

Metode analize trajanja sušnih razdoblja pomoću teorije ekstrema

Cindrić Kalin, Ksenija

Doctoral thesis / Disertacija

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:040872>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-17**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

Prirodoslovno-matematički fakultet
Geofizički odsjek

Ksenija Cindrić Kalin

**METODE ANALIZE TRAJANJA SUŠNIH
RAZDOBLJA POMOĆU TEORIJE
EKSTREMA**

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2020.



Sveučilište u Zagrebu

Prirodoslovno-matematički fakultet
Geofizički odsjek

Ksenija Cindrić Kalin

**METODE ANALIZE TRAJANJA SUŠNIH
RAZDOBLJA POMOĆU TEORIJE
EKSTREMA**

DOKTORSKI RAD

Mentor: prof. dr. sc. Zoran Pasarić

Zagreb, 2020.



University of Zagreb

Faculty of Science
Department of Geophysics

Ksenija Cindrić Kalin

**METHODS FOR ANALYSIS OF DRY
SPELL DURATIONS BASED ON THE
THEORY OF EXTREMES**

DOCTORAL THESIS

Supervisor: Prof. Zoran Pasarić

Zagreb, 2020

Ovaj rad izrađen je u Državnom hidrometeorološkom zavodu u sklopu Sveučilišnog poslijediplomskog studija pri Geofizičkom odsjeku Prirodoslovno–matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

Mentor prof. dr. sc. Zoran Pasarić redoviti je profesor na Geofizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

Najljepše zahvaljujem svojem mentoru prof. dr. sc. Zoranu Pasariću na predanom vođenju ovog istraživanja, na velikom znanju i iskustvu koje je nesebično dijelio sa mnom.

Zahvaljujem Državnom hidrometeorološkom zavodu na pružanju mogućnosti doktorskog studiranja te svim mojim bliskim suradnicima na podršci tijekom studija.

Veliko hvala suprugu Lovri, i našim obiteljima, na ohrabrivanju, strpljivosti i odricanjima.

Ovaj rad posvećujem dr. sc. Josipu Jurasu koji će mi ostati najveći uzor.

Sažetak

Analiza razdiobe vjerojatnosti trajanja sušnih razdoblja pruža korisnu informaciju za planiranje i upravljanje, osobito u poljoprivrednom sektoru gdje suša uzrokuje najveće štete. Stoga je glavni cilj ovog rada preporučiti metodologiju za procjenu visokih kvantila trajanja sušnih razdoblja. U tu svrhu primijenjene su opća razdioba ekstrema (GEV) i opća Paretova razdioba (GP) na nizove godišnjih maksimalnih sušnih razdoblja, odnosno na nizove premašaja različitih pragova trajanja sušnih razdoblja. Najprije su detaljno ispitane klasične metode procjene parametara razdiobi, metoda maksimalne vjerodostojnosti i metoda linearnih momenata (L–momenti), za dvije meteorološke postaje: Zagreb–Grič i Split–Marjan. Pri tome je analizirana i mogućnost odabira optimalnog praga za konstruiranje nizova premašaja. Pored toga, velik dio rada posvećen je razmatranju mogućnosti primjene bayesovskog pristupa analizi sušnih razdoblja koji je slabo zastupljen u primijenjenim klimatološkim analizama.

Pokazano je da klasična primjena metoda za procjenu parametara razdiobe GP dovodi do proturječnih rezultata kad se primjenjuje na diskretne nizove premašaja sušnih razdoblja. Stoga su predložene određene modifikacije, i to kod procjene parametra lokacije razdiobe GP. Rezultati bayesovskog pristupa ukazali su na stabilnost procjena parametara počevši čak i od niskih pragova, dok gubitak podataka upotrebom vrlo visokih pragova može prouzročiti znatne nesigurnosti njihovih procjena. Usporedna analiza godišnjih maksimuma primjenom razdiobe GEV te Gumbelove razdiobe kao njezinog posebnog slučaja, ukazala je da s potonjom razdiobom treba biti oprezan. Naime, Gumbelova razdioba može znatno podcijeniti vrlo duga sušna razdoblja. U radu su nadalje istaknute prednosti bayesovskog pristupa koji je preporučen za daljnju primjenu u teoriji ekstrema u klimatološkoj praksi u Hrvatskoj. Na kraju su procijenjena očekivana trajanja sušnih razdoblja za različite povratne periode (10, 25, 50 i 100 godina) za 131 postaju u Hrvatskoj, a njihova prostorna razdioba kao i osnovna klimatologija analizirane su za sedam regija ukazujući na najdulja sušna razdoblja u najistočnijim i najjužnijim predjelima Hrvatske. Dobiveni rezultati pružaju jednu od podloga za procjenu rizika od suše.

Ključne riječi: Sušna razdoblja, opća razdioba ekstrema, opća Paretova razdioba, nizovi premašaja, Bayes, L–momenti, metoda maksimalne vjerodostojnosti, povratni period

Extended abstract

Introduction

Drought is considered as one of the greatest natural threats to the socio-economic development, among all hydro–meteorological events. In Croatia, drought has become a persistent problem over the last two decades, inflicting serious damage, particularly in the agricultural sector (Cindrić et al. 2015). There is a number of drought indices existing for drought monitoring, which are mainly constructed on one- or multi-monthly time scales. However, to identify spatial patterns of drought risk, sequences of dry days (dry spells; DS) are commonly used (Vicente-Serrano and Begueria-Portugues 2003). Analysis of the probability distribution of dry spell characteristics (i.e. occurrence and duration) provides useful information for agricultural and environmental planning, and management of drought-prone areas (Sirangelo et al. 2017).

Thus, from the end users' point of view, it is important to estimate the expected dry spell durations for various return periods. Dry spells are defined as consecutive sequences of days with daily precipitation lower than some predefined amount (i.e. the daily limit). Various daily precipitation limits are used in practice, depending on the particular application. In this study, the limits of 1 mm, 5 mm, and 10 mm are employed since they may be related to evapotranspiration, to run-off processes, and to saturation of thin surface layers, respectively (Serra et al. 2016).

This study was primarily motivated by the analysis of Cindrić et al. (2010) who fitted two stochastic models to empirical dry spell distributions in Croatia: the first-order Markov chain and the discrete autoregressive moving average model; and found that other statistical models should be employed for extreme durations of DS. Thus, the main goal of the present study is to propose a method for reliable estimation of expected dry spells durations corresponding to different return periods. Natural choice to approach this problem is application of the extreme value theory (Coles, 2001). Beside the generalized extreme value distribution (GEV), which is most commonly used in modelling annual maxima (AM) of climate parameters, the generalized Pareto (GP) distribution applied to the peak-over-threshold (POT) series has gained more popularity in climate and hydrological practice. The advantage of the GP–POT approach is that it includes the second and higher order maxima, beside absolute annual maxima. However, in order to apply the GP–POT approach, it is necessary to select some (near-

optimum) threshold value for the construction of POT series. There are many different methods existing in literature for that selection (Langousis et al. 2016), but graphical methods of mean excess plot (MEP) or the parameter stability plots are most commonly applied (Egozcue et al. 2006); and usually very large percentiles (above 95th percentile) are selected in practice (e.g. Lana et al. 2006). Nevertheless, it seems that selection of some optimum threshold has still remained an open question, which is also discussed in this study.

In order to estimate the GP (and GEV) distribution parameters, first, the two classical methods were investigated: Maximum likelihood (ML), and L–moments (LMOM) with two and three parameters. In particular, substantial differences between the corresponding estimates were found when applied to dry spell series, leading to the conclusion that at least some of the well-established, classical methods do not work well on dry spell durations. Thus, the first part of this study is devoted to a confirmation that the problem derives from rounding. In the second part of this study the application of extreme value theory on dry spells within the Bayesian paradigm is investigated. Bayesian inference has already been advocated in a large number of papers analysing meteorological and hydrological extremes (e.g.. Coles and Pericchi 2003; Sisson et al. 2006; Tancredi et al. 2006; Silva et al. 2017). However, it has rarely been used in extreme value analysis of dry spells. To the best of our knowledge, only recently Butturi-Gomes et al. (2018) applied the GEV distribution to maximum annual dry spells (simulated by Poisson distribution) and indicated some advantages of using Bayesian methods for extreme phenomena analysis; at the same time Cindrić and Pasarić (2018) analyzed dry spells within the Bayesian paradigm emphasizing its advantages for further practical usage. The second goal of this study is to provide a regional analysis of dry spells in Croatia – both from a general climatological perspective, and from the return value characteristics – which can serve as a basis for drought risk assessment in Croatia, and for the future research with respect to climate change.

Extreme value analysis of dry spells: impact of rounding

Dry spells, defined as sequences of dry days, are necessarily rounded because of the recording procedure. However, this is usually not taken into account in climate studies assuming implicitly that the rounding is small enough and can be ignored (see Pasarić and Cindrić, 2018 and the references therein). The GP parameters are commonly

estimated by methods designed for continuous GP distribution, without taking into account the possibly discrete nature of the data. Thus, we have investigated under which conditions the classical methods (for continuous GP distribution) are applicable to rounded data, such as that of dry spells. Here, a theoretical derivation would be the best solution; but, as this seems intractable, we turned to systematic Monte Carlo (MC) simulations.

The observed dry spell series at the two meteorological stations from Croatian Meteorological and Hydrological Service (DHMZ) network are used: a continental station Zagreb–Grič (ZG) and a coastal station Split–Marjan (ST). Daily precipitation data covered the period 1961–2010, and dry spell series were derived according to a 5 mm daily limit. Following the standard procedure (e.g. Coles 2001), a range of thresholds (starting from very low values, 1 day) was chosen. For each threshold, the series of excesses (POT) were formed in two steps: first, all dry spells that were shorter than a given threshold were discarded; secondly, the threshold was subtracted from all retained dry spell durations. The GP distribution was fitted to the POT series by means of the ML and LMOM methods for estimation of parameters.

ML method is the most often utilized method in practice; it provides valid estimates, together with standard errors and confidence intervals, for large sample sizes but with a certain constrains on the shape parameter (Smith, 2003). Furthermore, in the case of a GP distribution, this method leads to estimates of shape and scale parameter assuming the location is known. On the other hand, with the LMOM method (Hosking and Wallis, 1996), it is possible to estimate all three GP distribution parameters (we denote that variant by GP–LMOM3), and if location is known, then the two–parameters variant is available (GP–LMOM2). The uncertainties of the obtained estimates were assessed by their sampling distribution approximated by bootstrapping (e.g. Reiss and Thomas 2007).

The results revealed that the uncertainty increases together with the threshold value, as the number of excesses decreases, suggesting that, in practice, one must be careful when adopting very high thresholds. The most striking result was a sharp discrepancy between estimates obtained by GP–LMOM3 and those obtained by GP–ML and GP–LMOM2. For both stations, latter methods indicated significantly heavier tails of the fitted distribution than the GP–LMOM3 method did. With regard to the location-

parameter estimates of GP distribution, their mean taken over the threshold ranges is close to -0.5 ; while in theory the GP location parameter for any excesses-over-threshold data is zero.

In order to explain the obtained discrepancies, a further detailed analysis was performed on realisations of GP series obtained by systematic MC simulations. The time series of lengths $n = 100, 500, 1000, \text{ and } 2000$ were generated from GP $(k, 4, 0)$ distribution, with varying shape parameter $k = -0.4, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, \text{ and } 0.4$. For each k and n , 1000 time series were generated, with each value rounded to the nearest integer, and the POT series obtained after applying the threshold $\mu = 1$. For each simulated series, both exact and rounded, the GP parameters were estimated by applying the GP-ML, GP-LMOM2, and GP-LMOM3 methods.

The analysis was performed with respect to the amount of rounding which is defined as quotient $\sigma/\Delta x$, where σ is the scale GP parameter, while Δx is the rounding increment ($\Delta x=1$ for dry spells). It is found that for a reasonable amount of rounding, which is commonly met in practice when working with dry spells, and where no threshold was applied, the classical methods applied to both exact and rounded data gave similar estimates. However, in practice it is rare to work with the entire time series instead of the POT ones. The GP-LMOM3 method applied directly to the moderately rounded ($\sigma/\Delta x \geq 4$) POT series gave slightly biased, but otherwise reasonable estimates of the shape and scale parameters, whereas the location parameter was estimated to be around -0.4 . The GP-ML and GP-LMOM2 methods can also be applied to rounded POT series, but only after the location is appropriately adjusted; that is, defined to be -0.5 instead of 0 . The problem can also be approached by jittering; that is, by adding to every (rounded) datum a random number from a uniform distribution over the interval $[-0.5, 0.5]$ (Mudelsee 2014). The time series thus obtained stem from a continuous probability distribution and thus, the subsequent use of classical methods is fully justified. However, if the rounding is too coarse (e.g. $\sigma/\Delta x \sim 1$), then it cannot be ignored, and none of the methods suggested can be used. Instead, one has to deal with the rounded GP distribution, itself.

Extreme value analysis of dry spells with Bayesian inference

While previous section has been more concerned with detection of the problem of rounding, herein we aimed to offer a solution within the Bayesian paradigm. The underlying assumption is that dry spells represent discrete series. The next assumption is a dominant advantage of the POT-GP model over the AM-GEV model. Although the two models were applied to different data sets (AM and POT), we still attempt to reveal whether one approach is more effective than the other, bearing in mind end users and climate applications.

As in the previous section, this analysis comprised dry spell (DS) durations observed at the two stations: ZG and ST from the period 1961–2015; but also on realizations of the GP-distributed time series obtained by the Monte Carlo method. The three categories of dry spell are defined according to the following daily limits: 1 mm, 5 mm and 10 mm, denoted by DS1, DS5 and DS10, respectively.

Bayesian inference starts by stating a prior probability distribution which represents the analyst' knowledge about the parameters before the data arrive; and which could be a challenging task. However, if no specific prior information exists, a flat or non-informative prior distribution may be used. In the second step, using the Bayes theorem, the prior is combined with the likelihood to obtain the posterior distribution of the parameters. In the likelihood function, all specific details of a particular stochastic model and any additional information about the data (e.g. that the observed dry spells are actually rounded) may be incorporated. Once the posterior distribution is obtained, it is straightforward to calculate the probability distribution of any quantity of interest. Beside parameters, a probability distribution of future observations based on already observed data (so called predictive distribution) is of particular interest.

In this study the inference is performed within the AM-GEV and POT-GP models. Non-informative priors are taken in all cases employing the uniform distribution over certain ranges for GEV and GP models. A model comparison was performed by comparing the three-parameter GP model (GP3) with the two-parameter GP model (GP2), with the location θ fixed to -0.5 in the latter; and by comparison of GEV with Gumbel models employing model comparison procedure. It should be noted that the GEV distribution is not notably sensitive to rounding (since there is no cutting at the threshold). The results regarding the GEV and the GP parameters were analysed

through their posterior distributions, thus providing the point estimates (given as the median of the posterior distribution) and their uncertainties (credible intervals). Furthermore, the posterior distributions of the return values (due to various return periods) and the return values obtained from the predictive distributions of dry spells are mutually compared.

The results revealed several messages. The GEV model with its heavy tail is always able to yield higher return values than its special case of the Gumbel domain (often used in practice due to its simplicity), resulting in more precautionary projections. This confirms the potential risk when applying the Gumbel model to annual extremes of dry spells, as previously noted by Coles and Pericchi (2003) in case of precipitation amounts. With regard to POT–GP modelling of dry spells, the Bayesian approach revealed good stability of parameter estimations even from very low thresholds. On the other hand, the data loss caused by choosing very large thresholds (> 90 th percentile) may result in remarkable uncertainties of the parameter estimates. The posterior distribution of the difference $\sigma - k\mu$ due to different thresholds (μ) may be read as an analogue to the mean excess plot (MEP) in the classical approach. Although the MEP is used for seeking the optimal threshold in POT-GP modelling (e.g. see Egozcue et al. 2006), Bayesian inference actually led us to the conclusion that there are no clear criteria in the assessment of the optimal threshold, nor is there a necessity for its detection. It rather provides a reasonable overall picture of the range of thresholds compatible with the GP model. Notwithstanding the choice of the threshold, GP modelling of each associated POT series provides the posterior probability distributions of parameters and return values in an exact way, compatible with the model and the data at hand.

It is suggested that all three GP parameters should be assessed when dealing with dry spells. If inspection of the location parameter reveals a value close to -0.5 , then the GP2 model may be utilized. Regarding the return values, the increase of uncertainty is also present but not so pronounced.

Finally, we highly recommend the Bayesian approach for analysis of dry spells since it is straightforward to apply, does not rely on any asymptotic theory, and provides exact estimates of parameters together with associated uncertainties (conditioned on the chosen theoretical model and prior knowledge).

Regional analysis of dry spells in Croatia

After the first goal had been achieved by recommending the methodology for estimation of high quintiles of dry spells, the regional analysis of dry spells in Croatia was performed. Daily precipitation data from 131 meteorological stations in Croatia, covering the period 1961–2015, were employed for constructing dry spell series of DS1, DS5 and DS10. First the general climatology of dry spells was performed by defining seven regions selected according to Gajić–Čapka et al. (2014): Eastern and Western mainland; central hinterland; mountainous region; mountainous littoral; Northern Adriatic coast; and central and Southern coastal region. Then, the GP distribution was applied to the POT series constructed by the excess of a threshold of 75th percentile; and the GEV model was applied to annual maxima. Predefined threshold of 75th percentile was chosen after a detailed investigation was performed by both Bayesian approach and L-moments ratio diagrams. The associated parameters and return values were estimated within the Bayesian inference providing point estimations and credible intervals.

Regional analysis of the mean dry spell durations clearly indicates the dominance of dry spells in the Easternmost Croatia in the cold season (especially in winter) and in the southernmost Adriatic during the warm season (particularly in summer), where the continental and maritime climate regimes are the most pronounced. Such spatial distribution is more evident for the categories of DS5 and DS10 which are generally of longer durations as a daily limit of definition is increasing. These longest DS are mainly the result of stable weather types, which are generally of longer duration, comparing to other weather types, with no rainy episodes causing DS break. Other parts of Croatia usually experience combined climatic influences, whereas the mountainous climate reveal the shortest dry spell durations. In line with mean DS durations, the maximum durations are generally recorded in the Adriatic and eastern Croatia, both in cold and warm times of the year.

Spatial distribution of the expected duration of DS associated to different return periods (5, 10, 25, 50, and 100 years), obtained by applying the GEV–AM and GP–POT approach, follow the basic climatology of DS. Although the estimates from the two models cannot be directly compared because different datasets are used, still it can be said that the GP model supports the longer DS durations in areas where the longest DS are already expected.

Key words: Dry spells, generalized extreme value distribution, generalized Pareto distribution, maximum likelihood, L-moments, Bayes, uncertainty.

POPIS KRATICA I SIMBOLA

| | |
|--------------|---|
| α | parametar skale opće razdiobe ekstrema |
| <i>AM</i> | nizovi godišnjih maksimuma |
| <i>BF</i> | Bayesov faktor |
| <i>DHMZ</i> | Državni hidrometeorološki zavod |
| <i>DS1</i> | sušna razdolja kategorije 1 mm |
| <i>DS5</i> | sušna razdolja kategorije 5 mm |
| <i>DS10</i> | sušna razdolja kategorije 10 mm |
| <i>GEV</i> | opća razdioba ekstrema |
| <i>GP</i> | opća Paretova razdioba |
| k | parametar oblika opće razdiobe ekstrema i opće Paretove razdiobe |
| L | funkcija vjerodostojnosti |
| λ | prosječni godišnji broj premašaja praga |
| <i>LMOM</i> | metoda linearnih momenata (L-momenti) |
| <i>MEP</i> | graf srednjeg prekoračenja |
| <i>MOM</i> | metoda momenata |
| μ | prag sušnih razdobljaza primjenu opće Paretove razdiobe |
| <i>ML</i> | maksimalna vjerodostojnost |
| <i>POT</i> | nizovi premašaja praga |
| <i>PWM</i> | metoda otežanih momenata |
| q | kvantil |
| σ | parametar skale opće Paretove razdiobe |
| T | povratni period |
| θ | parametar lokacije opće Paretove razdiobe |
| <i>UNCCD</i> | Konvencija Ujedinjenih naroda o suzbijanju dezertifikacije u zemljama pogođenim jakim sušama i/ili desertifikacijom, posebno onima u Africi |
| x_0 | parametar lokacije opće razdiobe ekstrema |
| x_T | povratna vrijednost |
| <i>WMO</i> | Svjetska meteorološka organizacija |

Sadržaj

| | |
|---|----|
| 1. UVOD | 1 |
| 2. PRIMJENA RAZDIOBE EKSTREMA NA SUŠNA RAZDOBLJA – UTJECAJ ZAOKRUŽIVANJA | 9 |
| 2.1. Teorijska osnovica..... | 9 |
| 2.2 Metode za odabir prikladnog praga..... | 12 |
| 2.3. Metode za procjenu parametara teorijskih razdioba ekstrema | 15 |
| 2.4. Podaci i Monte-Carlo simulacije..... | 17 |
| 2.5. Rezultati | 21 |
| 2.5.1. <i>Analiza realnih podataka i problem zaokruživanja</i> | 21 |
| 2.5.2. <i>Monte Carlo pristup problemu zaokruživanja</i> | 25 |
| 2.6. Diskusija..... | 26 |
| 3. PRIMJENA TEORIJE EKSTREMA NA SUŠNA RAZDOBLJA BAYESOVIM PRISTUPOM | 33 |
| 3.1. Teorijska osnovica..... | 33 |
| 3.2. Vjerodostojnosti i priori | 36 |
| 3.3. Podaci i metode | 37 |
| 3.4. Rezultati | 38 |
| 3.4.1 <i>Primjena modela GEV na godišnje maksimume</i> | 38 |
| 3.4.2 <i>Primjena zaokruženog modela GP na nizove premašaja</i> | 45 |
| 3.4. Diskusija..... | 51 |
| 4. REGIONALNA ANALIZA SUŠNIH RAZDOBLJA U HRVATSKOJ | 53 |
| 4.1. Uvod..... | 53 |
| 4.2. Podaci i metode | 54 |
| 4.3. Rezultati | 56 |
| 4.3.1 <i>Prostorna analiza srednjih i maksimalnih trajanja sušnih razdoblja</i> | 56 |

| | |
|--|-----|
| 4.3.2 Trajanja sušnih razdoblja za različite povratne periode pomoću modela <i>GEV</i> | 63 |
| 4.3.3 Trajanja sušnih razdoblja za različite povratne periode pomoću modela <i>zGP</i> | 68 |
| 4.4. Diskusija..... | 77 |
| 5. ZAKLJUČAK | 79 |
| 6. BIBLIOGRAFIJA..... | 83 |
| DODATAK A..... | 90 |
| DODATAK B..... | 93 |
| DODATAK C | 98 |
| Životopis | 121 |
| Popis radova..... | 122 |

1. UVOD

Od svih hidrometeoroloških događaja suša se smatra jednom od najvećih prirodnih prijetnji socijalno-gospodarskom razvoju društva. Suša ne poznaje nacionalne granice i može biti vrlo rasprostranjena, njezin početak i trajanje teško se određuju, a posljedice suše mogu se osjećati i do nekoliko godina. U Hrvatskoj suša uzrokuje najveće gospodarske gubitke u usporedbi s ostalim elementarnim nepogodama (Perčec-Tadić i sur. 2014) i tijekom 21. stoljeća sve je jasnije da suša postaje trajni problem, osobito u poljoprivrednom sektoru. Tako je na primjer dugotrajna suša iz 2011. i 2012. godine uzrokovala ogromne gubitke u poljoprivrednoj proizvodnji, a prema meteorološkoj analizi bila je jedna od najduljih i najintenzivnijih suša u kontinentalnom dijelu Hrvatske (Cindrić i sur. 2016). Potom je 2015. godine ekstremna suša pogodila velike dijelove Europe, uključujući i Hrvatsku (Ionita i sur. 2017), a već 2017. godine, ponovno su zabilježeni ekstremno sušni uvjeti u ljetnim mjesecima na području zapadnog Balkana (García - Herrera i sur. 2019). Prepoznata je opasnost koju suša u Hrvatskoj može uzrokovati svojim negativnim posljedicama, te je odabrana među 11 glavnih rizika pri izradi Procjene rizika od katastrofa u Republici Hrvatskoj (DUZS 2015).

Suša je i globalni problem kojemu i međunarodne organizacije, poput Svjetske meteorološke organizacije (WMO) i Ujedinjenih naroda (putem Konvencije o suzbijanju dezertifikacije, UNCCD) posvećuju sve više pažnje (Sivakumar i sur. 2014). Naime, suša može biti i jedan od uzroka degradacije zemljišta koja pak može dovesti do dezertifikacije koja sve više zahvaća i mediteranske zemlje Europe. Hrvatska je jedna od osam zemalja Europske Unije koja se izjasnila pogođenom dezertifikacijom (ERS 2018). Znanstveno je potvrđeno da se u budućnosti na području Sredozemlja, kojemu pripada i Hrvatska, može očekivati povećana temperatura zraka kao i smanjenje količine oborine, a time i češće i intenzivnije pojave suše (Trumblay i sur. 2020).

Jedna od ključnih komponenti upravljanja odnosno smanjenja potencijalnih negativnih posljedica suše je *ustpostava monitoringa* suše. Za pravodobno praćenje suše koriste se razni pokazatelji, a u literaturi postoji velik broj indeksa za praćenje kako meteorološke tako i agronomske i hidrološke suše (Nagarajan 2009). Kako je suša dugoročna pojava koja se sporo razvija, u praksi se najčešće koriste oni indeksi za čiju su procjenu potrebne mjesečne i višemjesečne količine oborine te su dobar indikator za razvoj sustava upozorenja na potencijalnu sušu. Druga važna komponenta upravljanja sušom je *procjena rizika* od suše za koju je pogodnije koristiti prostornu razdiobu sušnih razdoblja (Vicente-Serrano i Begueria-

Portugues 2003, Vicente-Serrano 2006). Naime, analiza razdiobe vjerojatnosti određenih karakteristika sušnih razdoblja, poput trajanja i učestalosti, pruža korisnu informaciju za planiranje i upravljanje na područjima koja su sklona pojavi suše (Sirangelo i sur. 2017). Takva analiza omogućuje procjenu očekivanih trajanja sušnih razdoblja za različite povratne periode (u godinama) odnosno procjenu povratnih vrijednosti. Općenito, ključni element u primijenjenoj statistici ekstrema je procijeniti vjerojatnosti onih događaja koji još nisu izmjereni (Davison i Huser 2015). Premda sušna razdoblja sama po sebi nemaju isti učinak kao suša, ona svakako doprinose suši i to osobito u poljoprivredi za potrebe navodnjavanja, potiču povećanu potrebu za energijom, utječu na povećanje ili smanjenje peludi i drugih onečišćujućih tvari u zraku te povećavaju opasnost od požara (Trepanier i sur. 2015).

Do sada je u znanstvenim istraživanjima korišteno mnogo različitih teorijskih razdioba za prilagodbu nizovima sušnih razdoblja (npr. Serra i sur. 2014 i pripadni popis literature), a kako su u praksi najvažniji ekstremni događaji, prirodan odabir u svrhu procjene povratnih vrijednosti je primjena teorije ekstrema. Procjena ekstrema iz opaženih (mjenjenih) podataka provodi se statističkom analizom nizova **godišnjih maksimuma** (engl. *annual maxima*, AM) ili **nizova premašaja** (engl. *peak over threshold*, POT) pojedinog praga. Za potonje nizove ponekad se u literaturi koristi naziv nizovi djelomičnih trajanja (engl. *partial duration series*). Naime, u velikom broju znanstvenih radova, a osobito u klimatološkoj i hidrološkoj primjeni, uobičajeno je da se vremenski niz podijeli na komade (blokove) istog trajanja, nakon čega se za svaki komad odredi maksimalna/minimalna vrijednost (engl. *block maxima/minima*). Za nizove godišnjih maksimuma teorija upućuje na prilagođavanje opće razdiobe ekstrema (engl. *generalized extreme value distribution*, GEV). Tako se na primjer razdioba GEV primjenjuje za procjenu očekivanja maksimalnih godišnjih dnevnih količina oborine, maksimalnih i minimalnih vrijednosti dnevnih temperatura zraka, maksimalnih brzina vjetera i slično. Radi se o familiji razdioba koja uključuje Gumbelovu, Frechetovu i Weibullovu razdiobu kao posebne slučajeve, ovisno o predznaku parametra oblika. Međutim, ako je za analizu raspoloživ kompletan niz podataka, onda korištenje samo ekstremnih (godišnjih) vrijednosti može predstavljati značajni gubitak informacija (Coles, 2001). Naime, vrlo dugačko zabilježeno sušno razdoblje po trajanju blisko maksimalnom godišnjem sušnom razdoblju neće biti uključeno u analizu ukoliko se koriste samo godišnji maksimumi. Također, takvo dugo razdoblje u jednoj godini može biti dulje od najduljeg u nekoj drugoj godini. Pri analizama poplava, primjerice, godišnji maksimumi u sušnim godinama mogu biti vrlo mali i značajno utjecati na konačan rezultat procjena. Zato je u primijenjenim istraživanjima ekstremnih

veličina sve zastupljenija metoda premašaja praga, POT (Lang i sur. 1999, Vicente-Serrano i Begueria–Portugues 2003, Begueria 2005, Lana i sur. 2006, Anagnostopolou i Tolika 2012). Taj pristup se zasniva na kreiranju nizova koji se sastoje od podataka većih od nekog unaprijed određenog praga. Teorija nadalje upućuje na primjenu opće Paretove razdiobe (engl. *generalized Pareto distribution*, GP) na dobivene nizove premašaja (Coles 2001).

Raniji pristupi modeliranja nizova premašaja podrazumijevali su da se broj premašaja praga ponaša prema Poissonovoj razdiobi, a sami premašaji prema eksponencijalnoj razdiobi. To je impliciralo da se godišnji maksimumi prilagođavaju Gumbelovoj razdiobi. Osim eksponencijalne razdiobe bilo je u literaturi preporuka i za druge razdiobe za modeliranje premašaja, poput gama, Weibullove ili log–normalne (vidi popis u Madsen i sur. 1997ab). Ipak, krajem 1980-ih i početkom 1990-ih godina prošlog stoljeća sve je veći naglasak na primjeni opće Paretove razdiobe (Hosking i Wallis, 1997; Davison and Smith, 1990; Madsen i sur. 1997ab) koja uključuje eksponencijalnu razdiobu kao poseban slučaj. Primjena razdiobe GP na nizove premašaja (GP–POT) pretpostavlja da se godišnji maksimumi prilagođavaju općoj razdiobi ekstrema (GEV–AM) koja uključuje i Gumbelovu kao poseban slučaj. Opća razdioba ekstrema koristi se u velikom broju klimatoloških i hidroloških radova, posebno za procjene rizika od poplava. Međutim, kako je ranije navedeno, potencijalni nedostatak primjene teorije ekstrema na godišnje maksimume je moguće zanemarivanje ostalih događaja u godini koji značajno mogu premašiti godišnje maksimume iz nekih drugih godina.

Iako bi oba pristupa, GP–POT i GEV–AM, trebala asimptotski voditi prema istim rezultatima, za očekivati je da će POT pristup biti primjereniji za određivanje visokih kvantila kad se primjenjuje na izmjerene podatke. Stoga se redovito u znanstvenim radovima ta dva pristupa međusobno uspoređuju kako bi se preporučilo koji model je učinkovitiji za primjenu u praksi. Pri tome, glavni kriterij, osim uvažavanja prednosti i nedostataka pojedinog modela, treba biti učinkovitost pojedinog modela, na primjer s kojom točnošću pojedina metoda procjenjuje kvantile. Tako je na primjer Cunnane (1973), pri analizi poplava, usporedio varijance procjene T-godišnjeg povratnog perioda pomoću eksponencijalne razdiobe primijenjene na nizove premašaja i one dobivene primjenom Gumbelove razdiobe na godišnje maksimume. Pokazao je da procjena prvom metodom rezultira manjom varijancom ako je duljina nizova premašaja veća od $1.65N$, gdje je N broj godina mjerenja. Kasnije su Madsen i sur. (1997a) poopćili to istraživanje uspoređujući pristupe GP–POT i GEV–AM pokazavši da je taj uvjet kompleksniji i uvelike ovisi o odabiru metode procjene parametara te predznaku parametra oblika teorijske razdiobe. Oni su uspoređivali tri metode za procjenu parametara -

metoda maksimalne vjerodostojnosti (engl. *Maximum likelihood*, ML), metoda momenata (engl. *Method of moments*, MOM) i metoda otežanih momenata (engl. *Probability weighted moments*, PWM). Prema rezultatima Monte-Carlo simulacija, zaključili su da su za razdiobe s dugim repovima (pozitivnim parametrom oblika, k) učinkovitije procjene povratnih vrijednosti pomoću pristupa GP-POT i primjenom metode ML za procjenu parametara nego pristupa AM-GEV. Za negativne parametre oblika preferiraju pristup GP-POT-MOM, nadalje za $0 < k < 0.2$ su preporučili GEV-AM-MOM, a za $k > 0.2$ pristup GP-POT-ML. Ukoliko je niz kratak, ne preporučuju korištenje metode ML i u tom slučaju se i za $k > 0.2$ preporučuje pristup AM-GEV-MOM. Pri analizi sušnih razdoblja autori u novije vrijeme uglavnom koriste metodu linearnih momenata (engl. *L-moments*, LMOM; vidi poglavlje 2) za procjenu parametara teorijskih razdiobi bez usporednih analiza s drugim metodama (npr. Lana i sur. 2006; Serra i sur. 2016).

U ovom radu polazna je hipoteza da je opća Paretova razdioba primjerena za modeliranje nizova premašaja dobivenih premašajem dovoljno visokog praga, a opća razdioba ekstrema primjerena je za modeliranje godišnjih maksimuma. Osnovni problem koji se javlja u pristupu GP-POT je **odabir odgovarajućeg dovoljno visokog praga** što je teorijski uvjet za (asimptotsku) valjanost opće Paretove razdiobe. No, odabirom previsokog praga može doći do značajnog gubitka raspoloživih podataka, što u konačnici vodi do procjena slabe pouzdanosti, odnosno velike varijabilnosti. Neovisno od netom rečenog, za primjenu razdiobe ekstrema ulazni podaci trebaju biti nezavisni, pa treba raditi s nizovima koji nemaju značajnu autokorelaciju. To se može postići npr. grupiranjem, ali i odabirom dovoljno visokog praga. Razni autori često zadaju fiksni, unaprijed određeni visoki prag što u cijeli postupak unosi određenu dozu subjektivnosti. Tako na primjer Lana i sur. (2006) pri analizi sušnih razdoblja na Iberskom poluotoku za primjenu razdiobe GP unaprijed izabiru 95. percentil. Ipak, postoje i određena nastojanja da se nađu objektivne metode za odabir optimalnog praga. Vicente-Serrano i Begueria-Portugues (2003) preporučili su primjenu pristupa POT pri analizi sušnih razdoblja pokazujući da primjena Gumbelove razdiobe na godišnje maksimume potcjenjuje opaženi rizik od ekstremnih sušnih razdoblja. Autori preporučuju da se pri odabiru optimalnog praga uzme u obzir srednja vrijednost određenih visokih (90 do 99.75) percentila trajanja sušnih razdoblja. Begueria (2005) je ispitao pristup GP-POT na dnevnim količinama oborine s naglaskom na određivanje optimalnog praga. Zaključio je da se ne može odrediti jedan optimalni prag te je preporučio postupak koji se zasniva na srednjaku parametara

dobivenih za različite premašaje i to od najnižih pragova za koje vrijedi GP, do dovoljno visokih, iznad kojih postupak ukazuje na nestabilnost procjena. Međutim, Deidda (2010) tvrdi da je nedostatak takvog pristupa što konačni procijenjeni parametri ovise o lokalnim klimatskim uvjetima. On pak razvija i preporučuje metodu višestrukih pragova (engl. *multiple threshold method*) kojom se parametri procjenjuju iz medijana pojedinačnih vrijednosti. U istom radu dan je i detaljan pregled znanstvenih istraživanja vezanih uz POT pristup. Iako u literaturi postoje razne preporuke i smjernice za odabir prikladnog praga (npr. Lang i sur. 1999; Scarrot i MacDonald 2012; Langousis 2016), zbog fundamentalne razlike njihovih teorijskih osnova i odnosa njihovog ponašanja pri analizi različitih tipova podataka (npr. razdiobe s kratkim i s dugim repom, diskretni nasuprot kontinuiranim uzorcima) odabir praga i dalje ostaje otvoreno pitanje koje treba rješavati pojedinačno za određene primjene.

Primjena određene statističke razdiobe nužno uključuje metodu **procjene parametara razdiobe**, kvantificiranje nesigurnosti dobivenih procjena i testiranje prilagodbe modela. Pregled postojećih metoda za određivanje parametara opće Paretove razdiobe može se pronaći u radovima de Zea Bemudes i Kotz (2010a, 2010b) i Langousis (2016). Postoji više metoda za procjenu parametara razdioba ekstrema, a najčešće se u literaturi koristi metoda maksimalne vjerodostojnosti (ML), dok je u novije vrijeme sve češća, ranije već spomenuta, metoda L-momenata (Hosking i Wallis 1997). Obje metode imaju manu da stavljaju izvjesna ograničenja na raspon i/ili broj parametara koji se procjenjuju. Različite metode i pristupi u procjeni parametara razdiobe mogu dovesti do različitih procjena i posljedično do različitih interpretacija rezultata. Za razliku od uobičajenog frekvencijskog pristupa, u meteorološkim radovima rijetko je korišten Bayesov pristup za procjenu parametara. U tom se pristupu nepoznati parametri tretiraju kao veličine čije točne vrijednosti nose određenu neizvjesnost, koja se, pak, opisuje razdiobom vjerojatnosti. Krajnji rezultat je posteriorna razdioba koja sadrži sve informacije o parametrima, što uključuje i konačne procjene i njihove pouzdanosti. Za razliku od gore spomenutih metoda, bayesovska metoda ne stavlja ograničenja niti na raspon niti na broj procjenjivanih parametara. Također, moguće je izračunati i tzv. prediktivnu razdiobu proučavanog elementa koja u sebi uključuje kako nesigurnost procjena parametara, tako i nesigurnost vezanu za varijabilnost budućih opažanja (Wilks 2011). U usporedbi s meteorologijom, nešto više primjera s bayesovskom pristupom može se naći u hidrološkim istraživanjima. Ekstremna količina oborine analizira se na primjer u radovima Coles i Tawn (1996), Coles i Powel (1996), Egozcue i Ramis (2001), Katz i sur. (2002), Coles i sur. (2003), Coles i Pericchi (2003), Sisson i sur. (2006), Yoon i sur. (2010), Silva i sur. (2017). Little

(2005) je naveo prednosti i nedostatke kako frekvencijskog tako i bayesovskog pristupa te je predložio kombinaciju ta dva pristupa odnosno tzv. kalibrirani Bayesov pristup. Još do relativno nedavno (zadnjih 40-ak godina) Bayesov pristup je bio ograničen na lakše statističke probleme jer je postojao problem izračuna kompliciranih integrala kod višeparametarskih modela. Međutim, povećanje računalnih mogućnosti i razvoj Monte Carlo pristupa za izračun potrebnih posteriornih razdioba preobratio je slabosti Bayesovskog pristupa u njegove prednosti (Little 2005). Danas je Bayesov pristup prisutan u primjeni vrlo kompleksnih modela u istraživanju klime (npr. Minn i Hense 2006, Knutti 2010).

Analiza ekstremnih vrijednosti najčešće završava procjenom kvantila kojima odgovara visoka kumulativna vjerojatnost. Na primjer, želi se procijeniti iznos nekog klimatološkog elementa od interesa koji ima godišnju vjerojatnost premašaja 0.01. U praksi se takve ekstremne vjerojatnosti izražavaju povratnim razdobljem (u godinama) koji se definira kao srednji vremenski razmak između dva uzastopna premašaja pripadnog ekstremnog događaja (Wilks 2011). U daljnjem tekstu umjesto izraza 'povratno razdoblje' koristit ćemo izraz 'povratni period' kako bi se izbjegle moguće nejasnoće zbog čestog korištenja izraza „sušno razdoblje“.

U hrvatskoj literaturi, Makjanić (1977) je dao detaljan opis primjene opće razdiobe ekstrema (Jenkinsonov pristup) s primjerima za praktičnu primjenu u geofizici. Te metode su nadalje korištene u primijenjenoj klimatologiji (npr. Pleško 1976, Jurčec 1976) te u brojnim znanstveno-istraživačkim i stručnim radovima ponajviše autorice Gajić-Čapka (npr. Gajić-Čapka 1991, Čapka i Gajić-Čapka 1992, Gajić-Čapka i Cindrić 2011). Ti radovi su najčešće povezani s određivanjem projektnih parametara za potrebe izgradnje različitih hidrotehničkih objekata i stoga uključuju ekstremne količine oborine za kratke vremenske intervale od nekoliko minuta do 24 sata ili maksimalne dnevne količine oborine. Gajić-Čapka (2000) je testirala prilagođavanje teorijskih razdioba empiričkim podacima i istaknula opću razdiobu ekstrema (GEV) kao najprikladniju za maksimalne dnevne količine oborine u Hrvatskoj. U navedenom radu dan je opširan pregled istraživanja u svijetu i u Hrvatskoj tijekom 20. stoljeća usko vezanih uz problematiku oborinskih ekstrema. Gajić-Čapka i Cindrić (2011) primijenile su razdiobu GEV na oborinske indekse ekstrema (višednevne količine oborine) pri analizi klimatskih promjena. U studijama i elaboratima Državnog hidrometeorološkog zavoda (DHMZ) teorija ekstrema se, osim na godišnje maksimume oborine, primjenjuje i na podatke maksimalne i minimalne dnevne temperature zraka, maksimalnu visinu snježnog pokrivača, kao i na podatke brzine vjetra. Tako je Bajić (2011) u svojoj doktorskoj dizertaciji za procjenu

očekivanih maksimalnih 10 - minutnih brzina vjetra koristila opću Paretovu razdiobu. Teorija ekstrema nije ranije primjenjivana na sušna razdoblja. Naime, ranije je u radu Cindrić i sur. (2010) ispitano prilagođavanje dva stohastička modela za trajanja sušnih razdoblja i pokazano je da diskretni proces autoregresije - kliznog srednjaka (DARMA(1,1)) dobro opisuje sušna razdoblja umjerenog trajanja, ali da najčešće potcjenjuje vrlo duga sušna razdoblja. Time je otvoreno pitanje definicije i modeliranja sušnih razdoblja ekstremnog trajanja na području Hrvatske što je bila osnovna motivacija za ovo istraživanje.

Cilj ovog rada je preporučiti metodologiju za procjenu visokih kvantila trajanja sušnih razdoblja primjenom teorije ekstrema. U tu svrhu detaljno su ispitane različite metode procjene parametara razdioba GEV i GP kao i analiza odabira optimalnog praga za konstruiranje nizova premašaja. Osim toga, cilj je razmotriti mogućnosti primjene bayesovskog pristupa analizi sušnih razdoblja koji do sada nije korišten u klimatološkoj praksi. Glavni rezultat rada je, osim znanstvenog doprinosa razvoju metodologije, priprema prostorne raspodjele trajanja sušnih razdoblja u Hrvatskoj za različite povratne periode. Praktična svrha dobivenih rezultata i zaključaka je priprema meteorološke podloge za procjenu rizika od suše i s tim povezano strateško planiranje.

Rad je strukturiran na sljedeći način. U poglavlju 2 ispitane su i uspoređene uobičajene metode procjene parametara razdioba GEV i GP, metodom maksimalne vjerodostojnosti (ML) i metodom L-momenata (LMOM). Prvo su opisane pojedine metode, a potom su analizirane i diskutirane razlike u rezultatima njihove primjene na sušna razdoblja na dvije reprezentativne postaje u Hrvatskoj. Sušna razdoblja ponašaju se kao diskretni nizovi (zaokružene vrijednosti na cijeli broj) i klasična primjena pojedinih metoda dovodi do proturječnih rezultata (Pasarić i Cindrić 2019). Stoga se predlažu određene modifikacije metoda procjene parametara prilikom prilagodbe teorijskih razdioba ekstrema na sušna razdoblja. U trećem poglavlju primjena teorije ekstrema provedena je pomoću Bayesovog pristupa uvažavajući spoznaje iz prethodne analize klasičnih metoda (Cindrić i Pasarić 2018). Procijenjene su razdiobe vjerojatnosti odnosno posteriori pojedinih parametara razdioba GEV i GP i povratnih vrijednosti kao i prediktivne razdiobe sušnih razdoblja. Diskutirane su mogućnosti odabira optimalnog praga. Prilikom oba pristupa analizi (frekvencijskog i bayesovskog), na nizove godišnjih maksimuma primijenjena je GEV razdioba, dok je razdioba GP primijenjena na nizove premašaja koji su kreirani za širok raspon pragova. Usporedno su diskutirana ograničenja i prednosti primjene pojedine teorijske razdiobe. U četvrtom poglavlju, metodologija razrađena u prethodna dva poglavlja primijenjena je na

nizove sušnih razdoblja za 131 meteorološku postaju u Hrvatskoj. Procijenjena su očekivana trajanja sušnih razdoblja za različite povratne periode (10, 25, 50 i 100 godina) i prikazana je njihova regionalna raspodjela. Dobiveni rezultati raspravljani su na kraju svakog poglavlja, a glavni zaključci i prijedlozi za buduća istraživanja sažeti su u petom poglavlju.

