D kružnica k i k_1 su upravo tražena sjecišta kružnice k i pravca AB, kao što je prikazano na slici.



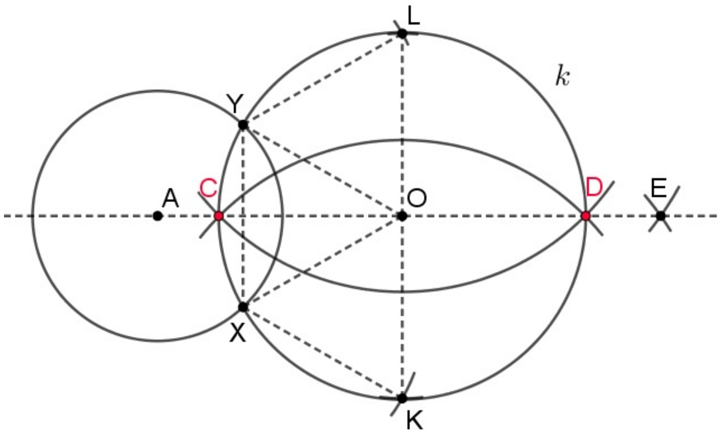
b) Neka su dani pravac i kružnica $k(O, r)$ pri čemu pravac prolazi točkom O. Budući da u ovom slučaju pravac prolazi središtem kružnice, označimo taj pravac s AO. Konstruirajmo kružnicu sa središtem u A radijusa po volji odabranog tako da siječe zadanu kružnicu k u točkama X i Y, kao što je prikazano na slici.



Potom konstruirajmo polovišta C i D lukova $\overset{\frown}{XY}$ na sljedeći način: konstruirajmo točke K i L tako da su $XYKO$ i $XYLO$ paralelogrami. K se dobije presjekom kružnice oko O radijusa $|XY|$ i kružnice oko X radijusa $|YO|$. Točku L dobijemo na analogan način. Kako je $KO \parallel XY$ i $OL \parallel XY$, onda su točke K, L i O kolinearne i vrijedi

$$|XY| = |KO| = |OL|.$$

Konstruirajmo sada kružnice sa središtima u K i L kojima su radijusi $|KY|$. One se sijeku u točki E, a zbog simetričnosti konstrukcije zaključujemo da je $EO \perp KL$. Zatim konstruirajmo kružnice ponovno sa središtima u točkama K i L radijusa $|OE|$. One se sijeku u točkama C i D, koje su ujedno i tražena polovišta lukova $\widehat{XY}$.



Pokažimo da je tako konstruirana točka C upravo polovište luka $\widehat{XY}$. Dokaz za točku D je analogan. Primjenjujući kosinusov poučak imamo sljedeće:

$$|KY|^2 = |KO|^2 + |YO|^2 - 2|KO| \cdot |YO| \cdot \cos \sphericalangle KOY.$$

Primjenjujući trigonometriju pravokutnog trokuta, vrijedi sljedeće:

$$\frac{\frac{1}{2}|XY|}{|YO|} = \cos \sphericalangle OYX$$

Ako prethodni red pomnožimo s 2 i primijenimo $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$, dobivamo sljedeće:

$$\frac{|XY|}{|YO|} = -2 \cdot \cos \sphericalangle KOY.$$

Otprije znamo da je $|XY| = |KO|$ i $|XO| = |YO|$, dobivamo:

$$|KY|^2 = |XO|^2 + 2 \cdot |KO|^2. \tag{4.1}$$

Kako je $|EO| \perp |KL|$, vrijedi Pitagorin poučak, odnosno

$$|KE|^2 = |KO|^2 + |OE|^2. \tag{4.2}$$

Zbog konstrukcija kružnica sa središtima u K, L i radijusa $|OE|$, vrijedi $|OE| = |KC|$, a vrijedi i $|KE| = |KY|$ pa dobivamo u (4.2)

$$|KY|^2 = |KO|^2 + |KC|^2. \tag{4.3}$$

Iz (4.1) i (4.3) slijedi:

$$|KO|^2 + |KC|^2 = |XO|^2 + 2|KO|^2$$

$$|KC|^2 = |XO|^2 + |KO|^2 \tag{4.4}$$

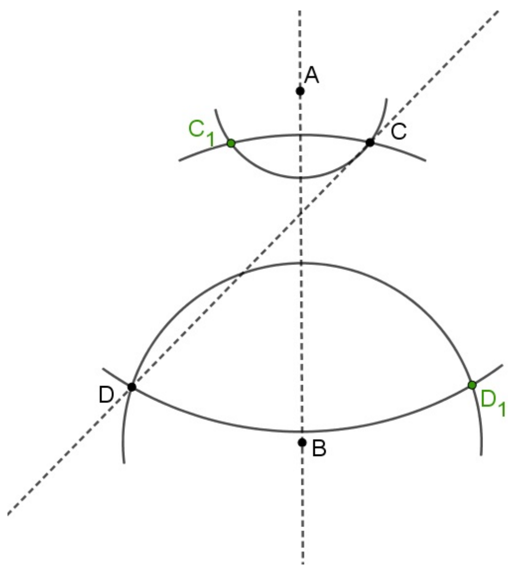
Ponovno primjenjujući Pitagorin poučak dobivamo:

$$|KC|^2 = |KO|^2 + |OC|^2. \tag{4.5}$$

Iz (4.4) i (4.5) slijedi: $|XO| = |OC|$, što znači da točka C leži na luku $\overset{\frown}{XY}$. Zbog sukladnosti kutova $\sphericalangle XOK = \sphericalangle LOY$, vrijedi da je i $\sphericalangle COX = \sphericalangle YOC$ pa je C polovište luka $\overset{\frown}{XY}$.

Sjecišta pravca i kružnice iz *b*) dijela uvijek postoje, dok to nije slučaj u *a*) dijelu dokaza.

c) Prema [7]: Neka su zadana dva neparalelna pravca AB i CD koji nisu međusobno okomiti. Konstruirajmo točke C_1 i D_1 koje su simetrične točkama C i D s obzirom na pravac AB (kao na slici).



Opišemo kružnice $(D_1, |CC_1|)$ i $(C, |CD|)$ i njihov presjek označimo s E. Označimo s X traženu točku presjeka. Želimo naći tu točku X tako da vrijedi

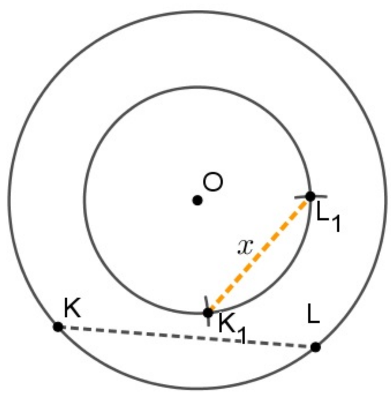
$$|DE| : |DD_1| = |C_1D_1| : x,$$

pri čemu je $x = |XD_1|$. Nađimo duljinu $x = |XD_1|$. Promotrimo dva slučaja:

- $|C_1D_1| < 2|DE|$: Konstruirajmo koncentrične kružnice oko odabrane točke O polumjera $|DE|$ i $|DD_1|$. Odaberemo proizvoljnu točku K na kružnici $(O, |DE|)$ i konstruiramo tetivu $\overline{KL}$ duljine $|C_1D_1|$. Opišemo dvije kružnice sa središtima u K i L proizvoljnog polumjera tako da sijeku kružnicu $(O, |DD_1|)$ u točkama K_1 i L_1. Dobili smo traženu dužinu

$$x = |K_1L_1| = |XD_1|,$$

  što vidimo i na slici.



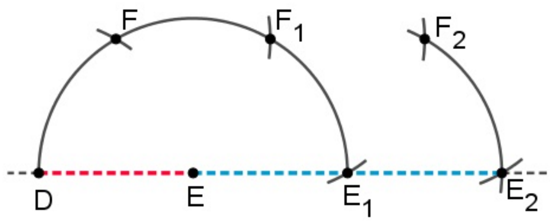
  Pokažimo da je $\overline{K_1L_1}$ tražena dužina. Trokuti $\triangle KOK_1$ i $\triangle LOL_1$ su sukladni po SKS poučku o sukladnosti trokuta. Zato je $\sphericalangle KOK_1 = \sphericalangle LOL_1$. Tada je i $\sphericalangle KOL = \sphericalangle K_1OL_1$ pa su trokuti $\triangle KOL$ i $\triangle K_1OL_1$ slični po SKS poučku o sličnosti trokuta. Tada vrijedi da je omjer odgovarajućih ostalih stranica jednak, tj.

$$|KO| : |K_1O| = |KL| : |K_1L_1|$$

  pa je $\overline{K_1L_1}$ tražena dužina.