2. PRIMJENA RAZDIOBE EKSTREMA NA SUŠNA RAZDOBLJA – UTJECAJ ZAOKRUŽIVANJA

2.1. Teorijska osnovica

Analiza ekstrema u geofizici gotovo uvijek je povezana s primjenom opće razdiobe ekstrema (GEV). Uz blage pretpostavke, razdioba GEV je granična razdioba za maksimalnu vrijednost od fiksnog broja nezavisnih, jednako raspodijeljenih varijabli. U praksi se najčešće primjenjuje na godišnje maksimume pod uvjetom da se unutar godine nalazi dovoljan broj podataka koji se mogu smatrati međusobno nezavisnima.

Kumulativna funkcija razdiobe GEV ima sljedeći oblik (Coles 2001):

$$G(x) = \exp \left\{ - \left[1 + \frac{k}{\alpha} (x - x_0)^{-1/k} \right] \right\}, \quad (2.1)$$

gdje je k parameter oblika (zakrivljenosti), α je parameter skale i x_0 parametar lokacije. U ovoj notaciji, razdioba je neograničena u desno ako je $k > 0$ s donjom granicom jednakom $x_0 - \alpha/k$. Takva razdioba se naziva Frechetova ili razdioba ekstrema tipa 2. U slučaju $k < 0$ razdioba je neograničena u lijevo s gornjom granicom $x_0 - \alpha/k$ i naziva se Weibullova ili razdioba ekstrema tipa 3. U graničnom slučaju kada k teži nuli, razdioba teži Gumbelovoj (tipa 1), neograničenoj ($-\infty < x < \infty$) razdiobi (slika 2.1). Budući da se u potonjem slučaju radi o dvoparametarskoj razdiobi, jednostavna je za primjenu i često se koristi u praksi, osobito kod oborinskih ekstrema. Treba napomenuti da se u literaturi (npr. Hosking i Wallis 1997) ponekad koristi i druga notacija jednadžbe 2.1 odnosno s obrnutim predznakom parametra k što onda dovodi do suprotne definicije ograničenosti Frechetove i Weibullove razdiobe.

U praksi, osobito u inženjerskim studijama, uobičajeno je teorijsku kumulativnu razdiobu izraziti pomoću njezine inverzne funkcije, odnosno funkcije kvantila, $x(G)$. Ako pretpostavimo da imamo jednu realizaciju (opažanje) u jedinici vremena (jedna godina ako se radi o godišnjim maksimumima), onda se kvantil $x(G)$ može iskazati i kao povratna vrijednost x_T za odgovarajući povratni period $T=1/p$, gdje je $p = 1-G$. Povratna vrijednost za GEV razdiobu može se izraziti na sljedeći način:

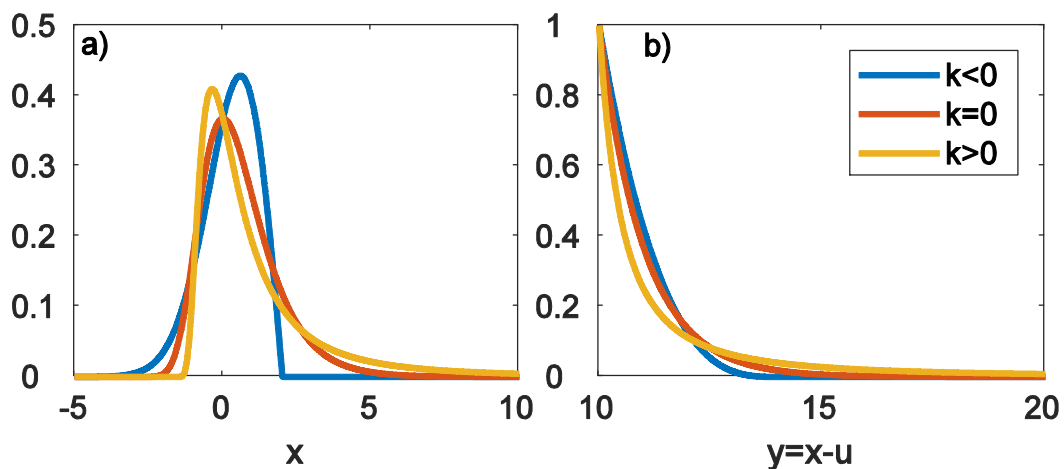
$$x_T = \begin{cases} x_0 - \frac{\alpha}{k} [1 - y_p^{-k}] & \text{za } k \neq 0 \\ x_0 - \alpha \log(y_p) & \text{za } k = 0 \end{cases}, \quad (2.2)$$

gdje je $y_p = -\log(1-p)$.

S druge strane, ukoliko su osim godišnjih maksimuma dostupni i drugi podaci, tada je primjerenije analizirati nizove premašaja određenog praga (engl. *peak-over-threshold*, POT). Takvi nizovi, za dovoljno visoki prag θ , teže općoj Paretovoj (engl. *Generalized Pareto*, GP) razdiobi čija kumulativna funkcija ima troparametarski oblik:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left[1 + \frac{k}{\sigma}(x - \theta) \right]^{-1/k} & \text{za } k \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{(x-\theta)}{\sigma}} & \text{za } k = 0 \end{cases}, \quad (2.3)$$

definiran oblikom (k), skalom (σ) i lokacijom (θ). Slično notaciji razdiobe GEV, razdioba GP je u navedenom obliku neograničena za $k > 0$ ($\theta \leq x < \infty$), dok za $k < 0$ gornja granica razdiobe iznosi $\theta - \sigma/k$. Za $k = 0$, razdioba vjerojatnosti teži eksponencijalnoj funkciji (slika 2.1).



Slika 2.1: Primjer gustoće vjerojatnosti a) opće razdiobe ekstrema (GEV) i b) opće Paretove razdiobe (GP) za različite predznake parametra oblika (k).

Prilikom kreiranja POT nizova, najčešće je unaprijed definiran određeni prag (μ) i za daljnju analizu se koriste podaci iznad tog praga. U tom slučaju, izabrani prag postaje parametar lokacije ($\theta = \mu$). Daljnje pojednostavljenje dobiva se tako da se razdioba GP primjenjuje na nizove premašaja (vrijednostima iznad praga oduzima se iznos praga) te zamjenom varijable x u (2.3) s $y = x - \mu$, za $x > \mu$. Razdioba GP se može opisati samo s dva

parametra jer tada parameter lokacije iznosi $\theta = 0$. Kumulativna funkcija razdiobe može se tada izraziti kao:

$$F(y) = \begin{cases} 1 - \left[1 + \frac{k}{\sigma} y\right]^{-1/k} & \text{za } k \neq 0 \\ 1 - e^{-y/\sigma} & \text{za } k = 0 \end{cases}, \quad (2.4)$$

Nadalje, važno svojstvo primjene razdiobe GP na nizove premašaja je to da ukoliko je razdioba GP prihvatljiv model za nizove premašaja nekog praga μ , tada će i nizovi premašaja svih većih pragova $\mu_1, \mu_1 > \mu$, također slijediti GP razdiobu s istim parametrom oblika k , dok će novi parameter skale σ_{μ_1} biti linearno ovisan o pragu i parametru oblika:

$$\sigma_{\mu_1} = \sigma_{\mu} + k(\mu_1 - \mu) . \quad (2.5)$$

Razdiobe GP i GEV su teorijski međusobno povezane (Langousis i sur. 2016 i pripadne reference). Naime, kada je prag μ dovoljno velik i $F(y) \rightarrow 1$, tada vrijedi:

i) razdioba premašaja $y = [x - \mu \mid x > \mu]$ teži razdiobi $F(y)$ ako i samo ako razdioba maksimuma od n nezavisnih vrijednosti od X teži razdiobi $G(x)$, kada $n \rightarrow \infty$,

ii) $F(y)$ ima oblik opće Paretove razdiobe (2.4) s jednakim parametrom oblika kao $G(x)$ dan relacijom (2.1),

iii) parametri skale i lokacije za $F(y)$ i $G(x)$ su teorijski povezani relacijom $\sigma = \alpha + k(\theta - x_0)$.

Treba napomenuti kako u analizi POT nizova, broj događaja nije fiksna u godini (kako vrijedi za godišnje maksimume), ali je razumno pretpostaviti da se godišnji broj (N) premašaja (dovoljno visokog praga) može opisati Poissonovom razdiobom vjerojatnosti:

$$\Pr\{X=x\} = \lambda^x e^{-\lambda} / x!, \quad x=0, 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

gdje parametar λ predstavlja prosječni godišnji broj premašaja. U T godina može se očekivati prosječno λT premašaja. Stoga se povratna vrijednost (za povratni period T) za GP razdiobu može izraziti kao:

$$x_T = \begin{cases} \theta - \frac{\sigma}{k} [1 - \lambda T^k], & \text{za } k \neq 0 \\ \theta - \sigma \log(\lambda T), & \text{za } k = 0 \end{cases}. \quad (2.7)$$

Time je definiran tzv. model Poisson–GP za premašaje (Smith 2003). Preko Poissonovog parametra λ , taj je model usko povezan s GEV razdiobom godišnjih maksimuma. Naime, ako označimo godišnje premašaje s $\{x_i, i = 1, \dots, N\}$, vrijedi sljedeća relacija:

$$\Pr\{\max_{1 \leq i \leq N} Y_i \leq x\} = \exp\left\{-\lambda\left(1+k\frac{x-\theta}{\sigma}\right)^{-1/k}\right\}. \quad (2.8)$$

Taj izraz poprima oblik razdiobe GEV (2.1) uz sljedeće zamjene:

$$\sigma = \alpha + k(\theta - x_0)$$

$$\lambda = \left(1+k\frac{\theta-x_0}{\alpha}\right)^{-1/k}$$

2.2 Metode za odabir prikladnog praga

Kako je u Uvodu spomenuto, valjanost primjene opće Paretove razdiobe na POT nizove zahtijeva prethodni odabir odgovarajućeg praga. Pri tome treba voditi računa o ravnoteži između pristranosti (engl. *bias*) i varijanci pojedinih procjena (Coles 2001). Naime, odabir previsokog praga rezultirat će kratkoćom niza, pa je nesigurnost (varijanca) procjena parametara velika. S druge strane, odabir niskih pragova može narušiti uvjet nezavisnosti u podacima što, pak, može dovesti do velikih odstupanja u procjenama. Prag treba biti dovoljno visok kako bi vrijedila asimptotska pretpostavka za primjenu razdiobe GP, odnosno da je pristranost što manja. Osim toga, često je jasno da nije nužan odabir samo jednog praga te da različiti (pogodni) pragovi mogu voditi k razdiobama s različitim duljinama repova. U tom smislu preporučuje se istražiti osjetljivost (procijenjenih parametara ili kvantila) u odnosu na razne odabire pragova (Scarrot i MacDonald 2012).

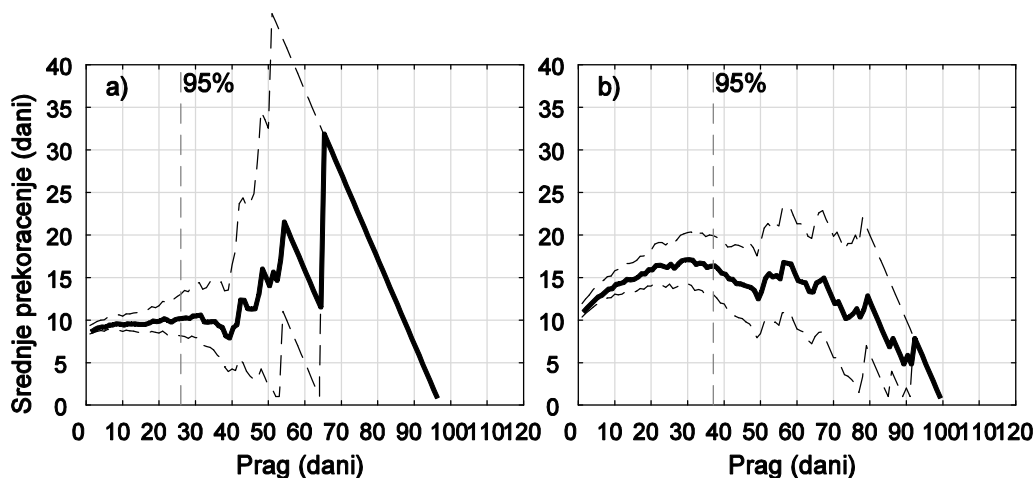
Premda je jasno da odabir praga može značajno utjecati na točnost dobivenih procjena (Langousis i sur. 2016), ne postoji jedinstvena metoda za njegov odabir. U relevantnim statističkim priručnicima (npr. Coles 2001) preporučuju se dvije osnovne metode za odabir praga, a baziraju se na grafičkim analizama. Prva metoda, koja je u praksi dosta zastupljena, zasniva se na tzv. grafu srednjeg premašaja (engl. *Mean excess plot* (MEP) ili *Mean residual life plot*). Na njemu se prikazuju srednje vrijednosti svih premašaja pojedinog praga u odnosu na pripadni prag (slika 2.2). Preporučuje se odabir onog praga iznad kojeg graf pokazuje linearno ponašanje. Naime, ova metoda zasniva se na svojstvu razdiobe GP da nakon odabira povoljnog praga (μ), njezina valjanost vrijedi i za sve veće pragove (μ_1) zadržavajući

konstantan parametar oblika, a parametar skale ponaša se prema vezi danoj s (2.5). Prema tome, srednja vrijednost premašaja pojedinog praga može se izraziti linearnom vezom:

$$E(X - \mu | X > \mu) = \frac{\sigma_{\mu}}{1-k} = \frac{\sigma_{\mu_1} + k(\mu - \mu_1)}{1-k} = A\mu + B, \quad (2.9)$$

gdje je $A=k/(1-k)$, $B=(\sigma_{\mu_1} - k\mu_1)/(1-k)$.

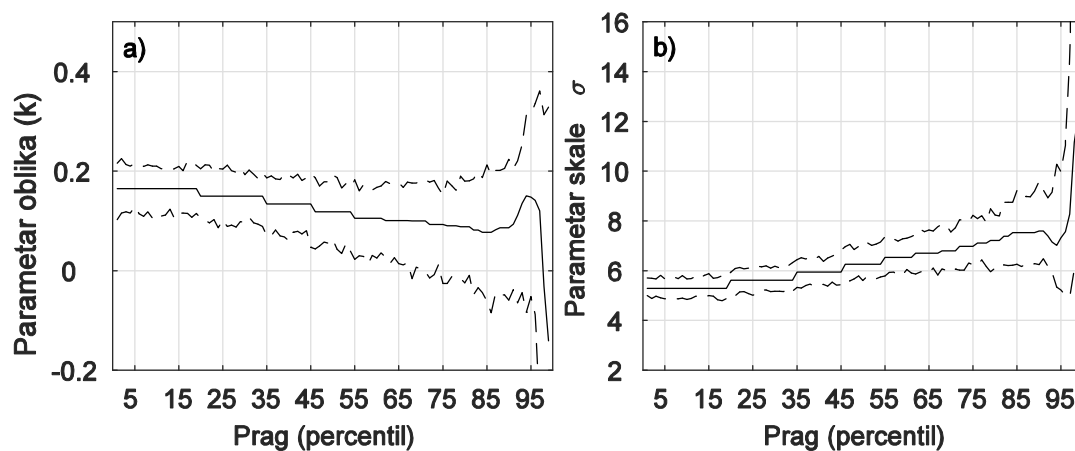
Odabir 'optimalnog' praga zasniva se dakle na odnosu prosječnog broja premašaja kao funkciji praga, te identificiranja najnižeg praga iznad kojeg se javlja linearna veza (2.9). Linearnom prilagodbom dobivaju se nagib i odsječak na y osi (A i B) iz kojih se mogu procijeniti parametri razdiobe GP k i σ koji pružaju prvi uvid u njihove iznose. Na slici 2.2 prikazan je MEP za nizove premašaja sušnih razdoblja na postajama DHMZ-a Slavonski Brod i Hvar, prema podacima iz razdoblja 1961.–2010. Sušna razdoblja ovdje su definirana kao nizovi uzastopnih sušnih dana s dnevnom količinom oborine manjom od 5 mm (više o definiciji sušnih razdoblja bit će u poglavlju 2.4). Crtkanim linijama označeni su i 95%-tni intervali pouzdanosti dobiveni metodom opetovanog uzorkovanja (engl. *bootstrap*) o čemu će više biti riječi u potpoglavlju 2.5.



Slika 2.2: Primjer grafa srednjih premašaja sušnih razdoblja na postajama a) Slavonski Brod i b) Hvar. Isprekidane krivulje prikazuju intervale povjerenja, a položaj na x-osi sive isprekidane linije označava iznos pripadnog 95. percentila.

Drugi način odabira praga zasniva se na prilagodbi razdiobe GP na nizove premašaja različitih pragova. Potom se grafički prikazuju odnosi parametra oblika i skale u ovisnosti o pragu. Iznad pogodnog praga za valjanost razdiobe GP, parametar k treba biti konstantan, dok se parametar skale treba ponašati linearno s pragom u skladu s relacijom (2.5). Primjer takvog

grafa prikazan je na slici 2.3, a dobiven je prema podacima meteorološke postaje Split–Marjan za razdoblje 1961.–2010.



Slika 2.3: Primjer odnosa procjene parametra a) oblika i b) skale razdiobe GP u ovisnosti o pragu, za nizove premašaja pojedinih pragova (označenih na x-osi) sušnih razdoblja na postaji Split–Marjan. Isprekidane krivulje označavaju 95%-tne intervale povjerenja.

Pored navedenih metoda, postoje i razne druge statističke metode u literaturi, a Langousis i sur. (2016) dali su detaljan pregled i kritički osvrt onih najviše korištenih. Navode opsežan pregled literature s posebnim osvrtom na hidrološka istraživanja koja se ponajviše odnose na analizu ekstremne oborine. Osim toga, primijenili su te metode na velik broj nizova količine oborine u SAD-u pružajući dokaze o svrhovitosti pojedinih metoda s posebnim osvrtom na mjere zaokruživanja podataka.

Pozivajući se na pregledni rad od Scarrot i MacDonald (2012), metode za odabir pragova razdiobe GP grupirali su u tri kategorije:

- i) neparametarske metode kojima se određuje točka promjene između ekstrema i ne-ekstrema u podacima,
- ii) grafičke metode u kojima se analizira linearno ponašanje parametara GP razdiobe (ili povezanih mjera) s povećanjem praga (MEP) i
- iii) testovi prilagodbe (engl. *goodness of fit*), koji za neku razinu značajnosti, lociraju najmanji prag takav da se može primijeniti razdioba GP.

Zaključili su da je grafička metoda (MEP) najmanje osjetljiva kad se analiziraju vrijednosti koje su u određenoj mjeri zaokružene (na primjer za oborinu mjera zaokruživanja iznosi 0.1 mm). Međutim, unatoč jednostavnosti primjene ovih metoda, jasno je da je odabir praga u određenoj mjeri subjektivan jer se bazira na vizualnom ispitivanju linearne veze. Taj

nedostatak posebno dolazi do izražaja kad je potrebno analizirati istovremeno velik broj nizova te je u tom smislu potrebna određena vrsta objektivnosti.

2.3. Metode za procjenu parametara teorijskih razdioba ekstrema

Postoji velik broj metoda za procjenu parametara razdiobe GP, a detaljan pregled dali su de Zea Bermudez i Kotz (2010a, 2010b). Općenito, najpopularnija je **metoda maksimalne vjerodostojnosti** (ML). Ona pruža dobre procjene parametara razdioba ekstrema i pripadnih intervala povjerenja ukoliko je niz dovoljno dug kako bi odgovarajuće asimptotičke relacije bile zadovoljene u dovoljnoj mjeri.

Neka je (x_1, \dots, x_n) opaženi uzorak slučajne varijable \mathbf{x} , s funkcijom gustoće $f(x_i; \phi)$, gdje je $\phi \in \Phi$ nepoznati parametar. Definiramo funkciju vjerodostojnosti L na sljedeći način:

$$L(\phi) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \phi).$$

L predstavlja vjerojatnost opaženih podataka x_i kao funkciju parametara ϕ . Procjena parametra ϕ je ona vrijednost ϕ' za koju funkcija vjerodostojnosti postiže maksimum, $L(\phi') = \max L(\phi)$. Statistiku $\phi'(x)$ nazivamo procjeniteljem parametra ϕ metodom maksimalne vjerodostojnosti (engl. *maximum likelihood estimator*).

Dakle, postupak određivanja parametara metodom ML zasniva se na odabiru onog modela koji daje najveću vjerojatnost (fiksni) opaženim podacima. U praksi se uglavnom koristi logaritam funkcije vjerodostojnosti:

$$l(\phi) = \log L(\phi) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i; \phi).$$

Logaritam funkcije vjerodostojnosti za parametre razdiobe GEV, za $k \neq 0$ ima sljedeći oblik (Coles 2001):

$$l(k, \alpha, x_0) = -n \log \alpha - (1 + 1/k) \sum_{i=1}^n \log \left[1 + k \left(\frac{x_i - x_0}{\alpha} \right) \right] - \sum_{i=1}^n \left[1 + k \left(\frac{x_i - x_0}{\alpha} \right) \right]^{-1/k}, \quad (2.10)$$

uz uvjet da vrijedi:

$$1 + k \left(\frac{x_i - x_0}{\alpha} \right) > 0, \quad \text{za } i = 1, \dots, n.$$

Kako je Razdioba GEV ograničena (s gornje strane u slučaju $k < 0$, odnosno s donje strane u slučaju $k > 0$) za pojedine raspone parametra oblika neće biti zadovoljeni uvjeti regularnosti (Hogg i sur. 2013) koji su nužni za valjanost asimptotičkih svojstava metode ML.

Tako u slučaju kad je $-1 < k < -0.5$, moguć je procjenitelj metodom ML, ali neće vrijediti asimptotska svojstva, dok za $k < -1$ nije moguće procijeniti parametre metodom ML. Međutim, Coles (2001) napominje kako se pri modeliranju ekstrema rijetko nailazi na razdiobe kratkih repova, tj. $k \leq -0.5$, pa u praksi uglavnom nema prepreka za korištenje ove metode.

U slučaju razdiobe GP, ova metoda se može koristiti samo za procjenu parametara oblika i skale, dok parametar lokacije mora biti unaprijed zadan. Neka je y_1, \dots, y_n niz premašaja praga μ . Za $k \neq 0$ logaritam funkcije vjerodostojnosti za parametre razdiobe GP ima sljedeći oblik:

$$l(\sigma, k) = -n \log \sigma - (1 + 1/k) \sum_{i=1}^n \log(1 + ky_i / \sigma) , \quad (2.11)$$

uz uvjet da vrijedi:

$$1 + ky_i / \sigma > 0, \quad \text{za } i = 1, \dots, n .$$

Pored metode ML, u klimatološkoj i hidrološkoj praksi se tijekom posljednje dvije dekade često koristi metoda linearnih momenata, tzv. **metoda L-momenata** (Hosking i Wallis 1997). L-momenti (LMOM) su modifikacija otežanih momenata (PWM). Naime, PWM nije jednostavno interpretirati direktno kao mjere oblika i skale razdiobe vjerojatnosti već je za tu svrhu potrebna određena linearna kombinacija tih momenata koju čine L-momenti.

Označavaju se s λ_r , a najvažniji L-momenti za opisivanje razdiobe vjerojatnost su: λ_1 -mjera oblika; λ_2 - mjera skale; $\tau = \lambda_1 / \lambda_2$ - koeficijent L-varijacije; $\tau_3 = \lambda_3 / \lambda_2$ - koeficijent L-asimetričnosti; i koeficijent L-spljoštenosti $\tau_4 = \lambda_4 / \lambda_2$. Hosking i Wallis (1997) dali su izraze za te najvažnije L-momente za veći broj teorijskih razdioba, uključujući i razdiobe GEV i GP. Iz pripadnih L-momenata pojedine razdiobe mogu se procijeniti parametri razdiobe.

Izrazi za procjenu GEV parametara glase:

$$\begin{aligned} k &= 7.8590c + 2.9554c^2 & c &= \frac{2}{3 + \tau_3} - \frac{\log 2}{\log 3} \\ \alpha &= \frac{\lambda_2 k}{(1 - 2^{-k})\Gamma(1 + k)} \\ x_0 &= \lambda_1 - \alpha \{1 - \Gamma(1 + k)\} / k \end{aligned} \quad (2.12)$$

Metoda L-momenata omogućuje procjenu sva tri parametra razdiobe GP na sljedeći način:

$$\begin{aligned} k &= (1 - 3\tau_3) / (1 + \tau_3) \\ \sigma &= (1 + k)(2 + k)\lambda_2 \quad , \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\theta = \lambda_1 - (2 + k) \lambda_2$$

gdje su λ_1 , λ_2 i τ_3 nazivaju L - lokacija, L -skala i L -asimetričnost. Te vrijednosti izračunavaju se iz L -momenata samog uzorka (vidi Hosking i Wallis 1997).

Ukoliko je poznata lokacija, preostala dva parametra razdiobe GP procjenjuju se iz sljedeće relacije:

$$\begin{aligned} k &= (\lambda_1 - \theta) / \lambda_2 - 2 \\ \sigma &= (1 + k)(\lambda_1 - \theta) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Treba napomenuti kako Hosking i Wallis (1997) koriste suprotnu notaciju parametra oblika k za definiranje razdiobi vjerojatnosti nego što je opisano u poglavlju 2.1. Stoga pri korištenju formula (2.12) – (2.14) za parametar k treba promijeniti predznak kako bi rezultati za procjenu parametara bili usklađeni s onima dobivenim primjenom metode maksimalne vjerodostojnosti.

L -momenti za procjenu parametara teorijskih razdioba imaju veliku praktičnu primjenu u regionalnim klimatološkim analizama (npr. Saidi i sur. 2012). Naime, grafičkim prikazom istovremenog odnosa empirijskih vrijednosti L -momenata procijenjenih iz opaženih nizova na većem broju postaja i pripadnih vrijednosti različitih teorijskih razdiobi, tzv. dijagramom omjera L -momenata (engl. *L-moments ratio diagram*), lako se uočavaju regionalne sličnosti te regionalna prilagodba pojedine razdiobe na empirijske nizove. Primjer takvog jednog dijagrama nalazi se u dodatku A (slika A.1).

2.4. Podaci i Monte-Carlo simulacije

Sušna razdoblja (engl. *dry spells*, DS) definiraju se kao uzastopni nizovi sušnih dana. U ovom radu koristit ćemo tri različite granične vrijednosti dnevne količine oborine za definiranje sušnog dana: 1 mm, 5 mm i 10 mm. Tako dobivamo tri kategorije sušnih razdoblja koje ćemo u nastavku teksta označavati s DS1, DS5 i DS10. Nizovi sušnih razdoblja izražavaju se trajanjima u (cjelobrojnim) danima. U literaturi se često koristi i granična vrijednost od 0.1 mm/dan kao najmanja količina oborine koju registriraju mjerni instrumenti (npr. Cindrić i sur. 2010). Međutim, u pojedinim se bazama podataka (osobito na većoj prostornoj skali) kao najmanje vrijednosti detektiraju i drugi, nešto veći iznosi, do 1 mm (Serra i sur. 2014). Stoga je za kreiranje nizova najniže kategorije sušnih razdoblja pouzdanija definicija pomoću DS1. Osim toga, maksimalna trajanja sušnih razdoblja kategorije DS1

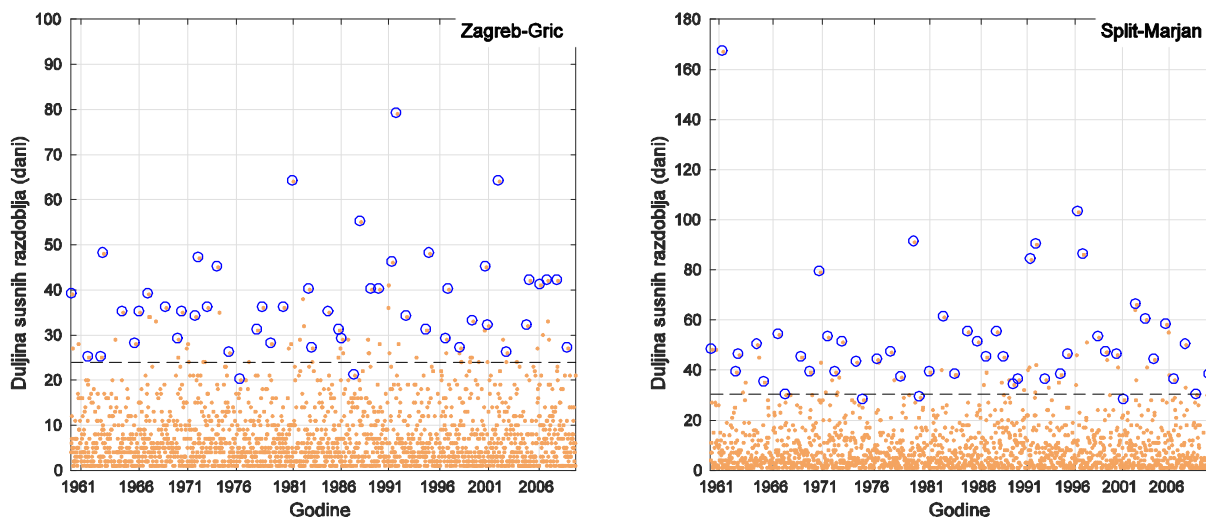
uvrštena su u glavni skup indeksa oborinskih ekstrema koje Svjetska meteorološka organizacija preporučuje za proučavanje klimatskih promjena (WMO 2009). Druga kategorija sušnih razdoblja korisna je u poljoprivredi budući da je nakon dugog slijeda dana s količinom oborine manjom od 5 mm sadržaj vlage u tlu tako nizak da može smanjiti vertikalnu propusnost tla za vodu (Ruiz-Sinoga i sur. 2012). Treća kategorija, DS10, povezana je s minimalnom dnevnom količinom oborine (10 mm) koja može utjecati na sadržaj vode u tlu na dubinama ispod 5 cm. Dodatno, vrlo duga sušna razdoblja mogu utjecati na pojavu šumskih požara kao i na degradaciju zemljišta.

U ovom poglavlju ispitano je ponašanje prethodno opisanih metoda ML i L-momenata za procjenu parametara GEV i razdiobe GP koje su primijenjene na nizove godišnjih maksimalnih (AM) sušnih razdoblja odnosno na nizove premašaja (POT), za sve tri kategorije sušnih razdoblja (DS1, DS5, DS10).

Naime, te metode su uglavnom kreirane i namijenjene za procjenu parametara kontinuiranih razdiobi, dok su sušna razdoblja raspodijeljena diskretno, a to se u literaturi, te pogotovo u praksi, često zanemaruje ili ne naglašava u dovoljnoj mjeri. Ipak, istraživanje zaokruženih podataka privuklo je pažnju pojedinih znanstvenika (npr. Heitjan 1989; Bai i sur. 2009). Da bismo ustanovili pod kojim uvjetima se navedene metode mogu koristiti za analizu sušnih razdoblja, primijenit ćemo Monte Carlo (MC) simulacije. Više o načinu primjene MC simulacija opisano je u poglavlju 2.5.2.

U prvom koraku koristimo realne podatke odnosno opažena trajanja sušnih razdoblja kategorije DS5 na dvije meteorološke postaje: Zagreb–Grič (45°49' N, 15°59' E) i Split–Marjan (43°31' N, 16°26' E) kao predstavnike kontinentalnog i mediteranskog podneblja. Te postaje pripadaju glavnoj mreži meteoroloških postaja Državnog hidrometeorološkog zavoda, a u nastavku rada označavat ćemo ih sa ZG i ST. Korišteni podaci dnevne količine oborine potrebni za kreiranje nizova sušnih razdoblja obuhvaćaju razdoblje 1961.–2010. tijekom kojeg je izvedeno sveukupno 1962 sušna razdoblja na postaji ZG i 1643 na postaji ST (Slika 2.4).

2. PRIMJENA RAZDIOBE EKSTREMA NA SUŠNA RAZDOBLJA – UTJECAJ ZAOKRUŽIVANJA



Slika 2.4: Trajanja sušnih razdoblja kategorije DS5 (točke) za postaje Zagreb–Grič (ZG, lijevo) i Split–Marjan (ST, desno) tijekom vremenskog razdoblja 1961.–2010. Kružići označavaju godišnje maksimume, a horizontalna crtkana linija 95. percentil pripadnog niza.

Primjena teorije ekstrema općenito pretpostavlja međusobnu nezavisnost podataka, dok meteorološki nizovi podataka uglavnom sadrže određenu korelaciju što, pak, može uzrokovati da premašaji nekog praga budu grupirani (Begueria 2005). Stoga je, prije same primjene teorije ekstrema, važno ispitati postoje li naznake zavisnosti u podacima. Za sve nizove sušnih razdoblja (dulja od jednog dana) na postajama ZG i ST izračunata je funkcija autokorelacije (acf) za 10 koraka čiji se prikazi nalaze u dodatku A (slika A.2). Rezultati ukazuju da se autokorelacija za gotovo sve korake nalazi unutar 95%–intervala pouzdanosti (IP95). Ipak, na postaji ST, za kategoriju DS1 odnosno DS10, vrijednosti acf ukazuju na postojanje određene korelacije do drugog odnosno prvog koraka i nalaze se izvan IP95. Međutim, ako se intervali pouzdanosti izračunaju pomoću metode opetovanog uzorkovanja (s 80% izvornog niza), tada oni obuhvaćaju sve vrijednosti acf za sve korake (nije prikazano). S druge strane, čim se poveća prag premašaja (veći od jedan dan), pripadne acf se smanjuju. Iz navedenog je razumno pretpostaviti da su trajanja sušnih razdoblja međusobno nezavisna, odakle izlazi da se teorija ekstrema može direktno primijeniti bez prethodne prerade vremenskih nizova (npr. formiranjem grupa). Dodatno, treba napomenuti da s povećanjem dnevne granične količine oborine za definiranje sušnih razdoblja, dolazi do određenog združivanja budući da DS više kategorije uključuju i one nižih kategorija.

Kako će kasnije biti pokazano (potpoglavlje 2.5), primjena metoda ML i L-momenata za procjenu parametara razdiobe GP na nizove premašaja sušnih razdoblja ukazuju na

određena razilaženja u rezultatima. Zbog toga detaljnijoj analizi pristupamo pomoću MC simulacija. Prilikom kreiranja MC simulacija nizova sušnih razdoblja, pretpostavljamo da je prag za kreiranje nizova premašaja dovoljno visok tako da možemo smatrati da su nizovi premašaja nasumični i raspodijeljeni prema razdiobi GP. Pri tome, treba voditi računa o parametru oblika (k) i skale (σ), o duljini nizova (n), o iznosu zaokruživanja (Δx) i primijenjenom pragu (μ). Konačni rezultati neće odvojeno ovisiti o σ i Δx već o njihovom omjeru $\sigma/\Delta x$ (vidi potpoglavlje 2.5).

Međutim, budući da su sušna razdoblja zaokružena na cijeli broj, možemo postaviti $\Delta x = 1$, te razmatrati rezultate samo u odnosu na σ . Preliminarna analiza sušnih razdoblja (za sve tri kategorije (DS1, DS5 i DS10) na 25 postaja u Hrvatskoj (mreža postaja opisana u Cindrić i sur. 2010) pokazala je da je parametar skale razdiobe GP uglavnom uvijek veći od 5, a samo iznimno je manji od 3.5 (Slika A.3). Stoga ćemo prilikom simuliranja sušnih nizova koristiti fiksni parametar skale, odabirom $\sigma = 4$ te varirati parametar oblika k . Za klimatološke ili hidrološke varijable, pa tako i za sušna razdoblja, općenito je teško fizikalno opravdati neku gornju granicu za parametar oblika (što bi onda vodilo na teorijsku ograničenost trajanja DS). No, u literaturi se, prilikom primjene razdiobe GP na različite varijable, pronalaze različiti predznaci parametra oblika (Coles i sur. 2003; Lana i sur. 2006; Serra i sur. 2016). Zbog toga, i radi konzistentnosti, prilikom MC simulacija analizirat ćemo sljedeći raspon parametra oblika k : -0.4, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2 i 0.4. Za nizove premašaja, koristit ćemo prag $\mu = 1$, te varirati duljinu nizova $n = 100, 500, 1000$ i 2000 kako bi pokrili tipične duljine sušnih razdoblja u praksi. Dakako, duljine realnih nizova će varirati ovisno o raspoloživom razdoblju mjerenja te o odabranom pragu. I na kraju, GP nizovi će biti simulirani s parametrom lokacije $\theta = 0$. Taj izbor parametra lokacije neće utjecati na konačne rezultate budući da je početna lokacija već izgubljena prilikom rezanja na pragu.

Ukratko, za svaki k i n generirano je 1000 nizova $\{x_i, i = 1, \dots, n\}$ duljine n koje imaju razdiobu GP ($k, 4, 0$). Svaka vrijednost niza je zaokružena na cijeli broj, a POT nizovi su kreirani rezanjem na pragu $\mu = 1$. Za svaki simulirani niz, kako egzaktni (kontinuirani) tako i zaokruženi (diskretni), parametri razdiobe GP su procijenjeni pomoću metode ML, te metode LMOM za procjenu dva (LMOM2) i tri (LMOM3) parametra. Potom su analizirana odstupanja i pripadne nesigurnosti procjena. Točnije, zanimaju nas razdiobe odstupanja procijenjenih vrijednosti parametara od točnih. Kako bi ih što jasnije grafički prikazali, koristit ćemo sedam kvantila ($q_5, q_{10}, q_{25}, q_{50}, q_{75}, q_{90},$ i q_{95}) umjesto uobičajenih grafova

odstupanja (pristranost) ili korjena srednjeg kvadratne pogreške (engl. *Root mean square error*).

Drugi pristup analizi zaokruženih nizova moguć je korištenjem postupka koji ćemo ovdje nazvati metoda treperenja (engl. *jittering*) na čiju primjenu rijetko nailazimo u klimatološko – statističkoj literaturi (Mudelsee 2014). Ideja se sastoji u tome da se na zaokružene nizove (sušna razdoblja) dodaju nasumične vrijednosti iz uniformne razdiobe s intervalom $[-0.5, 0.5]$ kako bi se dobili novi nizovi koji su statistički bliski originalnom (kontinuiranom) nizu. Tada se parametri procjenjuju na uobičajen način metodama koje su prikladne kontinuiranim razdiobama. Cijeli postupak radi dobro ukoliko je pripadna kontinuirana razdioba GP približno konstantna na intervalima $[x_t - 0.5, x_t + 0.5]$.

Na kraju, ocjena prikladnog praga za sušna razdoblja testirat će se usporedbom procijenjenih parametara razdiobe GP u odnosu na različite pragove.

U daljnjem tekstu, prilikom primjene metoda ML i LMOM za procjenu parametara GEV i razdiobe GP bit će korištene sljedeće skraćenice: GEV–ML, GEV–LMOM3 te GP–ML, GP–LMOM3 i GP–LMOM2.

2.5. Rezultati

2.5.1. Analiza realnih podataka i problem zaokruživanja

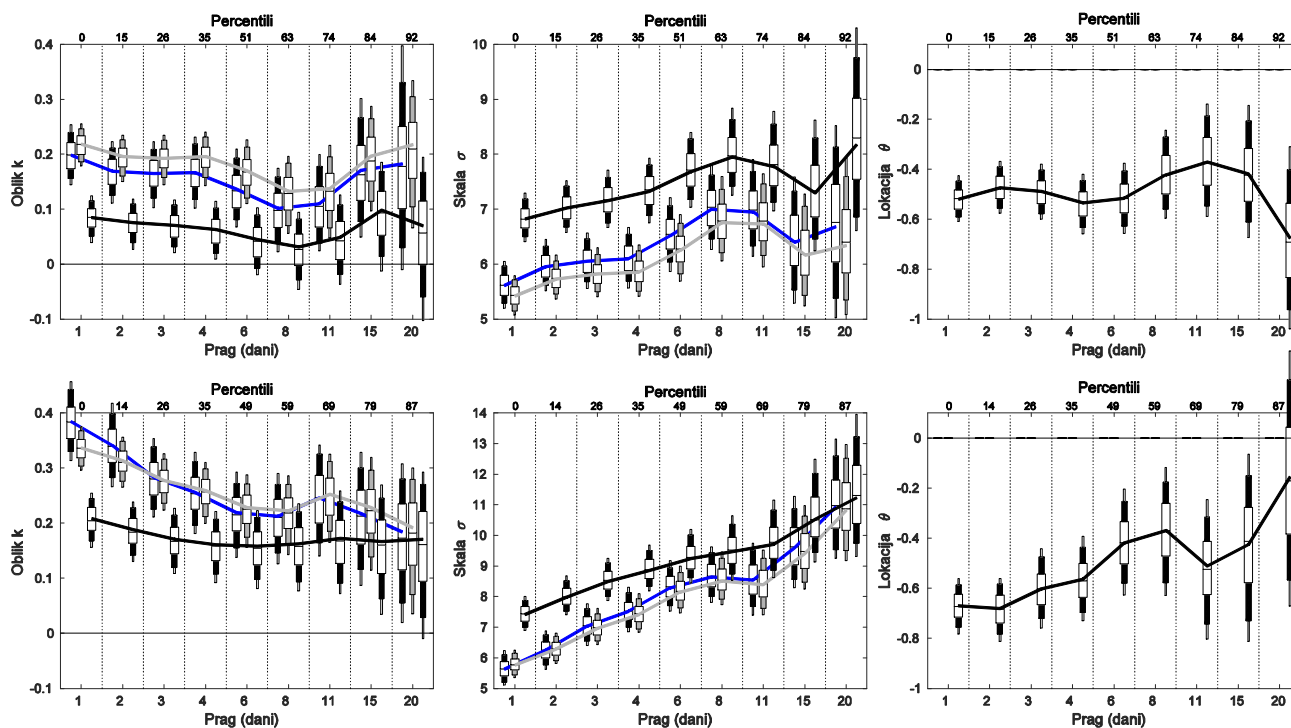
Metode za procjenu parametara razdiobe GP, ML i L-momenti s dva i tri parametra (LMOM3 i LMOM2), primijenjene su na nizove premašaja (POT) sušnih razdoblja na postajama ZG i ST. POT nizovi su kreirani na sljedeći način: prvo su odbačena sva trajanja sušnih razdoblja kraća od određenog unaprijed definiranog praga, a potom je od preostalih premašaja oduzet sam prag. Za ocjenu nesigurnosti procjena parametara korištena je metoda opetovanog uzorkovanja (engl. *bootstrap*) (npr. Reiss i Thomas 2007). Iz svakog izvornog niza sušnih razdoblja na slučajan način je izvučeno 1000 uzoraka duljine 80% izvornog niza. Na svakom tako dobivenom uzorku primijenjene su iste metode za procjenu parametara kao na izvornom nizu. Razdiobe vrijednosti parametara dobivenih na ovaj način sažete su pomoću sedam kvantila ($q_5, q_{10}, q_{25}, q_{50}, q_{75}, q_{90},$ i q_{95}) te su prikazane na slici 2.5.

Ova slika nosi više poruka. Prvo, kako je i očekivano, nesigurnost procjena parametara raste s porastom praga budući da se broj premašaja smanjuje. To je osobito izraženo za visoke pragove. Na primjer, za postaju ZG i odabir praga sušnog razdoblja od 20 dana, 90% procjena parametra oblika metodom GP–LMOM3 obuhvaća širok raspon vrijednosti ukazujući na

različite mogućnosti oblika razdiobe, od ograničenog ($k = -0.103$) do neograničenog ($k = 0.195$). Rezultati za postaju ST također ukazuju na mogućnosti kako kratkog repa razdiobe ($k = -0.010$) tako i prilično dugog ($k = 0.293$). U oba slučaja, korištenje visokih pragova (oko 90-tog percentila) vodi prema velikoj nesigurnosti procjena parametra oblika. K tome, treba napomenuti da je u navedenim primjerima broj sušnih razdoblja prilično velik, preko 1600 trajanja u 50 godina mjerenja, pa u mnogim slučajevima neće biti moguće smanjiti nesigurnost uvođenjem većeg broja podataka. Prema tome, visoke pragove treba koristiti s oprezom kako bi se kontrolirala nesigurnost procjena.

Nadalje, na slici 2.5 je dojmljivo razilaženje procjena parametara razdiobe GP metodom GP–LMOM3 od onih dobivenih metodama GP–ML i GP–LMOM2. Za obje postaje iz danog primjera potonje dvije metode upućuju na znatno dulje repove pripadnih općih Paretovih razdiobi u odnosu na razdiobu dobivenu metodom GP–LMOM3. Osim toga, procjene parametra oblika za ZG dobivene pomoću metode GP–LMOM3 su prilično stabilne za raspon pragova između 2 i 11 dana. Prosječna vrijednost parametra oblika iz tog raspona pragova iznosi 0.06. Primjenom jednadžbe (2.5), nagib pripadnog pravca iznosi 0.097 (uz $r^2 = 0.78$). Procjene parametra oblika pomoću druge dvije metode, GP–ML i GP–LMOM2, također se mogu smatrati prilično stabilnim preko istog raspona pragova, ali odgovarajuće srednje vrijednosti iznose 0.142 odnosno 0.171. Za postaju ST, procjene parametra oblika mogu se smatrati stabilnim preko svih pragova većih od 3 dana. Prosječna vrijednost preko metode GP–LMOM3 iznosi $k = 0.167$ što se dobro slaže s nagibom pravca koji iznosi 0.152 (uz $r^2 = 0.99$). Međutim, za druge dvije metode, nije tako jasan raspon pragova preko kojeg je parametar oblika stabilan. Pripadne srednje vrijednosti parametra oblika za raspon pragova iznad 3 dana iznose 0.231 i 0.238, što su znatno veće vrijednosti od one dobivene metodom GP–LMOM3.

Zanimljivi su i rezultati procjena parametra lokacije koji je moguće izračunati samo metodom GP–LMOM3 (desna kolona na slici 2.5). Za obje postaje, srednja vrijednost procjena parametra lokacije preko cijelog raspona pragova je blizu -0.5. S druge strane, kako je ranije napomenuto, parametar lokacije za nizove premašaja bi trebao biti nula. Do ovog odstupanja dolazi zbog zaokruživanja, što će biti diskutirano u potpoglavlju 2.6.



Slika 2.5: Rezultati analize sušnih razdoblja kategorije DS5 primjenom metode POT-GP na postaji Zagreb–Grič (gornji red) i Split–Marjan (donji red) za devet pragova (označeni na abscisi) nakon primjene tri metode za procjenu parametara: GP–ML, GP–LMOM3 i GP–LMOM2. Procijenjene vrijednosti parametra oblika (k , lijeva kolona), skale (σ , srednja kolona) i lokacije (θ , desna kolona) povezane su linijama (crnom za GP–LMOM3, plavom za GP–ML i sivom za GP–LMOM2). Pripadne razdiobe dobivene reuzorkovanjem sažete su pomoću sedam kvantila (q_5 , q_{10} , q_{25} , q_{50} , q_{75} , q_{90} i q_{95}) označenih stupićima. Za svaku vrijednost praga prikazane su razdiobe za tri metode (GP–ML, lijevo, GP–LMOM2, sredina i GP–LMOM3, desno). Na gornjoj osi naznačene su pripadne vrijednosti percentila za pojedini prag.

Konačno, korisno je vidjeti kako se ponaša razdioba GEV kad se primijeni na nizove godišnjih maksimuma. Naime, razdiobe GEV i GP bi trebale imati isti parametar lokacije (Coles 2001). Rezultati su navedeni u tablici 2.1. Procjena parametra oblika razdiobe GEV za postaju ZG pomoću metode ML iznosi 0.060, a preko metode L-momenata 0.080. Obje procjene se dobro slažu s procjenama parametra oblika razdiobe GP koje iznose 0.071 pomoću metode GP–LMOM3 (za prag premašaja 3 dana). Međutim, sve tri navedene vrijednosti se ne slažu s procjenom pomoću metode GP–ML koja iznosi 0.166. Za postaju ST, procjena parametra oblika razdiobe GEV pomoću metode GEV–ML iznosi 0.283, a metodom GEV–LMOM iznosi 0.307 s izrazito širokim intervalima pouzdanosti. Na prvi pogled, ta vrijednost je bliska vrijednosti parametra oblika razdiobe GP pomoću metode ML (0.283), a

različita od procjene pomoću GP–LMOM3 (0.171). Ipak, pomnijim ispitivanjem utvrđeno je da niz na postaji ST sadrži ekstremno dugo sušno razdoblje u trajanju od 167 dana (zabilježeno 1962. godine) koje se jasno izdvaja u odnosu na ostale vrijednosti (slika 2.4). Kako bi procijenili utjecaj ovog događaja na rezultate, taj podatak u izvornom nizu zamijenjen je s pripadnim medijanom (46 dana) te su ponovljeni svi proračuni (u tablici 2.1 odgovarajući rezultati su označeni sa ST*). U tom slučaju procjena parametra oblika razdiobe GEV iznosi 0.170 pomoću metode ML, odnosno 0.174 pomoću metode LMOM. Te vrijednosti se dobro slažu s procjenama dobivenim iz GP–LMOM3 (0.150), a razilaze se s procjenom iz GP–ML (0.267). Usputno, može se zaključiti da je model GP otporniji na izdvojenice (engl. *outliers*) od modela GEV. Osim toga, rezultati ukazuju da su procjene parametra oblika razdiobe GP manje nesigurne od pripadnih procjena razdiobe GEV.

Na kraju, možemo zaključiti da procjene pomoću GP–LMOM3 daju prihvatljive rezultate za obje postaje, dok se procjene pomoću GP–ML i GP–L2 jasno razilaze. Kako bi detaljnije ispitali zbog čega dolazi do ovih razlika, u sljedećem podpoglavlju korištene su Monte Carlo simulacije.

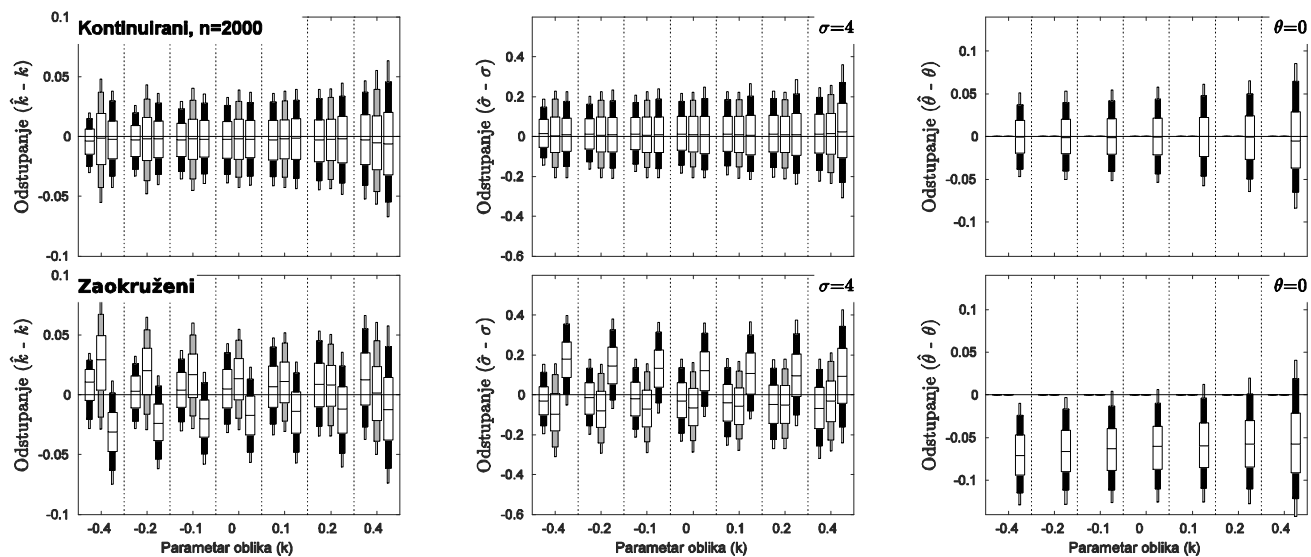
Tablica 2.1. Procjene parametra oblika razdiobi GP i GEV prilagodbom na nizove premašaja (prag = 3 dana) odnosno na godišnja maksimalna trajanja sušnih razdoblja kategorije DS5, za postaje Zagreb–Grič (ZG) i Split–Marjan (ST). U zagradama su navedeni 95%–tni intervali pouzdanosti (95% I.P.) dobiveni metodom opetovanog uzorkovanja. Korištene su metode maksimalne vjerodostojnosti (ML) i metoda L-momenata (LMOM). Na postaji ST analiziran je poseban slučaj kada je maksimum iz 1962. godine zamijenjen medijanom (vidi sliku 2.4 i tekst).

| ZG | k (ML) | 95% I.P. | k (LMOM) | 95% I.P. |
|-------------------------|--------|-----------------|----------|-----------------|
| GP | 0.166 | (0.103, 0.223) | 0.071 | (0.021, 0.117) |
| GEV | 0.060 | (-0.126, 0.255) | 0.080 | (-0.151, 0.233) |
| ST | | | | |
| GP | 0.283 | (0.211, 0.354) | 0.171 | (0.108, 0.227) |
| GEV | 0.283 | (0.071, 0.487) | 0.307 | (0.073, 0.443) |
| ST^(*) | | | | |
| GP | 0.267 | (0.198, 0.336) | 0.150 | (0.098, 0.196) |
| GEV | 0.170 | (0.027, 0.328) | 0.174 | (0.020, 0.265) |

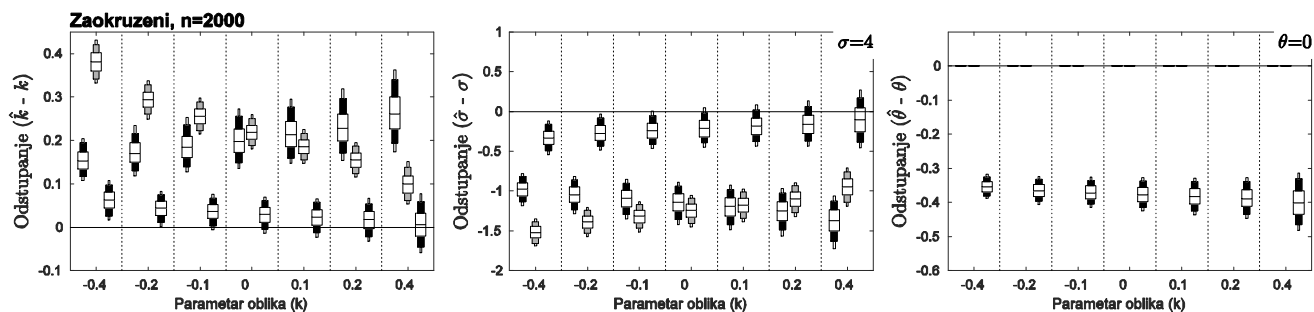
2.5.2. Monte Carlo pristup problemu zaokruživanja

Metode ML i LMOM su primijenjene najprije direktno na simulirane nizove s razdiobom GP koji imaju parametar skale $\sigma = 4$, a parametar oblika je promjenljiv k (-0.4, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2 i 0.4). Direktna primjena podrazumijeva da su navedene metode za procjenu parametara primijenjene na simulirani niz bez rezanja na pragu (egzaktni niz). Na slici 2.6 (gornji red) prikazani su rezultati procjena parametara razdiobe GP primjenom tri metode (GP-ML, GP-LMOM2 i GP-LMOM3) na niz duljine $n = 2,000$ generiran pomoću kontinuirane razdiobe GP. Rezultati su izraženi odstupanjima dobivenih procjena od točnih (zadanih) vrijednosti. Zaokruživanjem (izvorno kontinuiranog) simuliranog niza i primjenom istih metoda dobiveni su rezultati koji su prikazani skupom grafova u donjem redu iste slike. Dakle, potonji niz dolazi iz zaokružene razdiobe GP. Može se vidjeti da su razdiobe odstupanja procijenjenih od točnih parametara prilično slične za kontinuirane i za zaokružene nizove. U prvom, kontinuiranom slučaju, odstupanja procjenitelja za sve tri metode su vrlo blizu nule. Isto vrijedi i za slučaj sa zaokruživanjem ako se primjeni metoda GP-ML, dok metoda GP-LMOM3 rezultira blagim negativnim odstupanjem za k i θ , a blago pozitivnim za parametar skale σ . Suprotno, metoda GP-LMOM2 rezultira blago pozitivnim odstupanjem za k i blago negativnim za σ . Slični rezultati dobiveni su i za ostale duljine nizova n (slučaj $n=500$ prikazan je na slici A.4). Može se zaključiti da umjereno zaokruživanje (odabirom $\sigma = 4$) nije uzrokovalo značajne probleme. Naime, treba napomenuti da se u slučaju dovoljno malog iznosa omjera $\sigma/\Delta x$ (npr. $\sigma/\Delta x = 2$) procjene dobivene iz kontinuiranog i odgovarajućeg zaokružnog niza međusobno znatno razlikuju (Slika A.5). U navedenom primjeru zaokruživanjem se gubi velik dio informacija. Zato je odabir parametra skale $\sigma = 4$ prihvatljiv, a odabirom veće vrijednosti, utjecaj zaokruživanja može biti samo manji.

U sljedećem koraku, ispitana je primjena istih metoda na nizove premašaja, odnosno rezanjem izvornog simuliranog niza na određenom pragu. Odabran je prag $\mu = 1$ i rezultati procjena GP parametara prikazani su na slici 2.7. Vidljivo je da metoda GP-LMOM3 daje razumne procjene za parametre oblika (k) i skale (σ), ali parametar lokacije iznosi oko -0.4, umjesto očekivane nule. Druge dvije metode rezultiraju znatnim odstupanjem procijenjenih od točnih vrijednosti. Te procjene se i međusobno razlikuju, ali su te razlike vidljivo manje za vrijednosti parametra oblika, k , iz raspona od 0 do 0.1.



Slika 2.6: Razdiobe razlika između teorijskih i procijenjenih parametara oblika (k , lijeva kolona), skale (σ , srednja kolona) i lokacije (θ , desna kolona) dobivenih primjenom metoda GP-ML, GP-LMOM3 i GP-LMOM2 na egzaktne (kontinuirane, gornji red) i zaokružene (diskretne, donji red) simulirane nizove sušnih razdoblja pomoću razdiobe GP ($k, 4, 0$) za vrijednosti $k = -0.4, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2$, i 0.4 , bez rezanja na pragu. Razdiobe su sažete pomoću sedam kvantila ($q_5, q_{10}, q_{25}, q_{50}, q_{75}, q_{90}$ i q_{95}) označenih stupićima isto kao na slici 2.5.



Slika 2.7: Isto kao i donji red na slici 2.6, samo za zaokružene nizove premašaja dobivene rezanjem na pragu $\mu = 1$. Pretpostavljena je uobičajena teorijska vrijednost parametra lokacije nakon rezanja, $\theta = 0$.

2.6. Diskusija

Primjena uobičajenih metoda za procjenu parametara razdiobe GP na zaokružene nizove, i to na nizove premašaja, rezultiraju međusobno različitim rezultatima. U provedenoj

analizi uočeno je da problem nastaje zbog neodgovarajućeg odabira parametra lokacije razdiobe GP.

Naime, u kontinuiranom slučaju je teorijska i praktički ispravna vrijednost parametra lokacije iznosila nula. Međutim, u slučaju zaokruženih nizova, ta vrijednost iznosi -0.5 budući da zadržavajući zaokružene vrijednosti manje ili jednake pragu ($\mu=1$), efektivno zadržavamo zaokružene vrijednosti koje odgovaraju egzaktnima koje su veće od 0.5. Stoga, oduzimanjem praga $\mu = 1$ od zadržanih vrijednosti, efektivna lokacija postaje -0.5.

Za metodu GP–LMOM2 utjecaj odabira lokacije je jasan iz jednadžbe 2.14 – uvrštavanjem $\theta = 0$ umjesto $\theta = -0.5$, povećava se vrijednost k i smanjuje σ kako je i dobiveno na slici 2.7. Utjecaj parametra lokacije na metodu GP–ML može se heuristički objasniti usporedbom egzaktnog i zaokruženog slučaja, kako slijedi.

Neka je izvorni niz $\{x_i, i = 1, \dots, n\}$ poredan po veličini. Funkcija vjerodostojnosti za GP razdiobu ima sljedeći oblik (Coles 2001):

$$L(x_i; k, \sigma, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma} \left[1 + \frac{k}{\sigma} (x_i - \theta) \right]^{-k-1}. \quad (2.16)$$

Trebamo vidjeti kako zaokruživanje i rezanje na pragu utječu na položaj maksimuma od L. Pretpostavimo da primjenjujemo prag $\mu = 1$ najprije na izvorne podatke, a potom na odgovarajuće zaokružene (oznaka r od engl. *rounded*). Tada dobivamo dva niza premašaja:

- 1) $\{x'_i = x_i - 1, i = i_1, \dots, n\}$, gdje je i_1 najveći indeks takav da vrijedi $x_{i_1} \leq 1$,
- 2) $\{x'_{i,r} = x_{i,r} - 1, i = i_2, \dots, n\}$, gdje je i_2 najveći indeks takav da vrijedi $x_{i_2} \leq 0.5$.

Očito je da vrijedi $i_2 < i_1$ i $x'_{i,r} = 0$ za $i = i_2, \dots, i_1 - 1$. Ako za oba niza premašaja (izvorni i zaokruženi) postavimo da je parameter lokacije jednak nuli ($\theta = 0$), pripadne funkcije vjerodostojnosti za GP, L i L_r , se razlikuju u dva aspekta:

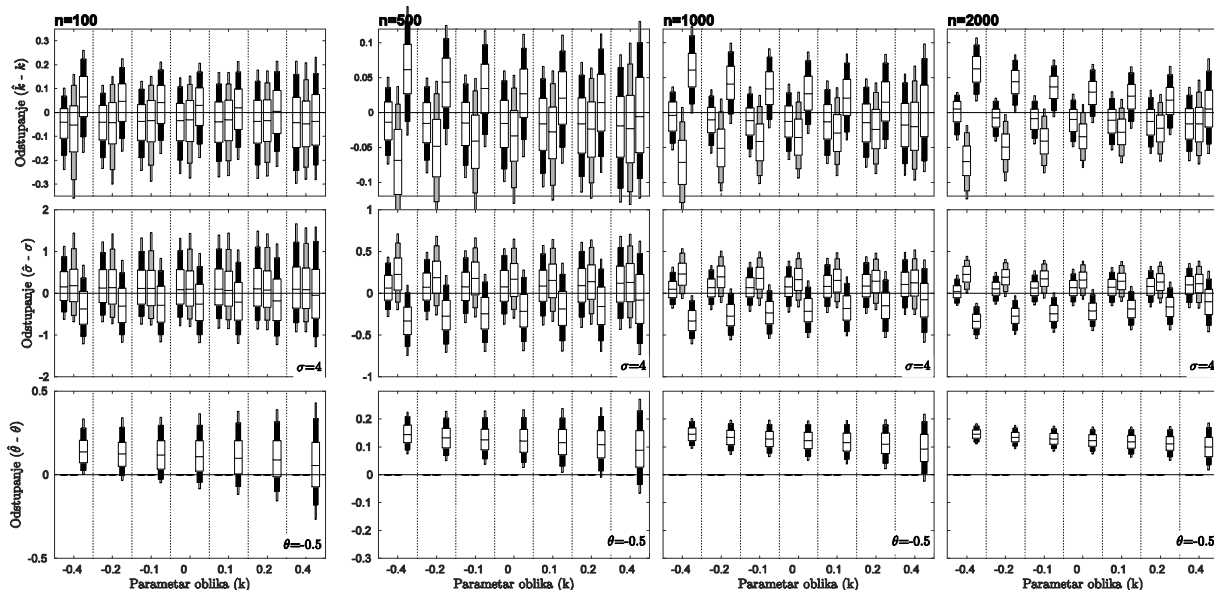
- a) L_r sadrži $i_1 - i_2$ više faktora od L i svi oni su jednaki $1/\sigma$ (budući da je odgovarajući $x'_{i,r}$ jednak nuli).
- b) L_r sadrži zaokružene podatke dok L sadrži kontinuirane, izvorne podatke. Ako privremeno uklonimo prvih $i_1 - i_2$ članova iz L_r , ostatak će biti sličan kao L jer razlika dolazi jedino od zaokruživanja za koje pretpostavljamo da je umjereno, tj. $\sigma/\Delta x \geq 4$ (tako da su primjenjivi rezultati sa slike 2.6).

Dakle, osnovna razlika između L i L_r dolazi zbog faktora $(1/\sigma)^{(i_1 - i_2)}$, koji može imati velik utjecaj na položaj maksimuma (kao funkcije od k i σ). To objašnjava velike razlike

dobivene u ova dva slučaja. Te razlike mogu se otkloniti odabirom točne lokacije za nizove premašaja, tj. $\theta = -0.5$, nakon čega obje metode, GP–ML i GP–LMOM2, rade razumno dobro (ukoliko $\sigma/\Delta x$ nije premalo).

Na slici 2.8 prikazani su rezultati primjene tri metode na simulirane POT nizove različitih duljina generiranih pomoću zaokružene razdiobe GP. Nakon zaokruživanja nizova, primijenjeno je rezanje za pragu $\mu = 1$. Prilikom primjene metoda GP–ML i GP–LMOM2, parametar lokacije postavljen je na iznos $\theta = -0.5$. Iz slike je vidljivo da sve tri metode daju prihvatljive rezultate. Rasap razdioba odstupanja između procijenjenih i točnih vrijednosti parametara sličan je onome dobivenom za egzaktne GP nizove (usporedi s gornjim redom slike 2.6). Ipak, vidljivo je malo odstupanje (pristranost, engl. *bias*) za sve slučajeve (treba napomenuti da se skala ordinate za $n=100$ razlikuje od ostalih). To odstupanje ovisi o točnoj vrijednosti parametra oblika k (nešto je veće za negativne vrijednosti k) i o izboru metode, ali ne pokazuje gotovo nikakvu ovisnost o duljini niza, n . Kako bi provjerili valjanost ovih nalaza, ponovno su izračunati parametri razdiobe GP za dva niza opaženih trajanja sušnih razdoblja na postajama ZG i ST, kao u potpoglavlju 2.4.1, s time da je sada prilagođen parametar lokacije, odnosno, prilikom primjene metoda GP–ML i GP–LMOM2, parametar lokacije postavljen je na iznos $\theta = -0.5$, umjesto na $\theta = 0$. Primjena metode GP–LMOM3 ostaje nepromijenjena. Rezultati su prikazani na slici 2.9. Očito je da su sada sve tri metode usklađene i rezultiraju međusobno sličnim procjenama parametra oblika i skale. Međutim, određeno neslaganje vidljivo je za najveće pragove (blizu 90. percentila) što ponovno ukazuje na potreban oprez prilikom odabira visokih pragova.

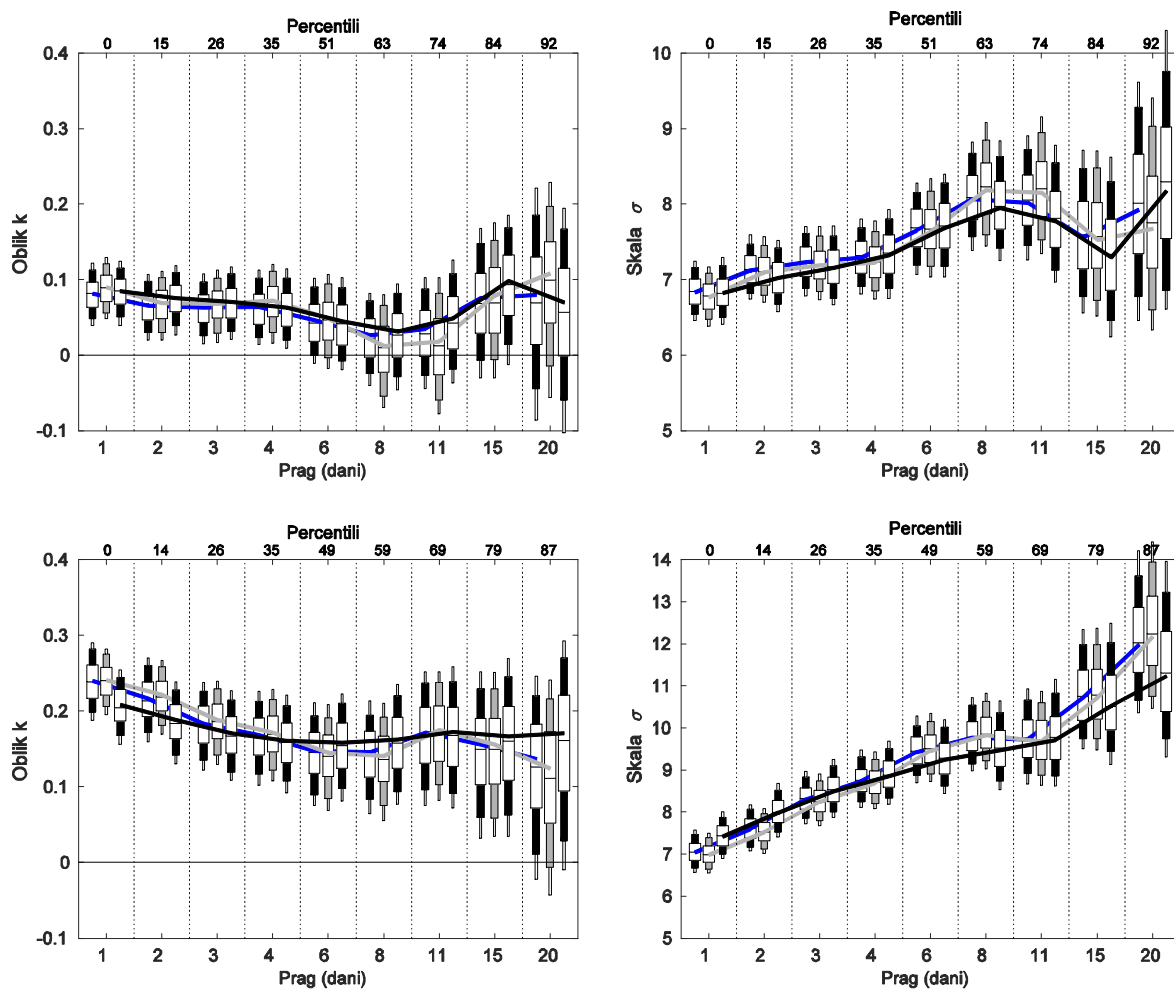
Konačno, nakon zaokruživanja i rezanja na pragu $\mu = 1$, primijenjena je metoda treperenja na simulirane nizove koji su korišteni za izradu slike 2.8. Naime, primjenom te metode dobiva se kontinuirani niz, pa se sve tri metode mogu primijeniti na uobičajen način, ali imajući u vidu da je ispravan parametar lokacije $\theta = -0.5$. Rezultati su prikazani na slici 2.10. Rasapi razdioba odstupanja pojedinih parametara su vrlo slični onima dobivenim bez primjene metode treperenja, a isto vrijedi i za pristranosti dobivene primjenom metode GP–ML (vidi sliku 2.8). U slučaju GP–LMOM3 i GP–LMOM2, relativno male pristranosti vidljive na slici 2.8, dodatno su se smanjile.



Slika 2.8: Razdiobe odstupanja procijenjenih od teorijskih parametara oblika (k , gornji red), skale (σ , srednji red) i lokacije (θ , donji red) dobivenih primjenom metoda GP–ML, GP–LMOM3 i GP–LMOM2 na simulirane zaokružene nizove premašaja za prag $\mu = 1$. Četiri kolone slika odnosi se na različite duljine izvornih nizova $n = 100, 500, 1000$, and 2000 . Nizovi su simulirani pomoću razdiobe GP ($k, 4, 0$) za $k = -0.4, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2$ i 0.4 . Nakon rezanja, parametar lokacije prilagođen je na vrijednost $\theta = -0.5$ (vidi tekst). Značenje stupića je isto kao na slici 2.6.

Možemo zaključiti da se primjenom metoda GP–LMOM3 na umjereno zaokružene nizove premašaja, tj. ako vrijedi $\sigma/\Delta x \geq 4$, dobivaju razumne procjene parametara oblika i skale, a parametar lokacije iznosi oko -0.4 . Metode GP–LMOM2 i GP–ML se također mogu direktno primijeniti na zaokružene nizove, ali je nužno prilagoditi parametar lokacije na -0.5 umjesto 0 . Drugi pristup problemu je primjena metode treperenja kojom se kreiraju kontinuirani nizovi iz diskretnih, i daljnja primjena svih metoda provodi se na uobičajen način.

Treba napomenuti da ukoliko je zaokruživanje previše grubo (npr. $\sigma/\Delta x \sim 1$), tada se ono ne može ignorirati i gore navedene metode se ne preporučuju. U tom slučaju treba primijeniti zaokruženu GP razdiobu. Naime, prema teoriji, to je razdioba koju bi trebali slijediti nizovi premašaja za dovoljno visoki prag.

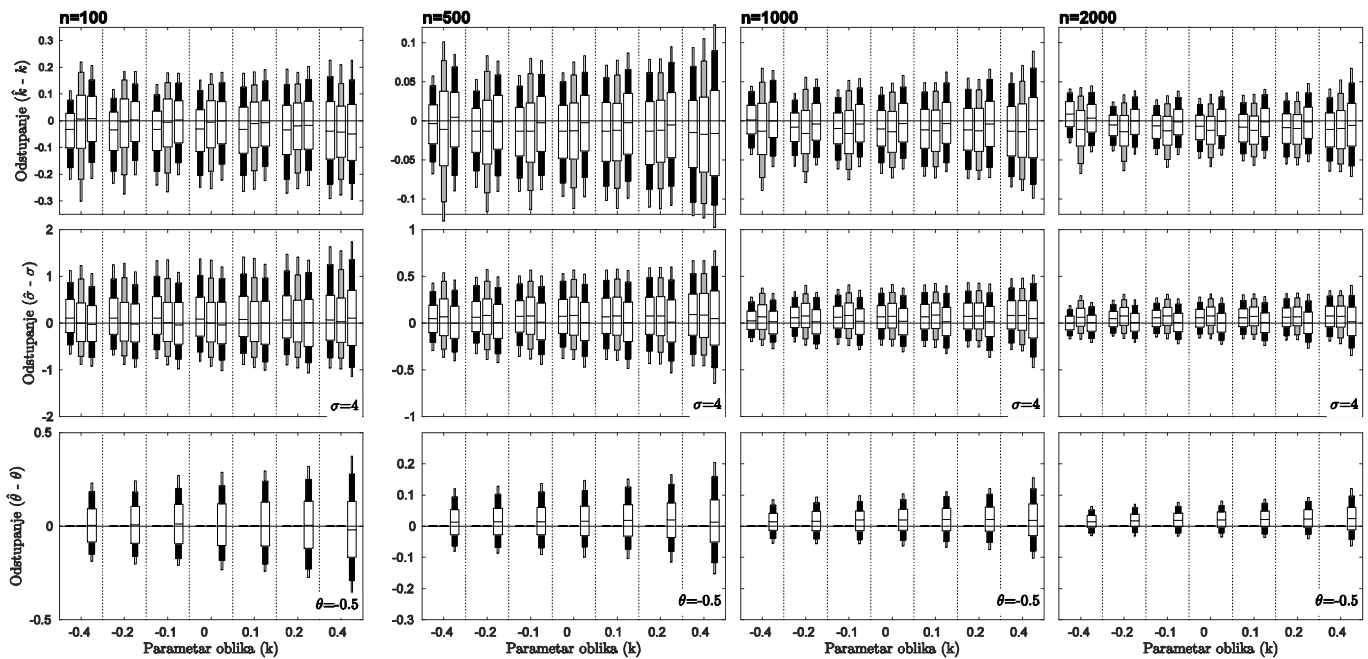


Slika 2.9: Isto kao na slici 2.5, s tim što je kod metoda GP–ML i GP–LMOM2 parametar lokacije postavljen na $\theta = -0.5$ umjesto na $\theta = 0$. Rezultati procjena parametra lokacije su izostavljeni budući da kod metode GP–LMOM3 ništa nije mijenjano.

Parametri te razdiobe mogu se procijeniti primjenom različitih metoda, uključujući i ML i L-momente. Za metodu ML moguće je izvesti funkciju vjerodostojnosti za diskretnu GP razdiobu (Prieto i sur. 2014), ali problem parametra lokacije i dalje ostaje kao u kontinuiranom slučaju. S druge strane, procjenitelji L-momenata navedeni u Hoskingu (1990, jednadžba 3.1) vrijede i za kontinuirane i za diskretne slučajne varijable.

Međutim, u diskretnom slučaju izrazi koji povezuju parametre razdiobe i L-momente su prilično komplicirani i nepraktični kako navodi i sam autor (Hosking 1990). Koliko je nama poznato, eksplicitni izrazi za L-momente za diskretnu GP razdiobu ne postoje u literaturi.

2. PRIMJENA RAZDIOBE EKSTREMA NA SUŠNA RAZDOBLJA – UTJECAJ ZAOKRUŽIVANJA



Slika 2.10: Isto kao na slici 2.8, s tim da je nakon zaokruživanja i rezanja na pragu primijenjena metoda treperenja (vidi tekst).

Problem procjene parametara razdiobe GP primijenjene na zaokružene nizove istaknut je ranije u radovima Deidda i Puliga (2006) i Deidda (2007, 2010), ali u nešto drugačijem kontekstu. Naime, oni su analizirali nizove dnevne količine oborine za koje su pretpostavili različite potencijalne rezolucije zaokruživanja. Deidda (2007) je predložio metodu procjene postotka tih vrijednosti koja doprinosi procjeni parametara razdiobe GP. Naš problem, u kojem pretpostavljamo da su svi podaci zaokruženi i to s istom rezolucijom, je nešto jednostavniji, pa smo mogli provesti detaljniju analizu. Pokazali smo da zaokruživanje, samo po sebi, nije velik problem, ali da to može postati kada se primjeni rezanje na pragu. Pokazali smo da je nužno procijeniti parametar lokacije razdiobe GP dok Deidda (2007) nije uzeo u obzir niti jednu metodu koja omogućuje procjenu sva tri parametra

Naglasimo još jednom da eventualne loše procjene parametara razdiobe GP mogu u praksi dovesti do pogrešnih zaključaka. Naime, ako je parametar oblika podcijenjen, odgovarajuće procjene povratnih perioda će biti precijenjene. Kako smo do sada vidjeli, razdioba GP je specifična utoliko što rezanje na pragu, odnosno rad s nizovima premašaja praga, može značajno pojačati nepovoljan utjecaj zaokruživanja. Stoga bi bilo korisno procjenjivati utjecaj zaokruživanja i kod drugih tipova nizova, npr. količine oborine, gdje zaokruživanje nije tako jako kao kod sušnih razdoblja. Na kraju, istaknimo korist koju, gotovo uvijek, možemo u praksi ostvariti pomoću Monte Carlo simulacija. Naime, ukoliko se pri

analizi realnih (izmjerenih) podataka uoči određeni problem u samim podacima (poput nivoa zaokruživanja), Monte Carlo simulacije su alat koji se uvijek može direktno primijeniti za testiranje pojedinih metoda i donošenje odgovarajućih zaključaka.

3. PRIMJENA TEORIJE EKSTREMA NA SUŠNA RAZDOBLJA BAYESOVIM PRISTUPOM

3.1. Teorijska osnovica

Dvije su generalne paradigme ili pristupa statističkom zaključivanju: klasična frekvencijska i bayesovska. U obje paradigme pretpostavlja se da su opaženi podaci proizvedeni (generirani) posve određenim statističkim (vjerojatnosnim) modelom. Rečeni model objedinjuje sve što znamo ili smo spremni pretpostaviti o prirodi podataka, o mogućim fizikalnim procesima u pozadini, o načinu i uvjetima opažanja te o bilo kojim drugim okolnostima koje smatramo relevantnima. Statistički model se najčešće zadaje kao parametarska familija funkcija razdiobe, pri čemu je funkcijski oblik poznat, a cilj statističkog zaključivanja je procijeniti nepoznate parametre ili pak odabrati najpogodniji model, ako ih ima više. U *frekvencijskom* pristupu nepoznati parametri imaju fiksne, premda nepoznate, vrijednosti. Stoga se o njima ne mogu davati vjerojatnosni sudovi, a zaključivanje se provodi na temelju velikog broja (najčešće hipotetskih) uzoraka, odnosno na temelju tzv. razdiobe uzorkovanja (engl. *sampling distribution*). Rezultati se najčešće iskazuju pomoću intervala pouzdanosti (engl. *confidence interval*) dok se odabir modela vrši tzv. testiranjem hipoteza. U bayesovskom pristupu točne vrijednosti parametara modela su isto fiksne i nepoznate, ali se neizvjesnost u vezi točnih vrijednosti opisuje razdiobom vjerojatnosti. Na početku zaključivanja to je tzv. priorna razdioba (prior) i ona se uz opažene podatke, pomoću Bayesovog teorema, prevede u naknadnu razdiobu, tzv. posterior. Posteriorna razdioba, koja je potpuno određena pretpostavljenim modelom i priorom te podacima, opisuje neizvjesnost o vrijednostima parametara nakon što su podaci opaženi. Uz malo jezične slobode, možemo reći da su u klasičnom pristupu parametri fiksni a 'pretražuje' se prostor svih uzoraka (podataka koji većinom nisu, ali su mogli biti opaženi), dok su u bayesovskom pristupu podaci fiksni (upravo oni opaženi), a pretražuje se prostor parametara, u potrazi za točnim vrijednostima.

Preciznije, pretpostavimo da su podaci $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$ generirani zadanim statističkim modelom koji je potpuno opisan skupom parametara ϕ . Modelom je određena funkcija vjerodostojnosti (engl. *likelihood*) $L(\phi)=f(\mathbf{x}|\phi)$, koja kaže kolika je vjerodostojnost pojedinih vrijednosti parametara ϕ u svjetlu podataka \mathbf{x} . Vjerodostojnost je brojčano jednaka gustoći (masi) vjerojatnosti za podatke \mathbf{x} ako su točni parametri ϕ . Bayesovsko zaključivanje kreće zadavanjem priorne razdiobe vjerojatnosti $f(\phi)$, ili *priora*, koja uključuje sve što znamo ili

pretpostavljamo o vrijednostima parametara prije nego što vidimo podatke. Primjenom Bayesovog teorema, prior se kombinira s funkcijom vjerodostojnosti kako bi se dobila posteriorna razdioba vjerojatnosti za parametre modela ili tzv. *posterior*, $f(\phi|x)$ (Coles 2001):

$$f(\phi|x) = \frac{f(x|\phi)f(\phi)}{f(x)}. \quad (3.1)$$

Nazivnik $f(x)$ se računa kao integral brojnika preko cijelog prostora parametara:

$$f(x) = \int_{\phi} f(x|\phi)f(\phi)d\phi. \quad (3.2)$$

Posteriorna razdioba daje potpunu informaciju o razdiobi vjerojatnosti nepoznatih parametara. Bayesov teorem omogućava ‘izvrtanje’ vjerojatnosti, tj. iz vjerojatnosti podataka za zadane parametre (izravne vjerojatnosti) dobivaju se vjerojatnosti parametara uz dane, tj. opažene podatke (tzv. inverzne vjerojatnosti). Ako su predmet zaključivanja samo parametri modela, onda je dovoljno poznavati posterior do na faktor proporcionalnosti. U tom slučaju nije potrebno računati nazivnik u (3.1). Međutim, u bajesovskoj paradigmi, $f(x)$ zadan s (3.2) ima ključnu ulogu u usporedbi dva ili više modela (Sivia i Skilling 2006). Taj član u Bayesovom teoremu se u literaturi naziva priornom prediktivnom razdiobom ili češće samo dokazima (engl. *evidence*).

Prilikom kreiranja funkcije vjerodostojnosti, prilično je jasno na koji način ugraditi sve specifičnosti određenog modela te dodatnih informacija o samim podacima. Prema tome, može se uvrstiti i prethodno znanje o tome na koji način su podaci prikupljeni, npr. da su duljine opaženih sušnih razdoblja izražene kao zaokružene vrijednosti stvarnih trajanja. Dakle, posterior se dobiva primjenom Bayesovog teorema iz prethodnih informacija i iz opaženih podataka, pri čemu u prethodne informacije spadaju priorna razdioba te funkcija vjerodostojnosti. Priorna razdioba opisuje neizvjesnost u parametrima prije uvažavanja podataka, dok je funkcija vjerodostojnosti obično jasna iz postavki samog problema i odabranog modela. Dobivene vjerojatnosti predstavljaju stanje spoznaje (engl. *degree of belief*) eksperta o stvarnim vrijednostima, a koje ovisi o dostupnim podacima i prethodnom znanju (prior).

Potreba određivanja priorne razdiobe smatra se glavnim nedostatkom Bayesove paradigme budući da se tako u samo zaključivanje unosi određena razina subjektivnosti. Pri zadavanju priora koriste se raspoložive spoznaje, npr. uvažavaju se prihvatljive granice (domena) parametara razdiobe (Egozcue i sur. 2006). Međutim, ako ne postoji određena prethodna informacija, može se primijeniti tzv. neinformativni prior (npr. uniformna razdioba,

$f(p) = 1$, za parametre lokacije) koji kaže da nemamo nikakvo prethodno znanje o parametrima. U tom slučaju, procjene parametara dobivene Bayesovim pristupom bit će iste kao i one dobivene pomoću metode maksimalne vjerodostojnosti. Za velike uzorke, utjecaj priora je mali, tj. podaci putem funkcije vjerodostojnosti dominiraju posteriorom. Ipak, interpretacija rezultata u obje paradigme se potpuno razlikuje. U frekvencijskom slučaju nesigurnost procjene proizlazi iz varijabilnosti uzorkovanja iz (hipotetske) populacije, dok u bayesovskom pristupu ovisi, na egzaktan način, o raspoloživim informacijama, tj. stanju spoznaje (engl. *state of knowledge*). Izražavanje nesigurnosti procjena pomoću posteriorne razdiobe je u skladu s našom intuicijom da u prisutnosti opaženih podataka, neke vrijednosti parametara su manje vjerojatne od drugih. Na primjer, ako pogledamo interval posteriorne razdiobe između percentila 2.5 i 97.5, tada dobivamo 95%–tni interval povjerenja (engl. *credible interval*) koji označava vjerojatnost (0.95) da će nepoznati parametar biti u tom intervalu vrijednosti (uz zadani prior i pretpostavljeni statistički model). Ako treba odrediti pojedinačnu (engl. *point*) vrijednost parametara mogu se primijeniti osnovne statističke veličine (npr. srednjak, tjeme ili medijan) posteriorne razdiobe.

Kada je određena posteriorna razdioba parametara, tada se može izračunati i razdioba vjerojatnosti za bilo koju veličinu od interesa. Od posebnog značenja je tzv. *prediktivna* (engl. *predictive*) razdioba:

$$f(z|x) = \int_{\phi} f(z|\phi)f(\phi|x)d\phi . \quad (3.3)$$

koja predstavlja razdiobu vjerojatnosti budućih opažanja. Kroz posterior, $f(\phi|x)$, se uzima u obzir nepouzdanost parametara, a kroz gustoću vjerojatnosti, $f(z|\phi)$, i nepouzdanost koja dolazi od varijabilnosti budućih opažanja (Wilks 2011).

U bayesovskom pristupu ne postoje testovi prilagodbe određenog modela kakvi se koriste u klasičnom pristupu. Ukoliko postoji više modela, odnosno hipoteza, najbolji od njih može se odabrati postupkom tzv. *usporedbe modela* (engl. *model comparison*). Modeli se uspoređuju računanjem nazivnika u Bayesovom teoremu odnosno integrala zadanog s (3.2) koji određuje koliko podaci podupiru dani model. Usporedba dva modela (npr. M1 i M2) vrši se pomoću tzv. Bayesovog faktora koji je definiran kao omjer “dokaza” dvaju modela (MacKay 2003, Sivia i Skilling 2006):

$$B_{12} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} . \quad (3.4)$$

Bayesov faktor kvantitativno pokazuje koliko podaci preferiraju pojedini model. Ako je $BF_{12} > 0$, podaci daju prednost modelu M1 u odnosu na M2 za faktor BF. Treba naglasiti da se usporedba na ovaj način može provoditi samo ako se modeli odnose na isti skup podataka. Tako je moguće međusobno uspoređivati modele GEV i Gumbel jer se oni primjenjuju na podatke godišnjih maksimuma, te model GP s tri parametra (GP3) i isti model s dva parametra (GP2) koji se primjenjuju na nizove premašaja.

3.2. Vjerodostojnosti i priori

Za potrebe ovog istraživanja, analizirani su modeli GEV–AM i GP–POT. Pri korištenju potonjeg modela uzeto je u obzir da su podaci zaokruženi, dok model GEV, kako je pokazano u prethodnom poglavlju, nije posebno osjetljiv na zaokruživanje.

Uz pretpostavku nezavisnosti, funkcija vjerodostojnosti za model GEV je produkt funkcije gustoće vjerojatnosti GEV, $f(x_i/\phi)$ (jednadžba 2.1) koja se računa preko svih podataka x_i :

$$f(x|\phi) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\phi), \quad \phi = \{k, \alpha, x_0\}. \quad (3.5)$$

Gumbelov model proizlazi za $k = 0$.

U slučaju modela GP, svaka opažena vrijednost x_i (trajanje sušnog razdoblja) koja je zaokružena (u danima), ukazuje na to da točne vrijednosti zapravo leže u intervalu između $x_i - 0.5$ i $x_i + 0.5$ dana. Stoga će se funkcija vjerodostojnosti dobiti množenjem sljedećih funkcija:

$$f(x_i|\phi) = F_\phi(x_i+0.5) - F_\phi(x_i-0.5), \quad \phi = \{k, \sigma, \theta\}, \quad (3.6)$$

gdje je F_ϕ kumulativna funkcija razdiobe GP definirana jednadžbom 2.3.

Tako dobivamo tzv. model zaokružene razdiobe GP (Prieto i sur. 2014) koji ćemo u nastavku označavati sa zGP. Taj model, kad se primjenjuje na (zaokružene) podatke odrezane na određenom pragu, poprima gotovo sva svojstva temeljnog kontinuiranog modela GP, osim kako je pokazano u prethodnom poglavlju, promjena vezanih za parametar lokacije. Naime, ako su podaci $\{x_i, i = 1, \dots, n\}$ zaokruženi, onda parametar lokacije mora biti manji ili jednak od $\min\{x_i\} - 0.5$. Ukoliko su kontinuirani (egzakti), tada je parametar lokacije manji ili jednak $\min\{x_i\}$. Ako su podaci odrezani na nekom (unaprijed odabranom) pragu, tada je uobičajeno razmatrati nizove premašaja, tj. izvorne vrijednosti umanjene za iznos praga. U kontinuiranom slučaju, iz teorije slijedi da je parametar lokacije u tom slučaju jednak nuli, dok je u slučaju zaokruženih nizova, taj parametar jednak -0.5 .