- $|C_1D_1| \geqslant 2|DE|$: Ako je $|DD_1| < 2|DE|$ koristimo konstrukciju kao u prethodnom slučaju. U protivnom, prvo konstruiramo dužinu duljine $n|DE|$ pri čemu je

n toliki da vrijedi $|C_1D_1| < 2n|DE|$ (ili $|DD_1| < 2n|DE|$). Dužinu duljine $n|DE|$ konstruiramo ovako: Opišemo kružnicu sa središtem u E polumjera $|DE|$. Presiječemo ju kružnicom sa središtem u D istog polumjera. Sjecište označimo točkom F. Točka F_1 je sjecište kružnica sa središtima u E i F polumjera $|DE|$. Točka E_1, koja je kolinearna s točkama D i E, je sjecište kružnica sa središtima u E i F_1 polumjera $|DE|$. Točka F_2 je sjecište kružnica sa središtima u E_1 i F_1 polumjera $|DE|$, a E_2 je sjecište kružnica sa središtima u E_1 i F_2 polumjera $|DE|$. Uočimo da je $|DE_1| = 2|DE|$, a $|DE_2| = 3|DE|$, što vidimo i na slici.



Stoga, ako nastavimo ponavljati opisani postupak, dobit ćemo točku E_{n-1} tako da vrijedi $|DE_{n-1}| = n|DE|$ što smo i htjeli dobiti.

Nastavimo sada provoditi konstrukciju kako bi našli x. Konstruiramo dužinu $\overline{K_2L_2}$ duljine y tako da vrijedi:

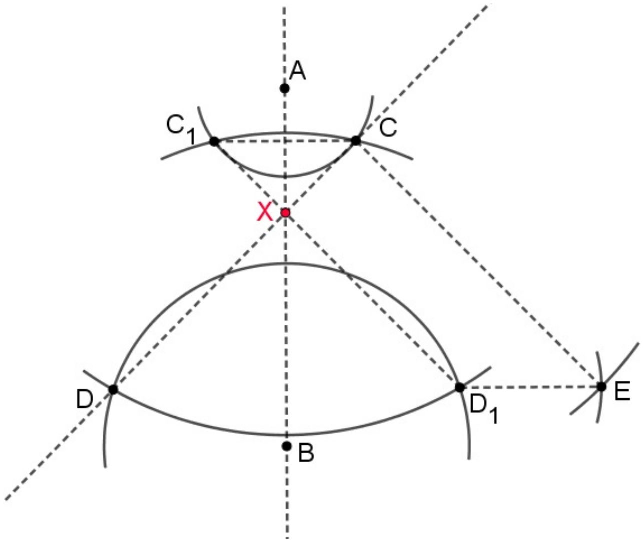
$$n|DE| : |DD_1| = |C_1D_1| : y$$

ili

$$|DE| : |DD_1| = |C_1D_1| : ny.$$

Tražena dužina duljine x je dužina duljine ny koju konstruiramo analogno kao $n|DE|$.

Sada, kada smo našli x, vratimo se na glavnu konstrukciju. Opišimo kružnice (D, x) i (D_1, x). Njihov je presjek točka X, što vidimo na slici.



Pokažimo da je sjecište X takvo da vrijedi $|XD_1| = x$. Kako je točka C_1 simetrična točki C, a točka D_1 simetrična točki D, onda je presjek pravaca AB i CD jednak presjeku pravaca CD i C_1D_1. Lik CED_1C_1 je paralelogram pa zbog $DE \parallel CC_1$ i $DD_1 \parallel CC_1$ točke D, D_1 i E leže na jednom pravcu. Zbog sličnosti trokuta $\triangle EDC$ i $\triangle D_1DX$ slijedi

$$|DE| : |DD_1| = |CE| : |D_1X|.$$

Kako je

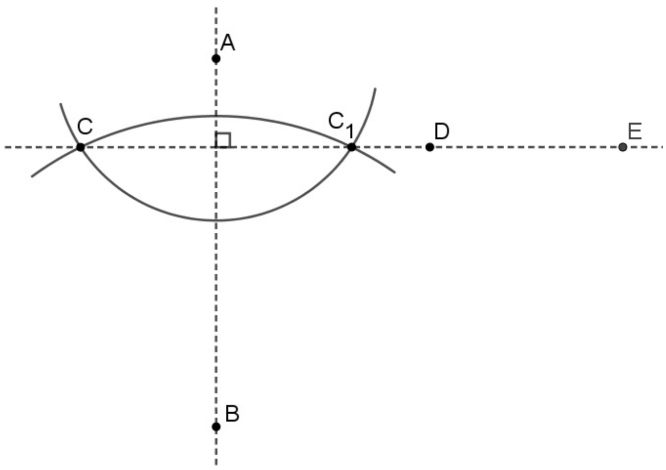
$$|CD| = |CE| = |C_1D_1|,$$

onda je $x = |XD_1|$ i vrijedi

$$|DE| : |DD_1| = |C_1D_1| : x.$$

d) Neka su AB i CD okomiti pravci. Konstruirajmo, postupkom kao u *a)* dijelu, točku C_1 simetričnu točki C s obzirom na pravac AB. Polovište X dužine $\overline{CC_1}$ je traženo sjecište danih okomitih pravaca, a konstruiramo ga ovako: Odredimo točku E tako da je

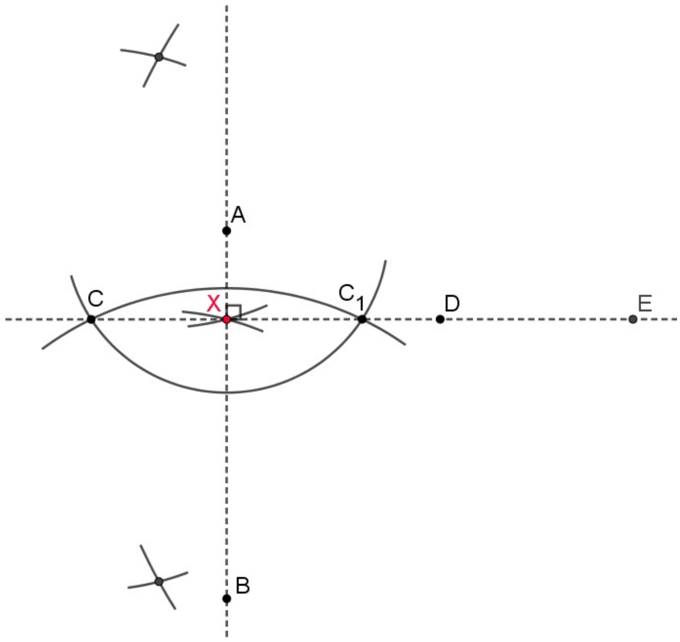
$$|CE| = 2|CC_1|.$$



Konstruirajmo kružnicu sa središtem u E, koja prolazi točkom C. Ona siječe kružnicu sa središtem u C, koja prolazi kroz točku C_1, u dvije točke. Kružnice sa središtem u dobivenim točkama, koje prolaze točkom C, sijeku se u točki X i vrijedi

$$|CC_1| = 2|CX|,$$

što vidimo na slici.



S ovim je dokazan Mohr-Mascheronijev teorem.

$\square$

Poglavlje 5

Primjeri konstrukcija samo šestarom

Nakon što smo dokazali Mohr-Mascheronijev teorem na dva različita načina, u ovom ćemo se poglavlju baviti konkretnim primjerima koje možemo konstruirati koristeći samo šestar.