Upravo izneseno može poslužiti kao dodatni kriterij za validaciju modela zaokružene razdiobe GP. Naime, da bi model zGP bio prihvatljiv, posterior parametra lokacije θ trebao bi biti u skladu s teorijskom vrijednosti ($\theta = -0.5$). Usporedba modela može se provesti uspoređujući GP3 s GP2. Potonji model dobiva se fiksiranjem parametra lokacije na vrijednost -0.5 . Dodatno, treba napomenuti da ako su nizovi premašaja konstruirani na način da su podaci strogo veći od zadanog praga, onda parametar lokacije treba biti $+0.5$.

3.3. Podaci i metode

Analiza u ovom poglavlju bazira se prvenstveno na podacima sušnih razdoblja za dvije meteorološke postaje: Zagreb–Grič i Split–Marjan (kao u poglavlju 2). Za kreiranje sušnih razdoblja različitih kategorija (DS1, DS5 i DS10) korišteni su podaci dnevne količine oborine iz razdoblja 1961. - 2015. Osim analize realnih sušnih razdoblja (opaženi podaci), provedena je i dodatna analiza na simuliranim nizovima pomoću razdiobe GP primjenom metode Monte - Carlo. Više detalja o simulacijama bit će rečeno u sljedećem poglavlju.

Za procjenu parametara modela GEV i GP primjenom bayesovskog pristupa korišteni su neinformativni konstantni priori, a pri odabiru domene korišteni su rezultati frekvencijskog pristupa i praktično iskustvo o sušnim razdobljima u Hrvatskoj.

(i) Za model GEV, za parametre k , $\log(\alpha)$ i x_0 , korištena je uniformna razdioba na sljedećim pripadnim intervalima: $[-0.5, 1.5]$, $[0, 5]$, i $[10, 80]$.

(ii) Za model GP, korišteni su isti intervali uniformne razdiobe za pripadne parametre oblika i skale, k i $\log(\sigma)$. Dodatno, za model GP s tri parametra, za parametar lokacije odabran je prior na intervalu $[-1.5, 0.5]$.

Potom su procijenjene posteriorne razdiobe parametara za modele GEV (k , α , x_0) i GP (k , σ , θ) primjenom Bayesovog teorema (3.1). Uspoređeni su njihovi medijani i pripadne nepouzdanosti (intervali povjerenja). Svi rezultati diskutirani su za različite pragove. Za procjenu kvantila, također su procijenjene posteriorne razdiobe povratnih vrijednosti sušnih razdoblja za različite povratne periode. Pri tome su integrali izračunati numerički nakon transformacije varijabli uvažavajući izraze (2.2) i (2.4) za razdiobu GEV odnosno za GP. Tako su pripadne funkcije vjerodostojnosti izražene kao funkcije povratne vrijednosti umjesto parametra skale te kao funkcija preostala dva parametra razdiobe (oblika i lokacije). Izvod za posterior povratne vrijednosti pomoću opće Paretove razdiobe dan je u Dodatku B. Procjena povratnih vrijednosti iz posteriora uključuje, kao i za parametre, cijeli raspon vjerojatnosti

povratnih vrijednosti za jedan povratni period, odakle se onda mogu izdvojiti pojedinačne vrijednosti (tjeme, medijan ili srednjak) i intervali povjerenja. S druge strane, pojedini kvantili mogu se odrediti i iz pripadne prediktivne razdiobe pojedinog modela. Taj način zahtijeva znatno manje računanja, ali ne daje intervale povjerenja poput prethodne metode. Procjene povratnih vrijednosti su provedene na oba načina i rezultati su međusobno uspoređeni.

Posebno je analizirana Gumbelova razdioba, kao specijalni slučaj razdiobe GEV, koja ima samo dva parametra (k i α), nakon čega su rezultati uspoređeni s rezultatima modela GEV. Analiza modela GP sastoji se od međusobne usporedbe rezultata dobivenih primjenom modela GP2 i GP3. U sklopu primjene modela GP na nizove premašaja (POT), dodatno su analizirane i posteriorne razdiobe razlika ($\sigma - k\mu$) koje bi trebale biti konstantne za različite vrijednosti pragova μ (prema izrazu (2.5)). Posterior tih razlika, za različite pragove, može se promatrati kao analogon grafu srednjeg premašaja (MEP) u frekvencijskom pristupu (vidi poglavlje 2). Konačno, provedena je usporedba pojedinih modela (GEV nasuprot Gumbel i GP3 nasuprot GP2) procjenom Bayesovog faktora.

3.4. Rezultati

3.4.1 Primjena modela GEV na godišnje maksimume

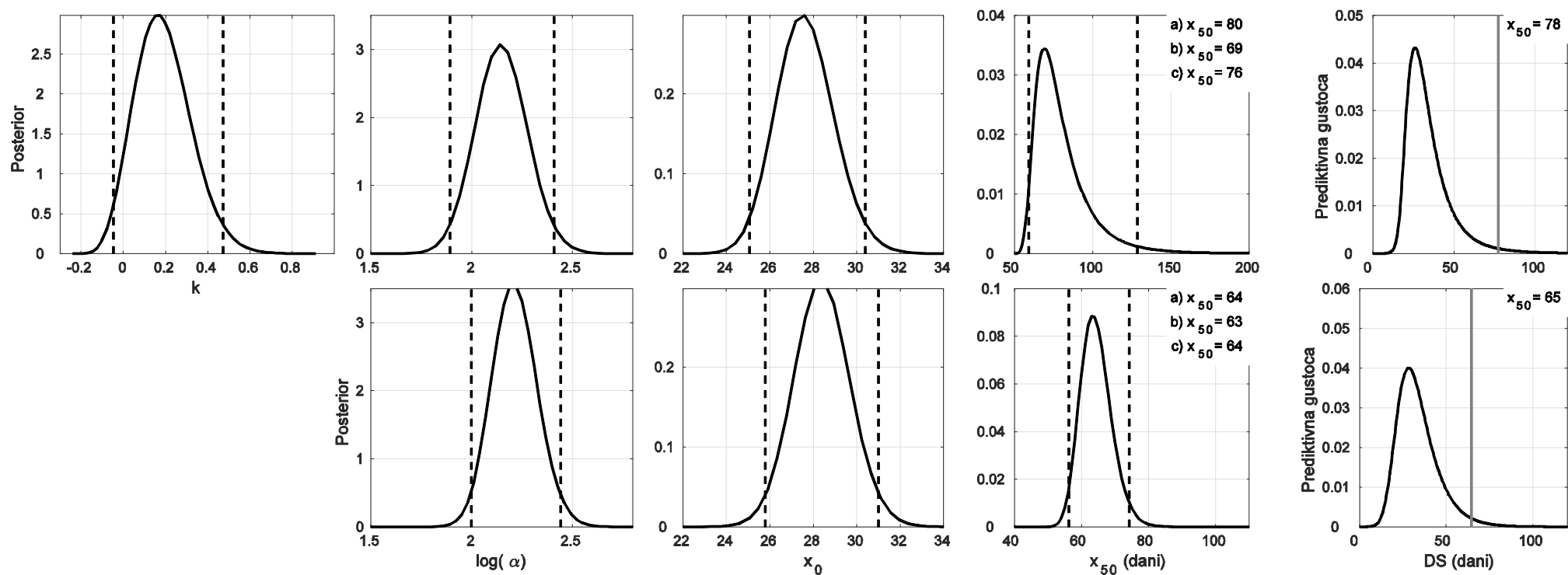
Godišnja maksimalna trajanja sušnih razdoblja različitih kategorija (DS1, DS5 i DS10) analizirana su primjenom modela GEV. Na slici 3.1 prikazani su rezultati za DS1 na postaji Split–Marjan. U gornjem redu nalaze se rezultati primjene modela GEV, a u donjem primjenom Gumbelovog modela na isti skup podataka. Prikazane su posteriorne razdiobe pripadnih parametara razdiobe (k , $\log(\alpha)$ i x_0) te 50–godišnje povratne vrijednosti sušnih razdoblja (x_{50}).

U posljednjoj koloni nalaze se prediktivne razdiobe za DS1 za modele GEV i Gumbel s naznačenom 50 - godišnjom povratnom vrijednošću (siva linija) za dodatnu usporedbu. Crtkanim linijama na pojedinom grafu označeni su 95%–tni intervali povjerenja. Dodatno, za 50 - godišnju povratnu vrijednost naznačene su (u gornjem desnom kutu) i pojedinačne vrijednosti procjena dobivenih iz srednjaka (a), moda (b) i medijana (c) posteriorne razdiobe. U Dodatku B nalaze se slične slike za ostale kategorije (DS5 i DS10) za postaju Split–Marjan, kao i za postaju Zagreb–Grič.

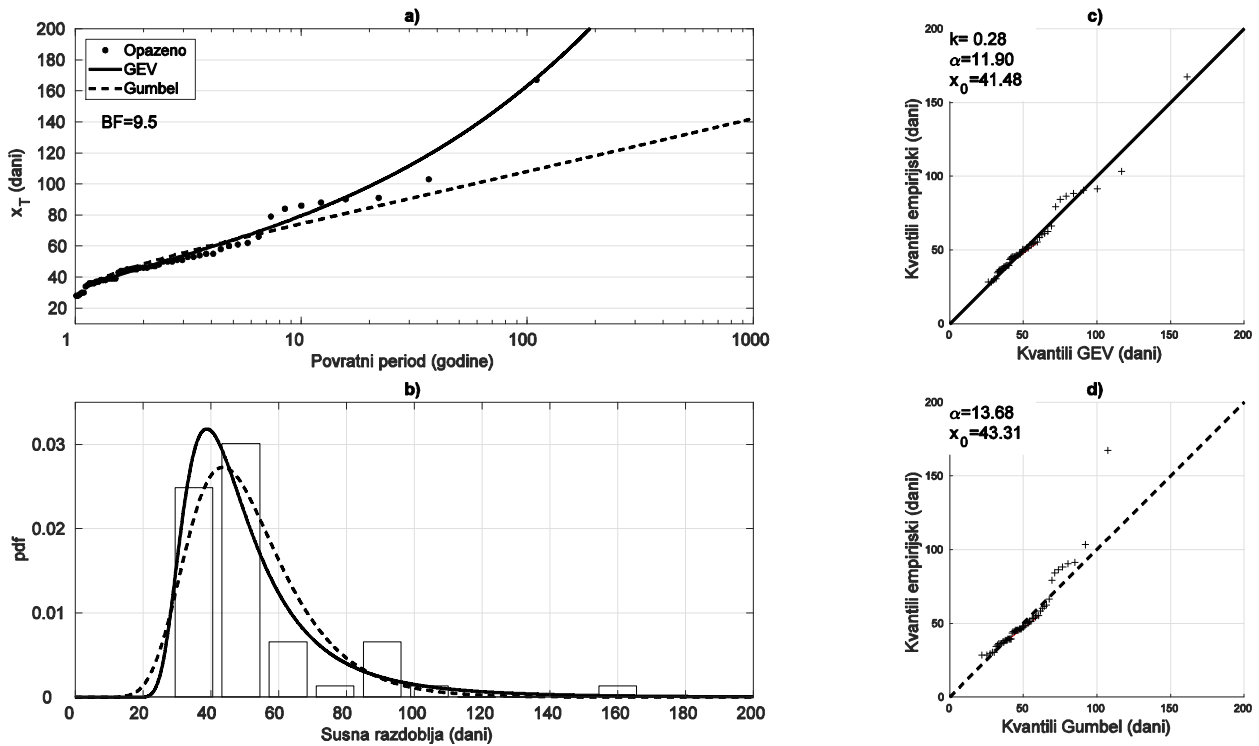
Vidljivo je da se povratne vrijednosti dobivene iz prediktivne razdiobe približno podudaraju s medijanom posteriorne razdiobe odgovarajućeg povratnog perioda. Model GEV

daje znatno veće povratne vrijednosti, te u isto vrijeme i znatno šire intervale povjerenja nego Gumbelov model.

Da bi detaljnije proučili kako se primijenjeni modeli prilagođavaju podacima, na slici 3.2a prikazane su povratne vrijednosti za sušna razdoblja DS5 za postaju Split–Marjan koje su procijenjene iz prediktivnih razdioba za modele GEV i Gumbel. Dodatno, odgovarajući kvantil-kvantil (q - q) grafovi i histogrami prikazani su na grafovima 3.2b-d. Vrijednosti pripadnih parametara modela GEV i Gumbel koje su dobivene kao medijani odgovarajućih posteriornih razdiobi naznačene su u gornjem lijevom kutu q - q grafova (Slika 3.2c,d). Vidljivo je da model GEV, zbog svog 'dugačkog' repa ($k > 0$), daje bitno veće iznose povratnih vrijednosti nego Gumbelov model, ako je povratni period dovoljno dug. Slično ponašanje su pokazali Coles i sur. (2003) za količinu oborine ističući kako te razlike mogu dovesti do ozbiljnih posljedica u praksi. Najdulje sušno razdoblje kategorije DS na postaji Split–Marjan potrajalo je 167 dana i prema modelu GEV može se očekivati prosječno jednom u približno 100 godina, dok se prema Gumbelovom modelu može očekivati jednom u više od 1000 godina (Slika 3.2a). Podcjenjivanje sušnih razdoblja Gumbelovim modelom vidljivo je i na pripadnim q - q grafovima. Tablica 3.1 objedinjuje sve rezultate za postaje Split–Marjan i Zagreb–Grič uključujući medijane posteriornih razdioba parametara modela GEV i Gumbelovog modela te procjene 5–, 10–, 25–, 50– i 100– godišnje povratne vrijednosti dobivene iz pripadnih prediktivnih razdiobi (istaknute kurzivom) i iz posteriorne razdiobe povratnih vrijednosti (za pojedini povratni period). Modeli GEV i Gumbel uspoređeni su pomoću Bayesovog faktora (BF) prema (3.4) gdje f_1 predstavlja model GEV, a f_2 Gumbelov model. Bayesov faktor (naznačen i na slici 3.2a) potvrđuje da opažena sušna razdoblja DS5 na postaji Split–Marjan snažno podržavaju model GEV, i to 9.5 puta u odnosu na Gumbelov model. Međutim, za druge kategorije sušnih razdoblja na obje postaje, podaci uglavnom podržavaju jednostavniji model (Gumbelov) sa slabim do umjerenim rasponom (do 5:1) u odnosu na GEV.



Slika 3.1: Posterirone razdiobe parametara modela GEV (gornji red) i Gumbelovog modela (donji red), posterirone razdiobe 50 - godišnjih povratnih vrijednosti (x_{50} , u danima) i pripadne prediktivne razdiobe (zadnja kolona) sušnih razdoblja DS1 na postaji Split–Marjan. Isprekidane linije označavaju 95%–tne intervale povjerenja. Za x_{50} naznačene su vrijednosti srednjaka (a), moda (b) i medijana (c).



Slika 3.2: a) Procjene povratnih vrijednosti sušnih razdoblja DS5 na postaji Split–Marjan primjenom modela GEV (puna krivulja) te Gumbelovog modela (crtkana linija). BF označava Bayesov faktor, b) Histogram i pripadne funkcije vjerojatnosti za razdiobe GEV i Gumbel, c) Kvantil-kvantil graf dobiven primjenom modela GEV, pri čemu su u lijevom kutu naznačene odgovarajuće vrijednosti pojedinih parametara; d) isto kao c) ali za Gumbelov model.

Ako pogledamo vrijednosti x_T , razlike između dva modela uglavnom postaju vidljive za povratne periode veće od 50 godina s time da model GEV rezultira duljim trajanjima sušnih razdoblja. Za praktične svrhe razumno je uvijek koristiti model GEV koji pruža pouzdanije rezultate. To je i preporuka Colesa i sur. (2003), a taj izbor podržava i usporedba modela. Naime, ako raspoložemo s vrlo dugim nizom (kao što je niz u trajanju od 167 dana u Splitu) usporedba modela će dati prednost složenijem modelu GEV budući da će Gumbelov model slabije reprezentirati ekstremne slučajeve zbog 'kratkog' repa ($k = 0$).

Tablica 3.1: Medijani posteriora parametara za modele GEV i Gumbel (k , α , x_0) s odgovarajućim 5 -, 10 -, 25 -, 50 - i 100 - godišnjim povratnim vrijednostima (x_T ; u danima) za DS1, DS5 i DS10. Povratne vrijednosti procijenjene su iz pripadnih prediktivnih razdioba (naznačene kosim pismom) te iz posteriornih razdioba. BF označava Bayesov faktor.

| DS | Postaja | Model | k | α_0 | x_0 | x_5 | x_{10} | x_{25} | x_{50} | x_{100} | BF |
|------|---------|--------|-------|------------|-------|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|-----|
| DS1 | ZG | GEV | -0.01 | 6.68 | 21.69 | <i>31.5</i> | <i>36.5</i> | <i>43.0</i> | <i>48.5</i> | <i>54.5</i> | 0.2 |
| | | | | | | 31.7 | 36.7 | 42.6 | 47.1 | 51.6 | |
| | | Gumbel | | 6.52 | 21.66 | <i>31.5</i> | <i>36.5</i> | <i>43.0</i> | <i>47.5</i> | <i>52.5</i> | |
| | ST | GEV | 0.18 | 8.54 | 27.55 | <i>42.5</i> | <i>51.5</i> | <i>65.5</i> | <i>78.5</i> | <i>94.0</i> | 0.4 |
| | | | | | | 42.4 | 51.3 | 64.3 | 75.6 | 88.2 | |
| | | Gumbel | | 9.12 | 28.35 | <i>42.0</i> | <i>49.0</i> | <i>58.0</i> | <i>64.5</i> | <i>71.5</i> | |
| DS5 | ZG | GEV | 0.06 | 7.96 | 32.11 | <i>44.5</i> | <i>51.5</i> | <i>60.5</i> | <i>68.5</i> | <i>76.5</i> | 0.1 |
| | | | | | | 44.6 | 51.3 | 60.0 | 66.8 | 73.8 | |
| | | Gumbel | | 7.96 | 32.34 | <i>44.0</i> | <i>50.5</i> | <i>58.0</i> | <i>64.0</i> | <i>70.0</i> | |
| | ST | GEV | 0.28 | 11.90 | 41.48 | <i>64.0</i> | <i>79.5</i> | <i>105.5</i> | <i>131.0</i> | <i>163.5</i> | 9.5 |
| | | | | | | 63.9 | 79.0 | 103.2 | 125.8 | 153.0 | |
| | | Gumbel | | 13.68 | 43.31 | <i>64.0</i> | <i>74.5</i> | <i>88.0</i> | <i>98.0</i> | <i>108.0</i> | |
| DS10 | ZG | GEV | 0.19 | 12.57 | 44.90 | <i>67.0</i> | <i>81.5</i> | <i>103.5</i> | <i>124.5</i> | <i>151.5</i> | 0.4 |
| | | | | | | 67.1 | 80.8 | 100.9 | 118.6 | 138.6 | |
| | | Gumbel | | 13.56 | 46.23 | <i>66.5</i> | <i>77.0</i> | <i>90.5</i> | <i>100.5</i> | <i>110.5</i> | |
| | ST | GEV | 0.11 | 16.13 | 57.22 | <i>84.0</i> | <i>99.5</i> | <i>121.5</i> | <i>141.0</i> | <i>163.5</i> | 0.2 |
| | | | | | | 83.8 | 98.9 | 119.5 | 136.3 | 154.4 | |
| | | Gumbel | | 16.62 | 58.18 | <i>83.0</i> | <i>96.0</i> | <i>112.5</i> | <i>124.5</i> | <i>137.0</i> | |
| | | | | | 83.1 | 95.6 | 111.4 | 123.1 | 134.8 | | |

Tablica 3.2: Vrijednosti parametara modela GP3 i GP2 primijenjeni na nizove premašaja šest različitih pragova (μ , percentili) sušnih razdoblja za postaju ST, s odgovarajućim 5 -, 10 -, 25 -, 50 - i 100 - godišnjim povratnim vrijednostima (x_T) dobivenim iz prediktivne razdiobe (kosim pismom) i iz pripadnih posteriornih razdiobi. Procjene iz posteriornih razdiobi odnose se na njihov medijan. Tri kategorije sušnih razdoblja označene su s DS1, DS5 i DS10.

| μ | Model | k | σ | θ | T5 | T10 | T25 | T50 | T100 | BF |
|-------|-------|------|----------|----------|------|------|-------|-------|-------|------|
| DS1 | | | | | | | | | | |
| 25 | GP2 | 0.17 | 5.27 | | 45.5 | 54.9 | 69.4 | 82.0 | 96.1 | 40.0 |
| | | | | | 46.0 | 54.0 | 65.0 | 72.0 | 77.0 | |
| | GP3 | 0.18 | 5.20 | -0.47 | 45.4 | 55.2 | 70.1 | 83.2 | 97.9 | |
| | | | | | 46.5 | 56.5 | 70.5 | 83.5 | 95.5 | |
| 50 | GP2 | 0.15 | 5.80 | | 44.5 | 53.4 | 66.7 | 78.0 | 90.7 | 40.9 |
| | | | | | 45.0 | 53.0 | 64.0 | 71.0 | 77.0 | |
| | GP3 | 0.16 | 5.73 | -0.47 | 44.3 | 53.4 | 67.0 | 78.7 | 91.8 | |
| | | | | | 45.5 | 54.5 | 68.5 | 79.5 | 91.5 | |
| 75 | GP2 | 0.12 | 6.71 | | 43.3 | 51.2 | 62.6 | 72.3 | 82.6 | 22.1 |
| | | | | | 44.0 | 51.0 | 62.0 | 70.0 | 77.0 | |
| | GP3 | 0.13 | 6.60 | -0.46 | 43.0 | 51.0 | 62.8 | 72.6 | 83.5 | |
| | | | | | 43.5 | 51.5 | 64.5 | 74.5 | 85.5 | |
| 90 | GP2 | 0.10 | 7.71 | | 43.0 | 50.6 | 61.3 | 70.0 | 79.4 | 7.3 |
| | | | | | 44.0 | 51.0 | 62.0 | 70.0 | 78.0 | |
| | GP3 | 0.11 | 7.47 | -0.39 | 42.7 | 50.4 | 61.9 | 71.3 | 81.2 | |
| | | | | | 43.5 | 51.5 | 62.5 | 73.5 | 84.5 | |
| 95 | GP2 | 0.15 | 7.50 | | 42.9 | 50.8 | 62.6 | 72.6 | 83.7 | 4.5 |
| | | | | | 43.0 | 51.0 | 63.0 | 72.0 | 81.0 | |
| | GP3 | 0.18 | 7.12 | -0.35 | 42.3 | 50.4 | 62.9 | 73.7 | 86.0 | |
| | | | | | 42.5 | 51.5 | 64.5 | 76.5 | 89.5 | |
| 98 | GP2 | 0.07 | 9.90 | | 43.6 | 51.7 | 62.8 | 71.6 | 80.8 | 3.8 |
| | | | | | 44.0 | 52.0 | 63.0 | 72.0 | 82.0 | |
| | GP3 | 0.08 | 9.77 | -0.44 | 43.1 | 51.1 | 62.4 | 71.3 | 80.7 | |
| | | | | | 43.5 | 51.5 | 63.5 | 74.5 | 86.5 | |
| DS5 | | | | | | | | | | |
| 25 | GP2 | 0.22 | 7.57 | | 69.4 | 86.3 | 112.9 | 137.1 | 165.2 | 56.2 |
| | | | | | 70.0 | 86.0 | 109.0 | 126.0 | 141.0 | |
| | GP3 | 0.22 | 7.52 | -0.48 | 69.2 | 86.3 | 113.4 | 138.0 | 166.8 | |
| | | | | | 70.5 | 87.5 | 113.5 | 135.5 | 157.5 | |
| 50 | GP2 | 0.16 | 9.19 | | 65.6 | 79.6 | 100.8 | 119.0 | 139.6 | 10.7 |
| | | | | | 67.0 | 80.0 | 101.0 | 117.0 | 133.0 | |
| | GP3 | 0.18 | 9.01 | -0.42 | 65.6 | 80.0 | 102.0 | 121.2 | 142.8 | |
| | | | | | 66.5 | 81.5 | 103.5 | 122.5 | 142.5 | |
| 75 | GP2 | 0.19 | 9.76 | | 66.5 | 81.5 | 104.8 | 125.3 | 148.6 | 13.6 |
| | | | | | 68.0 | 82.0 | 104.0 | 122.0 | 139.0 | |
| | GP3 | 0.20 | 9.61 | -0.44 | 66.2 | 81.6 | 105.5 | 126.6 | 150.9 | |
| | | | | | 67.5 | 82.5 | 106.5 | 127.5 | 149.5 | |

Nastavak tablice 3.2.

| μ | Model | k | σ | θ | T5 | T10 | T25 | T50 | T100 | BF |
|-------|-------|-------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| DS5 | | | | | | | | | | |
| 90 | GP2 | 0.17 | 12.09 | | 66.4 | 80.7 | 102.5 | 121.3 | 142.7 | 3.9 |
| | | | | | 67.0 | 81.0 | 103.0 | 121.0 | 139.0 | |
| | GP3 | 0.19 | 11.71 | | -0.33 | 65.8 | 80.5 | 103.0 | 122.9 | 145.5 |
| | | | | | | 66.5 | 81.5 | 104.5 | 125.5 | 148.5 |
| 95 | GP2 | 0.11 | 15.49 | | 67.8 | 81.8 | 102.0 | 118.6 | 136.4 | 1.9 |
| | | | | | 68.0 | 82.0 | 103.0 | 120.0 | 138.0 | |
| | GP3 | 0.12 | 15.02 | | -0.21 | 67.0 | 81.2 | 101.9 | 119.3 | 138.1 |
| | | | | | | 67.5 | 82.5 | 103.5 | 121.5 | 142.5 |
| 98 | GP2 | 0.64 | 8.09 | | 61.4 | 77.9 | 113.9 | 158.9 | 229.0 | 4.0 |
| | | | | | 61.0 | 76.0 | 104.0 | 130.0 | 157.0 | |
| | GP3 | 0.64 | 8.04 | | -0.44 | 60.8 | 77.1 | 112.6 | 157.2 | 226.4 |
| | | | | | | 61.5 | 76.5 | 106.5 | 137.5 | 172.5 |
| DS10 | | | | | | | | | | |
| 25 | GP2 | 0.19 | 12.38 | | 90.9 | 112.2 | 144.9 | 173.8 | 206.5 | 18.7 |
| | | | | | 90.0 | 107.0 | 130.0 | 144.0 | 155.0 | |
| | GP3 | 0.19 | 12.25 | | -0.45 | 90.9 | 112.7 | 146.3 | 176.0 | 209.9 |
| | | | | | | 91.5 | 111.5 | 140.5 | 162.5 | 181.5 |
| 50 | GP2 | 0.16 | 13.82 | | 88.9 | 108.6 | 138.3 | 163.7 | 192.2 | 18.0 |
| | | | | | 88.0 | 106.0 | 129.0 | 144.0 | 156.0 | |
| | GP3 | 0.16 | 13.69 | | -0.46 | 88.7 | 108.7 | 138.8 | 165.0 | 194.2 |
| | | | | | | 89.5 | 108.5 | 136.5 | 158.5 | 178.5 |
| 75 | GP2 | 0.11 | 16.89 | | 87.3 | 104.7 | 129.7 | 150.3 | 172.5 | 6.6 |
| | | | | | 88.0 | 104.0 | 127.0 | 144.0 | 158.0 | |
| | GP3 | 0.12 | 16.62 | | -0.40 | 87.0 | 104.8 | 130.6 | 152.0 | 175.3 |
| | | | | | | 88.5 | 105.5 | 131.5 | 152.5 | 173.5 |
| 90 | GP2 | -0.01 | 21.03 | | 87.2 | 101.5 | 120.1 | 134.0 | 148.0 | 5.3 |
| | | | | | 88.0 | 102.0 | 121.0 | 136.0 | 151.0 | |
| | GP3 | 0.00 | 20.93 | | -0.44 | 86.6 | 101.3 | 120.6 | 135.2 | 149.9 |
| | | | | | | 87.5 | 102.5 | 122.5 | 138.5 | 155.5 |
| 95 | GP2 | 0.01 | 20.80 | | 87.0 | 102.0 | 121.7 | 136.5 | 151.3 | 0.3 |
| | | | | | 87.2 | 102.2 | 122.2 | 139.2 | 155.2 | |
| | GP3 | 0.06 | 19.37 | | 0.24 | 85.7 | 101.0 | 122.1 | 138.7 | 155.9 |
| | | | | | | 86.7 | 101.7 | 123.7 | 142.7 | 162.7 |
| 98 | GP2 | 0.11 | 16.69 | | 86.3 | 100.1 | 119.8 | 135.8 | 152.8 | 0.6 |
| | | | | | 86.6 | 99.6 | 119.6 | 136.6 | 155.6 | |
| | GP3 | 0.15 | 14.25 | | 0.16 | 85.3 | 98.2 | 118.1 | 135.4 | 155.1 |
| | | | | | | 85.1 | 98.1 | 119.1 | 138.1 | 161.1 |

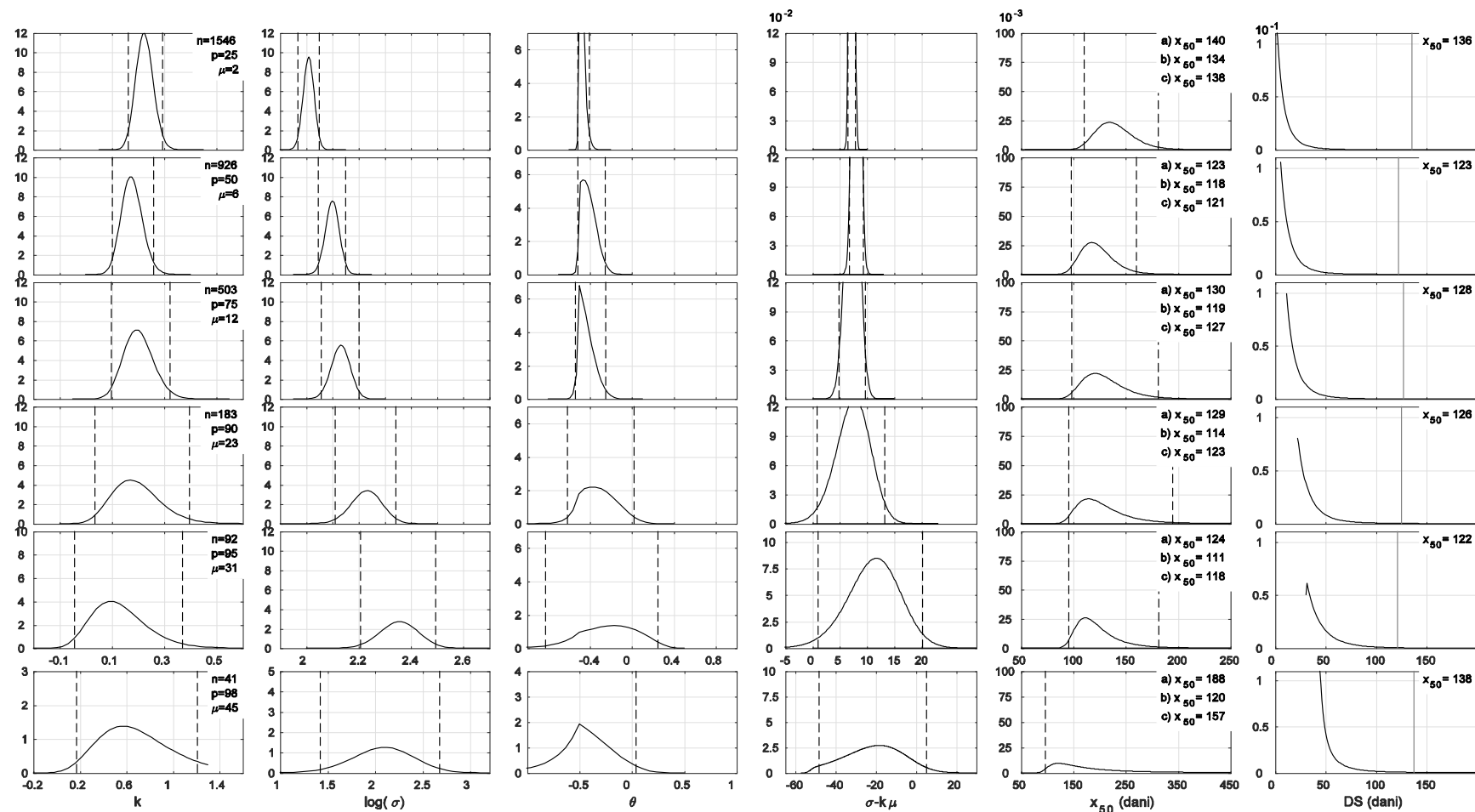
Konačno, treba naglasiti da se s praktičnog gledišta preferira procjena povratnih vrijednosti iz pripadnih posteriornih razdiobi budući da omogućuju pojedinačne procjene (medijan, tjeme ili srednjak) i pripadne intervale povjerenja koji su relevantni za krajnje korisnike. S druge strane, prediktivna razdioba omogućuje samo jednu povratnu vrijednost

bez intervala povjerenja (iako prediktivna razdioba uključuje svu nepouzdanost u procjeni parametara). Međutim, za procjenu posteriorne razdiobe povratnih vrijednosti potreban je zaseban račun za svaki povratni period, dok se iz prediktivne razdiobe može odrediti bilo koja povratna vrijednost direktno pomoću kvantila. No, bez obzira na koju se metodu odlučili konačni rezultati su vrlo slični (Tablica 3.1).

3.4.2 Primjena zaokruženog modela GP na nizove premašaja

Zaokruženi model GP primijenjen je na nizove premašaja pojedinih pragova sušnih razdoblja pri čemu su pragovi definirani odabirom pripadnog 25., 50., 75., 90., 95. i 98. percentila opaženog niza. Pripadni posteriori parametara razdiobe GP (k , $\log(\sigma)$ i θ) i 50 - godišnjih povratnih vrijednosti te prediktivna razdioba nizova premašaja za DS5 na postaji Split–Marjan, prikazani su na slici 3.3 na isti način kao i na slici 3.1 za razdiobu GEV. U prvoj koloni slike 3.3 navedeni su pragovi izraženi u danima (μ) i percentilima (p) te pripadni broj premašaja praga (n), odnosno duljina niza. Isprekidanim linijama označeni su intervali povjerenja pojedine posteriorne razdiobe. Posteriorne razdiobe parametara, kao i razlike ($\sigma - k\mu$) pokazuju prilično dobru stabilnost kroz cijeli raspon pragova, osim za najveći prag (98. percentil). Stabilnost je posebno vidljiva za pragove manje od 90. percentila. Također, vidljivo je da ako postoji dovoljan broj podataka, najvjerojatnija vrijednost parametra lokacije iznosi oko -0.5, što ukazuje na to da je primjena modela GP utemeljena. Dodatno, slika 3.3 jasno pokazuje kako nesigurnost (širina posteriora) raste s porastom praga, osobito za vrlo visoke pragove (npr. 90. percentil). To je razumljiva posljedica gubitka podataka primjenom visokih pragova. Možemo zaključiti da je u ovom slučaju model GP prihvatljiv za primjenu na nizove premašaja počevši čak od umjereno niskih percentila za odabir praga. Procjene povratnih vrijednosti su također razumno stabilne, ali pripadni intervali povjerenja se ne povećavaju s porastom praga tako jasno kao za parametre. Objašnjenje se može pronaći u činjenici da se smanjenjem praga kvantil koji odgovara određenom povratnom periodu (npr. 50 - godišnjem) povećava, pa ga je teže procijeniti. Bez obzira na to, prilikom odabira vrlo visokog praga (npr. 98. percentila), nesigurnost procjena je izrazito velika ukazujući na potrebnu opreznost kod primjene pristupa GP–POT na nizove premašaja tako visokih pragova, osim u slučaju da je dostupan jako velik broj podataka. Nadalje, iz pripadnih prediktivnih razdiobi za pojedine nizove premašaja, primjećuje se da je 50 - godišnja povratna

3. PRIMJENA TEORIJE EKSTREMA NA SUŠNA RAZDOBLJA BAYESOVIM PRISTUPOM



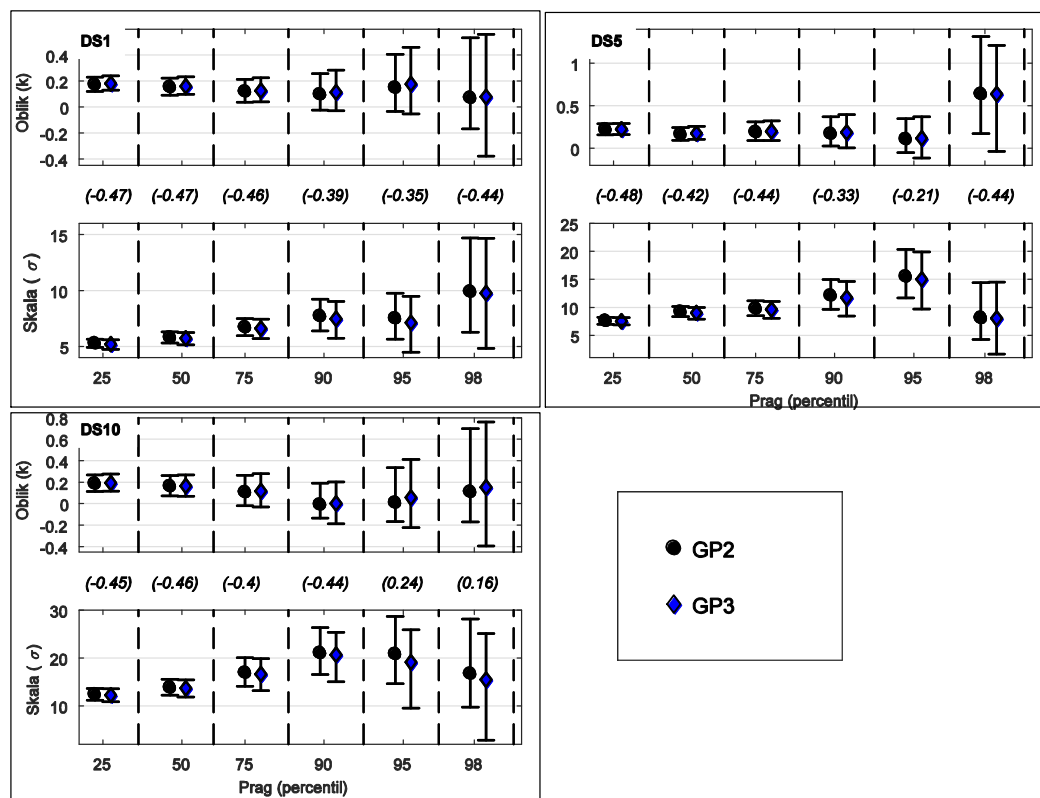
Slika 3.3: Posteriorne razdiobe za parametre razdiobe GP (oblik k , skala $\log(\sigma)$ i lokacija θ - prva tri stupca), posteriorne razdiobe razlika $\sigma - k\mu$ (4. stupac) i 50 - godišnje povratne vrijednosti (5. stupac) te prediktivna razdioba GP (zadnji stupac) sušnih razdoblja DS5 na postaji Split–Marjan. Isprekidane linije na grafovima posteriora odnose se na 95%–tne intervale povjerenja. U desnom kutu grafova prve kolone naznačene su duljine (n) nizova premašaja pojedinog praga te pragovi izraženi u percentilima (p) i u danima (μ). Na grafovima 50 - godišnjih povratnih vrijednosti naznačene su u desnom kutu odgovarajuće vrijednosti srednjaka (a), moda (b) i medijana (c).

vrijednost (zadnja kolona slike 3.3) najbliža vrijednosti medijana pripadne posteriorne razdiobe povratne vrijednosti (predzadnja kolona slike 3.3).

Dodatno su uspoređene dvije metode, GP2 (s prilagođenim parametrom lokacije na iznos -0.5) i GP3, njihovom primjenom na nizove premašaja sušnih razdoblja DS1, DS5 i DS10 za dvije analizirane postaje. Rezultati za postaju Split–Marjan prikazani su na slikama 3.4. i 3.5., a slične slike za postaju Zagreb–Grič nalaze se u Dodatku B. Na slici 3.4 prikazane su procjene parametara oblika i skale (dobivene iz medijana njihovih posteriornih razdiobi) s pripadnim 95%–tnim intervalima povjerenja (dobiveni iz pripadnih percentila 2.5 i 97.5 posteriorne razdiobe), a rezultati dva modela (GP3 i GP2) razlučeni su simbolima (kružići i dijamanti). Vidljiva je stabilnost parametara oblika i skale za cijeli raspon pragova, ali je jasno vidljivo i povećanje nesigurnosti procjena s povećanjem praga. Pozitivan predznak parametra oblika ($k > 0$) ukazuje na prevladavajući dugi rep razdiobe GP za gotovo sve kategorije sušnih razdoblja i za sve pragove. Iznimka se javlja za slučaj odabira visokog praga (90. i 95. percentila) za DS10 iz kojeg proizlazi razdioba kratkog repa (k iznosi približno nula), ali s vrlo širokim intervalima povjerenja. Nadalje, kako je ranije spomenuto, prilikom primjene zaokruženog modela GP na sušna razdoblja, parametar lokacije ima važnu ulogu u zaključivanju o adekvatnosti modela. Parametar lokacije θ (na slici 3.4 naznačen u zagradi ispod pojedinog grafa) ostaje približno jednak teorijskoj očekivanoj vrijednosti -0.5 za sve pragove manje od 90. percentila. Za kategoriju DS10 izražena su velika odstupanja za visoke pragove koje su popraćene i velikim nesigurnostima.

S druge strane, na slici 3.5 prikazani su rezultati povratnih vrijednosti za različite povratne periode (2, 5, 10, 25, 50 i 100 godina) koji su dobiveni iz pripadnih posteriornih razdioba kao i iz prediktivnih razdioba za različite pragove i kategorije sušnih razdoblja (DS1, DS5 i DS10). Dakle, na slici 3.5 se nalazi sveukupno četiri vrijednosti za svaki povratni period i svaki prag, a međusobno su razdvojeni različitim simbolima. Također je provedena usporedba modela GP2 i GP3, a rezultati su izraženi Bayesovim faktorom (naznačeni na svakom grafu slike 3.5). Rezultati dobiveni iz oba modela su vrlo slični kako za različite pragove, tako i za različite povratne periode. Jedino za velike povratne periode (100 godina) uočavaju se razlike u rezultatima dobivenim iz prediktivne razdiobe i pripadne posteriorne razdiobe. To je osobito vidljivo za najniže pragove (25. i 50. percentil) kao i za slučaj DS5 za najveći prag (98. percentil). Osim toga, vidljivo je i da su procijenjene povratne vrijednosti sušnih razdoblja za niže pragove većih iznosa nego za više pragove, a razlike u rezultatima

između nizova premašaja 25. i 95. percentila u pojedinim slučajevima mogu biti i do 50 dana (primjerice za DS10, T100, slika 3.5).

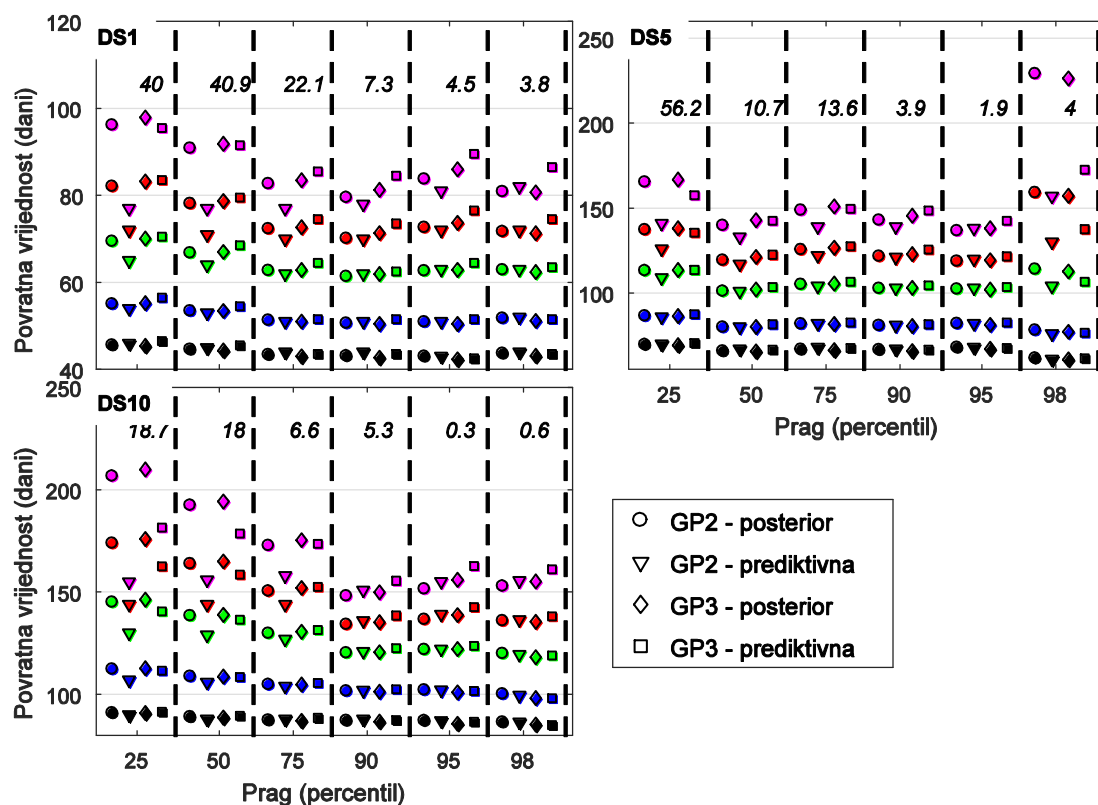


Slika 3.4: Medijani posteriornih razdiobi parametara oblika i skale dobivenih primjenom modela GP2 (kružići) i GP3 (dijamanti) na šest nizova premašaja pojedinih pragova (izraženih u percentilima) za postaju Split–Marjan. Pripadni intervali povjerenja prikazani su pomoću vertikalnih linija. Parametri lokacije navedeni su u zagradama. Različiti paneli se odnose na tri kategorije sušnih razdoblja (DS1, DS5 i DS10).