Budući da je svrha ovog rada i primjena Mohr-Mascheronijevih konstrukcija u školskoj matematici, dobro je reći kako učenici provode geometrijske konstrukcije u školi. Učenici se tijekom svog obrazovanja susreću s tri metode koje koriste kako bi dobili crteže na papiru. Jedna od metoda je skiciranje, gdje učenici prostoručno dolaze do crteža. Druga je metoda crtanja koja dozvoljava upotrebu različitih pomagala (ravnala, trokuta, šestara, kutomjera...). Na kraju, javlja se i metoda konstruiranja koja zahtijeva da crtež nastaje upotrebom samo jednobridnog ravnala i šestara. Uočavamo da je svaka od ovih metoda složenija budući da dozvoljava sve uži skup pomagala kojim možemo provesti konstrukciju. Redukcijom zadnjeg skupa geometrijskih pomagala (ravnala i šestara) na skup koji sadrži samo šestar, dolazimo do Mohr-Mascheronijevih konstrukcija. Sada je vidljivo da je trenutna školska geometrija dobra podloga na kojoj učenici, primjerice na dodatnoj nastavi, mogu graditi svoje znanje o konstrukcijama samo šestarom. Pogledajmo jedan primjer prikladan za školu. Ovaj ćemo primjer zapisati kao aktivnost koja se može provesti na nastavnom satu, koji nije u sustavu redovne nastave. U idućem ćemo odjeljku detaljnije opisati kako nastavnici mogu obraditi ovu nastavnu temu u školi, a ovdje ćemo se zadržati na samoj konstrukciji koju bi učenici trebali provesti u sljedećem primjeru.

Primjer 5.0.1 (**Konstrukcija pravokutnika**). *Neka su zadane duljine dužina $a = 5$ cm i $b = 3$ cm. Konstruirajmo pravokutnik $ABCD$ kojemu su zadane duljine stranica.*

Aktivnost: Konstrukcija pravokutnika koristeći samo šestar.

Cilj aktivnosti: Učenici će na konkretnom primjeru primijeniti i uvježbati naučene postupke geometrijskih konstrukcija koristeći isključivo šestar.

Tip aktivnosti: Aktivnost vježbe nastavnog sadržaja.

Nastavni oblik: Diferencirana nastava u obliku rada u paru.

Nastavna metoda:

- prema izvorima znanja: metoda rada s tekstom, metoda dijaloga, metoda konstruiranja

- prema oblicima zaključivanja: heuristička metoda, metoda analogije, metoda analize i sinteze

Potrebni materijal:

- ploča, kreda, bilježnice, pribor za pisanje, matematički pribor za crtanje

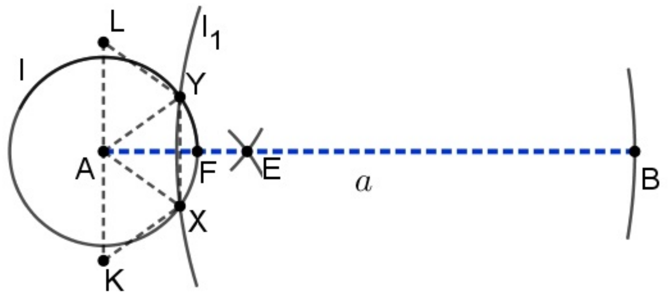
Tijek aktivnosti:

Pretpostavimo da su se učenici prije ove aktivnosti upoznali s načinom na koji se provodi konstrukcija samo šestarom. Konkretno, pretpostavimo da su učenici upoznati s tim da presjek dviju kružnica znamo odmah odrediti kada su nam poznate kružnice budući da je presjek vidljiv. Također, neka učenici znaju postupke potrebne za ovaj primjer koje provodimo za određivanje presjeka kružnice i pravca koji prolazi središtem kružnice. Postupci za ove konstrukcije opisani su u direktnom dokazu u odjeljku 4.2.

Nastavnik će pustiti učenike da u paru probaju riješiti dani primjer primjenjujući metode i postupke koji su potrebni kako bi konstrukciju proveli u potpunosti koristeći samo šestar. Dok učenici zajednički diskutiraju o svojim idejama i načinima na koji bi proveli konstrukciju, nastavnik će obilaziti po učionici i promatrati u kojem smjeru oni razmišljaju. Po potrebi će nastavnik reagirati i usmjeriti učenike ukoliko kod učenika uoči veće odstupanje od ispravnog načina razmišljanja ili kod provođenja konstrukcije. Također, nastavnik može pohvaliti uspjeh onih učenika koji bez njegove pomoći uspiju riješiti primjer. Nakon što učenici pokušaju riješiti primjer u paru, nastavnik će potaknuti učenike da iznesu svoje ideje, do kojih su došli zajednički diskutirajući u paru. Ostali se učenici mogu nadovezati i iznijeti razloge svojeg slaganja ili neslaganja s iznesenim idejama. Tijekom rasprave, provodit će se i konstrukcija na ploči. Nju će provoditi više učenika, po jedan učenik za svaki dio konstrukcije. Pogledajmo sada postupak konstruiranja kojim će učenici riješiti dani primjer.

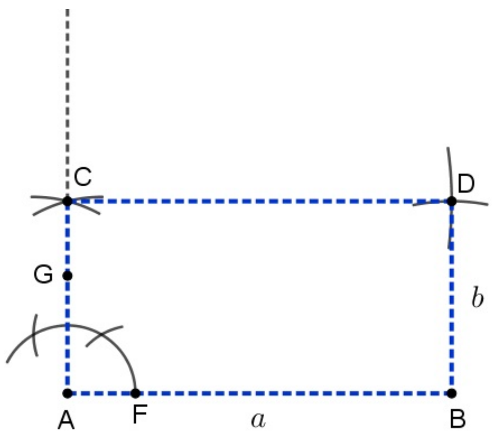
Rješenje: Odaberimo proizvoljno točku A i konstruirajmo kružnicu $k(A, 5)$. Odaberimo točku B na konstruiranoj kružnici. Zatim konstruirajmo šestarom pravi kut u točki A. Nanesemo kružnicu l bilo kojeg radijusa oko točke A. Trebamo odrediti presjek pravca AB i kružnice l. Budući da pravac AB prolazi središtem kružnice l, za konstrukciju presjeka koristimo b) dio iz direktnog dokaza iz odjeljka 4.2. Dakle, konstruirajmo kružnicu l_1 sa središtem u točki B radijusa takvog da kružnica l_1 siječe kružnicu l u točkama X i Y. Potom konstruiramo polovišta lukova $\overset{\frown}{XY}$. Neka su točke K i L takve da su $XKAY$ i $XALY$

paralelogrami. Točka K se dobije presjekom kružnice oko A radijusa $|XY|$ i kružnice oko X radijusa $|YA|$. Točku L konstruiramo na analogan način. Sada konstruiramo kružnice sa središtima u K i L kojima su radijusi $|KY|$, a njihov presjek označimo s točkom E. Presijecimo kružnice sa središtima u K i L radijusa $|AE|$. Njihov je presjek točka F, koja je ujedno presjek pravca AB i kružnice l.



Nastavimo konstrukciju pravog kuta u točki A. Konstruirajmo kružnicu l_2 sa središtem u točki F radijusa istog kao što je bila kružnica l. Konstruirajmo kružnicu l_3 oko presjeka kružnica l i l_2 istog radijusa. U presjeku kružnica l i l_3 konstruirajmo kružnicu l_4 istog radijusa. Presjek kružnica l_3 i l_4 je točka G kroz koju prolazi okomica na pravac AB.

Presjekom kružnice $k_1(A, 3)$ i kraka pravog kuta (pravca AG) iz vrha A dobivamo točku C. Postupak dolaženja do točke C je analogan postupku kojim smo odredili točku F. Točku D dobit ćemo presjekom kružnica $k_2(C, 5)$ i $k_3(B, 3)$, kao što je prikazano na slici.



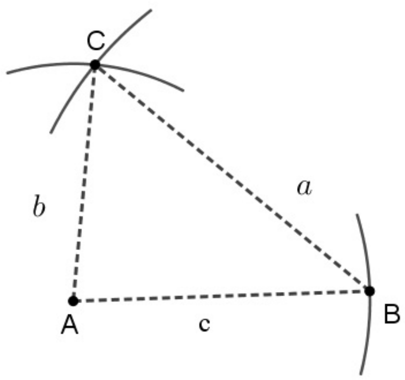
Stranica $\overline{AB}$ je duljine $a = 5$ cm po konstrukciji jer je B odabrana na kružnici k. Stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ su duljine $b = 3$ cm jer se točke C i D nalaze na kružnicama k_1 i k_3, a stranica $\overline{CD}$

je duga $a = 5$ cm jer je točka D na kružnici k_2. Radi se o pravokutniku jer smo u vrhu A konstruirali pravi kut, a ostali su unutarnji kutovi pravi jer su nasuprotne stranice sukladne, a onda i paralelne.