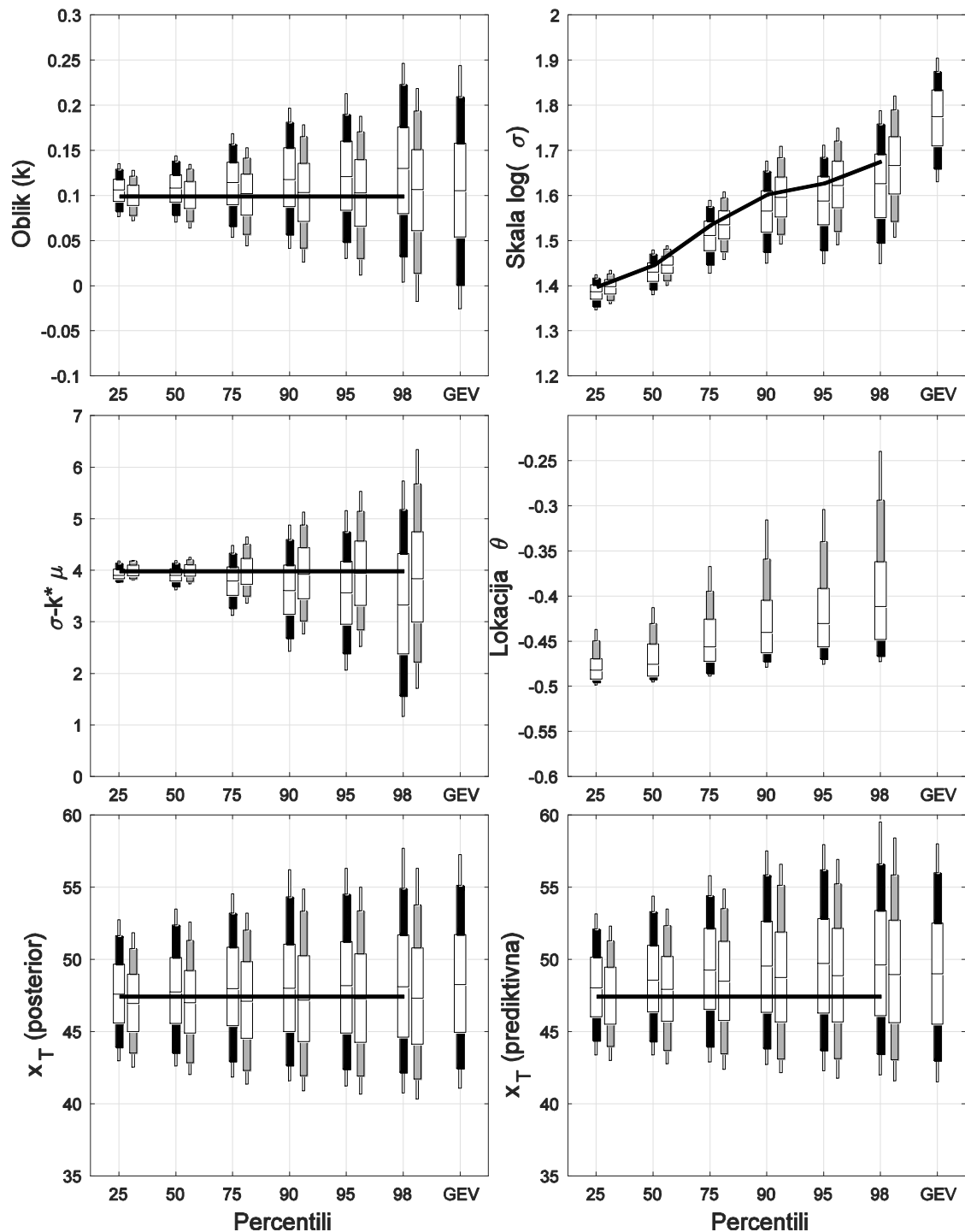
Takav rezultat je u skladu s ranije diskutiranim smanjenjem parametra lokacije za visoke pragove koji ukazuju na kraće repove razdiobe i manje povratne vrijednosti. Međutim, za kontinentalnu postaju Zagreb–Grič (Dodatak B) uočeno je, za kategoriju DS10, povećanje vrijednosti x_T s porastom praga. Ipak, treba ponovno napomenuti da, za praktične primjene, visoke pragove treba koristiti oprezno zbog velikih nesigurnosti u rezultirajućim procjenama. Usporedba modela (BF) pokazala je da nizovi premašaja sušnih razdoblja, na obje postaje, uglavnom preferiraju model GP2, posebno za niske pragove.

Na kraju, uvijek je korisno ispitati ponašanje Bayesove metode s frekvencijskog stanovišta pomoću Monte Carlo simulacija. Simulirani su zaokruženi nizovi prema općoj Paretovoj razdiobi sa sljedećim odabirom parametara: $k = 0.1$, $\sigma = 4$ i $\theta = 0.5$. Duljine nizova iznose 100 godina \times 50 događaja po godini, a nizovi premašaja su formirani koristeći isti skup

percentila kao ranije (25., 50., 75., 90., 95. i 98.) na koje su primijenjeni modeli GP2 i GP3. Radi dosljednosti, primijenjen je i model GEV na odgovarajuće godišnje maksimume. Isti postupak proveden je 1000 puta čime je dobiveno 1000 posteriornih razdioba pripadnih parametara i povratnih vrijednosti kao i 1000 prediktivnih razdioba za dva modela. Iz pojedinačnih razdioba zadržan je medijan, a 1000 dobivenih vrijednosti medijana ukazuje na razdiobu procjenitelja, tj. razdiobu uzorkovanja.



Slika 3.5 Procjene 5 -, 10 -, 25 -, 50 - i 100 - godišnjih povratnih vrijednosti (x_T , u danima) sušnih razdoblja za postaju Split–Marjan dobivene primjenom modela GP2 i GP3 iz pripadnih prediktivnih razdioba (trokutići i kvadratići) i iz pripadnih posteriornih razdioba (kružići i dijamanti). Odgovarajući povratni periodi su razdvojeni različitim bojama: crna ($T = 5$ godina), plava ($T = 10$ godina), zelena ($T = 25$ godina), crvena ($T = 50$ godina) i ružičasta ($T = 100$ godina). Tri panela se odnose na tri kategorije sušnih razdoblja (DS1, DS5 i DS10). Vrijednosti Bayesovog faktora dvaju modela za pojedine pragove naznačene su pri vrhu svakog panela.



Slika 3.6: Razdiobe procjena GP parametara, zatim razlike $\sigma - k\mu$ te odgovarajućih 50 - godišnjih povratnih vrijednosti (x_T) dobivenih primjenom modela GP3, GP2 i GEV za razne pragove (iskazane u percentilima). Razdiobe su dobivene iz 1000 simuliranih nizova prema razdiobi GP. Prikazane su razdiobe medijana posteriora iz pojedinog uzorka, dok se povratne vrijednosti x_T odnose na prediktivne razdiobe. Pune linije upućuju na pripadne teorijske vrijednosti parametara i povratnih vrijednosti. Razdiobe su sažete pomoću sedam kvantila (q_5 ,

q10, q25, q50, q75, q90 i q95) označenih stupićima. Za svaki prag prikazani su rezultati modela GP3 (crno–bijeli stupići) i GP2 (sivo–bijeli stupići).

Svaka pojedina razdioba prikazana je na slici 3.6 pomoću sedam kvantila. Vidljivo je da se Bayesovi procjenitelji ponašaju prilično dobro. Malo odstupanje (engl. *bias*) postoji za GP3, a za GP2 gotovo da nema odstupanja. Kao i ranije (na slici 3.3) vidljivo je da se smanjivanjem praga vrlo učinkovito smanjuje nesigurnost procjena parametara, a u određenoj mjeri i povratnih vrijednosti. Uspoređujući rezultate modela GP s pripadnim rezultatima modela GEV može se vidjeti da procjene parametra modela GEV rezultiraju većom nesigurnošću nego modela GP za odabir pragova nižih od 90. percentila. Za odabir većih pragova, nesigurnosti u procjenama iz modela GEV slične su onima iz modela GP. Dakle, odabir visokih pragova sušnih razdoblja za konstruiranje nizova premašaja i primjene modela GP neće imati prednosti u odnosu na primjenu modela GEV na godišnje maksimume.

3.4. Diskusija

Cilj analize u ovom poglavlju bio je istražiti mogućnosti primjene Bayesovog pristupa teoriji ekstrema na nizove sušnih razdoblja, uz prethodno (sa)znanje da su ti nizovi diskretni (trajanja zaokružena na cijeli broj dana). Iako je naglasak na proučavanju modela GP na nizove premašaja, usporedno je provedena i analiza pristupa GEV–AM.

Rezultati su potvrdili da je model GEV sa svojim 'dugim' repom uvijek u mogućnosti doseći više povratne vrijednosti nego što je to slučaj s Gumbeolovim modelom koji se često koristi u praksi radi jednostavnosti. Dakle, model GEV u svakom slučaju pruža konzervativnije, opreznije procjene za planiranje. Nadalje, premda je usporedba dva modela (tablica 3.1) pokazala da analizirani podaci uglavnom preferiraju jednostavniji Gumbelov model (i to do omjera 5:1), pojedinačna vrlo duga trajanja sušnih razdoblja će dati znatnu prednost modelu GEV. To potvrđuje potencijalni rizik nekritične primjene Gumbelovog modela na godišnje maksimume sušnih razdoblja, kako su već upozorili Coles i Pericchi (2003) u slučaju analize dnevne količine oborine.

Prilikom modeliranja nizova premašaja sušnih razdoblja pomoću razdiobe GP, Bayesov pristup ukazao je na stabilnost procjena parametara počevši već od niskih pragova. S druge strane, gubitak informacija (podataka) do kojega dolazi upotrebom visokih pragova (npr. 90. percentil i veći) može prouzročiti znatne nesigurnosti u procjenama parametara.

Posteriorna razdioba razlika $\sigma - k\mu$, za različite pragove μ , može se promatrati kao analogon grafu srednjeg premašaja (MEP) u frekvencijskom pristupu. Međutim, premda se

MEP prvenstveno koristi za odabir optimalnog praga u pristupu GP–POT (npr. vidi Egozcue i sur. 2006), Bayesov pristup sugerira da je cijeli problem odabira praga nedovoljno precizno postavljen, jer s jedne strane teorija u pozadini je asimptotska, a s druge strane ne postoji neki dobro određeni kriterij za procjenu tog optimalnog praga. Umjesto da izravno rješava spomenuti problem, Bayesov pristup pruža cjelokupnu sliku raspona pragova kompatibilnih s modelom GP. Bez obzira na izbor praga, modeliranje pripadnih nizova premašaja daje posteriorne razdiobe vjerojatnosti pojedinih parametara i povratnih vrijednosti na egzaktn način sukladno odabranom modelu i dostupnim podacima.

U slučaju zaokruženih nizova premašaja, očekuje se da će parametar lokacije razdiobe GP biti -0.5 (umjesto vrijednosti nula koja vrijedi u slučaju kontinuiranih nizova) što pruža dodatni kriterij za ocjenu opravdanosti modela GP. Na primjeru analize dvije postaje, usporedba modela GP2 (s fiksnim parametrom lokacije iznosa -0.5) i GP3 pokazala je dominantnu prednost jednostavnijeg modela GP2 (u omjeru do 56:1). Ipak, za analizu sušnih razdoblja u praksi preporučuje se najprije procijeniti sva tri parametra modela GP, a ukoliko je procjena parametra lokacije blizu vrijednosti -0.5 , može se primijeniti model GP2.

Vežano za procjene povratnih vrijednosti, pokazalo se da povećanje nesigurnosti s povećanjem praga nije tako izraženo kao kod procjena parametara. Do sličnih rezultata došli su i Tancredi i sur. (2006) koji su pokazali da postoji određena otpornost u procjeni povratnih vrijednosti u odnosu na izbor praga.

Prema svemu navedenom, za analizu sušnih razdoblja preporučujemo Bayesov pristup koji se uvijek može izravno primijeniti, ne ovisi o asimptotskoj teoriji i omogućuje egzaktne procjene parametara i pripadnih nesigurnosti (uvjetovan odabirom modela i priora). Coles i Pericchi (2003) istaknuli su da su procjene nesigurnosti temeljne pri analizi ekstrema te se moraju uzeti u obzir u praktičnim primjenama, a Bayesov pristup omogućuje procjene nesigurnosti na jasan i nedvosmislen način. Osobito je prikladan kad je u pitanju mali uzorak podataka (Egozcue i sur. 2006). Konačno, za razliku od klasičnog pristupa statističkom zaključivanju, Bayesov pristup pridaje vjerojatnosti raznim vrijednostima parametara u modelu pa i samim modelima, a isto činimo, intuitivno i ne uvijek potpuno svjesno, i u svakodnevnoj praksi. Sve navedeno čini Bayesov pristup atraktivnim za praktičnu primjenu. Tako ćemo u sljedećem poglavlju provesti regionalnu analizu sušnih razdoblja u Hrvatskoj.

4. REGIONALNA ANALIZA SUŠNIH RAZDOBLJA U HRVATSKOJ

4.1. Uvod

Detaljnijom statističkom analizom u prethodna dva poglavlja postignut je prvi cilj ovog rada kojim je preporučena prikladna metoda za procjenu visokih kvantila sušnih razdoblja i pripadnih nesigurnosti. Za procjene povratnih vrijednosti sušnih razdoblja, ukoliko su na raspolaganju svi nizovi, preporučuje se zaokružena opća Paretova (zGP) razdioba primijenjena na nizove premašaja unaprijed definiranog praga. Odabir praga za sušna razdoblja može biti i kraćih trajanja nego što se redovito pronalazi u literaturi. Na primjer, kako je pokazano za nizove sušnih razdoblja na postajama Zagreb–Grič i Split–Marjan, pogodan je i pripadni 75. percentil pojedinog niza, u odnosu na uobičajen odabir visokih pragova (90. percentil i viši). Štoviše, korištenjem vrlo visokih pragova, nesigurnost u procjeni parametara razdiobe zGP približno će biti jednaka onoj primjenom opće razdiobe ekstrema na godišnje maksimume trajanja sušnih razdoblja. U tom slučaju primjena opće Paretove razdiobe ne pokazuje jasnu prednost u odnosu na primjenu razdiobe GEV.

U ovom poglavlju analizirana su srednja i maksimalna trajanja sušnih razdoblja u Hrvatskoj na gustoj mreži meteoroloških postaja u Hrvatskoj. Nakon analize osnovne klimatologije sušnih razdoblja, procijenjena su očekivana trajanja sušnih razdoblja za različite povratne periode primjenom razdiobe zGP na nizove premašaja, ali i primjenom razdiobe GEV na godišnje maksimume. Dobiveni rezultati su prostorno međusobno uspoređeni. Svrha je utvrditi regionalne razlike i sličnosti na području Hrvatske te time pripremiti podlogu koja može poslužiti za različite klimatološke primjene. Naime, ponekad je u praksi korisnije odrediti i koristiti određene statističke veličine, poput srednjaka ili povratnih vrijednosti, po regijama nego na pojedinačnim postajama. Klein Tank i sur. (2009) istaknuli su kako osrednjavanje po svim postajama u pojedinoj regiji smanjuje učinke prirodne varijabilnosti te može eliminirati nesistematične nehomogenosti pridavajući tako manju težinu eventualnim izdvojenicama na pojedinačnim postajama. U konačnici, regionalna analiza rezultira robusnijim zaključcima.

U nastavku su opisani podaci i način primjene ranije preporučenih metoda, a rezultati su potom analizirani i diskutirani u zasebnim potpoglavljima.

4.2. Podaci i metode

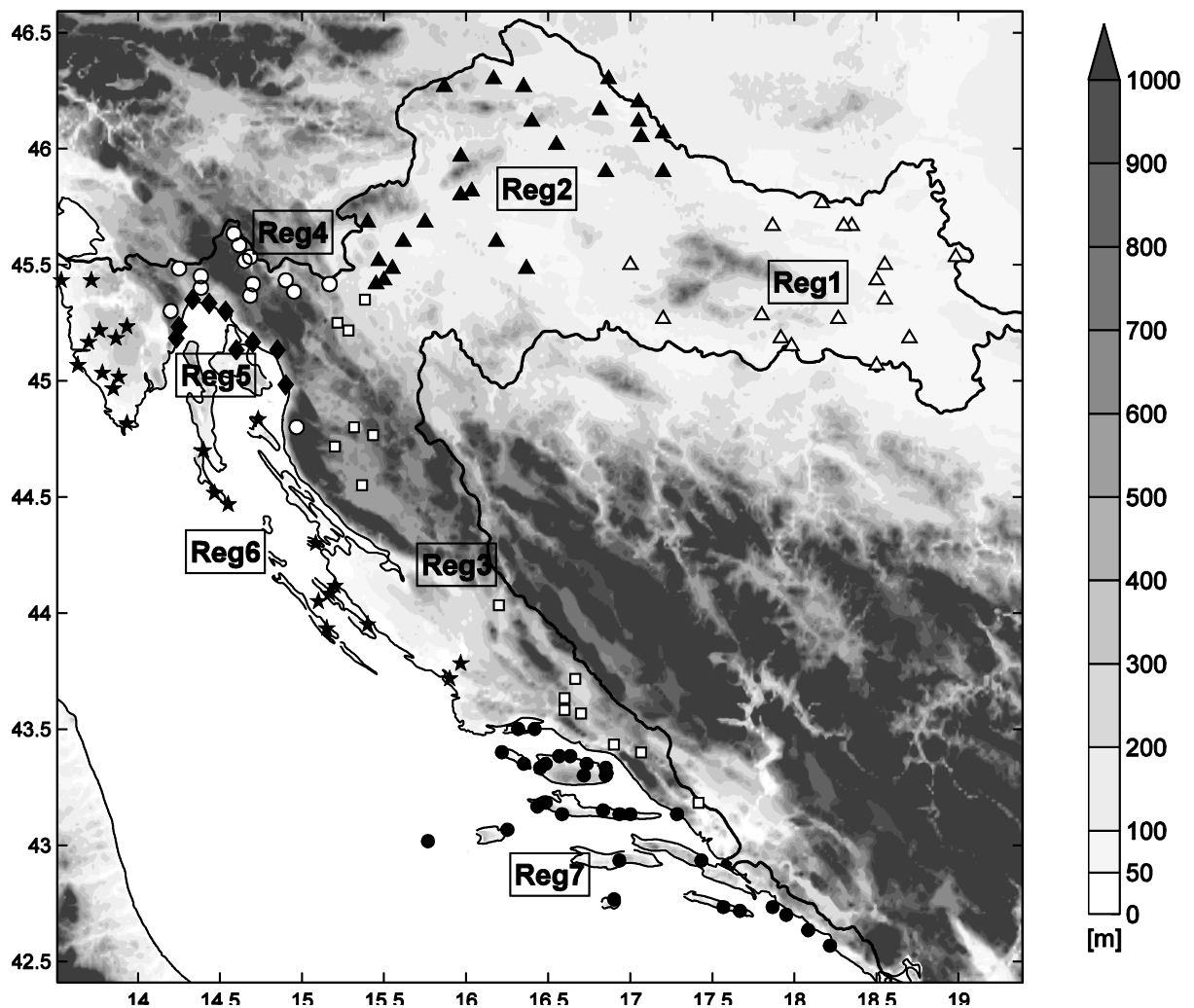
Za regionalnu analizu sušnih razdoblja korišteni su podaci dnevne količine oborine sa 131 meteorološke postaje iz redovne mreže Državnog hidrometeorološkog zavoda. Postaje su ravnomjerno raspoređene na području Hrvatske (Slika 4.1), a pripadni podaci obuhvaćaju dugogodišnje razdoblje 1961. – 2015. Iste postaje korištene su i u radu Gajić-Čapka i sur. (2015) pri analizi trendova indeksa oborinskih ekstrema. Ti podaci su ranije testirani na potencijalnu nehomogenost (Zahradniček i sur. 2014) te pružaju kvalitetan skup podataka za prostornu analizu. U dodatku C (tablica C.1) nalazi se popis svih postaja. Prema Gajić-Čapka i sur. (2015) Hrvatska je podijeljena na sedam prostornih regija uzimajući u obzir godišnje hodove količine oborine te empirijsku razdiobu percentila dnevnih količina oborina. Odabir tih regija je također dobro usklađen s geografskim položajem i nadmorskom visinom postaja. U tablici 4.1 nalazi se popis sedam regija i broj pripadnih meteoroloških postaja u pojedinoj regiji.

Tablica 4.1: Sedam regija i broj pripadnih meteoroloških postaja korištenih u ovom radu.

| Regija | Opis | Broj postaja |
|--------|------------------------------------|--------------|
| Reg1 | Istočna kontinentalna unutrašnjost | 16 |
| Reg2 | Zapadna kontinentalna unutrašnjost | 25 |
| Reg3 | Obalno zaleđe | 15 |
| Reg4 | Gorski kotar i sjeverni Velebit | 14 |
| Reg5 | Hrvatsko primorje | 9 |
| Reg6 | Obala sjevernog Jadrana | 23 |
| Reg7 | Središnji i južni Jadran | 30 |

Na svim postajama izračunata su trajanja sušnih razdoblja za tri kategorije odabira dnevne granične količine oborine: 1 mm, 5 mm i 10 mm koje ćemo nastaviti označavati s DS1, DS5 i DS10. Najprije je analizirana osnovna klimatologija sušnih razdoblja po sezonama i za godinu uzimajući u obzir srednja i maksimalna trajanja sušnih razdoblja te njihovu empirijsku razdiobu. Ta analiza je potrebna kako bi se konačni rezultati procjena povratnih vrijednosti sušnih razdoblja mogli staviti u kontekst opaženih trajanja. Osim toga, osnovna klimatologija je nužan prvi korak kako bi ispitali i opravdanost odabira sedam regija.

Potom je na nizove premašaja za svaku postaju primijenjena zaokružena opća Paretova razdioba (zGP). Pri tome je najprije određen prikladni prag za definiranje nizova premašaja sušnih razdoblja ocjenom stabilnosti procijenjenih parametara za različite odabire pragova (10., 25., 50., 75., 90. i 95. percentil). Istovremeno, na godišnja maksimalna trajanja sušnih razdoblja primijenjena je razdioba GEV. Za procjenu parametara obje razdiobe korišten je Bayesov pristup s odabirom neinformativnih priornih razdioba kako je opisano u poglavlju 3.3. Primjenom modela zGP procijenjena su sva tri parametra opće Paretove razdiobe. Procijenjene su posteriorne razdiobe pripadnih parametara i povratnih vrijednosti za različite povratne periode te pripadne prediktivne razdiobe GEV i GP. Potom su analizirane njihove prostorne raspodjele na području Hrvatske.

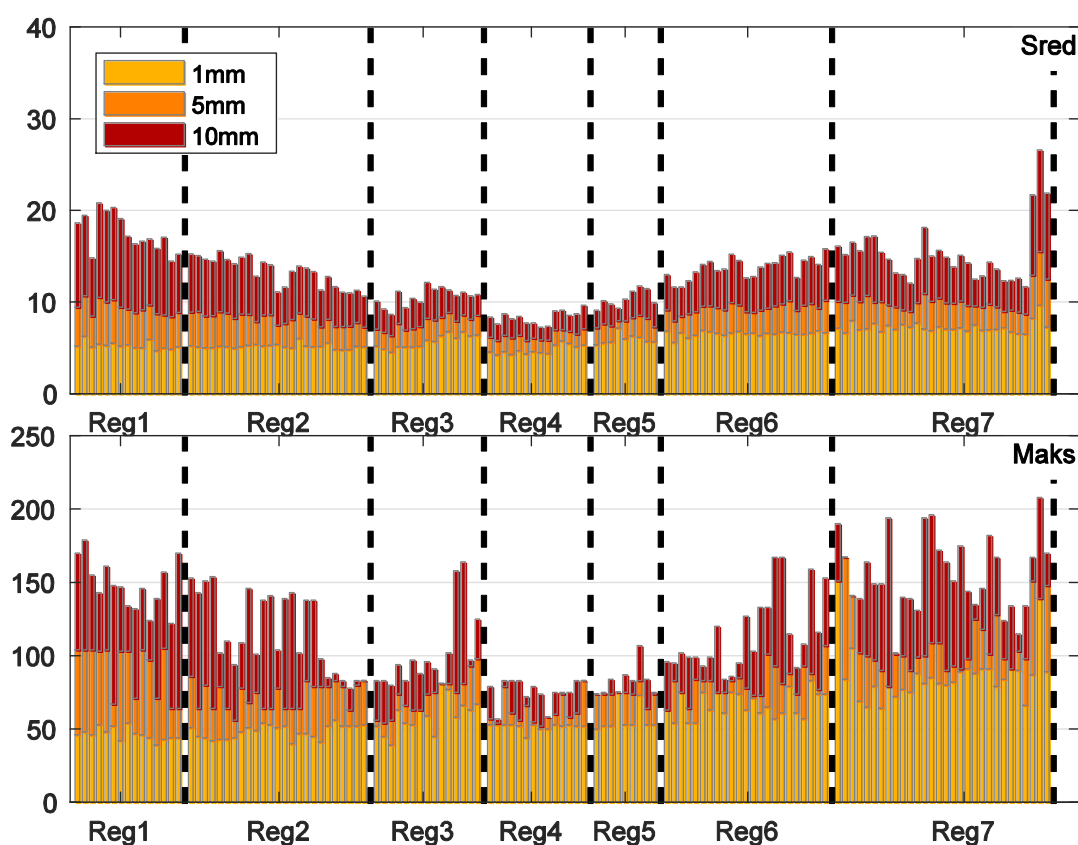


Slika 4.1: Položaj meteoroloških postaja i pripadnih regija (opis u tablici 4.1; preuzeto iz Gajić–Čapka i sur. 2015).

4.3. Rezultati

4.3.1 Prostorna analiza srednjih i maksimalnih trajanja sušnih razdoblja

Srednja godišnja trajanja sušnih razdoblja na 131 postaji u Hrvatskoj prikazana su pomoću stupića na slici 4.2a. Postaje su poredane geografski idući od istočne kontinentalne unutrašnjosti (Reg1, Reg2), preko gorske Hrvatske (Reg3 i Reg4), do jadranske obale (Reg5, Reg6 i Reg7), a regije su razdvojene isprekidanim podebljanim linijama. Različitim bojama razdvojene su tri kategorije sušnih razdoblja (DS1, DS5 i DS10). Na istoj slici (slika 4.2b) prikazana su i maksimalna godišnja trajanja sušnih razdoblja pojedinih kategorija. Slični prikazi srednjih i maksimalnih trajanja po *sezonama* nalaze se u dodatku C.



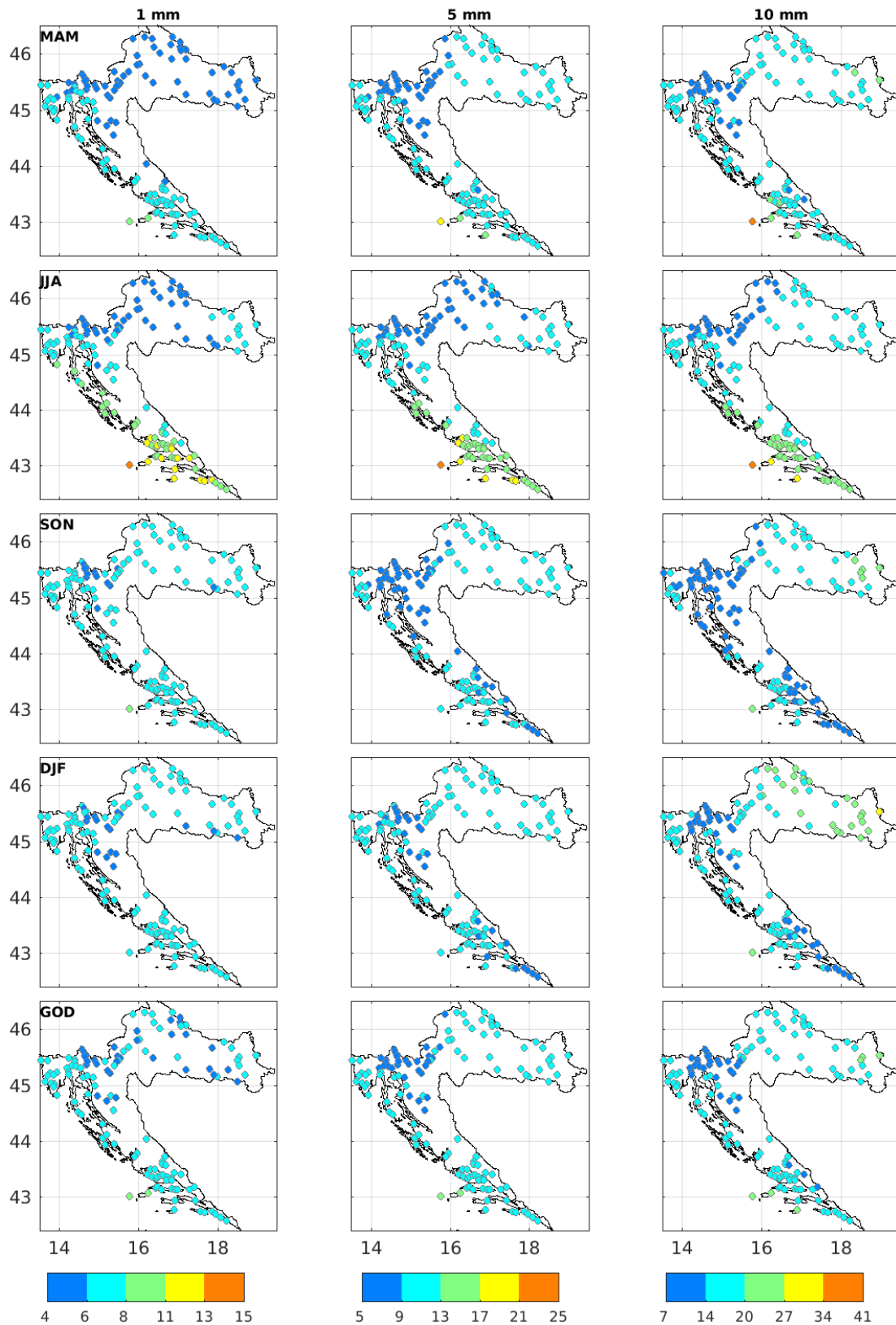
Slika 4.2: a) Srednja i b) maksimalna godišnja trajanja sušnih razdoblja različitih kategorija ovisno o dnevnoj graničnoj vrijednosti količine oborine pri definiranju sušnih razdoblja (1 mm, 5 mm i 10 mm), za 131 postaju razmještene u sedam regija. Visina stupića se kumulativno povećava po kategorijama.

Prema prosječnim *godišnjim* vrijednostima trajanja sušnih razdoblja, razlučuju se prostorne razlike između kontinentalne unutrašnjosti te gorskog i obalnog područja, osobito za DS5 i DS10. Naime, za kategoriju DS1, najdulja sušna razdoblja javljaju se na Jadranu

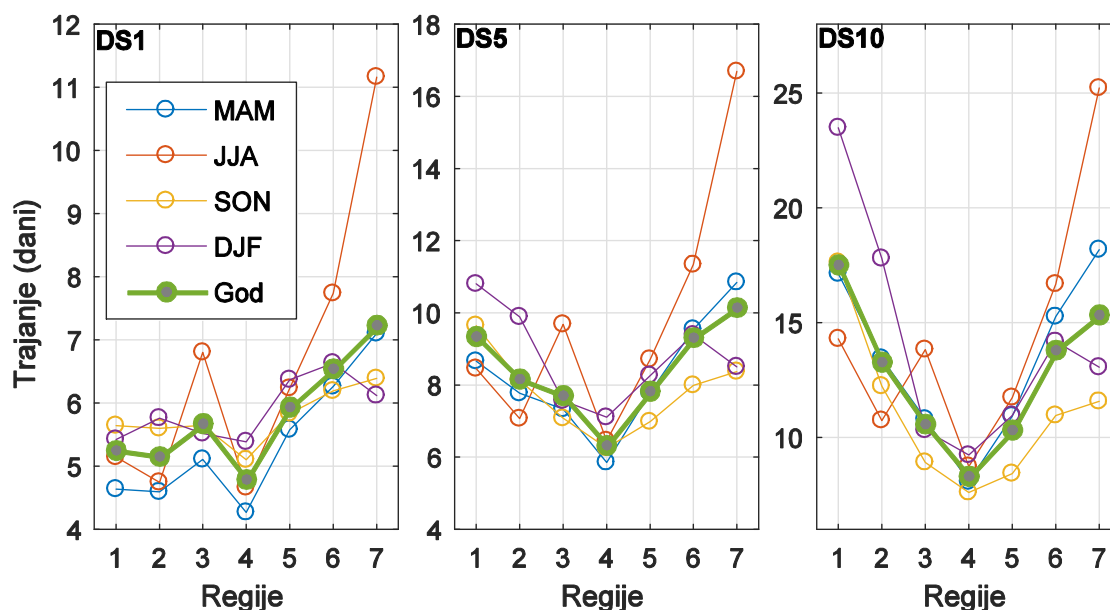
(Reg6 i Reg7) i prosječnog su trajanja 7 do 8 dana, dok DS1 u ostalim regijama prosječno traju od 5 do 6 dana. Međutim, za kategoriju DS5 vidljivo je kako se najdulja sušna razdoblja u godini podjednako mogu očekivati u istočnoj Hrvatskoj (Reg1) kao i na Jadranu (Reg6 i Reg7) prosječnog trajanja 10 dana, dok u ostalim regijama DS5 prosječno traju od 7 do 8 dana. Idući prema najvišoj kategoriji DS10, izražen je V oblik prostorne razdiobe sušnih razdoblja (slika 4.2a). Naime, izdvajaju se najistočnija (Reg1) i najjužnija (Reg7) regija s najduljim prosječnim trajanjem sušnih razdoblja od 18 odnosno 16 dana. U Reg2 i Reg6 sušna razdoblja prosječno traju 14 dana, dok u Reg3, Reg4 i Reg5 traju 9 do 10 dana. Ipak, u svim kategorijama izdvajaju se tri najjužnije otočne postaje (Lastovo, Stončica i Svetac) na kojima sušna razdoblja traju najdulje.

Zanimljivo je pogledati i sezonsku raspodjelu trajanja sušnih razdoblja koje znatno utječu na godišnju raspodjelu. Na slici 4.3 prikazana je prostorna raspodjela srednjih trajanja sušnih razdoblja na svim postajama, po sezonama i za godinu, a slika 4.4 prikazuje prosječne sezonske i godišnje vrijednosti izdvojene za pojedinu regiju i kategoriju sušnih razdoblja. U svim sezonama sušna razdoblja su općenito najkraća u gorskoj Hrvatskoj (Reg4). Za kategoriju DS1, tijekom jeseni i zime nema značajnijih regionalnih razlika u trajanjima sušnih razdoblja koja se u prosjeku kreću od 5 do 7 dana. U proljeće se izdvajaju jadranske regije (Reg5, Reg6 i Reg7) s nešto duljim sušnim razdobljima (6 do 7 dana) u odnosu na ostali dio Hrvatske gdje DS1 prosječno traju 4 do 5 dana. U ljetnim, pak, mjesecima najdulja sušna razdoblja traju u prosjeku 11 dana na južnom Jadranu (Reg7), dok na sjevernom Jadranu (Reg5) i u zaleđu (Reg3) traju od 7 do 8 dana, a u ostalim regijama od 5 do 6 dana. U kategoriji DS5, vidljivije su regionalne razlike po sezonama. U jesenskim i zimskim mjesecima DS5 najdulje traju u istočnoj Hrvatskoj (Reg1, 10 i 11 dana), na srednjem i južnom Jadranu u prosjeku traju 9 dana, a u zapadnoj unutrašnjosti (Reg2) i sjevernom Jadranu (Reg6) imaju podjednaka trajanja (8 dana u jesen i 10 dana zimi). U ostalim regijama prosječna trajanja sušnih razdoblja iznose 7 do 8 dana. U proljeće su DS5 u prosjeku malo dulja na Jadranu (Reg 6 i Reg7, 10 do 11 dana) nego u istočnoj Hrvatskoj (Reg1, 9 dana), u zapadnoj unutrašnjosti i sjevernom primorju prosječno traju 8 dana, a u gorskoj Hrvatskoj i zaleđu (Reg4 i Reg3) traju 6 do 7 dana. U ljetnim mjesecima je raspodjela sušnih razdoblja slična kao za DS1 - najdulja trajanja mogu se očekivati na južnom Jadranu (Reg7, 17 dana), u zaleđu i na sjevernom Jadranu traju 10 do 11 dana, a u ostalim regijama DS5 prosječno traju 7 do 9 dana. Najjasnije regionalne razlike vidljive su u razdiobi sušnih razdoblja kategorije DS10.

4. REGIONALNA ANALIZA SUŠNIH RAZDOBLJA U HRVATSKOJ



Slika 4.3: Prostorna raspodjela srednjih trajanja sušnih razdoblja (u danima, prema legendi) po postajama te po sezonama (proljeće – MAM, ljeto –JJA, jesen – SON, zima – DJF) i za godinu (GOD) za različite kategorije (DS1, DS5 i DS10) prema razdoblju 1961. – 2015.

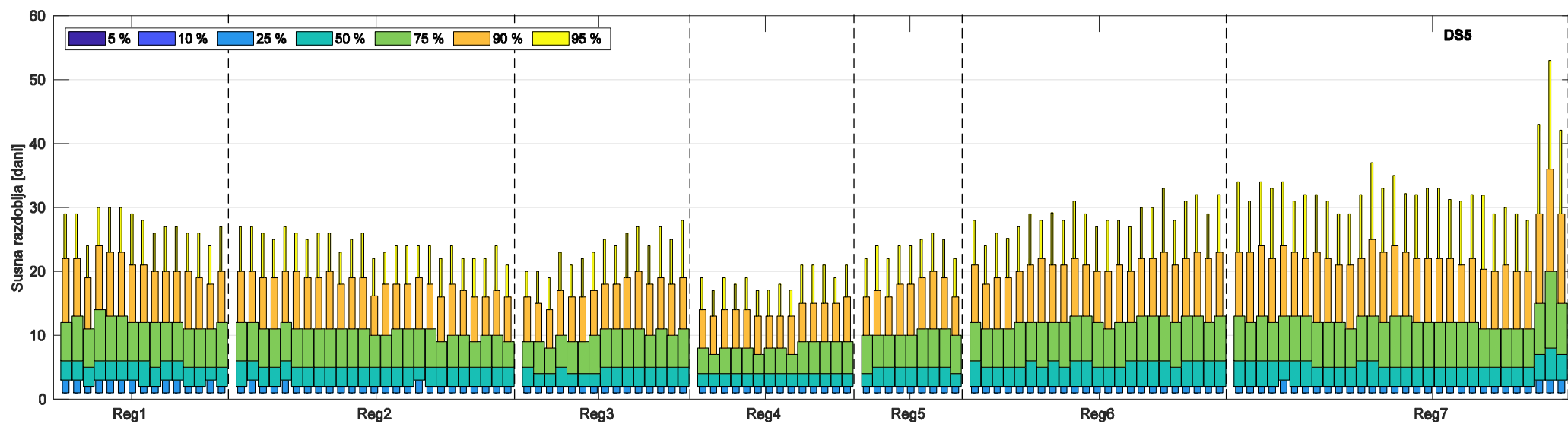


Slika 4.4: Prosječna sezonska (MAM – proljeće, JJA – ljetno, SON – jesen, DJF- zima) i godišnja (God) trajanja sušnih razdoblja različitih kategorija: a) DS1, b) DS5 i c) DS10 za sedam regija u Hrvatskoj.

U zimskim mjesecima dominantna su duga sušna razdoblja u istočnoj Hrvatskoj (23 dana) te u zapadnoj unutrašnjosti (18 dana). Na Jadranu DS10 zimi u prosjeku traju 13 do 14 dana, a u ostalim regijama 10 do 11 dana. U ostalim sezonama najkraća su trajanja u gorskoj Hrvatskoj (8 do 9 dana), dok regije 3 i 5 imaju podjednaka trajanja (SON – 9 dana, MAM – 11 dana, JJA – 12 do 14 dana). U proljeće, najdulja sušna razdoblja podjednako se mogu očekivati u regijama na istoku i jugu zemlje (Reg1 i Reg7, 17 do 18 dana), a potom u regijama 2 i 6 (13 do 15 dana). U ljetnim mjesecima, za razliku od zimskih, dominiraju duga sušna razdoblja na Jadranu, osobito u regiji 7 gdje u prosjeku traju 25 dana za razliku od istočne Hrvatske gdje ljeti prosječno traju 14 dana.

Rezultati analize prosječnih trajanja sušnih razdoblja ukazuju na opravdanost odabira sedam regija na području Hrvatske kako su ranije definirane u Gajić–Čapka i sur. (2015) prema prevladavajućem oborinskom režimu. Dodatno je ta opravdanost vidljiva i iz empirijske razdiobe sušnih razdoblja koja je prikazana na slici 4.5 za kategoriju DS5. Isti prikazi za ostale dvije kategorije (DS1 i DS10) dani su u Dodatku C (slika C.5).

4. REGIONALNA ANALIZA SUŠNIH RAZDOBLJA U HRVATSKOJ



Slika 4.5: Empirijska razdioba godišnjih trajanja sušnih razdoblja DS5 izražena pomoću percentila (10., 25., 50., 75., 90., 95., 98.) za 131 postaju raspoređenu u sedam regija (Reg).

Maksimalna trajanja sušnih razdoblja ne pokazuju jasnu prostornu pravilnost kao srednja, što je i očekivano budući da se radi o apsolutnim maksimumima koja mogu značajno varirati od postaje do postaje jer bitno ovise o lokalnim kišnim epizodama. U razdoblju 1961. – 2015., najdulja sušna razdoblja kategorije *DSI* na godišnjoj razini trajala su u rasponu od 54 do 56 dana u kontinentalnoj unutrašnjosti (Reg1, Reg2) i u gorju (Reg4), dok su na sjevernom Jadranu (Reg5 i Reg6) i u zaleđu (Reg3) trajala do 83 dana (tablica 4.2 i slika 4.2b). Na južnom Jadranu zabilježeno je najdulje sušno razdoblje u trajanju od 151 dan (postaja Slatine, 1962. godine), a ljetni maksimum na istoj postaji iznosio je 122 dana. U regijama 1, 2 i 4 maksimumi su zabilježeni u zimskim mjesecima (DJF), dok su u regijama 3, 5 i 6 maksimumi podjednako trajali u ljetnim (JJA) i zimskim mjesecima (DJF). S druge strane, na južnom Jadranu (Reg7) tijekom sušnih ljetnih mjeseci mogu se očekivati i najdulja sušna razdoblja. U svim regijama od 1 do 6, razlike među opaženim maksimumima na pojedinačnim postajama uglavnom su najmanje u proljetnim i jesenskim mjesecima i kreću se u rasponu od 14 do 21 dan, dok su prostorne razlike u regiji 7 najmanje u jesenskim mjesecima (25 dana). U potonjoj regiji, u ostalim sezonama, amplitude su podjednakih iznosa (od 42 do 58 dana). Najveći pak raspon maksimuma u kontinentalnoj unutrašnjosti i u gorju javlja se u zimskim mjesecima (23 do 33 dana), a u regijama 3 - 6 u ljetnim mjesecima (41 do 50 dana).

Godišnja maksimalna trajanja *DS5* iznosila su 83 dana u Reg4 i Reg5, u Reg2 i Reg3 po 86 i 98 dana te 105 i 107 dana u Reg1 i Reg6, redom. U Reg7 je zabilježeno najdulje sušno razdoblje u trajanju od 167 dana (Split–Marjan, 1962. godine). Po sezonama, najdulja sušna razdoblja uglavnom su zabilježena tijekom zimskih mjeseci. U Reg3 maksimumi su se podjednako javljali ljeti i zimi, a u Reg7 su najdulja sušna razdoblja zabilježena isključivo u ljetnim mjesecima. Najmanji rasponi među pojedinačnim postajama uglavnom se javljaju u jesenskim mjesecima, a u regijama 4 i 5 i u proljeće gdje su najmanje razlike u trajanju sušnih razdoblja među postajama iznosile 8 do 9 dana.