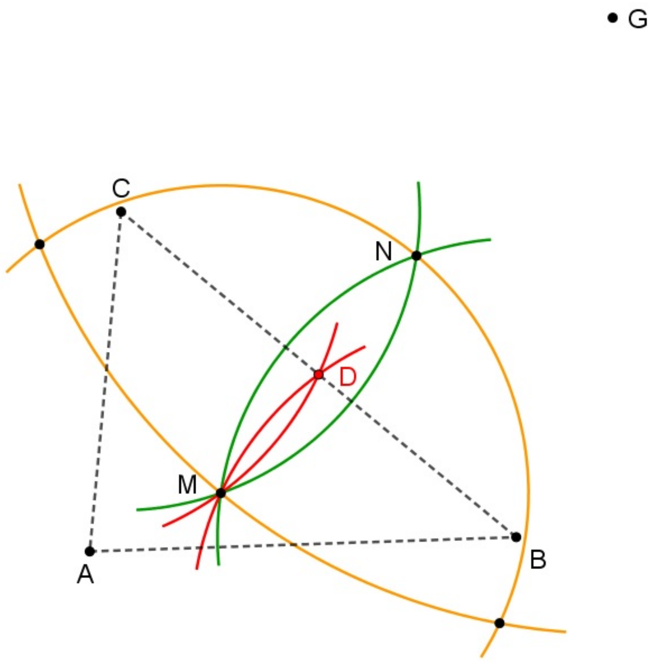
Ova je aktivnost ujedno i prilika za formativno vrednovanje jer nastavnik vrlo brzo može dobiti povratnu informaciju jesu li učenici usvojili nastavni sadržaj vezan uz Mohr-Mascheronijeve konstrukcije i primjenjuju li odgovarajuće postupke kako bi riješili konkretni problem koji se stavi pred njih. Također, učenici u diskusiji s ostalim učenicima odmah uočavaju jesu li na dobrom putu, tj. vodi li njihov način razmišljanja do rješenja problema. Od ostalih učenika mogu čuti ideje različite od svojih i na temelju svega donose zaključke o valjanosti svojih ideja, ali i ideja drugih učenika.

Primjer 5.0.2 (Težište trokuta). *Neka su zadane duljine dužina $a = 6cm$, $b = 4cm$ i $c = 5cm$. Konstruirajmo trokut $\triangle ABC$ kojemu su duljine stranica zadane duljine dužina, a potom konstruirajmo i težište tog trokuta.*

Rješenje: Znamo da ovu konstrukciju vrlo jednostavno možemo provesti koristeći ravnalo i šestar. Ali, budući da ne možemo koristiti ravnalo, a neki pravac smatramo konstruiranim ako su nam zadane njegove dvije točke, onda možemo konstruirati svaki trokut kojemu znamo duljine stranica. Odaberemo proizvoljno točku A oko koje opišemo kružnicu polumjera c. Odaberemo proizvoljnu točku B na toj kružnici. Dakle, sada se smatra da imamo konstruiranu stranicu $\overline{AB}$ jer znamo dvije krajnje točke te dužine. Opišimo kružnicu oko A polumjera b i kružnicu oko B polumjera a. Presjek tih dviju kružnica daje treću točku trokuta, točku C, kao što je prikazano na slici. Time je gotova konstrukcija ovog trokuta pomoću šestara.



Preostaje nam konstruirati težište tog trokuta. Kako je težište presjek pripadnih težišnica, onda ćemo težište odrediti postupkom kojim smo određivali presjek dvaju neparalelnih pravaca u dokazu Mohr-Mascheronijevog teorema u odjeljku 4.2. Neka je AD težišnica iz vrha A na stranicu BC, a BE težišnica iz vrha B na stranicu AC. Presjek težišnica i stranica trokuta je točka koja stranicu trokuta dijeli na dva jednaka dijela. Nju ćemo dobiti presjekom stranice trokuta sa simetralom stranice, postupkom koji smo koristili za presjek dvaju okomitih pravaca u dokazu teorema. Pokazat ćemo kako provesti konstrukciju točke D kako bi dobili težišnicu AD, a ostale težišnice se analogno konstruiraju. Za simetralu stranice BC su potrebne dvije točke koje odredimo presjekom kružnica (C, r) i (B, r), pri čemu je r radijus kružnice dovoljno velik da se te dvije kružnice sijeku. Neka su presjeci kružnica (C, r) i (B, r) točke M i N. Trebamo odrediti presjek okomitih pravaca BC i MN postupkom kao u 4.2. Točka N je simetrična točka točki M obzirom na pravac BC. Polovište D dužine $\overline{BC}$, odnosno dužine $\overline{MN}$, traženo je sjecište danih okomitih pravaca koju dobijemo na ovaj način: Konstruirajmo točku G tako da vrijedi $|MG| = 2|MN|$. Konstruirajmo kružnicu sa središtem u točki G, koja prolazi točkom M. Ona siječe kružnicu sa središtem u točki M, koja prolazi točkom N, u dvije točke. Kružnice sa središtima u tim točkama, koje prolaze kroz M, sijeku se u traženoj točki D.



Za težište T je dovoljno odrediti presjek dviju težišnica. Konstruirajmo točku B_1 osnosimetričnu točki B obzirom na težišnicu AD i točku E_1 osnosimetričnu točki E s obzirom na istu težišnicu. Opišimo kružnice $k_1(B_1, |EE_1|)$ i $k_2(E, |BE|)$. Njihov presjek označimo s

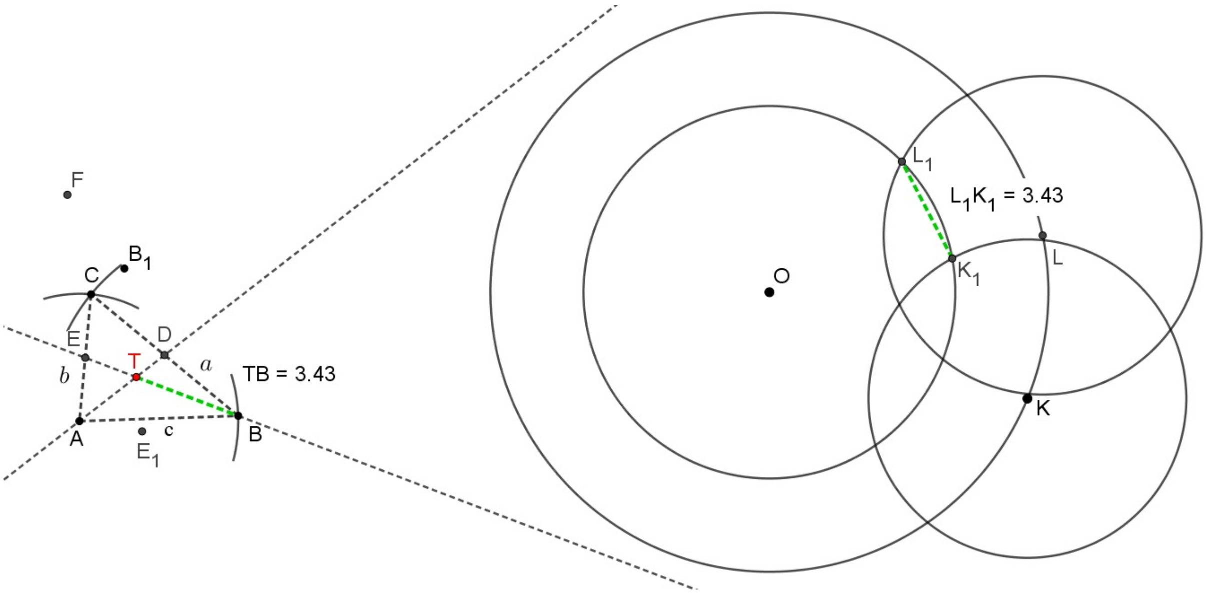
F. Trebamo naći duljinu dužine $x = |TB_1|$. Budući da vrijedi

$$|B_1E_1| < 2|BF|,$$

zaključujemo da smo u slučaju pod prvom točkom u c) dokazu u odjeljku 4.2. Prema tome, provodimo analognu konstrukciju, koja je prikazana na slici kao pomoćna konstrukcija: Oko proizvoljne točke O opišemo koncentrične kružnice polumjera $|BB_1|$ i $|BF|$. Odaberemo proizvoljnu točku K na kružnici većeg polumjera i nanesemo tetivu $\overline{KL}$ duljine $|BE|$. Potom konstruiramo kružnice proizvoljnog polumjera sa središtima u K i L tako da sijeku manju koncentričnu kružnicu. Sjecišta označimo točkama K_1 i L_1. Dobili smo dužinu tražene duljine, tj.

$$x = |K_1L_1| = |TB_1|.$$

Vratimo se sada na trokut i konstrukciju njegovog težišta. Opišimo kružnice $k_3(B, x)$ i $k_4(B_1, x)$ i njihov presjek označimo s T. Odredili smo težište danog trokuta, kako je i prikazano na slici.

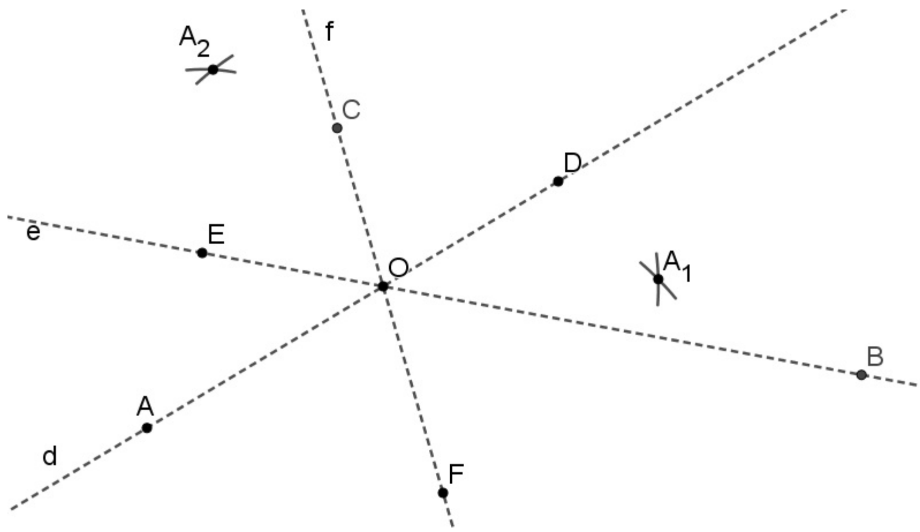


Stranice trokuta su tražene duljine po konstrukciji jer se nalaze na kružnicama sa središtima u vrhovima trokuta, a polumjeri su jednaki duljinama stranica.

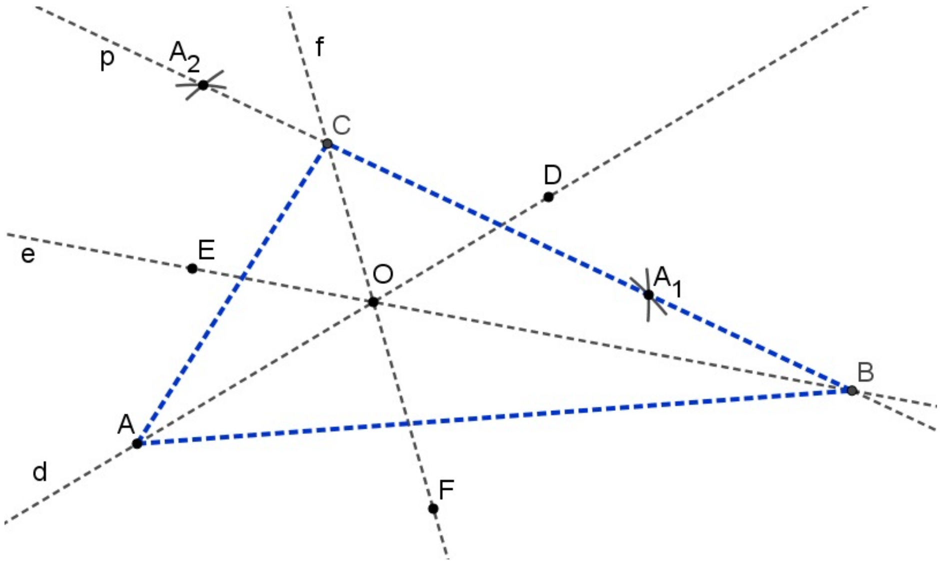
Primjer 5.0.3 (**Trokut zadan simetralama kutova**). *Neka su zadani pravci d, e i f, svaki s po dvije točke, koji prolaze istom točkom O. Konstruirajmo trokut $\triangle ABC$ takav da su mu dani pravci simetrale kutova.*

Rješenje: Neka je pravac d zadan točkama O i D, pravac e točkama O i E i pravac f točkama O i F. Simetrale kutova nas trebaju potaknuti na razmišljanje kako bi zadatak mogli riješiti osnom simterijom. Naime, simetrala kuta služi kao os simetrije, a točke s jedne stranice trokuta možemo osnom simetrijom preslikati na pravac na kojem leži druga stranica trokuta. Time se očuva svojstvo simetrale kuta trokuta.

Odaberimo neku točku A na pravcu d, različitu od O. Odredimo točku A_1 osnosimetričnu točki A obzirom na pravac f i točku A_2 osnosimetričnu točki A obzirom na pravac e. Točka A_1 se dobije presjekom kružnica $(O, |OA|)$ i $(F, |FA|)$, a točka A_2 presjekom kružnica $(O, |OA|)$ i $(E, |EA|)$. Ovo možemo vidjeti na slici.



Definirajmo pravac p kao pravac koji prolazi točkama A_1 i A_2. Točka B bit će presjek pravaca p i e, a točka C presjek pravaca p i f, kao što je prikazano slikom. Postupak određivanja tih sjecišta je isti kao i u prethodnom zadatku pa ga nećemo navoditi.



Budući da smo provodili osnu simetriju točke A obzirom na pravce e i f, zaključujemo da je trokut $\triangle AA_1C$ jednakokračan i f je simetrala osnovice $\overline{AA_1}$ tog trokuta pa je ujedno i simetrala kuta u vrhu C. Analogno se pokaže i da je pravac e simetrala kuta u vrhu B. U zadatku piše da te dvije simetrale kutova prolaze točkom O, a i pravac d prolazi tom točkom. Po teoremu o simetralama unutarnjih kutova trokuta znamo da simetrale unutarnjih kutova trokuta prolaze istom točkom pa zaključujemo da je d simetrala kuta u vrhu A.

Poglavlje 6

Obrada Mohr-Mascheronijevih konstrukcija u školi

Kao što smo već spomenuli, u ovom ćemo poglavlju detaljnije razraditi ideju kako učenicima možemo približiti ovu temu u skladu s njihovim predznanjem i dobi. Iako se učenici već u osnovnoj školi susreću s konstrukcijama pomoću jednobridnog ravnala i šestara, smatramo prikladnijim obradu Mohr-Mascheronijevih konstrukcija ostaviti za srednjoškolce. Bez obzira što je bit Mohr-Mascheronijevog teorema lako razumljiva i nižim uzrastima ako tom teoremu pristupamo sa stajališta kao što je prikazano u dokazu teorema u odjeljku 4.2, pa čak i ako izostavimo dokazivanje, sam postupak konstruiranja sjecišta obuhvaća mnoge korake što poprilično odstupa od osnovnoškolskog pristupa konstrukcijama.

Kako konstruiranje točke, tj. sjecišta, nije samo po sebi zanimljivo, trebali bismo uključiti zadatke koji zahtijevaju konstruiranje objekata. Kad bismo konstruiranje sjecišta proširili, primjerice, na konstrukciju mnogokuta, čiji vrhovi nastaju presjekom pravaca ili presjekom pravca i kružnice, tada je potrebno provesti više konstrukcija koje mogu obuhvaćati i kombinacije različitih konstrukcija sjecišta. Prisjetimo se, u odjeljku 4.2 dokaz smo rastavili na 4 slučaja, ako isključimo slučaj s presjekom dviju kružnica. Tako smo posebno opisali konstrukciju za presjek kružnice i pravca koji ne prolazi središtem kružnice, konstrukciju za presjek kružnice i pravca koji prolazi središtem kružnice, zatim konstrukciju za presjek dvaju neparalelnih pravaca koji nisu međusobno okomiti i na kraju konstrukciju za presjek dvaju pravaca koji su međusobno okomiti.