Najdulja godišnja trajanja sušnih razdoblja kategorije *DS10* zabilježena su na južnom Jadranu u trajanju do 208 dana (postaja Svetac, 1989. godine). U kontinentalnoj unutrašnjosti i zaleđu te na sjevernom Jadranu najdulja sušna razdoblja trajala su u rasponu od 154 do 179 dana. U gorskom području (Reg4) godišnji maksimum iznosio je 83 dana, a u sjevernom primorju (Reg5) 107 dana, ali su pripadni zimski maksimumi najdulje trajali 108 odnosno 115 dana. Ovdje treba napomenuti da se sušna razdoblja pridjeljuju onoj sezoni u kojoj su započela i ne prekidaju se ako se nastavljaju u drugu sezonu. Zbog toga se ponekad godišnji

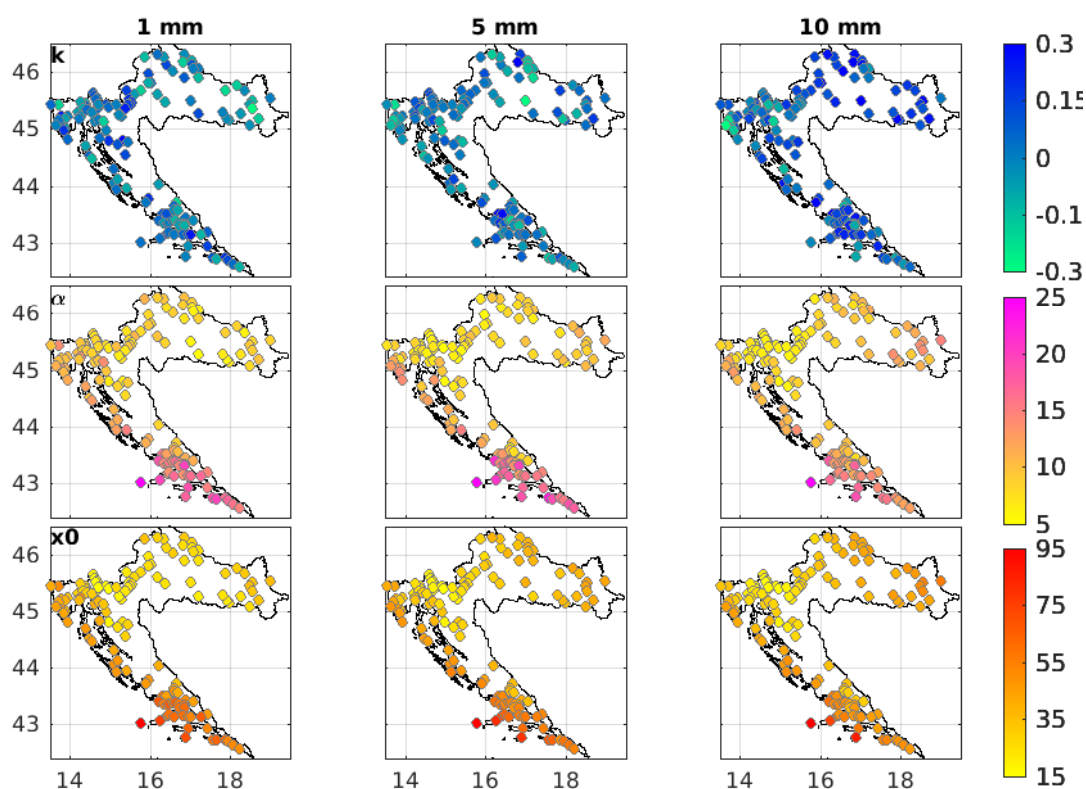
maksimum neće podudarati sa sezonskim maksimuma, posebice ako je maksimum u zimskim mjesecima koji se proteže iz prosinca jedne godine u siječanj i veljaču sljedeće godine. U kontinentalnoj unutrašnjosti (Reg1, Reg2) najdulja sušna razdoblja tijekom godine podjednako su se pojavila u proljetnim (MAM) i u zimskim mjesecima (DJF), dok su u zaleđu (Reg3) podjednako dugo maksimumi trajali ljeti i zimi. Najmanje prostorne razlike pronalazimo u regijama 3, 4 i 5 u jesenskim mjesecima gdje se pojedinačni maksimumi razlikuju za 5 do 12 dana, te u ljetnim mjesecima u regijama 4, 5 i 7 s razlikama od 14 do 20 dana. U ostalim sezonama, razlike unutar pojedine regije kreću se od 34 do 69 dana.

Tablica 4.2: Rasponi opaženih maksimalnih trajanja sušnih razdoblja po sezonama (MAM – proljeće, JJA – ljetno, SON – jesen, DJF – zima) i za godinu (GOD) za sedam regija (Reg) i tri kategorije sušnih razdoblja (DS1, DS5 i DS10).

| Regija | Reg1 | | Reg2 | | Reg3 | | Reg4 | | Reg5 | | Reg6 | | Reg7 | |
|--------|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|
| Sezona | Min | Max | Min | Max | Min | Max | Min | Max | Min | Max | Min | Max | Min | Max |
| DS1 | | | | | | | | | | | | | | |
| MAM | 28 | 46 | 30 | 47 | 30 | 48 | 25 | 39 | 36 | 51 | 36 | 51 | 40 | 82 |
| JJA | 28 | 47 | 27 | 46 | 31 | 81 | 26 | 41 | 32 | 73 | 35 | 82 | 64 | 122 |
| SON | 36 | 54 | 35 | 53 | 37 | 52 | 35 | 51 | 39 | 53 | 38 | 59 | 43 | 68 |
| DJF | 33 | 56 | 40 | 69 | 38 | 80 | 41 | 74 | 59 | 77 | 46 | 84 | 34 | 81 |
| GOD | 39 | 54 | 40 | 56 | 39 | 81 | 44 | 53 | 50 | 75 | 54 | 83 | 64 | 151 |
| DS5 | | | | | | | | | | | | | | |
| MAM | 47 | 82 | 41 | 75 | 39 | 61 | 36 | 44 | 43 | 52 | 43 | 68 | 47 | 90 |
| JJA | 45 | 91 | 33 | 78 | 34 | 96 | 38 | 74 | 64 | 74 | 45 | 94 | 79 | 122 |
| SON | 45 | 71 | 40 | 58 | 45 | 53 | 46 | 55 | 47 | 55 | 51 | 83 | 46 | 77 |
| DJF | 58 | 97 | 62 | 104 | 69 | 83 | 65 | 106 | 73 | 105 | 59 | 106 | 53 | 92 |
| GOD | 64 | 105 | 56 | 86 | 54 | 98 | 52 | 83 | 64 | 83 | 63 | 107 | 79 | 167 |
| DS10 | | | | | | | | | | | | | | |
| MAM | 82 | 122 | 54 | 116 | 45 | 91 | 39 | 74 | 49 | 89 | 53 | 117 | 69 | 122 |
| JJA | 62 | 96 | 49 | 102 | 48 | 116 | 52 | 74 | 74 | 88 | 53 | 122 | 102 | 122 |
| SON | 61 | 122 | 56 | 88 | 53 | 65 | 51 | 60 | 54 | 59 | 53 | 93 | 52 | 116 |
| DJF | 81 | 122 | 82 | 119 | 74 | 116 | 69 | 108 | 79 | 115 | 74 | 112 | 71 | 121 |
| GOD | 122 | 179 | 78 | 154 | 80 | 164 | 57 | 83 | 74 | 107 | 84 | 167 | 102 | 208 |

4.3.2 Trajanja sušnih razdoblja za različite povratne periode pomoću modela GEV

Primjenom razdiobe GEV na godišnja maksimalna trajanja sušnih razdoblja za 131 postaju procijenjeni su pripadni parametri oblika (k), skale (α) i lokacije (x_0) te su procijenjena očekivana maksimalna trajanja za povratne periode 5, 10, 25, 50 i 100 godina. Na slici 4.6 prikazana je prostorna razdioba parametara za tri kategorije sušnih razdoblja (DS1, DS5 i DS10). Te vrijednosti dobivene su iz najvećih vrijednosti (tjemena) pripadnih posteriornih razdiobi pojedinog parametra. U tablici 4.3 navedene su iste vrijednosti pripadnih tjemena iz posteriora pojedinih parametara razdiobe GEV, ali usrednjene po regijama. U dodatku C (slike C.6 – C.8) nalaze se grafički prikazi pojedinih parametara po regijama s pripadnim 95%-tnim intervalima povjerenja.



Slika 4.6: Prostorna raspodjela parametra oblika (k), skale (α) i lokacije (x_0) opće razdiobe ekstrema (GEV) primijenjene na godišnje maksimume sušnih razdoblja na 131 postaji. Prikazane vrijednosti odnose se na odgovarajuće maksimalne vrijednosti (tjeme) pripadnih posteriornih razdiobi pojedinog parametra.

Tablica 4.3: Srednje vrijednosti parametra oblika (k), skale (α) i lokacije (x_0) opće razdiobe ekstrema po regijama (Reg).

| | Reg1 | Reg2 | Reg3 | Reg4 | Reg5 | Reg6 | Reg7 |
|----------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|-------|
| DS1 | | | | | | | |
| k | -0,004 | 0,073 | 0,083 | 0,077 | 0,026 | 0,076 | 0,086 |
| σ | 5,7 | 6,1 | 6,7 | 6,2 | 7,5 | 7,9 | 10,5 |
| μ | 22,5 | 21,6 | 24,4 | 20,6 | 25,6 | 27,7 | 32,7 |
| DS5 | | | | | | | |
| k | 0,036 | -0,003 | 0,015 | 0,070 | -0,007 | 0,007 | 0,020 |
| σ | 9,6 | 8,7 | 9,0 | 8,0 | 8,8 | 10,8 | 14,0 |
| μ | 35,1 | 32,1 | 32,1 | 26,7 | 32,4 | 37,9 | 45,1 |
| DS10 | | | | | | | |
| k | 0,136 | 0,082 | 0,025 | -0,006 | -0,004 | 0,000 | 0,038 |
| σ | 15,7 | 11,9 | 12,3 | 9,3 | 11,0 | 14,7 | 19,4 |
| μ | 53,3 | 45,1 | 41,0 | 32,6 | 40,1 | 50,5 | 60,1 |

Vidljivo je da parametar oblika varira od postaje do postaje u pojedinoj regiji, kako po iznosu tako i po predznaku, ali u prosjeku prevladavaju pozitivne vrijednosti. Ipak, u pojedinim slučajevima (DS1 – Reg1, DS5 – Reg2 i Reg5, DS10 – Reg4 i Reg5) prevladava blago negativna prosječna vrijednost koja je uvijek gotovo jednaka nuli. Vrijednosti bliske nuli pronalazimo i za DS5 u Reg6. Takve vrijednosti ukazuju da se maksimalna trajanja ponašaju prema Gumbelovoj razdiobi. S druge strane, prostorne razdiobe parametara skale i lokacije jasno odražavaju postojeću klimatologiju sušnih razdoblja. Za DS1 i DS5 najveće vrijednosti tih parametara javljaju se na Jadranu (Reg7 i Reg6), potom su podjednake vrijednosti u sjevernom primorju i obalnom zaleđu (Reg3 i Reg5) te u unutrašnjosti (Reg1 i Reg2), a najmanje su u gorju (Reg4). Za kategoriju DS10, vrijednosti parametara skale i lokacije pokazuju jasnu simetričnost među regijama u smislu da su iznosi parametara skale najveći na južnom Jadranu i na istoku Hrvatske (Reg7 i Reg1), zatim u središnjoj unutrašnjosti i na sjevernom Jadranu (Reg2 i Reg6) te u zaleđu i primorju (Reg3 i Reg5), dok su najmanje vrijednosti u gorju (Reg4). Dakle, u regijama s duljim trajanjima sušnih razdoblja (veći parametar lokacije) i statističko raspršenje je veće (veći parametar skale) što je i očekivano za razdiobe meteoroloških elemenata koji poprimaju vrijednosti veće ili jednake nuli.

Na slici 4.7 prikazane su vrijednosti procijenjenih očekivanih maksimalnih trajanja sušnih razdoblja za 131 postaju za različite povratne periode ($T = 10, 25, 50$ i 100 godina), a prosječne vrijednosti po regijama nalaze se u tablici 4.4. U dodatku C nalaze se i grafički prikazi tih vrijednosti (slika C.9). Rezultati za pojedine kategorije sušnih razdoblja jasno prate pripadnu klimatologiju njihovih godišnjih trajanja. Očekivana trajanja sušnih razdoblja kategorije *DS1* najkraća su u istočnoj kontinentalnoj Hrvatskoj (Reg1), podjednakih trajanja s onima u gorskom području (Reg4). Za povratne periode od 10 do 100 godina pripadne duljine iznose 31 dan, od 42 do 45 dana, od 47 do 52 dana te od 53 do 59 dana. Zatim se očekivana trajanja *DS1* postupno povećavaju kako se povećava redni broj regije, s najduljim trajanjima u najjužnijoj regiji (Reg7) s vrijednostima od 50 dana za 5 - godišnji povratni period do 99 dana za 100 - godišnji povratni period.

Za kategoriju sušnih razdoblja *DS5*, očekivani maksimumi su najkraći i podjednakih trajanja u regijama 2 do 5, a za pojedine povratne periode kreću se u sljedećim rasponima: od 40 do 46 dana ($T = 5$ god), od 47 do 54 ($T = 10$ god), od 57 do 64 ($T = 25$ god), od 66 do 72 ($T=50$ god) te od 76 do 81 ($T=100$ god). Potom su *DS5* nešto duljih trajanja u istočnoj Hrvatskoj (Reg1) s iznosima za pripadne povratne periode od 51 do 91 dan, a nešto dulja trajanja mogu se očekivati na sjevernojadranskoj obali (Reg5) s prosječnim iznosima od 55 do 96 dana. Najdulja trajanja, od 67 do 120 dana za pojedini povratni period, mogu se očekivati na južnom Jadranu. Kako je vidljivo iz slike 4.7, tako dugim očekivanim trajanjima u regiji 7 ponajviše doprinose očekivana duga trajanja na dalmatinskim obalnim i otočnim postajama.

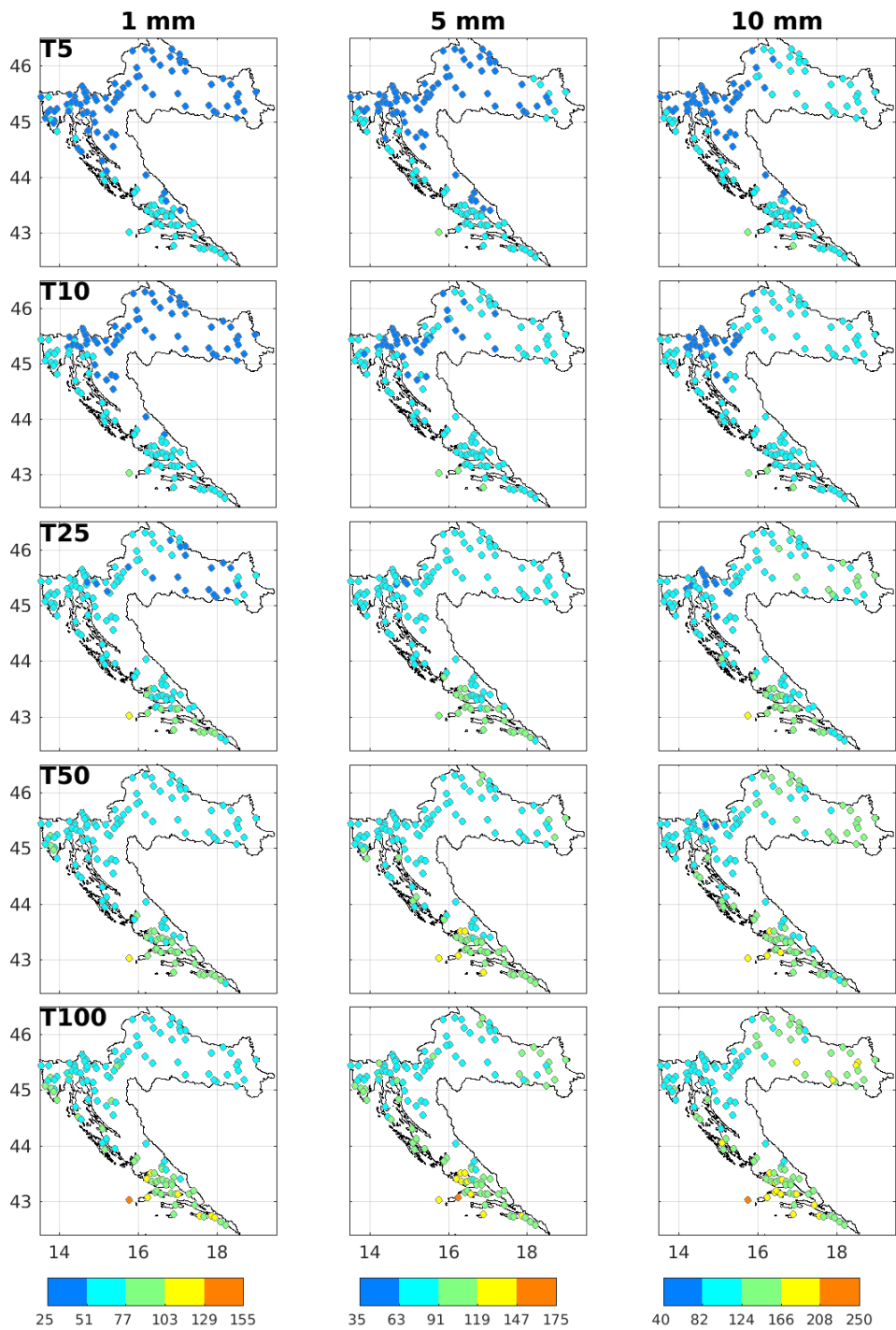
Konačno, sušna razdoblja kategorije *DS10* jasno ukazuju na simetričnost hrvatskih regija po trajanjima sušnih razdoblja prateći osnovnu klimatologiju za *DS10*. Tako se najdulja sušna razdoblja mogu očekivati na južnom Jadranu (od 91 do 165 dana), ali i u istočnoj kontinentalnoj unutrašnjosti (od 80 do 158 dana). Potom su po duljini podjednaka na sjevernom Jadranu (od 74 do 129 dana) i u kontinentalnoj zapadnoj unutrašnjosti (od 65 do 121 dan). U zaleđu su očekivana trajanja (od 61 do 109 dana) nešto dulja nego u sjevernom primorju (od 74 do 129 dana), a najkraća se mogu očekivati u gorju (od 47 do 82 dana).

Iz procjena očekivanih trajanja sušnih razdoblja, mogu se i pojedinačni maksimumi postaviti u kontekst vjerojatnosti njihovog pojavljivanja. Tako se na primjer, najdulje opaženo sušno razdoblje *DS5* na postaji Split–Marjan, u trajanju od 167 dana, može očekivati prosječno jednom u više od 100 godina. Naime, na slici 4.7. vidimo da 100–godišnja povratna vrijednost za Split–Marjan nije veća od 119 dana (točnije, nalazi se u rasponu vrijednosti između 91 i 119 dana). Valja istaknuti da se iz regionalnih srednjaka očekivanih trajanja ne

preporučuje donositi zaključke o maksimalnim trajanjima na pojedinačnim postajama. Naime, regionalne vrijednosti daju opći pregled prostorne raspodjele sušnih razdoblja u Hrvatskoj i služe kao podloga poznavanju opće klimatologije. Stoga, ukoliko se želi procijeniti vjerojatnost pojavljivanja nekog opaženog maksimuma na pojedinoj postaji, tada treba zaključke donositi iz pojedinačnog vremenskog niza poput rezultata prikazanih na slici 3.2a (poglavlje 3), a prostorna raspodjela (slika 4.7) može poslužiti za prvi uvid. Analizom niza trajanja DS5 na postaji Split–Marjan opaženom maksimumu od 167 dana pripada povratni period 142 godine (procijenjen iz prediktivne razdiobe).

Tablica 4.4: Srednje vrijednosti očekivanih maksimalnih trajanja sušnih razdoblja za različite povratne periode (T = 5, 10, 25, 50 i 100 godina) procijenjene pomoću opće razdiobe ekstrema, po regijama.

| | Reg1 | Reg2 | Reg3 | Reg4 | Reg5 | Reg6 | Reg7 |
|------|-------|-------|-------|------|------|-------|-------|
| DS1 | | | | | | | |
| T5 | 31,3 | 31,5 | 35,2 | 30,7 | 37,4 | 40,7 | 50,3 |
| T10 | 35,8 | 37,1 | 41,5 | 36,4 | 43,7 | 48,0 | 60,2 |
| T25 | 42,0 | 45,1 | 50,5 | 44,5 | 52,1 | 58,4 | 74,2 |
| T50 | 46,9 | 52,1 | 58,2 | 51,5 | 59,3 | 67,3 | 86,0 |
| T100 | 52,6 | 60,2 | 67,0 | 59,4 | 67,0 | 77,5 | 99,0 |
| DS5 | | | | | | | |
| T5 | 50,5 | 45,6 | 46,3 | 39,9 | 46,1 | 55,0 | 67,1 |
| T10 | 58,9 | 52,7 | 53,7 | 47,2 | 53,1 | 63,8 | 78,6 |
| T25 | 70,5 | 62,0 | 63,8 | 57,3 | 62,5 | 75,7 | 94,0 |
| T50 | 80,2 | 69,6 | 71,7 | 66,0 | 70,1 | 85,5 | 106,4 |
| T100 | 91,1 | 78,0 | 80,9 | 75,9 | 78,6 | 96,2 | 119,7 |
| DS10 | | | | | | | |
| T5 | 80,4 | 64,9 | 60,5 | 47,4 | 57,1 | 73,6 | 91,1 |
| T10 | 96,5 | 76,3 | 70,8 | 54,9 | 65,8 | 85,8 | 107,6 |
| T25 | 119,5 | 92,5 | 84,8 | 64,9 | 77,3 | 102,0 | 129,6 |
| T50 | 138,6 | 106,0 | 96,2 | 73,0 | 86,6 | 115,2 | 147,1 |
| T100 | 158,2 | 120,7 | 108,6 | 82,0 | 96,8 | 129,0 | 165,3 |



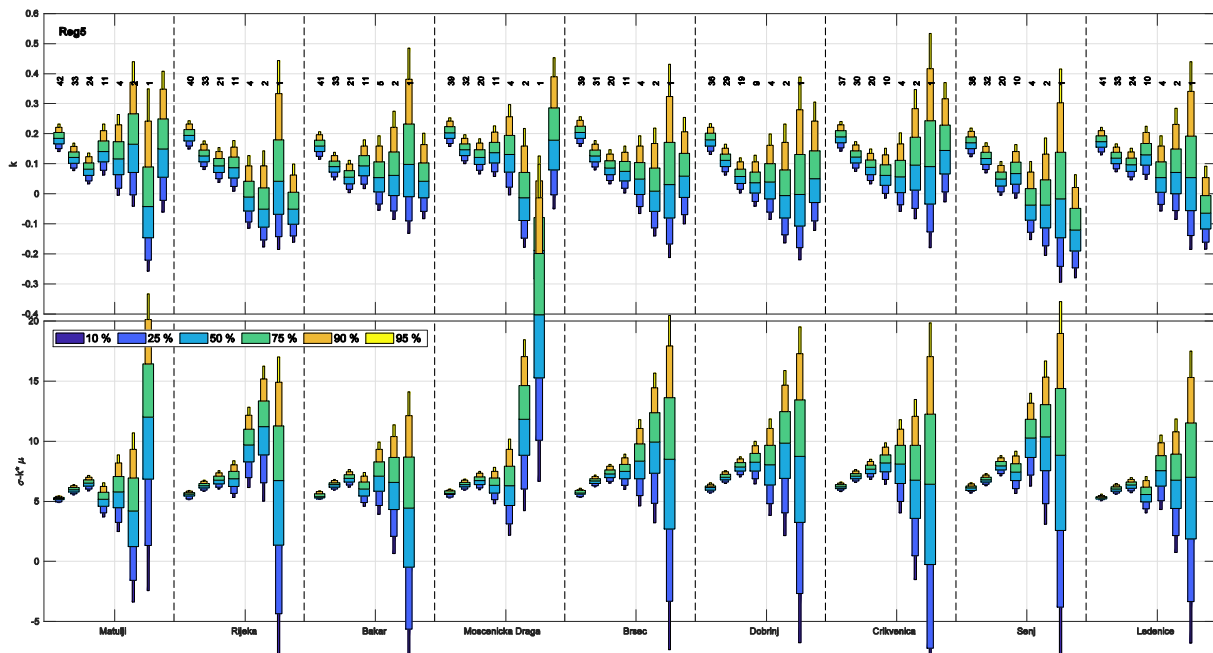
Slika 4.7: Prostorna raspodjela trajanja sušnih razdoblja u danima (prema legendi) za različite povratne periode ($T = 5, 10, 25, 50$ i 100 godina) procijenjenih pomoću opće razdiobe ekstrema. Prikazane vrijednosti odnose se na odgovarajuće kvantile iz pripadnih prediktivnih razdioba.

4.3.3 Trajanja sušnih razdoblja za različite povratne periode pomoću modela zGP

Za potrebe primjene (zaokružene) opće Paretove razdiobe na nizove premašaja sušnih razdoblja potrebno je najprije odabrati prikladan prag za kreiranje tih nizova. Kako je u ranijim poglavljima pokazano, za prilagodbu razdiobe zGP sušnim razdobljima na dvije reprezentativne postaje raspoloživ je širok raspon pragova. Unatoč tomu, izbor treba biti uravnotežen između nižih i vrlo visokih pragova kako bi se izbjegla mogućnost zavisnosti (za niske pragove) ili velika nesigurnost konačnih procjena zbog kratkih nizova premašaja (odabirom vrlo visokih pragova). Stoga je ovdje u prvom koraku provedena analiza odabira prikladnog praga za različite kategorije sušnih razdoblja, za svaku regiju. Tri parametara razdiobe zGP procijenjeni su bayesovskim pristupom primijenjenim na nizove premašaja različitog odabira praga (10., 25., 50., 75. i 90., 95. i 98. percentil) za svaku postaju zasebno. Određene su posteriorne razdiobe parametra oblika, skale i lokacije kao i posteriori razlika $\sigma - k\mu$. Potom su rezultati procjena za pojedini prag međusobno uspoređeni kako bi se odredila stabilnost procjena u ovisnosti o pragu u svrhu odabira prikladnog praga. Slika 4.8 sažeto prikazuje rezultate posteriornih razdiobi parametra oblika k te posteriorne razlika $\sigma - k\mu$ u ovisnosti o pojedinom pragu μ za pojedinu postaju Hrvatskog primorja (Reg 5), za nizove DS5. U dodatku C nalaze se slični prikazi za ostale regije (slike C.10 – C.15). Za ostale kategorije sušnih razdoblja (DS1 i DS10) nisu prikazani rezultati radi uštede prostora, ali su također uzeti u obzir pri analizi. Prema teorijskim razmatranjima u prethodnim poglavljima, ukoliko se nizovi premašaja nekog praga μ mogu opisati razdiobom GP (k, σ, θ), tada se nizovi premašaja svih viših pragova mogu opisati općom Paretovom razdiobom s istim parametrom oblika k , a koji dodatno, za visoke pragove treba biti usklađen i s parametrom oblika razdiobe GEV (vidi poglavlje 2.). Stoga su na grafovima za k prikazani i pripadni rezultati dobiveni primjenom razdiobe GEV na godišnje maksimume (zadnji stupići za pojedinu postaju). Kako je ranije spomenuto, usporedba posteriora razlika $\sigma - k\mu$ služi kao analogon grafičke metode MEP za odabir prikladnog praga. Nakon prikladnog praga, te razlike trebaju biti konstantne.

Rezultati ukazuju da postoje određene razlike među postajama pojedine regije u stabilnosti parametara razdiobe zGP na nizove premašaja različitih pragova. Ipak, generalno se na većini postaja stabilnost procjena javlja između 50. i 90. percentila. Na pojedinim postajama nije jednostavno odrediti gdje započinje stabilnost. Na primjer, na postaji Senj se procjene nakon 75. percentila izrazito razlikuju i moglo bi se zaključiti da stabilnost započinje

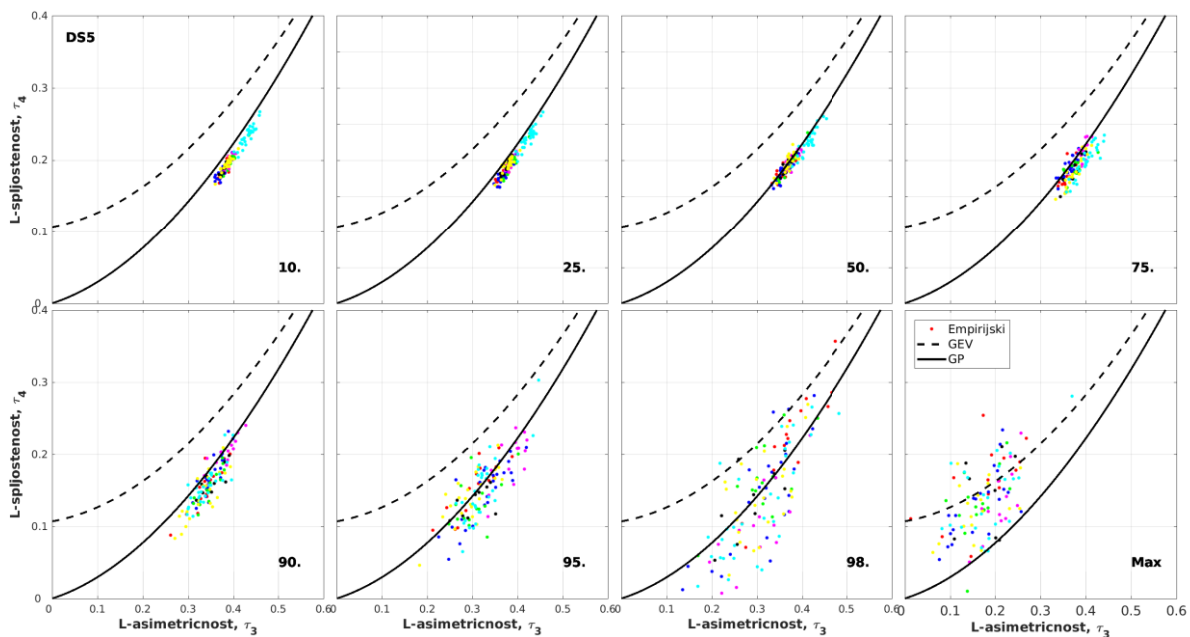
od 90. percentila. Međutim, primjenom 90. percentila i viših pragova, nepouzdanost procjena vidljivo raste, rezultirajući visokom rasponom vrijednosti parametra oblika (od negativnih do pozitivnih). Nepouzdanost procjena osobito vrijedi za odabir vrlo visokog praga koji odgovara 98. percentilu, koja može biti veća od nepouzdanosti dobivene primjenom razdiobe GEV na maksimalna trajanja.



Slika 4.8: Procjena parametra oblika razdiobe zGP (gornji red), k , i razlika $\sigma - k\mu$ (donji red) za različite odabire pragova (percentil 10, 25, 50, 75, 90, 95 i 98; s lijeva na desno) na pojedinoj postaji unutar regije 5, za kategoriju sušnih razdoblja DS5. Procijenjene vrijednosti su prikazane pomoću razdiobe percentila dobivenih iz pojedinačnih posteriornih razdiobi. Za parametar k prikazane su i procjene dobivene primjenom razdiobe GEV (osmi stupac kod pojedine postaje).

Da bismo dodatno istražili odabir prikladnog praga primijenili smo metodu L–momenata (vidi poglavlje 2). Za svaku postaju određena je L–spljoštenost i L–asimetričnost, a njihov odnos prikazan je na dijagramu omjera L–momenata zajedno s teorijskim omjerom razdioba GP i GEV. Na slici 4.9 prikazani su pripadni dijagrami omjera za različite pragove (percentili 10., 25., 50., 75., 90. i 95.) korištenih za kreiranje nizova premašaja sušnih razdoblja DS5 kao i pripadni dijagrami omjera empirijskih L–momenata dobivenih iz uzorka godišnjih maksimuma sušnih razdoblja (zadnji panel). Slični prikazi nalaze se u dodatku C za ostale kategorije sušnih razdoblja (slike C.16 i C.17). Rezultati očekivano pokazuju gomilanje empirijskih L–momenata (točkice), dobivenih iz nizova premašaja, oko pripadne krivulje omjera koji pripada općoj Paretovoj razdiobi. S druge strane,

omjeri dobiveni iz nizova godišnjih maksimuma gomilaju se oko krivulje za razdiobu GEV. Manje odstupanje empirijskih od teorijskih L–momenata upućuje na bolje prilagođavanje teorijskoj razdiobi. Prema dobivenim rezultatima, najbolje prilagođavanje općoj Paretovoj razdiobi dobiveno je za odabir praga 75. percentila za DS1, a za DS5 i DS10 čak za 50. percentil. Za potonje kategorije, dobro prilagođavanje primijećeno je i za nizove prekoračenja 75. percentila. Povećavajući prag, raspršenje empirijskih omjera oko krivulje opće Paretove razdiobe postaje sve veće. Dodatno, vidljivo je kako je i raspršenje empirijskih L–momenata oko krivulje GEV također dosta veliko.



Slika 4.9: Dijagram omjera L–momenata za kategoriju sušnih razdoblja kategorije DS5. Točkicama su označeni procijenjeni L–momenti iz nizova premašaja različitih pragova (percentili 10., 25., 50., 75., 90. i 95.) za 131 postaju. Na zadnjem panelu prikazani su empirijski L–momenti dobiveni iz uzorka godišnjih maksimuma sušnih razdoblja. Krivuljama su naznačeni pripadni omjeri za teorijske razdiobe GEV (crtkana) i GP (puna), a različitim bojama točkica razdvojene su postaje pojedine regije (Reg1 – crvena, Reg2 – tamno plava, Reg3 – zelena, Reg4 – ružičasta, Reg5 – crna, Reg6 – žuta, Reg7 – svijetlo plava).

Uvažavajući dobivene rezultate pomoću ocjene stabilnosti parametara i omjera L–momenata, u nastavku analize koristit ćemo 75. percentil kao optimalan prag za sve kategorije sušnih razdoblja. U tablici 4.5 navedena su pripadna trajanja sušnih razdoblja koja odgovaraju 75. percentilu pojedine kategorije sušnih razdoblja, usrednjena po regijama.

Tablica 4.5: Prosječna trajanja sušnih razdoblja (u danima) po regijama (Reg) koja odgovaraju 75. percentilu.

| | Reg1 | Reg2 | Reg3 | Reg4 | Reg5 | Reg6 | Reg7 |
|------|------|------|------|------|------|------|------|
| DS1 | 6,6 | 6,4 | 7,1 | 6,4 | 7,9 | 8,4 | 9,1 |
| DS5 | 12,1 | 10,5 | 9,9 | 8,3 | 10,6 | 12,2 | 12,6 |
| DS10 | 22,2 | 17,2 | 13,3 | 11,1 | 14,1 | 17,8 | 18,5 |

Tri parametara razdiobe zGP procijenjeni su prilagodbom na nizove premašaja 75. percentila za svaku postaju zasebno, a potom su određeni srednjaci po regijama. Isto tako su zasebno procijenjene povratne vrijednosti za različite povratne periode po postajama, a potom je analiza provedena po regijama. Pripadni rezultati regionalnih srednjaka vrijednosti parametara razdiobe zGP te procjene očekivanih trajanja za različite povratne periode (5, 10, 25, 50 i 100 godina) navedeni su u tablicama 4.6 i 4.7.

Prema rezultatima procjene parametra oblika (k) razdiobe zGP za pojedine kategorije (Tab 4.6), vidljivo je da u prosjeku nema izraženijih prostornih razlika po regijama. Najveće vrijednosti ovog parametra pronalazimo u Hrvatskom primorju (Reg 5) za sve kategorije sušnih razdoblja, a najmanje na južnom Jadranu (Reg7). Općenito, vrijednosti parametra oblika smanjuju se s povećanjem kategorije sušnih razdoblja, i za kategoriju DS10 prosječna vrijednost za Reg7 je čak negativnog predznaka. Ipak, prosječne vrijednosti parametra oblika su pozitivne za sve regije i sve kategorije sušnih razdoblja osim u navedenom slučaju gdje je vrijednost negativna, ali je vrlo blizu nuli ($k = -0,04$). U usporedbi s rezultatima parametra oblika za GEV razdiobu (tablica 4.3) vrijednosti parametra oblika razdiobe zGP su u prosjeku nešto većih iznosa.

Parametar skale (σ) za DS1 i DS5 ne ukazuje na velike razlike u prosječnim iznosima među regijama kontinentalne unutrašnjosti (Reg1, Reg2) i gorske Hrvatske (Reg4) te dodatno za DS1 i obalnog zaleđa (Reg3). U ostalim regijama iznosi parametra skale se povećavaju, naročito na južnom Jadranu (Reg7) i Hrvatskom primorju (Reg5), a za DS5 i DS10 podjednako visoke vrijednosti parametra skale ima i obalno zaleđe (Reg3).

Parametar lokacije (μ) se u svim regijama kreće oko vrijednosti -0.4 ili -0.5 što dodatno ukazuje na dobro prilagođavanje razdiobe zGP nizovima premašaja 75. percentila.

Tablica 4.6: Srednje vrijednosti parametara oblika (k), skale (σ) i lokacije (μ) opće Paretove razdiobe primijenjene na nizove premašaja (75. percentila) za sedam regija (Reg), za tri kategorije sušnih razdoblja (DS1, DS5 i DS10).

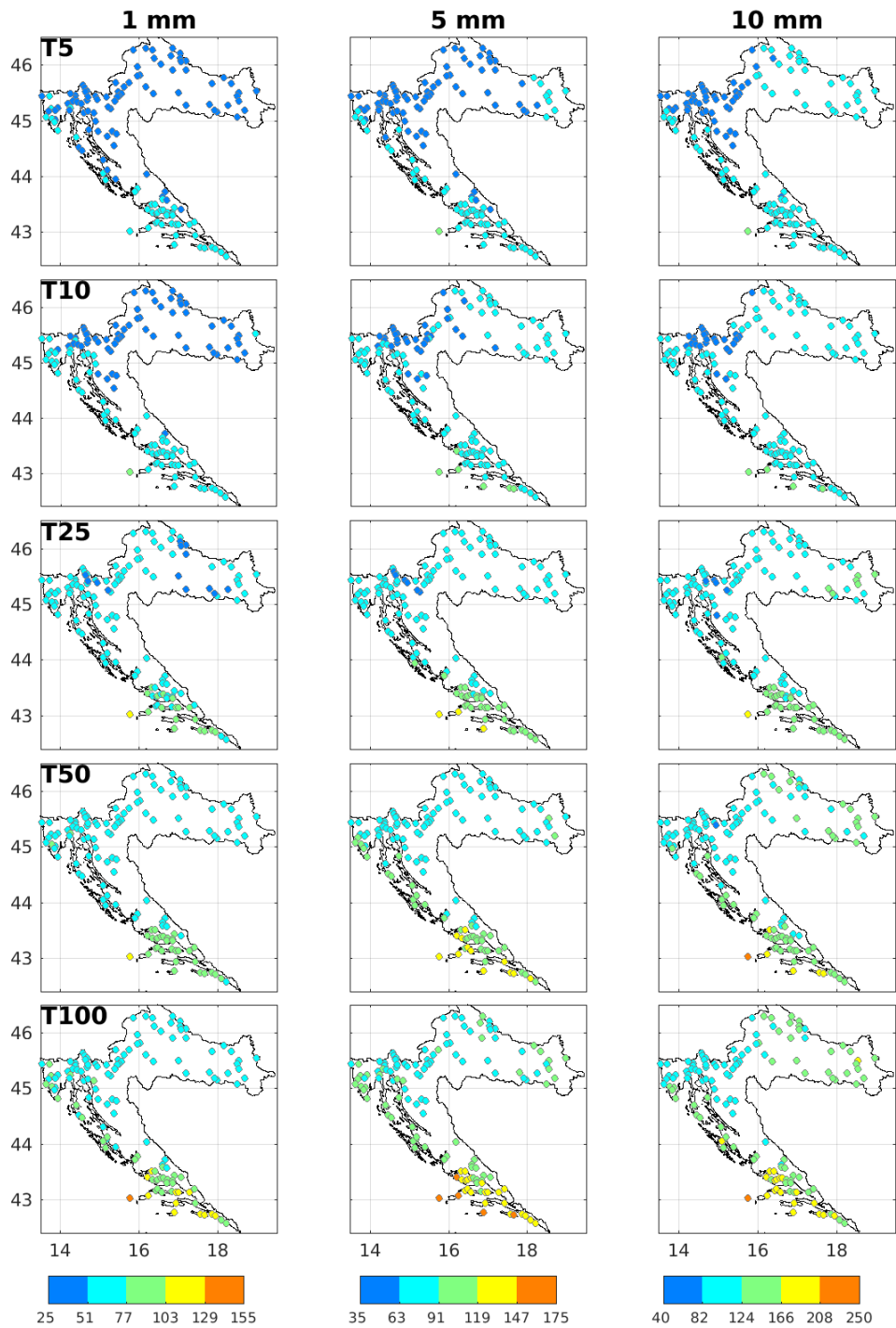
| | Reg1 | Reg2 | Reg3 | Reg4 | Reg5 | Reg6 | Reg7 |
|----------|------|------|------|------|------|------|-------|
| DS1 | | | | | | | |
| k | 0,12 | 0,10 | 0,06 | 0,11 | 0,16 | 0,09 | 0,08 |
| σ | 4,3 | 5,5 | 5,1 | 4,5 | 7,4 | 6,0 | 7,2 |
| μ | -0,5 | -0,5 | -0,5 | -0,4 | -0,4 | -0,4 | -0,5 |
| DS5 | | | | | | | |
| k | 0,07 | 0,08 | 0,05 | 0,12 | 0,18 | 0,05 | 0,04 |
| σ | 7,5 | 7,7 | 9,1 | 6,0 | 10,4 | 8,8 | 10,8 |
| μ | -0,5 | -0,5 | -0,4 | -0,4 | -0,5 | -0,4 | -0,5 |
| DS10 | | | | | | | |
| k | 0,04 | 0,05 | 0,05 | 0,08 | 0,15 | 0,04 | -0,04 |
| σ | 12,4 | 10,6 | 16,3 | 7,9 | 16,3 | 12,2 | 16,9 |
| μ | -0,4 | -0,5 | -0,4 | -0,4 | -0,4 | -0,4 | -0,4 |

U dodatku C nalaze se i prostorni prikazi pojedinih parametara razdiobe zGP za tri kategorije sušnih razdoblja (DS1, DS5 i DS10) za sve postaje (slika C.18). Te vrijednosti dobivene su iz tjemena pripadnih posteriornih razdiobi pojedinog parametra.

Prostorne raspodjele procijenjenih povratnih vrijednosti sušnih razdoblja za različite povratne periode (5, 10, 25, 50 i 100 godina) prikazane su na slici 4.10, a odnose se na pripadne kvantile iz prediktivnih razdiobi koje u sebi sadrže i svu nesigurnost procjena pripadnih parametara razdiobe zGP. Treba napomenuti da je pripadna klasifikacijska skala na slici 4.10 jednaka onoj na slici 4.7. Podijeljena je na pet klasa u rasponu od oko 25 dana za DS1, oko 30 dana za DS5 i oko 40 dana za DS10. Te klase su razdvojene različitim bojama kako bi se lakše uočile prostorne različitosti, a u daljnjem tekstu pri analizi su označene s dva broja razdvojena točkom i to tako da prvi broj označava kategoriju sušnih razdoblja (1, 5 ili 10), a drugi ukazuje na redni broj pripadne klase (od 1 do 5). Rezultati povratnih vrijednosti sušnih razdoblja dobiveni modelom zGP ukazuju na sličnu prostornu raspodjelu sušnih razdoblja kao i onih procijenjenih modelom GEV (slika 4.7), a određene razlike javljaju se za veće povratne periode (T50 i T100).

Tablica 4.7: Srednje vrijednosti očekivanih trajanja sušnih razdoblja za povratne periode (T = 2, 5, 10, 25, 50 i 100 godina) po regijama (Reg), dobivene primjenom zaokružene opće Paretove razdiobe na pojedinačne nizove premašaja 75. percentilnog praga.

| | Reg1 | Reg2 | Reg3 | Reg4 | Reg5 | Reg6 | Reg7 |
|------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|
| DS1 | | | | | | | |
| T5 | 32,7 | 38,1 | 31,4 | 30,4 | 50,7 | 35,6 | 40,9 |
| T10 | 38,5 | 44,7 | 36,3 | 35,8 | 61,2 | 41,9 | 48,0 |
| T25 | 47,2 | 54,5 | 43,6 | 43,9 | 76,9 | 51,2 | 58,5 |
| T50 | 54,3 | 62,6 | 49,4 | 50,6 | 89,8 | 59,1 | 67,3 |
| T100 | 62,1 | 71,2 | 55,5 | 57,9 | 102,9 | 67,7 | 77,2 |
| DS5 | | | | | | | |
| T5 | 45,8 | 47,6 | 51,0 | 39,8 | 68,3 | 46,6 | 55,0 |
| T10 | 53,2 | 55,3 | 59,0 | 46,9 | 83,1 | 54,3 | 64,2 |
| T25 | 63,6 | 66,6 | 70,8 | 57,4 | 104,6 | 65,1 | 77,4 |
| T50 | 72,1 | 75,7 | 80,4 | 66,4 | 121,2 | 74,2 | 87,9 |
| T100 | 81,0 | 85,1 | 90,6 | 76,0 | 136,4 | 84,2 | 99,6 |
| DS10 | | | | | | | |
| T5 | 66,1 | 58,8 | 82,0 | 47,7 | 91,5 | 61,1 | 73,9 |
| T10 | 76,8 | 68,3 | 96,6 | 55,8 | 110,7 | 71,3 | 85,5 |
| T25 | 91,9 | 81,4 | 116,8 | 67,6 | 138,0 | 86,4 | 101,5 |
| T50 | 103,9 | 91,7 | 133,3 | 77,3 | 158,8 | 98,6 | 114,4 |
| T100 | 116,0 | 102,2 | 149,9 | 87,5 | 177,8 | 111,1 | 128,0 |



Slika 4.10: Prostorna raspodjela trajanja sušnih razdoblja za različite povratne periode ($T = 2, 5, 10, 25, 50$ i 100 godina) procijenjene pomoću zaokružene opće Paretove razdiobe primijenjene na nizove premašaja praga koji odgovara 75. percentilu. Prikazane vrijednosti odnose se na odgovarajuće kvantile pripadnih prediktivnih razdiobi.