Sve ovo opisano pokazuje nam da ovu temu možemo obraditi tek u srednjoj školi, ali s učenicima s više matematičkog potencijala, koji su zainteresirani za nova znanja iz područja matematike. Međutim, uočimo da je neke konstrukcije moguće napraviti šestarom bez znanja o Mohr-Mascheronijevim konstrukcijama. Već u 6. razredu osnovne škole [1] učenici uče osnovne konstrukcije trokuta. Primjerice, učenici tada uče kako konstruirati jednakostranični i jednakokračni trokut. Ako razmislimo o konstrukciji tih trokuta kada su poznate duljine svih stranica, uočit ćemo da se cijela konstrukcija može izvesti samo pomoću šestara. Naime, poznavajući duljinu osnovice, jednostavno odaberemo jedan vrh osnovice, a drugi vrh odabremo proizvoljno na kružnici sa središtem u prvom vrhu kojoj je radijus jednak duljini osnovice. Zatim, poznavajući duljinu krakova, treći vrh odredimo kao presjek dviju kružnica istog radijusa opisanih oko već konstruirana dva vrha trokuta, a to znamo odrediti bez dodatnih konstrukcija.

Budući da je tijekom srednje škole najviše vremena za gemetriju predviđeno u 2. i 3. razredu [5], [6], smatramo da je najbolje u tom periodu srednjoškolskog obrazovanja učenike upoznati s ovom temom na dodatnoj ili izbornoj nastavi. Prije nego što iznesemo konkretan prijedlog za ovu temu, navest ćemo karakteristike suvremene nastave i istraživačke nastave primjerene za školu.

6.1 Suvremena nastava

U suvremenoj je nastavi naglasak na aktivnom sudjelovanju učenika u nastavnom procesu [9], [2]. Učenici su oni koji promišljaju i uz navođenja nastavnika otkrivaju nove sadržaje. Nastavnici organiziraju nastavu i ostavljaju prostora učenicima kako bi iznijeli svoje obrazložene ideje koje nastavnici potom argumentirano prihvaćaju ili odbacuju. Upravo je ovo najveća razlika između tradicionalne i suvremene nastave. Također, u suvremenoj je nastavi poželjno istraživati, ne samo proučavajući tiskane materijale, već i pretraživanjem građe na internetskim stranicama, stoga bi učenicima trebala biti dostupna literatura u oba oblika. U tradicionalnoj je nastavi naglasak na nastavniku, koji učenicima iznosi gotove informacije uz objašnjenja zašto vrijede određene tvrdnje. Ovime se ne ostavlja previše prostora za inicijativu učenika i ne potiču se misaoni procesi učenika u onoj mjeri u kojoj se potiču u suvremenoj nastavi. Suvremena nastava nudi nastavnicima mnoge načine organiziranja nastave kako bi povećali aktivnost učenika, a neki od njih su sljedeći:

- Nastava može biti jednostavno organizirana tako da nastavnik pitanjima navodi učenike na ispravne zaključke i obrazlaganje svog mišljenja kako bi svi u razredu uvidjeli razlog donošenja takvog zaključka.

- Nastavnik može pripremiti aktivnosti otkrivanja u vidu grupnog rada gdje se očekuje od svakog učenika da svojim zalaganjem doprinese očekivanom otkriću. Nakon grupnih radova, nastavnik poziva grupe da ukratko iznesu svoje rezultate koje potom komentiraju članovi ostalih grupa uz nastavnikova odobrenja.

- Prikazivanje edukativnih videa vezanih uz nastavni sadržaj može biti prilika za razrednu diskusiju.

- Izrada opipljivih predmeta, koji olakšavaju shvaćanje nastavnog sadržaja, odlična su aktivnost kojom dolazi do izražaja učenička kreativnost i domišljatost. Naime, učenicima se može prepustiti na izbor odabir materijala za izradu predmeta, odabir načina na koji će izraditi predmet itd.

- Korištenje računalnih programa ili aplikacija također mogu olakšati shvaćanje nastavnog sadržaja putem vizualizacije, a učenici njihovom uporabom razvijaju sposobnost snalaženja i primjene istih na konkretnim primjerima.

- Nastavnici mogu učenicima zadati domaću zadaću u obliku seminarskog (projektnog ili istraživačkog) rada čime povećavaju uključenost učenika u nastavni proces. Jedna seminarska zadaća može biti zadana jednom učeniku ili grupi učenika. Dužnost je učenika obraditi dobivenu temu pomoću nastavnih materijala, a ponekad i pomoću dodatnih materijala koja sam pronađe. Nakon obrade teme, učenici ponekad trebaju svoj rad izložiti pred ostalim učenicima u razredu.

Postoji mnoštvo sličnih primjera primjerenih za aktivno sudjelovanje učenika u nastavi, a mi ćemo se zadržati na posljednja dva primjera (projektnom radu i korištenju računalnih aplikacija) uz detaljnije objašnjenje na konkretnoj temi.

6.2 Istraživačka nastava općenito i na primjeru Mohr-Mascheronijevih konstrukcija

Kod istraživačke nastave općenito, nastavnik nije onaj koji učenicima servira dostupna znanja, već je onaj koji organizira grupni rad, zadaje zadatke učenicima, pušta ih da sami istražuju i usmjerava učenike da dođu do ispravnih zaključaka. Zadaća je nastavnika jasno formulirati problem s jasnim smjernicama i uputama na temelju kojih bi učenici mogli samostalno ili u grupama provoditi istraživanje. Nastavnici trebaju poticati učenike na kreativno razmišljanje kako bi došli do informacija temeljenih na različitim izvorima, vlastitim mislima i prosudbama. Također, nastavnik treba biti u stanju dati učenicima povratne informacije o njihovom radu. Da bi to učinio, treba dobro poznavati izučavani sadržaj kako bi mogao kvalitetno prosuditi ispravnost učenikovih zaključaka, ali treba imati i dobre komunikacijske vještine kako bi mogao argumentirano objasniti razloge zbog kojih određeni zaključci jesu ili nisu ispravni. Sve su ovo pokazatelji da je za dobro osmišljenu istraživačku nastavu potrebno uložiti više vremena.

S druge strane, učenici su odgovorni za uspjeh u istraživanju. Istraživačka nastava zahtijeva angažman učenika kako bi prikupili informacije pa svi učenici trebaju aktivno sudjelovati da bi došli do rezultata. Njihov uloženi trud rezultira prikupljenim informacijama, a dosadašnje im znanje pomaže analizirati informacije i donijeti zaključke. Prilikom pojave nejasnoća, nastavnik im pomaže riješiti ih. Na ovaj se način učenicima daje sloboda da koriste svoje sposobnosti kako bi odabrali podatke koji će ih dovesti do potrebnog znanja (u našem slučaju znanja o konstrukcijama isključivo šestarom za primjenu istih na konkretnim primjerima). Isto tako, istraživačka nastava omogućuje učenicima učiti, promatrati, istraživati, zaključivati itd.

Prije zadavanja zadataka za istraživačku nastavu, nastavnik bi trebao aktivirati postojeće znanje kod učenika koje je potrebno za rješavanje problema. To se može izvesti zajedničkim ponavljanjem sadržaja koji će se smatrati poznatim prilikom istraživanja. Primjerice, za temu Mohr-Mascheronijevih konstrukcija, neophodno je poznavati, kao što smo naveli u poglavlju 3, da se geometrijske konstrukcije vrše upotrebom jednobridnog ravnala i šestara. Pravac je zadan s dvije točke, a ravnalom znamo konstruirati spojnice tih točaka. Kružnica je zadana svojim središtem i polumjerom što znamo konstruirati šestarom. Točka je zadana kao presjek dvaju pravaca, pravca i kružnice ili dviju kružnica.

Istraživačka se nastava sastoji od određenih etapa [9]. Navest ćemo ih i objasniti što svaka od njih obuhvaća. Uz to, uklopit ćemo našu temu rada u svaku od tih etapa onako kako smatramo da bi se mogla obraditi u istraživačkoj nastavi.

- **Odabir teme:** Nastavnik odabire temu pod nazivom *Mohr-Mascheronijeve konstrukcije*.

- **Pripreme:** U ovoj fazi nastavnik učenicima zadaje zadatke uz jasne upute, raspoređuje ih po grupama i određuje krajnji rok za završetak rada. Upute su okvirne smjernice kako učenici ne bi izišli iz okvira teme i onoga što se od njih očekuje. Pomoću njih učenici ostaju fokusirani na problem.