Trajanja sušnih razdoblja kategorije DS1 za povratne periode 5 i 10 godina kreću se u rasponu od 25 do 51 dan (klasa 1.1) u kontinentalnoj Hrvatskoj, a duž jadranske obale raspon povratnih vrijednosti iznosi od 51 do 77 dana (klasa 1.2). Za povratni period 25 godina (T25) izdvaja se južna regija, i to njezin obalni i otočni dio, gdje se mogu očekivati trajanja DS1 u rasponu od 77 do 103 dana (klasa 1.3). U ostatku Hrvatske očekivana trajanja sušnih razdoblja DS1 su pretežno u rasponu klase 1.2, a u kontinentalnoj unutrašnjosti i nekoliko postaja Gorskog Kotara povratne vrijednosti su nešto manje (klasa 1.1). Za povratni period 50 godina (T50), i dalje su u južnoj regiji očekivana trajanja DS1 u rasponu klase 1.3 dok se u svim ostalim regijama mogu očekivati trajanja u rasponu klase 1.2. Za 100 - godišnji povratni period (T100) u kontinentalnoj i gorskoj Hrvatskoj te jadranskom zaleđu očekivana trajanja DS1 kreću se u rasponu trajanja iz klase 1.2, sjeverni i srednji Jadran i južno zaleđe u rasponu klase 1.3, a najjužnije obalne postaje i otoci mogu očekivati znatno dulja trajanja (do 130 dana).

Slična prostorna raspodjela vidljiva je i za DS5, i u skladu s osnovnom klimatologijom sve se više nazire povezanost istočnih i južnih predjela Hrvatske. Tako na primjer već za 5-godišnji povratni period (T5), jadranska obala i istočna Slavonija mogu očekivati sušna razdoblja u rasponu trajanja od 63 do 91 dan (klasa 5.2), a kontinentalna i gorska Hrvatska u rasponu od 35 do 63 dana (klasa 5.1). Za povratni period od 10 godina, rasponi očekivanih trajanja sušnih razdoblja između kontinentalne i obalne Hrvatske su isti (klasa 5.2), osim na južnim otocima gdje se povratne vrijednosti kreću u rasponu od 91 do 119 dana (klasa 5.3). U gorskoj Hrvatskoj su trajanja u klasi nižih raspona (5.1). Za T25, na južnoj obali se mogu očekivati dulja trajanja (klasa 5.3), a na otocima još dulja (119 do 147 dana, klasa 5.4). Za T50 sjeverna i srednja jadranska obala te južno zaleđe mogu očekivati trajanja u rasponu klase 5.3, slično kao i istočna Slavonija, dok južna obala i otoci mogu očekivati DS5 u klasi 5.4. Slično je i za T100, ali južni jadranski otoci mogu očekivati ekstremno duga trajanja u rasponu od 147 do 175 dana.

Za sušna razdoblja DS10, prostorna raspodjela očekivanih trajanja za različite povratne periode vrlo je slična onoj za DS5 ukoliko se promatra klasifikacija na pet grupa. Za T5 i T10 gorska Hrvatska može očekivati sušna razdoblja u rasponu trajanja od 40 do 82 dana (klasa 10.1), a sve ostale regije u rasponu 82 do 124 dana (klasa 10.2). Za T25 Slavonija i južni Jadran mogu očekivati trajanja od 124 do 166 dana (klasa 10.3), gorska Hrvatska u rasponu klase 10.1, a ostale regije u rasponu klase 10.2. Za T50, raspon očekivanih trajanja u klasi 10.2 proteže se i na ostatak kontinentalne unutrašnjosti, a južni otoci mogu očekivati i trajanja

u rasponu od 166 do 205 dana (klasa 10.4). Taj raspon trajanja DS10 može se očekivati i na svim južnim obalnim postajama, dok se u zaleđu i dalje mogu očekivati trajanja u rasponu klase 10.3.

U dodatku C nalazi se prikaz očekivanih trajanja sušnih razdoblja za povratni period 50 godina za svaku postaju, dobiveni iz tjemena pripadnih posteriornih razdioba za povratnu vrijednost. Prikazani su rezultati prilagodbe razdiobe zGP na nizove premašaja praga koji odgovara 75. percentilu te pripadni 95–postotni intervali povjerenja. Može se vidjeti da je raspon intervala povjerenja nešto veći za južne jadranske regije gdje se javljaju i veći rasponi sušnih razdoblja.

4.4. Diskusija

Prostorna raspodjela sušnih razdoblja potvrdila je opravdanost odabira sedam regija kako su određene u ranijem istraživanju indeksa oborinskih ekstrema (Gajić-Čapka i sur. 2015). Regionalna analiza prosječnih trajanja sušnih razdoblja jasno ukazuje na dominantnost sušnih razdoblja u istočnoj Hrvatskoj u hladno doba godine (osobito zimi) i na južnom Jadranu u toplo doba godine (osobito ljeti), gdje su i najizraženiji pripadni tipovi kontinentalne odnosno maritimne klime. Takva prostorna raspodjela jasnije se uočava na nizovima sušnih razdoblja za DS5 i DS10 koja općenito traju dulje što je veći granični prag dnevne količine oborine za definiranje sušnog razdoblja. Najdulja sušna razdoblja rezultat su stabilnih tipova vremena, koja su općenito i najdugotrajnija, bez kišnih epizoda koje bi uzrokovale prekid sušnog slijeda (vidi dodatak C.1). Takvim situacijama ponajviše pogoduju radijacijski tipovi vremena (područja visokog tlaka zraka i bezgradijentna polja tlaka) koji su ujedno i najčešći tijekom godine, a osobito ljeti, u svim regijama. Međutim, bezgradijentni tipovi vremena ljeti omogućuju maksimalnu turbulentnu razmjenu i stvaranje konvektivnih oblaka i konvektivne oborine osobito nad toplim kontinentom (Lončar i Bajić, 1994). Zimi pak takvi tipovi vremena djeluju suprotno, tj. u kontinentalnom području pogoduju stvaranju i održavanju stabilnih inverzijskih stanja koja sputavaju razmjenu zraka. Bezgradijentno polje tlaka s anticiklonalno zakrivljenim izobarama uopće je dugotrajnije od ostalih tipova vremena, i to naročito ljeti. Jadran je pod izraženim utjecajem Azorske anticiklone koja ga štiti od prolaska frontalnih poremećaja podržavajući pri tome dugotrajne stabilne vremenske prilike nad Jadranom (vidi Cindrić i sur. 2010). Stoga su ljeti na Jadranu, osobito na najudaljenijim otocima, i sušna razdoblja niže kategorije (DS1) najdugotrajnija, dok u ostalim sezonama, sušna razdoblja te kategorije podjednako traju u svim regijama. Općenito, u proljeće i u kasnu jesen prevladavaju brže pokretni ciklonalni tipovi vremena (ciklone i doline niskoga tlaka) koji dovode do čestih i naglih promjena vremena, tj. izmjenjuju se kišna i sušna razdoblja (Lončar i Vučetić, 2003), pa se u tim sezonama u prosjeku ne pojavljuju dugotrajna sušna razdoblja. U ostalim predjelima Hrvatske odražavaju se kombinirani klimatski utjecaji te planinska klima u gorskoj Hrvatskoj gdje u pravilu sušna razdoblja najkraće traju. U skladu s prosječnim trajanjima, i maksimalna sušna razdoblja uglavnom su zabilježena na Jadranu i u istočnoj Hrvatskoj i to podjednako u hladno i toplo doba godine.

Ipak, treba ukazati na potrebu za sistematičnim klimatološkim podlogama vremenskih tipova u Hrvatskoj koje bi omogućile kvalitetnije usporedbe sušnih razdoblja s prevladavajućim vremenskim tipovima. Općenito, nužna je i detaljna analiza atmosferske

cirkulacije velike skale kako bi se detaljnije mogli utvrditi fizikalni uzroci trajanja određenih sušnih razdoblja na području Hrvatske. Preliminarni rezultati analize utjecaja polja daljinske povezanosti (eng. *teleconnection pattern*) su ukazali na doprinos Sjevernoatlantske oscilacije (engl. *North Atlantic Oscillation*, NAO) i polja Istočni Atlantik - Zapadna Rusija (engl. *East Atlantic-Western Russia*, EA-WR) sušnim uvjetima u Hrvatskoj u smislu podržavanja meteoroloških uvjeta koji pogoduju razvoju suše (Cindrić i sur. 2016).

Prostorna raspodjela procijenjenih trajanja sušnih razdoblja za različite povratne periode, dobivena primjenom opće razdiobe ekstrema (na godišnje maksimume) i zaokružene opće Paretove razdiobe na nizove premašaja praga koji odgovara 75. percentilu uglavnom prati i prosječnu klimatologiju sušnih razdoblja. Premda se procjene pomoću te dvije metode ne mogu direktno uspoređivati jer se radi o različitim skupovima podataka, ipak se može reći da razdioba zGP doprinosi duljim očekivanim trajanjima sušnih razdoblja u onim područjima gdje se inače očekuju najdulja sušna razdoblja (slike 4.7 i 4.10).

Na kraju, treba napomenuti kako su u ovom radu procjene očekivanih trajanja sušnih razdoblja pomoću teorijskih razdioba dobivene samo na godišnjoj skali, odnosno nisu posebno analizirane povratne vrijednosti po sezonama, premda postoje jasne sezonske razlike u trajanjima. Jedan od razloga leži u tome što je u ranijim analizama (Cindrić i sur. 2010, Gajić-Čapka i sur. 2014) uočen statistički značajan trend u sezonskim trajanjima sušnih razdoblja, dok na godišnjoj skali nije uočen trend. Naime, ako postoji trend u analiziranom dugogodišnjem nizu, tada bi prilikom primjene teorijskih razdioba trebalo dodatno uključiti i mogućnosti postajanja trenda pripadnih parametara razdiobe. Dakle, u postojeće modele trebalo bi uvesti nove parametrizacije što dakako pruža nove mogućnosti za buduća istraživanja. U granicama ovog rada, smatramo da je procjena dobivena iz godišnjih nizova zadovoljavajuća jer podaci uključuju i najdulja trajanja u pojedinoj godini, a koja se često mogu protezati iz jedne sezone u drugu.

5. ZAKLJUČAK

U radu su analizirane metode za procjenu parametara opće Paretove razdiobe (GP) i opće razdiobe ekstrema (GEV) primijenjene na nizove sušnih razdoblja različitih kategorija ovisno o dnevnoj graničnoj vrijednosti količine oborine (DS1, DS5 i DS10). Kako se u praksi sušna razdoblja izražavaju kao diskretne tj. (na cijeli broj dana) zaokružene vrijednosti, u prvom dijelu rada (poglavlje 2) ispitane su mogućnosti primjene klasičnih metoda za procjenu parametara, a koje su prvenstveno namijenjene prilagodbi kontinuiranim (egzaktnim) veličinama. Naime, taj problem se rijetko spominje eksplicitno u statističkoj literaturi, a posebno rijetko u primijenjenoj klimatologiji. Općenito se u praksi često zanemaruje činjenica da su podaci podvrgnuti određenom stupnju zaokruživanja te se klasične metode za procjenu parametara primjenjuju direktno. Međutim, ukoliko se ne provede dodatna analiza, takvi rezultati mogu dovesti do velikih pogrešaka u procjeni parametara, a onda i u procjeni visokih kvantila, tj. povratnih vrijednosti. Problem je proučen primjenom metode maksimalne vjerodostojnosti (ML) i metode linearnih momenata (LMOM) za procjenu parametara razdioba GEV i GP, s time da je za potonju razdiobu analiza provedena detaljnije budući da je pokazano kako zaokruživanje ne utječe bitno na godišnje maksimume. Za testiranje uspješnosti pojedine metode upotrebljene su i simulacije zaokruženih trajanja sušnih razdoblja. Rezultati su pokazali da kod primjene razdiobe GP klasičnim metodama za procjenu parametara, treba imati na umu: *i*) odnos raspona podataka (σ) i iznosa zaokruživanja (Δx), tj. $\sigma/\Delta x$ te *ii*) rezanje na pragu odnosno rad s nizovima premašaja (POT).

Naime, iz dobivenih rezultata može se zaključiti da za razuman iznos zaokruživanja ($\sigma/\Delta x \geq 4$, što za sušna razdoblja uglavnom vrijedi u praksi) direktna primjena klasičnih metoda za procjenu parametara (ML i LMOM) razdiobe GP na kontinuirane i zaokružene nizove, ali bez rezanja na pragu, daje slične vrijednosti. Međutim, ako se iste metode primjene na nizove premašaja (POT), a što se ne može izbjeći kod primjene razdiobe GP, rezultati dobiveni iz egzaktnih te zaokruženih nizova mogu se značajno razlikovati. Pokazano je da metoda GP–LMOM3, ukoliko se primijeni na umjereno zaokružene nizove premašaja, daje prilično razumne procjene parametara oblika i skale, bliske procjenama koje bi se dobile iz egzaktnih podataka. Procjena parametra lokacije, međutim, procjenjuje iznos oko -0.4 umjesto da bude blizu nule. Metode GP–ML i GP–LMOM2, koje omogućuju procjene samo parametra oblika i skale, mogu se također primijeniti na nizove premašaja (uz umjereno zaokruživanje), ali nakon prethodne promjene parametra lokacije na iznos -0.5 umjesto 0 (vidi

poglavlje 2). Problemu se također može pristupiti i primjenom metode treperenja kojom se na svaki diskretan podatak dodaju vrijednosti uniformne razdiobe iz intervala $[-0.5, 0.5]$. Tim postupkom diskretne (zaokružene) vrijednosti opet postaju kontinuirane, s razdiobom koja je bliska izvornoj razdiobi te je opravdano koristiti klasične metode procjene parametara. Rezultati primjene te metode pokazali su još manje pogreške u odnosu na prethodno opisanu korekciju lokacije. Treće moguće rješenje je odabrati metodu za procjenu parametara koja će raditi izravno na zaokruženim vrijednostima, odnosno biti valjana za zaokruženu razdiobu GP (zGP). U obzir dolaze mnoge metode, uključujući i metodu ML te metodu L-momenata. No, pomoću metode ML nije moguće (unutar standardne teorije) procijeniti parametar lokacije. Vezano za metodu L-momenta kod diskretnih slučajnih varijabli, formule koje povezuju te momente s parametrima su u pravilu komplicirane. Štoviše, prema našem znanju, odgovarajuće formule za razdiobu GP nisu poznate. Zbog svega navedenog, u nastavku smo odlučili promijeniti paradigmu iz frekvencijske u bayesovsku.

U istraživanju ekstrema Bayesov pristup je već dobro utemeljen (npr. Coles 2001). Osim što ga je relativno lako primijeniti taj pristup posjeduje i niz korisnih, kako teorijskih, tako i praktičnih svojstava. Osnovno je da se nesigurnost vezana uz točne vrijednosti parametara opisuje razdiobom vjerojatnosti. Korištenjem Bayesovog teorema, na temelju modela i podataka ishodišna nesigurnost (opisana priorom) se transformira u naknadnu nesigurnost (opisanu posteriorom) i to na egzaktan način. Cijeli postupak ima čvrsto uporište u teoriji te daje izravne odgovore na praktično relevantna pitanja. Također, važno je napomenuti da Bayesov pristup funkcionira za bilo koju količinu podataka, odnosno ne zasniva se na asimptotskoj teoriji kako je to slučaj u frekvencijskom pristupu. Ipak, prema našem saznanju, Bayesov pristup gotovo da nije bio zastupljen u klimatološkim analizama sušnih razdoblja. Tek nedavno su Butturi-Gomes i sur. (2018) primijenili GEV razdiobu na maksimalna godišnja trajanja sušna razdoblja (i to simulirana Poissonovom razdiobom) i ukazali na određene prednosti korištenja Bayesovih metoda za analizu ekstrema, a u isto vrijeme su Cindrić i Pasarić (2018) u potpuno bayesovskoj paradigmi analizirali sušna razdoblja pomoću razdioba GP i GEV. U središnjem dijelu ovog rada (poglavlje 3) detaljno su istražene mogućnosti Bayesovog pristupa, a u cilju preporuke pouzdane metode za procjenu visokih kvantila iz teorijske razdiobe. U tu svrhu, pored razdiobe zGP koja je prikladna za proučavanje nizova premašaja, radi dosljednosti i usporedbe, analizirana je i razdioba GEV primijenjena na godišnje maksimume. Pri tome su provedene dodatne usporedbe rezultata

dobivenih pomoću razdiobe GEV i njezinog specijalnog slučaja, Gumbelove razdiobe koja se često primjenjuje u praksi radi jednostavnosti.

Rezultati su pokazali da je model GEV pouzdaniji za primjenu na godišnje ekstreme u odnosu na Gumbelov slučaj, unatoč tomu što prema usporedbi modela (Bayesov faktor) podaci u velikom broju slučajeva preferiraju Gumbelov model. Štoviše, za pojedine slučajeve izuzetno dugih sušnih razdoblja postoji rizik kod primjene Gumbelovog modela koji uvelike podcjenjuje procjene povratnih vrijednosti. Nadalje, za modeliranje sušnih razdoblja pristupom GP–POT, preporučuje se procjena sva tri parametra razdiobe GP za koji procjena parametra lokacije u iznosu oko -0.5 ukazuje na prikladnost modela GP. Procjene parametara pokazale su dobru stabilnost počevši od vrlo niskih pragova dok za vrlo visoke pragove procjene mogu biti izrazito nesigurne i stoga se ne preporučuju koristiti.

Preporukom adekvatne metode za izračun povratnih vrijednosti sušnih razdoblja postignut je glavni cilj ovog rada. Nakon toga, u zadnjem poglavlju (poglavlje 4) analizirana je osnovna klimatologija trajanja sušnih razdoblja u Hrvatskoj, a potom su procijenjene povratne vrijednosti za različite povratne periode (5, 10, 25, 50 i 100 godina). Model zGP primijenjen je na nizove premašaja sušnih razdoblja za 131 meteorološku postaju za odabrani prag koji odgovara 75. percentilu. Tom odabiru prethodila je analiza procjena za više različitih pragova. Usporedno je model GEV primijenjen na pripadne godišnje maksimume sušnih razdoblja. Pri tome je za procjenu parametara teorijskih modela korišten Bayesov pristup. Za sve procjene, kako parametara teorijskih razdiobi tako i povratnih vrijednosti, procijenjeni su i intervali povjerenja čija je interpretacija Bayesovim pristupom vrlo intuitivna i logična što je izuzetno važno za praktičnu klimatološku primjenu.

Prostorna razdioba sušnih razdoblja potvrđuje ranije rezultate klimatološke analize provedene u Cindrić i sur. (2010) u kojoj se općenito izdvajaju kontinentalna, planinska i jadranska regija. Ipak, u ovom radu je klimatološka analiza provedena na znatno većem broju analiziranih meteoroloških postaja nego ranije, a izdvojeno je sedam prostornih regija pomoću kojih se jasnije ističu postupne prostorne promjene u trajanjima sušnih razdoblja u Hrvatskoj. Dodatno, klimatološka analiza sušnih razdoblja ukazala je na potrebu izrade sustavnih podloga prevladavajućih vremenskih tipova na području Hrvatske kao i polja daljinske povezanosti koji bi mogli utjecati na sušne prilike.

Na kraju, rezultatima ovog rada potičemo primjenu Bayesovog pristupa u primjeni teorije ekstrema u klimatološkoj praksi u Hrvatskoj. Konkretno, potiče se Bayesov način zaključivanja o nepoznatim parametrima na osnovi njihovih posteriornih razdiobi uz zadani

model za dane podatke i priorne razdiobe za parametre. Međutim, kako ističe Little (2005), korištenje bayesovske metode za razvoj modela i frekvencijske za njegovu ocjenu čini se prirodnim kompromisom koji uvažava sve prednosti obje metode. U ovom radu, nakon procjene parametara Bayesovim pristupom, Monte Carlo simulacije iskorištene su za ocjenu dobivenih rezultata. Osim toga, za potrebe odabira odgovarajućeg praga za primjenu razdiobe zGP, analiza Bayesovim pristupom kombinirana je s frekvencijskim koristeći metodu L–momenata. Ovo se pokazalo kao koristan, praktičan i relativno jednostavan alat u zaključivanju.

U budućim istraživanjima ispitat će se primjena sličnih metoda za ostale klimatološke parametre, a prvenstveno za analizu ekstremnih količina oborine te snijega za potrebe izrade meteoroloških podloga za projektiranje sustava odvodnje odnosno konstrukcija koje trebaju podnijeti velika opterećenja snijegom. Zatim, u analizama klimatskih promjena, uključujući analizu trenda te nestacionarne modele za što je Bayesov pristup također prikladan.

6. BIBLIOGRAFIJA

- Anagnostopoulou, C. & Tolika, K. (2012) Extreme precipitation in Europe: statistical threshold selection based on climatological criteria. *Theoretical and Applied Climatology*, 107, 479–489.
- Bai, Z., Zheng, S., Zhang, B. & Hu, G. (2009) Statistical analysis for rounded data. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139: 2526–2542.
- Bajić, A. (2011) Prostorna raspodjela očekivanih maksimalnih brzina vjetra na složenom terenu Hrvatske kao podloga za ocjenu opterećenja vjetrom. Doktorska radnja, Prirodoslovno matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu.
- Begueria, S. (2005) Uncertainties in partial duration series modelling of extremes related to the choice of the threshold value. *Journal of Hydrology*, 303, 215–230.
- Butturi-Gomes, D., Beijo L. A. & Avelar F. G. (2018) On modeling the maximum duration of dry spells: a simulation study under a Bayesian approach. *Theoretical and Applied Climatology*, 137, 1337–1346.
- Cindrić, K., Pasarić, Z. & Gajić-Čapka, M. (2010) Spatial and temporal analysis of dry spells in Croatia. *Theoretical and Applied Climatology*, 102, 171–184.
- Cindrić, K., Mihajlović, D., Telišman Prtenjak, M., Herceg Bulić, I. & Pasarić, Z. (2016) Analysis of the extraordinary 2011/2012 drought in Croatia. *Theoretical and Applied Climatology*, 123, 3–4, 503–522.
- Cindrić, K. & Pasarić, Z. (2018) Modelling Dry Spells by Extreme Value Distribution with Bayesian Inference. *Pure and Applied Geophysics*, 175, 3891–3908. doi: <https://doi.org/10.1007/s00024-018-2007-6>.
- Coles, S. G. & Powell, E. (1996) Bayesian methods in extreme value modelling: a review and new developments. *International Statistical Review*, 64 (1), 119–136, <https://doi.org/10.2307/1403426>.
- Coles, S. G. & Tawn, J. A. (1996) A Bayesian analysis of extreme rainfall data. *Applied Statistics*, 45 (4), 463–478.
- Coles, S. (2001) *An Introduction to Statistical Modelling of Extreme Values*. London, UK: Springer-Verlag.
- Coles, S., Pericchi, L. R. & Sisson, S. (2003) A fully probabilistic approach to extreme rainfall modelling. *Journal of Hydrology*, 273, 35–50.

- Coles, S. & Pericchi, L. R. (2003) Anticipating catastrophes through extreme value modelling. *Applied Statistics*, 52 (4): 405–416.
- Cunnane, C. (1973) A particular comparison of annual maximum and partial duration series methods of flood frequency estimation. *Journal of Hydrology*, 18, 257–273.
- Čapka, B. & Gajić-Čapka, M. (1992) A case analysis of heavy rainfall causing flash floods. *Theoretical and Applied Climatology*, 45, 77–82.
- Davison, A. C. & Smith, R. L. (1990) Models for exceedances over high thresholds. *Journal of the Royal Statistical Society*, 52: 393–425.
- Davison, A. C. & Huser R. (2015) Statistics of Extremes. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 2: 203–35. doi: 10.1146/annurev-statistics-010814-020133.
- Deidda, R. (2007) An efficient rounding-off rule estimator: Application to daily rainfall time series. *Water Resour Research* 43, W12405. doi:10.1029/2006WR005409.
- Deidda, R. (2010) A multiple threshold method for fitting the generalized Pareto distribution to rainfall time series. *Hydrology and Earth System Sciences*, 14, 2559–2575.
- Deidda, R. & Puliga, M. (2006) Sensitivity of goodness-of-fit statistics to rainfall data rounding off. *Physics and Chemistry of the Earth*, 31, 1240–1251.
- Deidda, R. & Puliga, M. (2009) Performances of some parameter estimators of the generalized Pareto distribution over rounded-off samples. *Physics and Chemistry of the Earth*, 34(10-12), 626–634.
- de Zea Bermudez, P. & Kotz, S. (2010a) Parameter estimation of the generalized Pareto distribution – Part I. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140: 1353–1373.
- de Zea Bermudez, P. & Kotz, S. (2010b) Parameter estimation of the generalized Pareto distribution – Part II. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140: 1374–1388.
- DUZS (2015) Procjena rizika od katastrofa za Republiku Hrvatsku. Državna uprava za zaštitu i spašavanje. Vlada Republike Hrvatske.
- Egozcue, J. J. & Ramis, C. (2001) Bayesian hazard analysis of heavy precipitation in Eastern Spain. *International Journal of Climatology*, 21, 1263–1279.
- Egozcue, J. J., Pawlowsky-Glahn, V., Ortego, M. I. & Tolosana-Delgado, R. (2006) The effect of scale in daily precipitation hazard assessment. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 6, 459–470.
- ERS (2018) Borba protiv dezertifikacije u EU: sve veća prijetnja u pogledu koje je potrebno djelovati odlučnije. Tematsko izvješće Br. 33, Europski revizorski sud.

- Gajić-Čapka, M. (1991) Short-term precipitation maxima in different precipitation climate zones of Croatia, Yugoslavia. *International Journal of Climatology*, 11, 6: 677–687.
- Gajić-Čapka, M. (2000) Metode klimatološke analize kratkotrajnih oborina velikog intenziteta. Doktorska dizertacija. Prirodoslovno matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 131 str.
- Gajić-Čapka, M. & Cindrić, K. (2011) Secular trends in indices of precipitation extremes in Croatia, 1901–2008. *Geofizika*, 28(2): 293–312.
- Gajić-Čapka, M., Cindrić, K. & Pasarić, Z. (2015) Trends in precipitation indices in Croatia, 1961–2010. *Theoretical and Applied Climatology*, 121, 167–177. <https://doi.org/10.1007/s00704-014-1217-9>.
- García - Herrera, R., Garrido-Perez, J. M., Barriopedro, D., Ordóñez, C., Vicente-Serrano, S. M., Nieto, R., Gimeno, L., Sorí R. & Yiou, P. (2019) The European 2016/2017 drought. *Journal of Climate*, 32, 3169–3187.
- Heitjan, D. F. (1989) Inference From Grouped Continuous Data: A Review. *Statistical Science*, 4 (2): 164-183.
- Hogg, R. V., McKean, J. & Craig, A. T. (2013) *Introduction to Mathematical Statistics*. Pearson, Upper Saddle River, New Jersey.
- Hosking J. R. M. (1990) L-moments: Analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics. *Journal of the Royal Statistical Society*, 52 (1): 105–124.
- Hosking J. R. M. & Wallis J. R (1997) *Regional Frequency Analysis. An Approach Based on L-Moments*. Cambridge University Press, London.
- Ionita, M., Tallaksen, L. M., Kingston, D. G., Stagge, J. H., Laaha, G., Van Lanen, H. A. J., Scholz, P., Chelcea, S. M. & Haslinger, K. (2017) The European 2015 drought from a climatological perspective. *Hydrology and Earth System Sciences*, 21, 1397–1419.
- Jurčec, V. (1976) Statistička analiza ekstremnih količina oborina u gornjem slivu rijeke Save. *Hrvatski meteorološki časopis*, 13, 99–141.
- Katz, R. W., Parlange, M. B. & Naveau, P. (2002) Statistics of extremes in hydrology. *Advances in Water Resources*, 25, 1287–1304.
- Knutti, R. (2010) The end of model democracy? *Climate Change*, 102, 395–404, <https://doi.org/10.1007/s10584-010-9800-2>.
- Lana, X., Martinez, M. D., Burgueno, A., Serra, C. & Martin-Vide and Gomez, L. (2006) Distribution of long dry spells in the Iberian peninsula, years 1951-1990. *International Journal of Climatology*, 26, 1999–2021, <https://doi.org/10.1002/joc.1354>.

- Lang, M., Ouarda, T. B. M. J. & Bobee, B. (1999) Towards operational guidelines for over-threshold modeling. *Journal of Hydrology*, 225: 103–117.
- Langousis, A., Mamalakis, A., Puliga, M. & Deidda, R. (2016) Threshold detection for the generalized Pareto distribution: Review of representative methods and application to the NOAA NCDC daily rainfall database. *Water Resources Research*, doi: 10.1002/2015WR018502.
- Little, R. J. (2005) Calibrated Bayes. *The American Statistician*, 60: 3, 213-223, doi: 10.1198/000313006X117837.
- Lončar, E. & Bajić, A. (1994) Tipovi vremena u Hrvatskoj. *Hrvatski meteorološki časopis*, 29: 31–41.
- Lončar, E. & Vučetić, V. (2003) Tipovi vremena i njihova primjena na sjeverni Jadran. *Hrvatski meteorološki časopis*, 38: 57–81.
- MacKay, D. (2003) *Information theory, inference and learning algorithms*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Madsen, H., Pearson, C. P. & Rosbjerg, D. (1997a) Comparison of annual maximum series and partial duration methods for modeling extreme hydrologic events. 1. At-site modeling. *Water Resources Research*, 33: 759–769.
- Madsen, H., Pearson, C. P. & Rosbjerg, D. (1997b) Comparison of annual maximum series and partial duration methods for modeling extreme hydrologic events. 2. Regional modeling. *Water Resources Research*, 33: 771–790.
- Makjanić, B. (1977) *Primjena teorije ekstrema u geofizici*. Republički hidrometeorološki zavod SR Hrvatske.
- Minn, S. & Hense, A. (2006) A Bayesian approach to climate model evaluation and multi-model averaging with an application to global mean surface temperatures from IPCC AR4 coupled climate models. *Geophysical research letters*, 33, L08708.
- Mudelsee, M. (2014) *Climate time series analysis: classical statistical and bootstrap methods*. Springer International Publishing, Switzerland.
- Nagarajan, R. (2009). *Drought Assessment*. New Delhi, Springer.
- Naveau, P., Nogaj, M., Ammann, C., Yiou, P., Cooley, D. & Jomelli, V. (2005) Statistical methods for the analysis of climate extremes. *Comptes Rendus Geoscience*, 337, 1013–1022.
- Perčec Tadić, M., Gajić-Čapka, M., Zaninović, K. & Cindrić, K. (2014) Drought vulnerability in Croatia. *Agriculturae Conspectus Scientificus*, 79: 31–39.

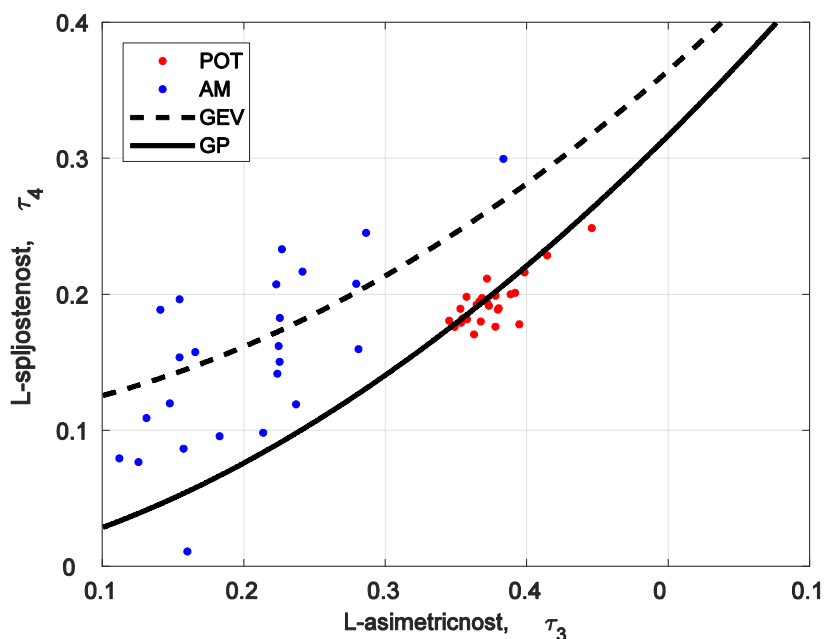
- Pasarić, Z. & Cindrić, K. (2019) Generalized Pareto distribution: Impact of rounding on parameter estimation. *Theoretical and Applied Climatology*, 136, 417–427. <https://doi.org/10.1007/s00704-018-2494-5>.
- Prieto, F., Gómez-Déniz, E. & Sarabia, J. M. (2014) Modelling Road Accident Blackspots Data with the Discrete Generalized Pareto distribution. *Accident Analysis & Prevention*, 71, 38–49.
- Reiss, R. D. & Thomas, M. (2007) *Statistical analysis of extreme values*. Birkhäuser, Basel.
- Ruiz-Sinoga, J. D., Garcia-Marin, R., Gabarron-Galeote, M. A. & Martinez-Murillo, J. F. (2012) Analysis of dry periods along a pluviometric gradient in Mediterranean southern Spain. *International Journal of Climatology*, 32, 1558–1571.
- Saidi, H., Ciampittiello, M., Dresti C. & Ghiglieri, G. (2013) The climatic characteristics of extreme precipitations for short-term intervals in the watershed of Lake Maggiore. *Theoretical and Applied Climatology*, 113, 1–15. doi: 10.1007/s00704-012-0768-x.
- Scarrot, C. & MacDonald, A. (2012) A review of extreme value threshold estimation and uncertainty quantification. *Revstat – Statistical Journal*, 10 (1): 33–60.
- Serra, C., Martínez, M. D., Lana, X. & Burgueño, A. (2014) European dry spell regimes (1951–2000): Clustering process and time trends. *Atmospheric Research*, 144, 151–174.
- Serra, C., Lana, X., Burgueño, A. & Martínez, M. D. (2016) Partial duration series distributions of the European dry spell lengths for the second half of the twentieth century. *Theoretical and Applied Climatology*, 123, 63–81.
- Silva, A. T., Portela, M. M., Naghettini, M. & Fernandes, W. (2017) A Bayesian peaks-over-threshold analysis of floods in the Itajaíacu River under stationarity and nonstationarity. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 31, 185–204.
- Sirangelo, B., Caloiero, T., Coscarelli, R. & Ferrari, E. (2017) Stochastic analysis of long dry spells in Calabria (Southern Italy). *Theoretical and Applied Climatology*, 127, 711–724.
- Sisson, S. A., Pericchi, L. R. & Coles, S. G. (2006) A case for a reassessment of the risks of extreme hydrological hazards in the Caribbean. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 20, 296–306.
- Sivakumar, M. V. K., Stefanski, R., Bazza, M., Zelaya, S., Wilhite, D. & Magalhae, A. R. (2014) High Level Meeting on National Drought Policy: Summary and Major Outcomes. *Weather and Climate Extremes*, 3: 126–131.
- Sivia, D. S. & Skilling, J. (2006) *Data Analysis: A Bayesian tutorial*. New York: Oxford University Press Inc.

- Smith, R. L. (2003) *Statistics of extremes, with applications in environment, insurance and finance*. In B. Finkenstadt & H. Rootzen (Eds.), *Extreme values in Finance, Telecommunications, and the Environment* (pp. 1 -78). London: Chapman and Hall/CRC Press.
- Tancredi, A., Anderson, C. & O'Hagan, A. (2006) Accounting for threshold uncertainty in extreme value estimation. *Extremes*, 9, 87–106.
- Trepanier, J., Roberts, M. J. & Keim, B. D. (2015) Trends and Spatial Variability in Dry Spells across the South-Central United States. *Journal of applied meteorology and climatology*, 54, 2261–2272.
- Tramblay, Y., Koutroulis, A., Samaniego, L., Vicente-Serrano, S. M., Volaire, F., Boone, A., Le Page, M., Llasat, M. C., Albergel, C., Burak, S., Cailleret, M., Cindrić Kalin, K., Davi, H., Dupuy, J., Greve, P., Grillakis, M., Hanich, L., Jarlan, L., Martin-StPaul, N., Martínez-Vilalta, J., Mouillot, F., Pulido-Velazquez, D., Quintana-Seguí, P., Renard, D., Turco, M., Türkeş, M., Trigo, T., Vidal J-P., Vilagrosa A., Zribi, M. & Polcher, J. (2020) Challenges for drought assessment in the Mediterranean region under future climate scenarios. *Earth-Science Reviews*, 210, 103348. doi: <https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2020.103348>.
- Wilks, D. S. (2011) *Statistical Methods in the Atmospheric Sciences*. Oxford, UK: Elsevier Inc.
- WMO (2009) Guidelines on Analysis of extremes in a changing climate in support of informed decisions for adaptation. WMO, WCDMP-No. 72.
- Vicente-Serrano, S. M. & Begueria-Portugues, S. (2003) Estimating extreme dry spell-risk in the middle Ebro valley (NE Spain): a comparative analysis of partial duration series with a general Pareto distribution and annual maxima series with a Gumbel distribution. *International Journal of Climatology*, 23: 1103–1118.
- Vicente-Serrano, S. M. (2006) Spatial and temporal analysis of droughts in the Iberian Peninsula (1910–2000). *Hydrological Sciences Journal*, 52(1): 83–97.
- Yoon, S., Cho, W., Jun-Haengl, H., & Kim, C. E. (2010) A full Bayesian approach to generalized maximum likelihood estimation of generalized extreme value distribution. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 24, 761–770.
- Zaninović, K., Gajić-Čapka, M., Perčec Tadić, M., Vučetić, M., Milković, J., Bajić, A., Cindrić, K., Cvitan, L., Katušin, Z., Kaučić, D., Likso, T., Lončar, E., Lončar, Ž., Mihajlović, D., Pandžić, K., Patarčić, M., Srnc, L., Vučetić, V. (2008) *Klimatski atlas*

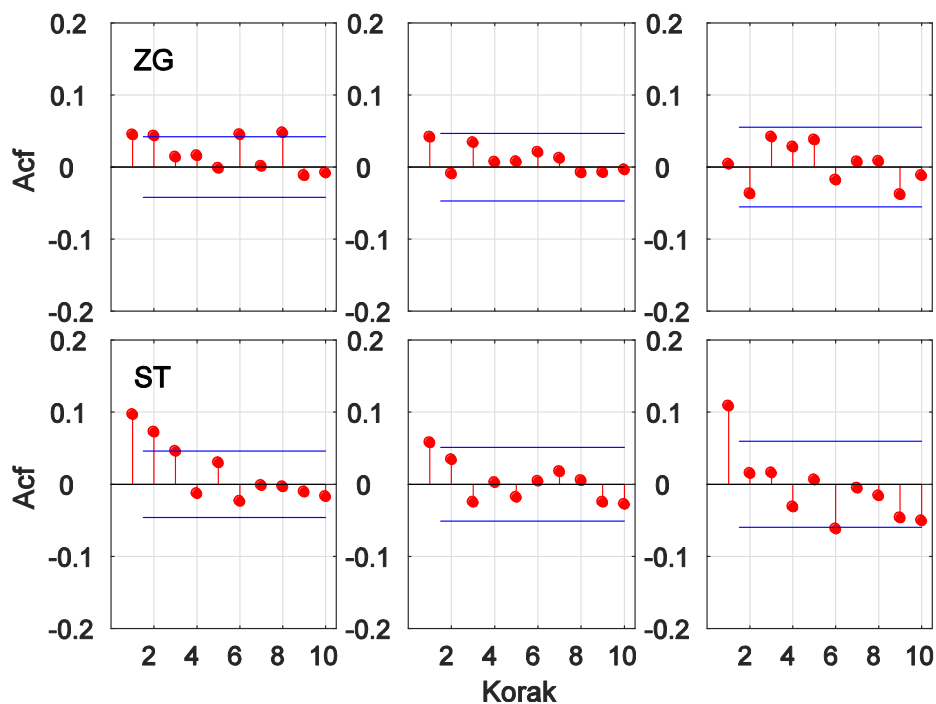
Hrvatske / Climate atlas of Croatia 1961-1990., 1971-2000. Državni hidrometeorološki zavod, Zagreb.

DODATAK A

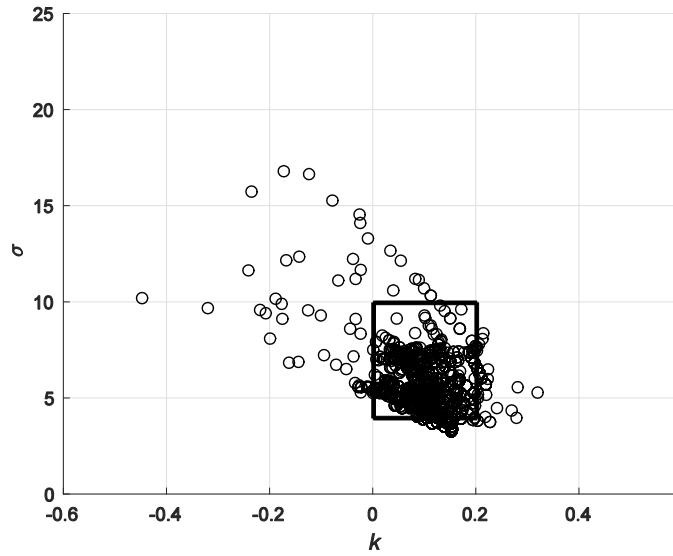
U ovom prilogu prikazane su dodatne slike za potrebe poglavlja 2.



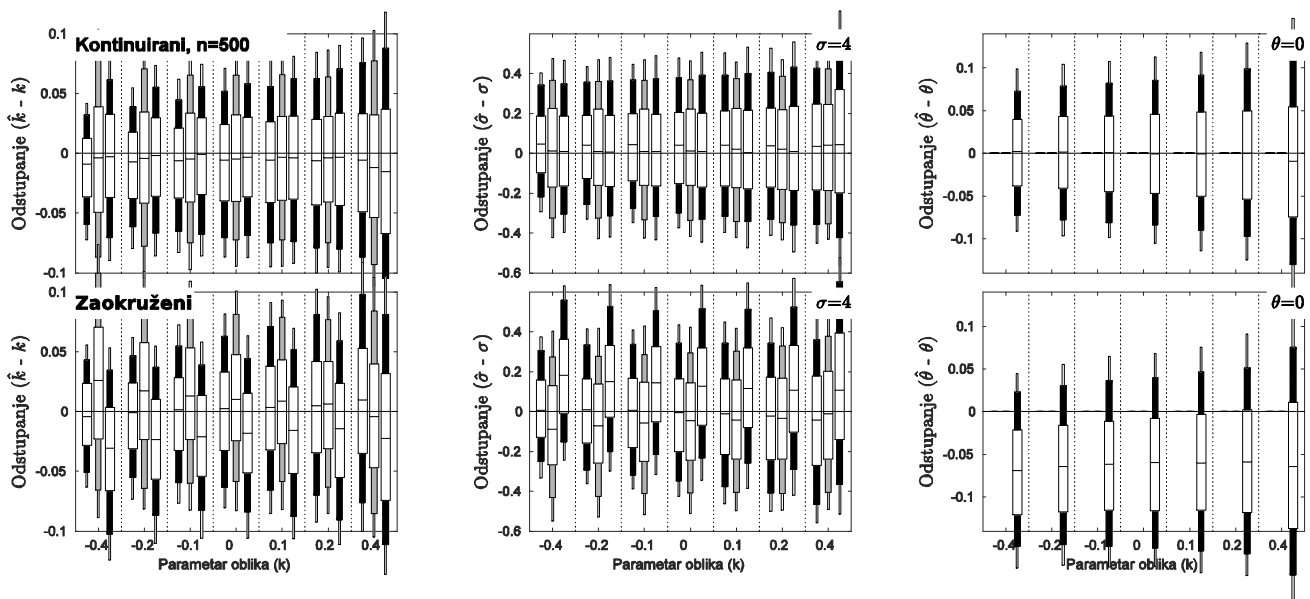
Slika A.1: Dijagram omjera L–momenata. Točkicama su označeni procijenjeni L–momenti iz uzorka godišnjih maksimuma sušnih razdoblja (plavo) odnosno oni iz nizova premašaja 75. percentila (crveno) za 25 postaja u Hrvatskoj (podaci kao u Cindrić i sur. 2010). Krivuljama su naznačeni pripadni omjeri za teorijske razdiobe GEV (crtkana) i GP (puna).