  Za temu Mohr-Mascheronijevih konstrukcija nastavnik može rasporediti učenike, ovisno o ukupnom broju, u nekoliko grupa s 3-5 učenika. Krajnji rok za predaju može biti dva mjeseca od zadavanja teme s uputama. Upute za učenike bi mogle sadržavati smjernice ovakvog tipa:

  1. Istražite što su Mohr-Mascheronijeve konstrukcije.
  2. Proučite i ispišite postupke konstruiranja presjeka pravca i kružnice te presjeka dvaju pravaca (uočite da za svaki od ovih presjeka postoji više slučajeva ovisno o međusobnom položaju danih objekata).
  3. Osmislite zadatak u kojem je potrebno konstruirati objekt, npr. mnogokut, i riješite ga uz opisane korake konstrukcije.
  4. Provedite konstrukciju svog zadatka u nekoj od računalnih aplikacija koje to omogućuju, npr. Geogebra. Korake svoje konstrukcije spremite kako bi se

svaki korak prikazao pojedinim klikom. U pisanom radu, uz opisane postupke konstrukcija, stavite odgovarajuće slike konstrukcija iz Geogebre.

5. Napravite prezentacije u PowerPointu, Prezi ili nekom drugom programu s krajnjim rezultatom vašeg rada.

- **Ispunjavanje zadataka:** Učenici obavljaju različite zadatke povezane s predmetom istraživanja koristeći različite materijale. Pritom skupljaju informacije, organiziraju ih koristeći dosadašnje znanje koje nadograđuju novim. Učenici rade pojedinačno, ali i u grupama komunicirajući jedni s drugima, kao i s nastavnikom kako bi usporedili, sortirali i sistematizirali prikupljene podatke. U ovoj su fazi ključni pojmovi analiziranje, uspoređivanje, definiranje, sistematiziranje, zaključivanje itd.

  Sve opisano možemo primijeniti i u istraživačkoj nastavi vezanoj uz Mohr-Mascheronijeve konstrukcije. Naime, članovi svake grupe dogovore se oko raspodjele posla. Svaki je učenik zadužen za pretraživanje i skupljanje literature vezane za njegov dio posla. Nakon proučavanja i izdvajanja informacija, članovi grupe zajednički sastavljaju svoj rad. Uz pisani rad, učenici izrađuju svoj aplet u računalnom programu Geogebra (ili nekom drugom programu), kao što je opisano u uputama. Na kraju svoj rad sažimaju u prezentaciji upotrebljavajući PowerPoint (ili neki drugi program). Tijekom cijelog procesa, članovi iste grupe surađuju i slijede upute nastavnika. Nastavnik je također uključen u cijeli proces na način da prati rad učenika, ukazuje na dobre i krive zaključke, ali im i pomaže riješiti nejasnoće.

- **Prezentiranje:** Svaki učenik ili jedan dio članova grupe prezentira rezultate svog rada/rada grupe uz zajedničku diskusiju u kojoj sudjeluju svi učenici s nastavnikom koji određuje tijek diskusije.

  Nakon što su učenici napravili rad s temom Mohr-Mascheronijevih konstrukcija, članovi svih grupa, zajedno s nastavnikom, dolaze na nastavni sat gdje svaka grupa ima 15-ak minuta za izlaganje svog rada. Budući da je svaka grupa istražila postupke osnovnih konstrukcija, najviše bi vremena prilikom izlaganja svake grupe trebalo biti posvećeno prikazu rješenja odabranog zadatka s koracima konstrukcije, što je prikazano u Geogebri (i PowerPointu).

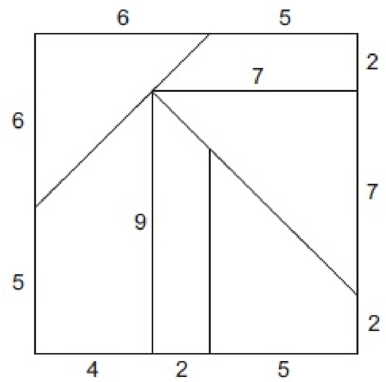
- **Evaluacija:** U ovoj fazi učenici procjenjuju svoj doprinos i uspjeh na temelju stečenog znanja. Također, nastavnik evaluira učeničke radove na temelju unaprijed postavljenih kriterija.

  U završnoj fazi slijedi komentiranje i osvrt na radove s temom Mohr-Mascheronijevih konstrukcija. Nakon toga, može se organizirati da svaka grupa procijeni svoj rad ili da svaki pojedinac procijeni svoj doprinos ukupnom rezultatu grupe. Slijedi primjer pitanja na koja treba odgovoriti svaki član grupe za evaluaciju (samovrednovanje) tako da stavi kvačicu ili plus u polje koje mu najviše odgovara.

Tvrdnje	**Slažem se**	**Djelomično se slažem**	**Ne slažem se**
Rad moje grupe sadrži sve dijelove bitne za shvaćanje ove teme.			
Naši opisi konstrukcija su jasni i razumljivi.			
Zadatak smo riješili detaljno i precizno uz popratne slike iz Geogebre (ili drugog programa).			
Svi su članovi grupe ravnopravno sudjelovali u izradi rada.			
Moj je trud doprinio pronalasku i odabiru potrebnih infromacija.			
Proširio/la sam svoje znanje o geometrijskim konstrukcijama.			
Sam/a bih znao/la provesti konstrukciju samo šestarom u konkretnom zadatku.			

6.3 Didaktika u istraživački usmjerenoj nastavi (matematike)

U suvremenoj nastavi didaktika igra važnu ulogu. Ona je grana pedagogije koja se bavi analizom i planiranjem procesa učenja i poučavanja koji se ostvaruje u nastavi. Prema [2], francuski matematički edukator Guy Brousseau osmislio je teoriju koja je dio didaktike pod nazivom *Teorija didaktičkih situacija*. U toj je teoriji iznio faze koje nastavniku služe kako bi bio efikasniji u organizaciji istraživačke nastave. Osmišljena situacija za istraživačku nastavu ili njezin *milieu*, tj. okruženje, bi trebala učeniku omogućiti dobivanje povratne informacije o kvaliteti svog rada. Primjerice, učenik bi trebao znati ide li ili ne ide njegov rad i način razmišljanja u dobrom smjeru. Koliko je zahtjevno osmisliti dobar *milieu* koji će dati dobre informacije, toliko je teško i učeniku samostalno istraživati. Među primjerima *miliea*, tj. okruženja, kao najpoznatiji primjer se ističu slagalice (puzzle). Ideja je da učenik sastavi slagalicu većih dimenzija od dobivene slagalice. Ako učenik ne ide u dobrom smjeru, neće moći sastaviti slagalicu. Time će se vraćati na početak kako bi promijenio način razmišljanja. Ispravnim načinom razmišljanja došao bi do točnog rješenja čime bi uspio sastaviti slagalicu. Slagalice su osmišljene tako da učenici samostalno izgrade znanje. Slijedi primjer slagalica iz [2] na temelju kojeg učenici mogu učiti. Nastavnik učenicima pokaže sliku kvadrata podijeljenog na trokute i četverokute odgovarajućih dimenzija.



Učenici trebaju napraviti sličan kvadrat, ali veći, koji je podijeljen na dijelove kao na slici pri čemu dužina duljine 4 cm na modelu treba odgovarati dužini duljine 7 cm na novom kvadratu. Nastavnik treba podijeliti učenike u grupe tako da svaki učenik može izraditi barem jednu ili dvije slagalice koje će činiti cjelinu sa slagalicama od ostalih učenika iz grupe. Nakon upoznavanja s problemom, učenici ga pokušavaju riješiti bez pomoći učenika. Samostalno, odnosno grupno, pokušavaju doći do pravilnosti (dimenzija) koje će im omogućiti izraditi svaku slagalicu pa onda i čitav kvadrat traženih dimenzija. Učenici prilikom rješavanja problema nastoje upotrijebiti svoje znanje, ali problem je sastavljen tako da učenici uviđaju kako njihovo trenutno znanje ne daje dobre rezultate. Stoga, njihov rad treba biti usmjeren na otkrivanje novog znanja koje će im olakšati i omogućiti uspješno rješavanje problema. U ovom konkretnom primjeru važno je da učenici sami dođu do ideje upotrebe proporcionalnosti, koja im je u tom trenutku nepoznata. Da bi izradili slagalicu, koja zadovoljava uvjete zadatka, svi učenici trebaju doći do hipoteze da se duljina svake stranice geometrijskih likova, od kojih je sastavljen kvadrat, treba pomnožiti faktorom $\frac{7}{4}$. Kao što smo naveli u odjeljku 6.2, nakon što učenici riješe zadatak, slijedi prezentiranje svake grupe gdje učenici iznose svoja otkrića. Nakon toga, nastavnik na kraju formulira ideju proporcionalnosti geometrijskih likova. Tijekom razredne diskusije i završnog osvrta na problem, osobne ideje učenika postaju zajedničko znanje slično onom koje se može naći u različitoj literaturi.

Sada ćemo navesti faze procesa učenja karakteristične za istraživačku nastavu kakve navodi didaktika [2], a nakon toga ćemo povući paralelu s već opisanim primjerom istraživačke nastave:

1. **Faza primopredaje:** U prvoj fazi nastavnik prezentira problem učenicima i daje im jasne smjernice za rješavanje problema. Važno je da učenici razumiju sva pravila

kako bi bili u stanju uključiti se u aktivnosti koje slijede nakon ove faze. U ovoj fazi nastavnik ne pruža dodatnu pomoć učenicima.

2. **Faza akcije:** U ovoj su fazi učenici uključeni u rješavanje problema. Oni prilikom istraživanja koriste svoja dosadašnja znanja i iskustva, a otvara im se prostor za nova znanja koja usvajaju.

3. **Faza formulacije:** Sada učenici prezentiraju što su postigli u fazi akcije, daju svoje ideje (npr. za rješavanje odabranog zadatka u istraživačkoj nastavi) itd. Ovo se odvija u učionici, ali nije uvijek dovoljno samo potaknuti učenike da sudjeluju u razrednoj diskusiji. Često se javlja nekoliko istih učenika koji žele izreći svoje mišljenje. Međutim, potrebno je ostvariti komunikaciju među svim učenicima kako bi se oblikovalo vlastito znanje svakog učenika. Ovakvu komunikaciju najlakše je postići u manjim grupama. Kad određeni student iznese točnu tezu, treba ju i obrazložiti matematičkim argumentima kako bi ju i ostali učenici u grupi mogli prihvatiti kao ispravnu.

4. **Faza potvrđivanja valjanosti:** Učenici testiraju svoje strategije ili ideje. To znači da učenici provjeravaju valjanost ili ispravnost svojih ideja, tvrdnji i rezultata bez uplitanja nastavnika koji bi im mogao reći jesu li u pravu ili ne.

5. **Faza institucionalizacije:** U zadnjoj fazi osobno znanje poprima formu institucionalnog znanja. Učenik tada saznaje sve pojedinosti i gradi konačno znanje. Ovu fazu najčešće provodi nastavnik koji učenicima predstavlja optimalnu strategiju nastalu od prikupljenih ideja sažetih u zajedničku strategiju.

Osvrnemo li se na etape od kojih se sastoji istraživačka nastava, kao i istraživačka nastava s didaktičkog gledišta otkrića proporcionalnosti geometrijskih likova pomoću slagalica, uviđamo da su one poprilično slične onima koje nalaže didaktika suvremene nastave, konkretno istraživački usmjerene nastave. Iz toga možemo zaključiti kako navedenim oblicima istraživačke nastave obuhvaćamo didaktičke smjernice za što kvalitetnijom nastavom.

Bibliografija

[1] S. Banić, Z. Ćurković, D. Glasnović Gracin, L. Kralj i M. Stepić, *Petica+ 6, udžbenik i zbrika zadataka za 6. razred osnovne škole, prvi svezak*, SysPrint d.o.o., Zagreb, 2010.

[2] R. Bos, M. Doorman i B. Jessen, *Meria Practical Guide to Inquiry Based Mathematics Teaching, Project MERIA*, (2017), https://meria-project.eu/sites/default/files/2017-10/MERIA%20Practical%20Guide%20to%20IBMT.pdf#page=38&zoom=100,0,460, posjećena 17.10.2019.

[3] F. M. Brückler, *Povijest matematike I.*, Odjel za matematiku, Sveučilište JJ Strossmayera u Osijeku, 2007.

[4] ______, *Povijest matematike II.*, Odjel za matematiku, Sveučilište JJ Strossmayera u Osijeku, 2010.

[5] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije*, Element, Zagreb, 2014.

[6] ______, *Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije*, Element, Zagreb, 2015.

[7] Ž. Hanjš, *Konstrukcije samo šestarom*, Matematičko-fizički list (1995./1996.), br. 45, 10–17.

[8] N. Hungerbühler, *A Short Elementary Proof of the Mohr-Mascheroni Theorem*, The American Mathematical Monthly **101** (1994), br. 8, 784–787.

[9] A. Kawałek, M. Młynarska, G. Napiórkowska, M. Podolak i W. Śnieżek, *Modern Methods of Teaching – Learning Mathematics and Related Subject*, https://ec.europa.eu/programmes/proxy/alfresco-webscripts/api/node/content/workspace/SpacesStore/65deb96e-7b36-4dde-869a-28c180d48b11/Modern_Methods_of_Teaching(2).pdf, posjećena 17.10.2019.

[10] T. Kralj, *Diplomski rad - Talesovi teoremi*, (2014), `https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf%3A5572/datastream/PDF/view`.

[11] M. Kurnik, Ž. Kurnik, *Lorenzo Mascheroni i geometrija šestara*, Miš-stručno-metodički časopis (2000), br. 5, 209–215.

[12] D. Palman, *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996.

[13] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika I.*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

Sažetak

U ovom radu naglasak je na geometrijskim konstrukcijama izvodljivim samo šestarom. Prije iskaza i dokaza Mohr-Mascheronijevog teorema, koji kaže da je svaka geometrijska konstrukcija izvodljiva ravnalom i šestarom također izvodljiva i samo šestarom, navedeni su aksiomi planimetrije euklidske geometrije, a nakon toga i kratki povijesni razvoj geometrije. Jedan dokaz Mohr-Mascheronijevog teorema uključuje preslikavanje ravnine pomoću inverzije pa je u radu ukratko opisana teorija o inverziji. Osim pomoću inverzije, teorem smo dokazali i direktno. Postupak koji provodimo u direktnom dokazu je vrlo sličan postupku koji provodimo prilikom konstruiranja samo šestarom. Zbog toga je potrebno znati dokazati Mohr-Mascheronijev teorem i na ovaj način.

U drugom dijelu diplomskog rada, na konkretnim smo primjerima mogli vidjeti kako provesti konstrukcije isključivo šestarom. Naveli smo i primjere koji se javljaju u školskoj matematici. Osim toga, predložili smo način na koji se ova tema može obraditi u školi, kao dio istraživačke nastave. Navedeno o istraživačkoj nastavi potkrijepili smo didaktičkom pozadinom.

Summary

Emphasis in this thesis is on geometric constructions carried out only by compass. Before a proof of Mohr-Mascheroni theorem, which says that every geometric construction carried out by compass and ruler can be done without ruler, we provided axioms of plane Euclidean geometry and stated short historical development of geometry. One proof of Mohr-Mascehoni theorem includes plane transformation called inversion, so in this thesis we shortly introduced specification of the theory of inversion. Except by inversion, we proved theorem directly as well. Process that is carried out in the direct proof is very similar to process that is used in construction only by compass. That is why it is necessary to know how to prove Mohr-Mascheroni theorem in this way.

In the second part of this thesis, we saw concrete examples how to carried out constructions only by compass. There are also examples that we can find in school mathematics. Besides, we suggested method of implementation of this topic in school, for example, as a part of inquiry based mathematics teaching. Everything about this way of teaching, that is stated in this thesis, is confirmed by didactic background.

Životopis

Rođena sam 24. studenog 1996. u Karlovcu. Prva tri razreda osnovne škole završila sam u Osnovnoj školi Švarča, a ostalih pet razreda u Osnovnoj školi Grabrik u Karlovcu. Po završetku osnovne škole, 2011. godine, upisala sam opći smjer Gimnazije Karlovac koju sam završila s odličnim uspjehom 2015. godine. Iste sam godine nastavila svoje obrazovanje na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu na kojem sam upisala preddiplomski studij Matematike, nastavničkog smjera. Godine 2018. postala sam sveučilišna prvostupnica edukacije matematike i te sam godine upisala diplomski studij Matematike na istom fakultetu, također nastavničkog smjera.