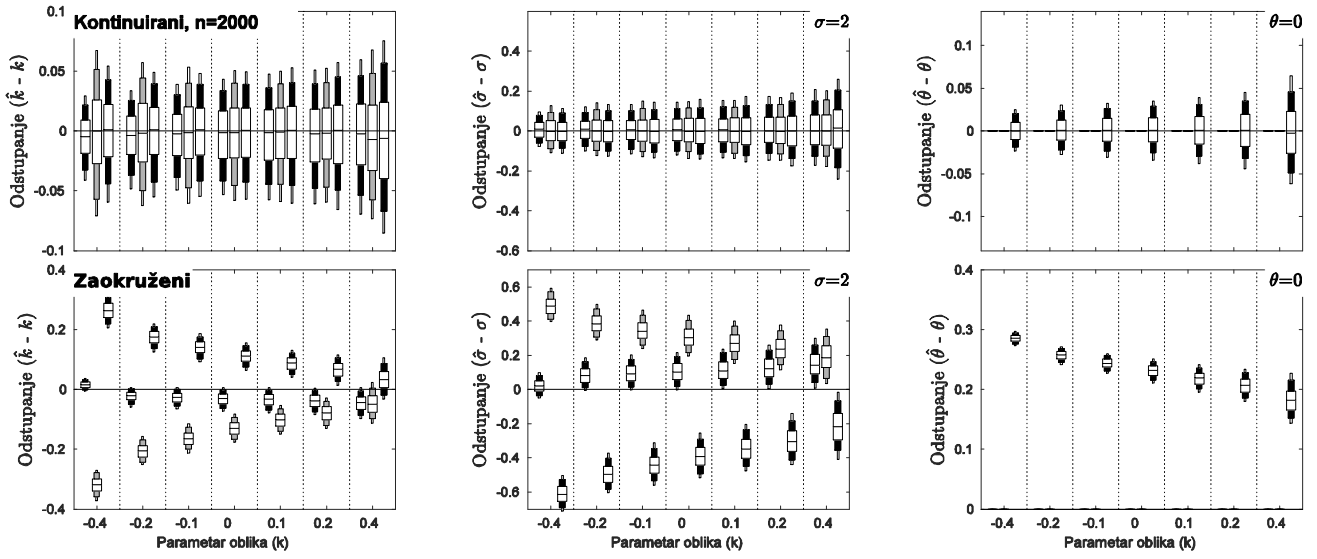
Slika A.2: Autokorelacijska funkcija za tri kategorije sušnih razdoblja DS1 (lijevo), DS5 (sredina) i DS10 (desno) na postajama ZG (gore) i ST (dolje).



Slika A.3: Raspon parametara oblika i skale razdiobe GP dobivenih primjenom na nizove sušnih razdoblja s 25 glavnih meteoroloških postaja (korištenih u radu Cindrić i sur. 2010).



Slika A.4: Isto kao slika 2.6, ali za simulirane duljine nizova $n = 500$.



Slika A.5: Kao slika 2.6, ali za manji omjer $\sigma/\delta x$ odnosno za $\sigma=2$.

DODATAK B

U ovom prilogu dan je izvod za posteriornu razdiobu povratne vrijednosti pomoću opće Paretove razdiobe te su prikazane dodatne slike za potrebe poglavlja 3.

Posteriorna razdioba za povratnu vrijednost pomoću razdiobe GP

Da bi odredili razdiobu vjerojatnosti neke varijable koja je funkcija jedne ili više nasumičnih varijabli koristi se metoda zamjeni varijabli (Hogg i sur. 2013). Neka je zadan slučajan vektor $X=(k, \sigma, \theta)$ s pripadnom funkcijom gustoće $f_X(k, \sigma, \theta)$. U našem slučaju, potonja funkcija predstavlja posteriornu razdiobu parametara opće Paretove razdiobe. Iz te funkcije možemo izvesti funkciju gustoće za povratnu vrijednost x_T koja je funkcija parametara zadana formulom (2.7), odnosno uvrstivši $\lambda T = 1/p$:

$$x_p = \theta + \frac{\sigma}{k}(p^{-k} - 1)$$

Neka je $f_1((k, \sigma, \theta) | D)$ posterior parametara, gdje D označava podatke (eng. *data*). Tada je funkcija gustoće za x_p :

$$F_{x_p}(x) = \iiint_{\substack{(k, \sigma, \theta) \\ x_p \leq x}} f_1((k, \sigma, \theta) | D) dk d\sigma d\theta = \iiint_{\substack{(k, \sigma, \theta) \\ \frac{1}{k}(p^{-k} - 1) \leq \frac{x - \theta}{\sigma}}} f_1((k, \sigma, \theta) | D) dk d\sigma d\theta$$

Provodimo zamjenu varijabli $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ na sljedeći način:

$$\text{tj. } Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu + \frac{\sigma}{k}(p^{-k} - 1) \\ k \\ \theta \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} k \\ \sigma \\ \theta \end{pmatrix}$$

Pripadna inverzna funkcija je:

$$g^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ \sigma \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \frac{z_2(z_1 - z_3)}{p^{-z_2} - 1} \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Jacobijan od g^{-1} iznosi:

$$Dg^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial k}{\partial z_1} & \frac{\partial k}{\partial z_2} & \frac{\partial k}{\partial z_3} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial z_1} & \frac{\partial \sigma}{\partial z_2} & \frac{\partial \sigma}{\partial z_3} \\ \frac{\partial \theta}{\partial z_1} & \frac{\partial \theta}{\partial z_2} & \frac{\partial \theta}{\partial z_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial z_1} & \frac{\partial \sigma}{\partial z_2} & \frac{\partial \sigma}{\partial z_3} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \sigma}{\partial z_1} = \frac{-z_2}{p^{-z_2} - 1}.$$

Naime, transformacijom varijabli $y=g(x)$ vrijedi:

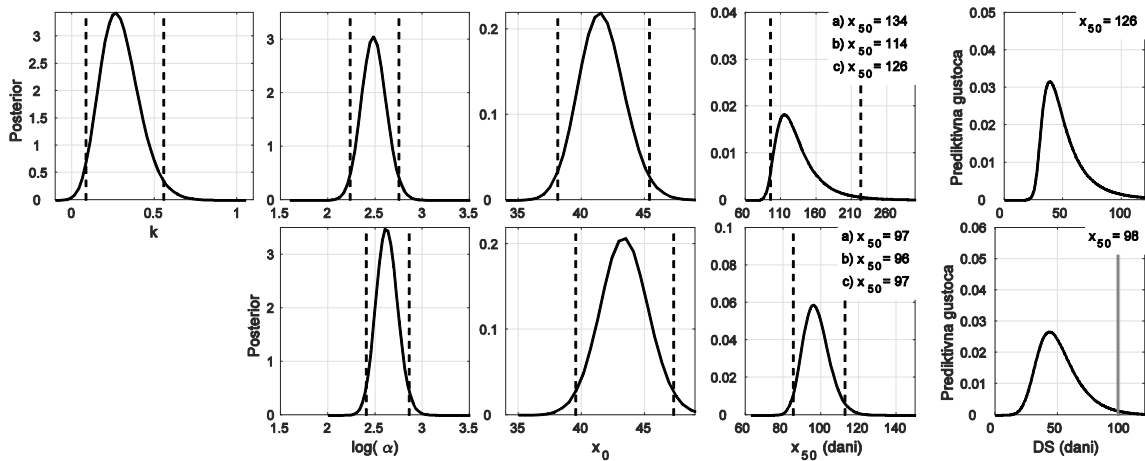
$$\int_A f_x(x) dx = \int_{g^{-1}(A)} f_x(g^{-1}(y)) |Dg^{-1}(y)| dy.$$

Funkcija gustoće od $Z=g(X)$ tada glasi:

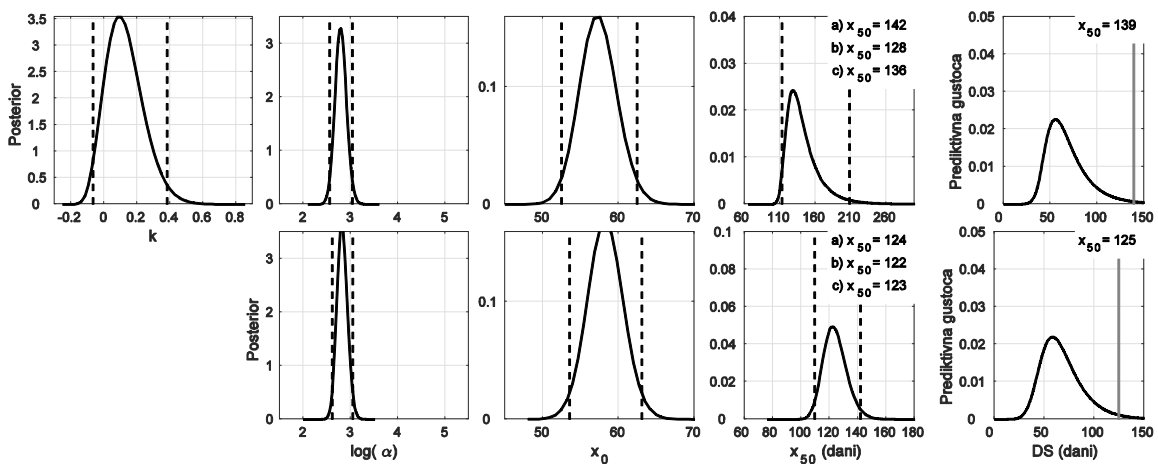
$$f_Z(z) = f_X(g^{-1}(z)) |Dg^{-1}(z)| K_T(z), \quad K_T(z) = \begin{cases} 1 & z \in \mathfrak{R}^3 \\ 0 & z \notin \mathfrak{R}^3 \end{cases}$$

Funkcija gustoće za povratnu vrijednost, odnosno $z_1(k, \sigma, \theta)$ je marginalna gustoća od Z , tj.

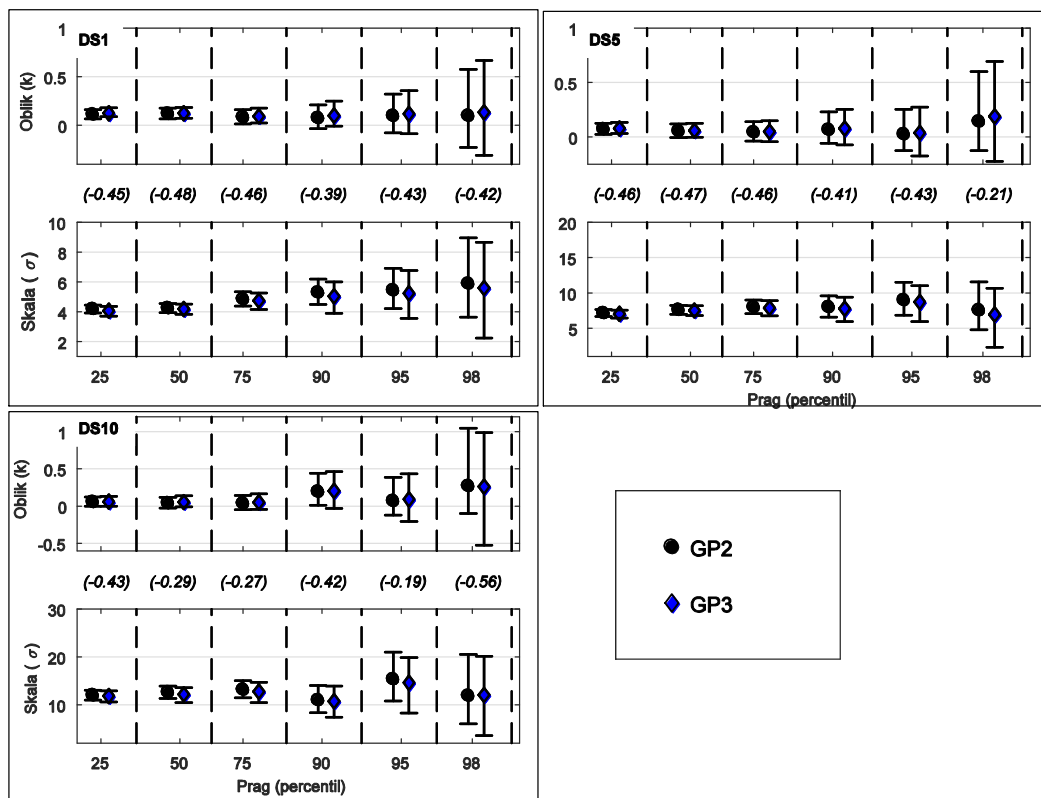
$$f_{z_1}(z_1) = \int_{\mathfrak{R}} dz_2 \int_{\mathfrak{R}} dz_3 f_X \left(z_2, \frac{z_2(z_1 - z_3)}{p^{-z_2} - 1}, z_3 \right) \cdot \left| \frac{z_2}{p^{-z_2} - 1} \right|$$



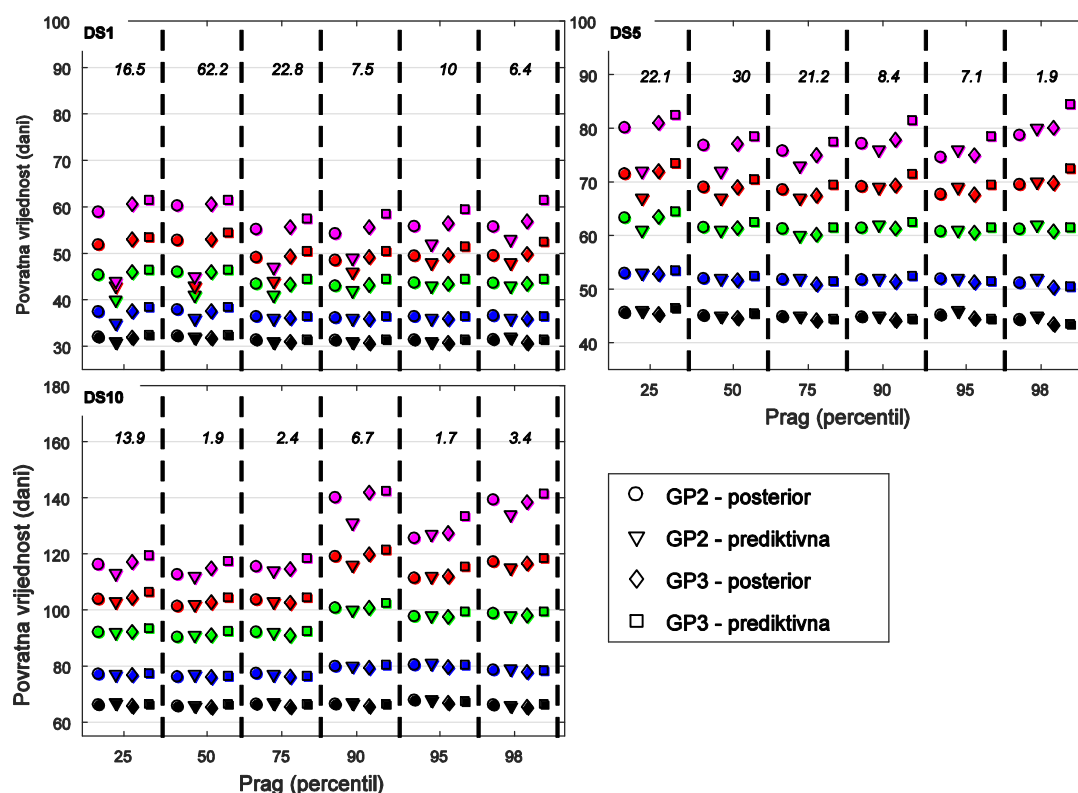
Slika B.1: Posteriorne razdiobe parametara modela GEV (gornji red) i Gumbelovog modela (donji red), posteriorne razdiobe 50 - godišnjeg povratnog razdoblja (x_{50} , u danima) i pripadne prediktivne razdiobe (zadnja kolona) sušnih razdoblja DS5 za postaju Split–Marjan. Isprekidane linije označavaju 95%–tne intervale povjerenja. Za x_{50} naznačene su vrijednosti srednjaka (a), moda (b) i medijana (c).



Slika B.2: Isto kao i slika B.1, samo za sušna razdoblja kategorije DS10.



Slika B.3: Vrijednosti medijana iz posteriornih razdioba parametra oblika i skale dobivenih primjenom modela GP2 (kružići) i GP3 (dijamanti) na šest nizova premašaja pojedinih pragova (izraženih u percentilima) za postaju Zagreb–Grič. Pripadni intervali povjerenja izraženi su pomoću vertikalnih linija. Parametri lokacije navedeni su u zagradama. Različiti paneli odnose se na tri kategorije sušnih razdoblja (DS1, DS5 i DS10).



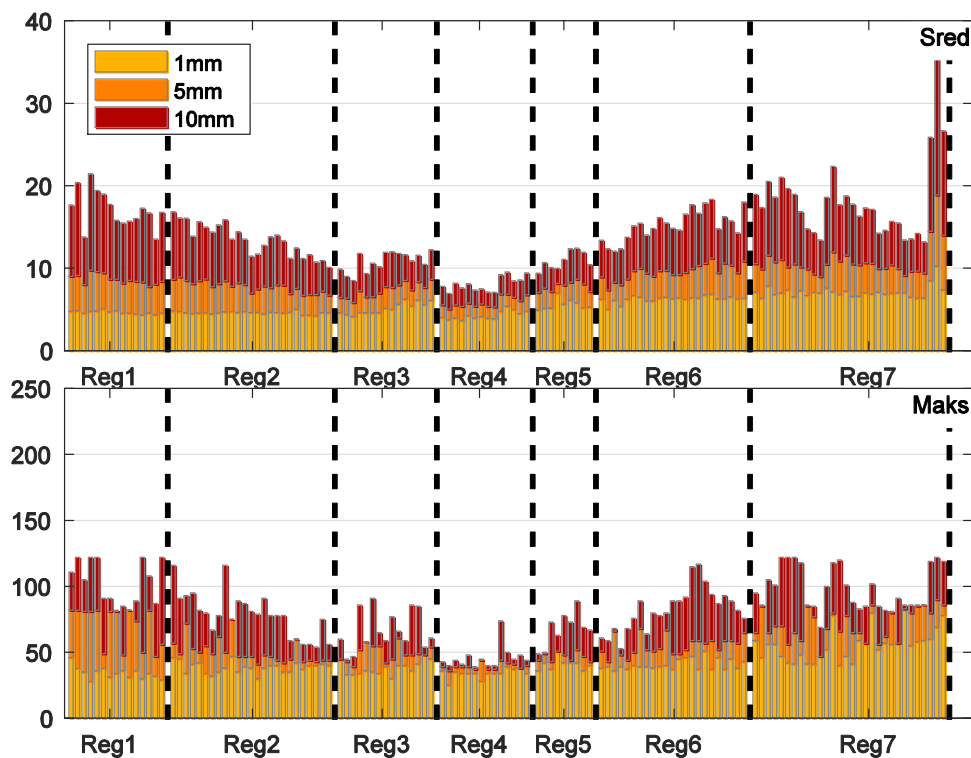
Slika B.4: Procjene 5 -, 10 -, 25 -, 50 - i 100 - godišnjih povratnih vrijednosti (x_T , u danima) sušnih razdoblja za postaju Zagreb–Grič dobivene primjenom modela GP2 i GP3 iz pripadnih prediktivnih razdiobi (trokutići i kvadratići) i iz pripadnih posteriornih razdiobi (kružići i dijamanti). Odgovarajući povratni periodi su razdvojeni različitim bojama: crna ($T = 5$ godina), plava ($T = 10$ godina), zelena ($T = 25$ godina), crvena ($T = 50$ godina) i roza ($T = 100$ godina). Tri panela se odnose na tri kategorije sušnih razdoblja (DS1, DS5 i DS10). Vrijednosti Bayesovog faktora odnosa dva modela GP3 i GP2 za pojedine pragove naznačene su na pojedinom panelu.

DODATAK C

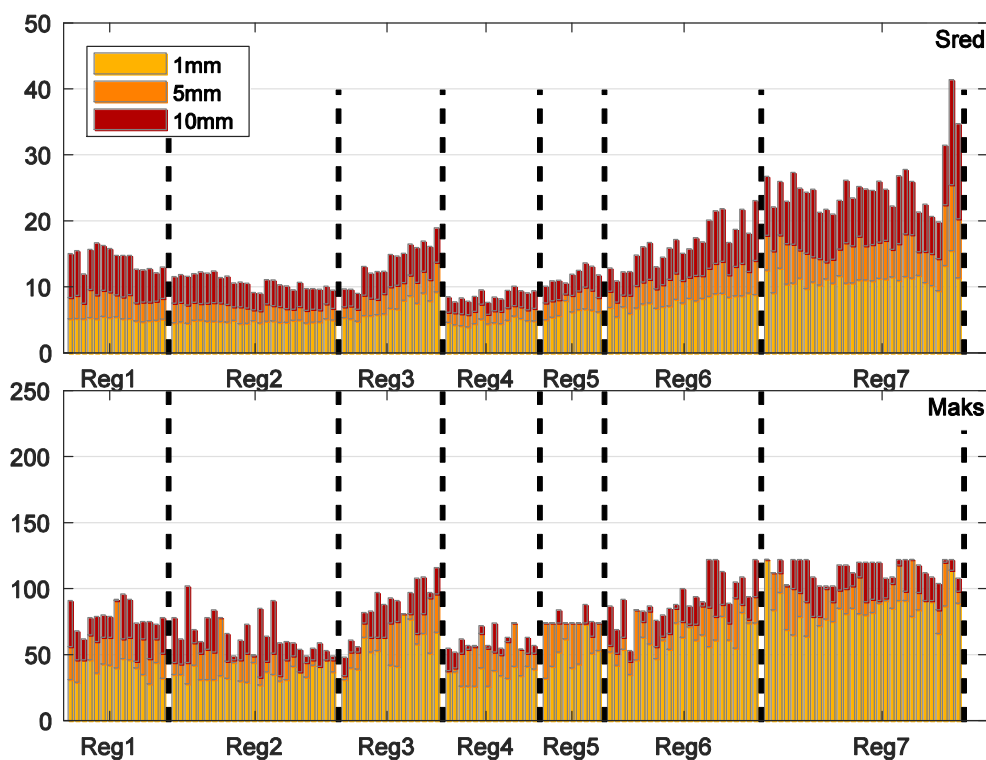
U ovom prilogu nalaze se dodatni materijali za potrebe poglavlja 4.

Tablica C.1: Popis 131 postaje Državnog hidrometeorološkog zavoda, korištenih u ovom radu.

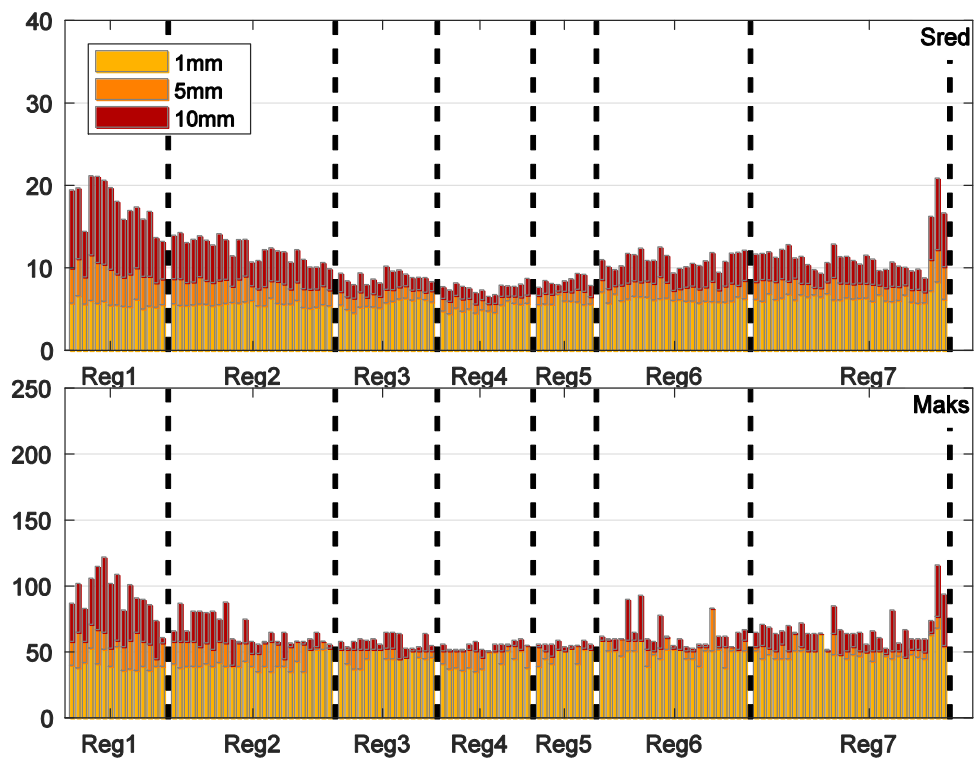
| R.br. | Regija 1 | Regija 2 | Regija 3 | Regija 4 | Regija 5 | Regija 6 | Regija 7 |
|-------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------|---------------------|----------------------|-------------------|
| 1 | Donji Miholjac | Legrad | Gerneralski Stol | Ravna Gora | Matulji | Momjan | Slatine |
| 2 | Valpovo | Gola | Oštarije | Prezid | Rijeka | Pazin | Split Marjan |
| 3 | Marijanci | Koprivnica | Ogulin | Parg | Bakar | Baderna | Maslinica |
| 4 | Čačinci | Trnava Garešnica | Ličko Lesće | Zamost | Mosčenička Draga | Sv. Petar u Šumi | Gornje Selo |
| 5 | Aljmaš | Ferdinandovac | Kosinjski | Zavižan | Brseč | Juršići | Milna |
| 6 | Osijek | Đurđevac | Ramljani | Gerovo | Dobrinj | Bale | Ložišće |
| 7 | Vuka | Sedlarica | Gospić | Mrzla | Crikvenica | Vodnjan | Supetar |
| 8 | Šemljevi | Bjelovar | Knin | Crni Lug | Senj | Umag | Postira |
| 9 | Cerna | Križevci | Sinj | Klana | Ledenice | Kloštar | Pučišća |
| 10 | Trnava | Gornja Rijeka | Dicmo | Marčelji | | Rovinj | Povlja |
| 11 | Slavonski Šamac | Varaždin | Dugopolje | Vela Učka | | Medulin | Gornji Humac |
| 12 | Slavonski Brod | Štrigova | Bisko | Lanišće | | Lopar | Selca |
| 13 | Sibinj | Donji Macelj | Zadvarje | Šapjane | | Osor | Hvar |
| 14 | Pleternica | Donja Stubica | Zagvozd | | | Mali Lošinj | Brusje |
| 15 | Okučani | Sisak | Veliki Prolog | | | Ilovik | Sveta Nedjelja |
| 16 | Antunovac | Lekenik | Zeleni Vir | | | Ugljan | Zastražišće |
| 17 | | Zagreb Maksimir | | | | Veli Iž | Gdinj |
| 18 | | Zagreb Grič | | | | Sali | Bogomolje |
| 19 | | Klinča Selo | | | | Vir | Čara |
| 20 | | Draganići | | | | Zadar | Zaostorg |
| 21 | | Vivodina | | | | Svjetioni k Babac | Janjina |
| 22 | | Donje Stative | | | | Slapovi Krke | Babino Polje |
| 23 | | Karlovac | | | | Šibenik | Maranović |
| 24 | | Duga Resa | | | | | Šipan |
| 25 | | Zvečaj | | | | | Lopud |
| 26 | | | | | | | Dubrovnik |
| 27 | | | | | | | Cavtat |
| 28 | | | | | | | Stončica |
| 29 | | | | | | | Svetac |
| 30 | | | | | | | Lastovo |



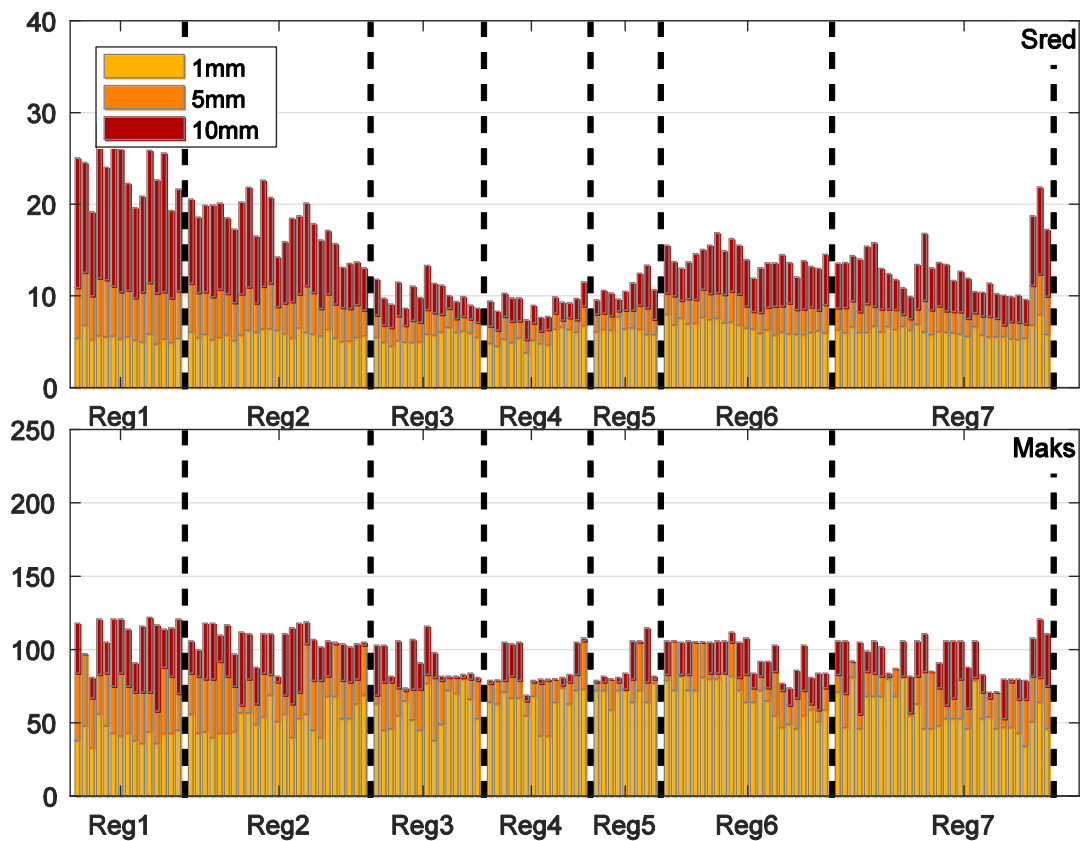
Slika C.1: Srednja (gore) i maksimalna (dolje) trajanja sušnih razdoblja različitih kategorija ovisno o dnevnoj graničnoj vrijednosti količine oborine pri definiranju sušnih razdoblja (1 mm, 5 mm i 10 mm), za proljeće. Visina stupića se kumulativno povećava po kategorijama.



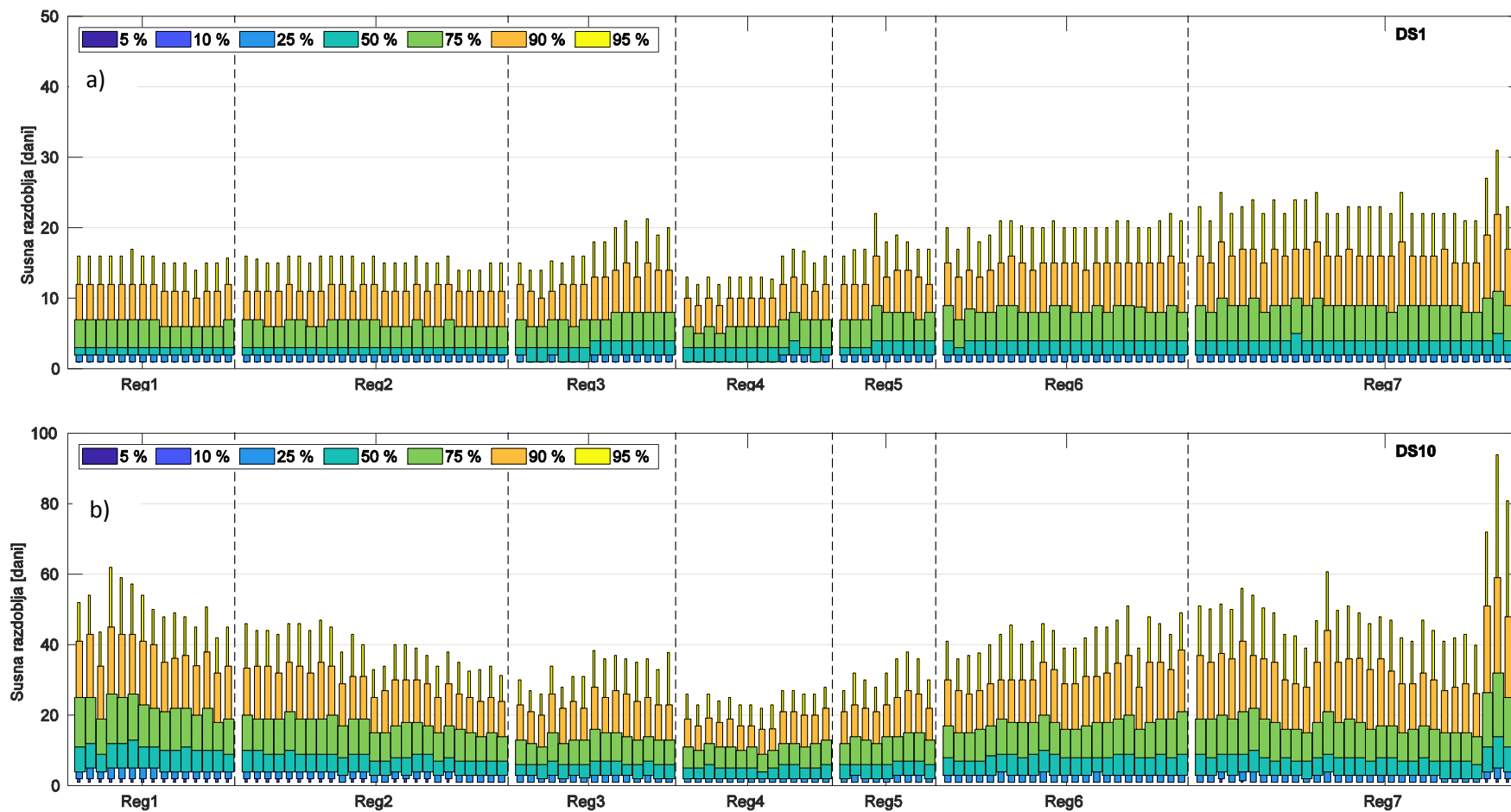
Slika C.2: Isto kao slika C.1, samo za ljeto.



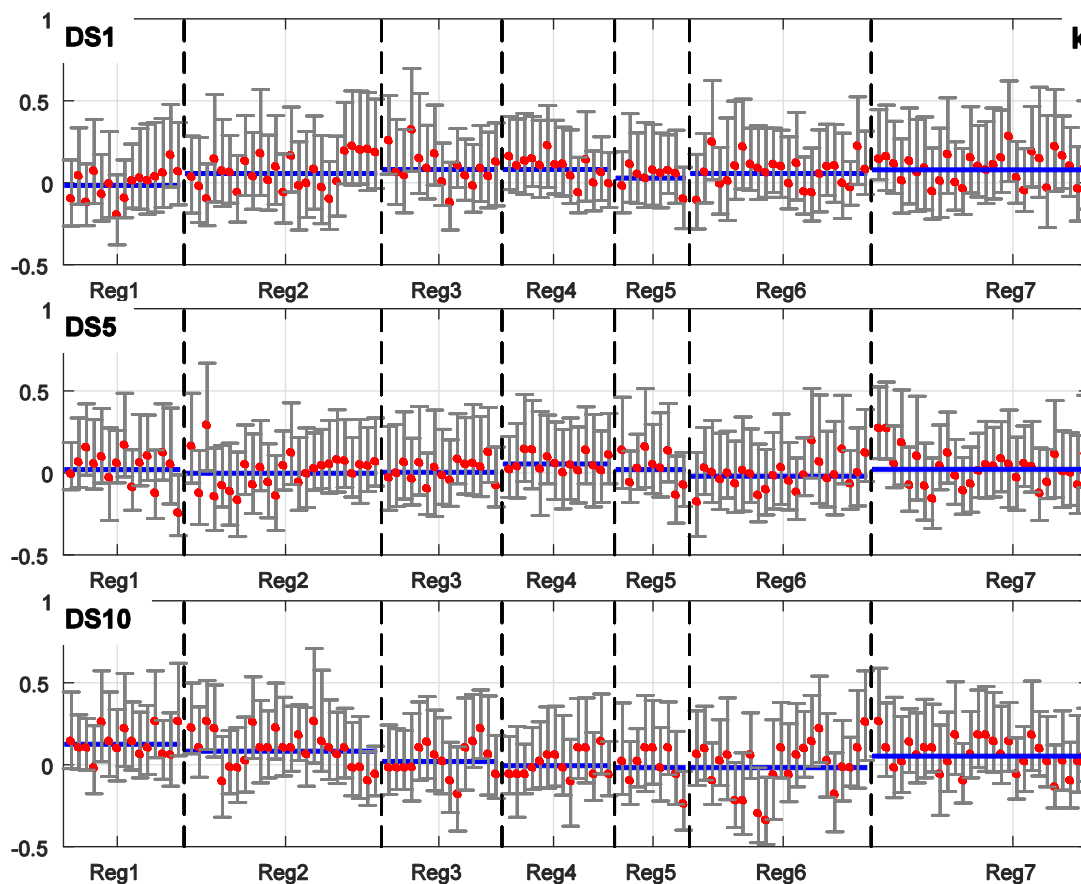
Slika C.3: Isto kao slika C.1, samo za jesen.



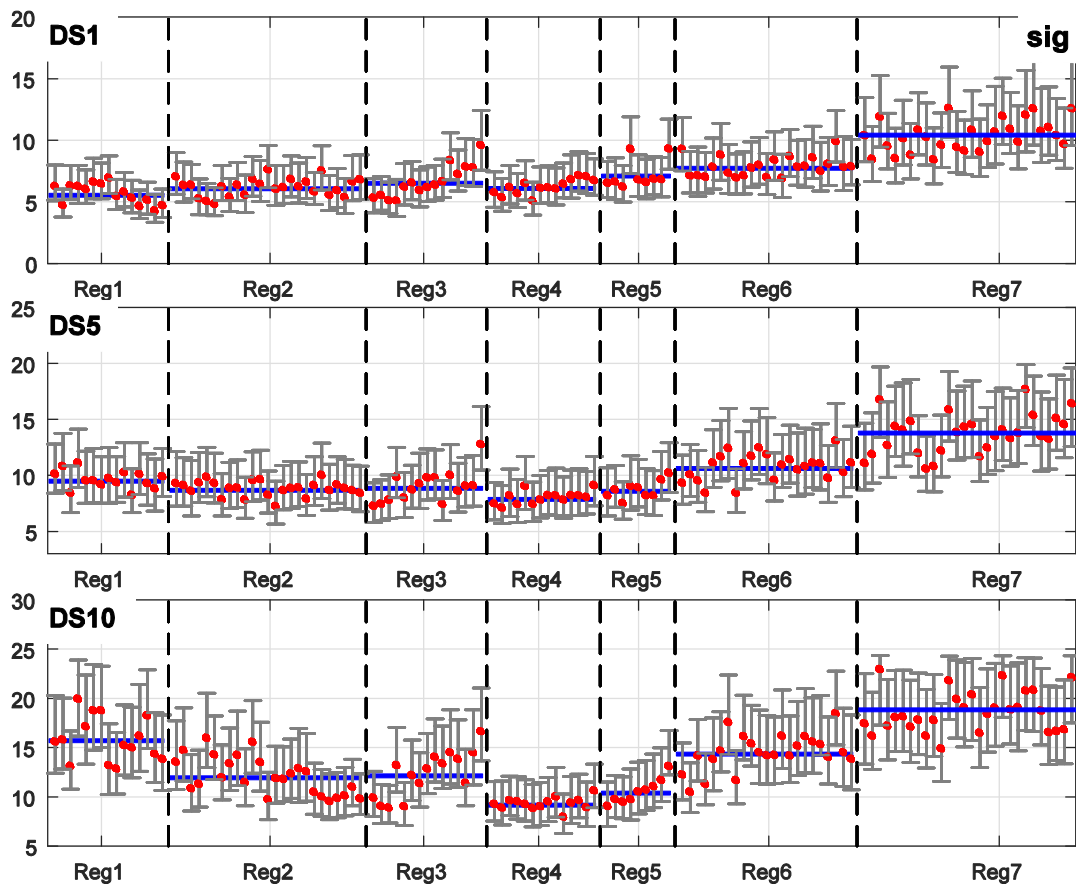
Slika C.4: Isto kao slika C.1, samo za zimu.



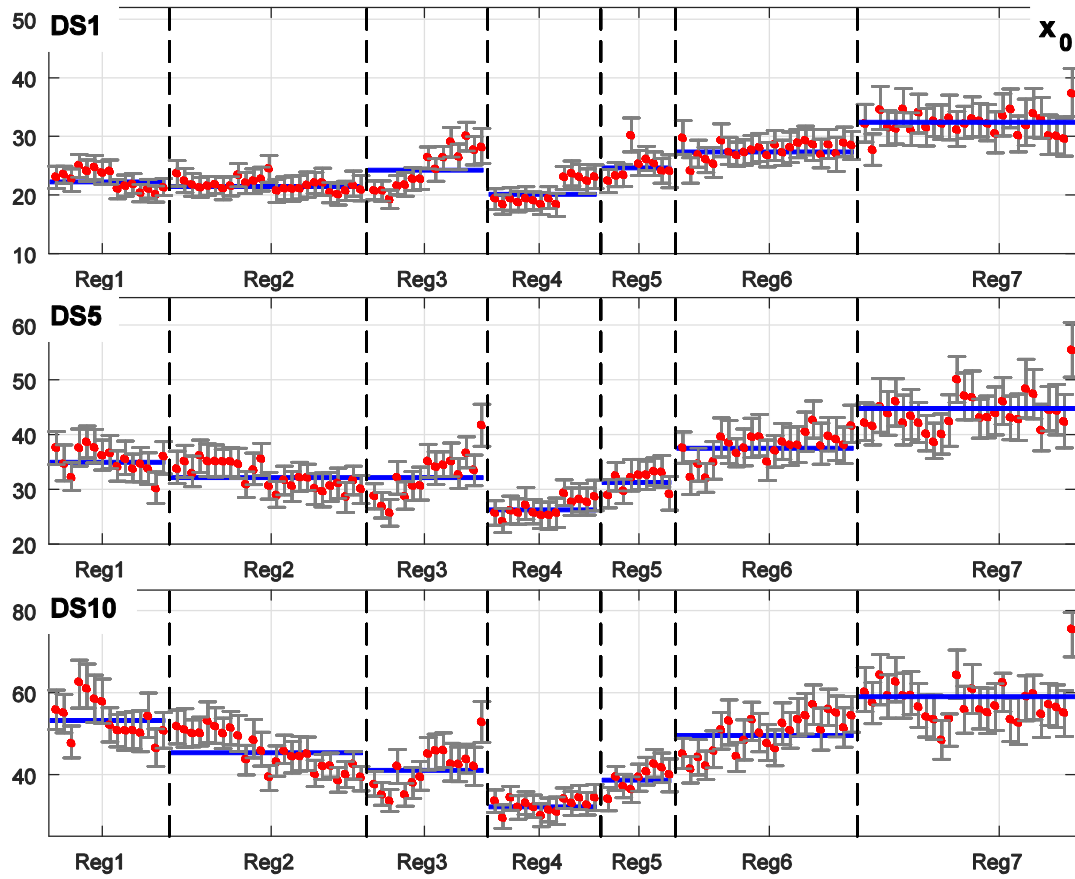
Slika C.5: Empirijska razdioba godišnjih trajanja sušnih razdoblja za a) DS1 i b) DS10, izražena pomoću percentila (10., 25., 50., 75., 90., 95., 98.) za 131 postaju raspoređenu u sedam regija (Reg).



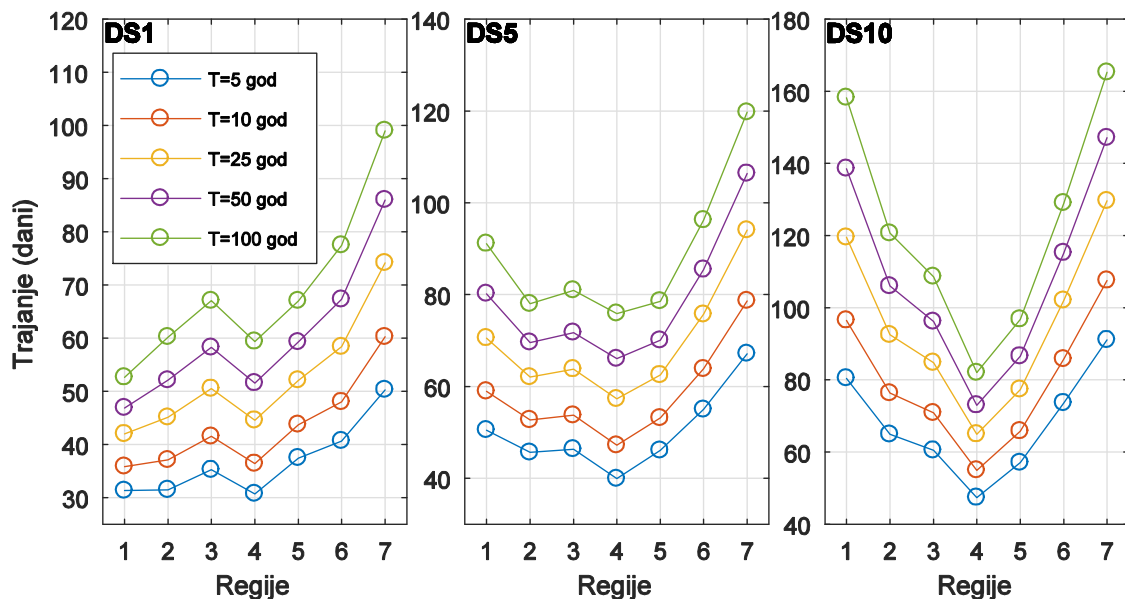
Slika C.6: Procjena parametra oblika (k) opće razdiobe ekstrema primijenjene na godišnja maksimalna trajanja sušnih razdoblja različitih kategorija (DS1, DS5 i DS10) za 131 postaje. Crvene točkice označavaju maksimalnu vrijednost (mod) pripadnih posteriornih razdiobi, a sive linije označavaju 95%-tne intervale povjerenja dobivene iz 2.5 i 97.5 percentila pripadnih posteriora.



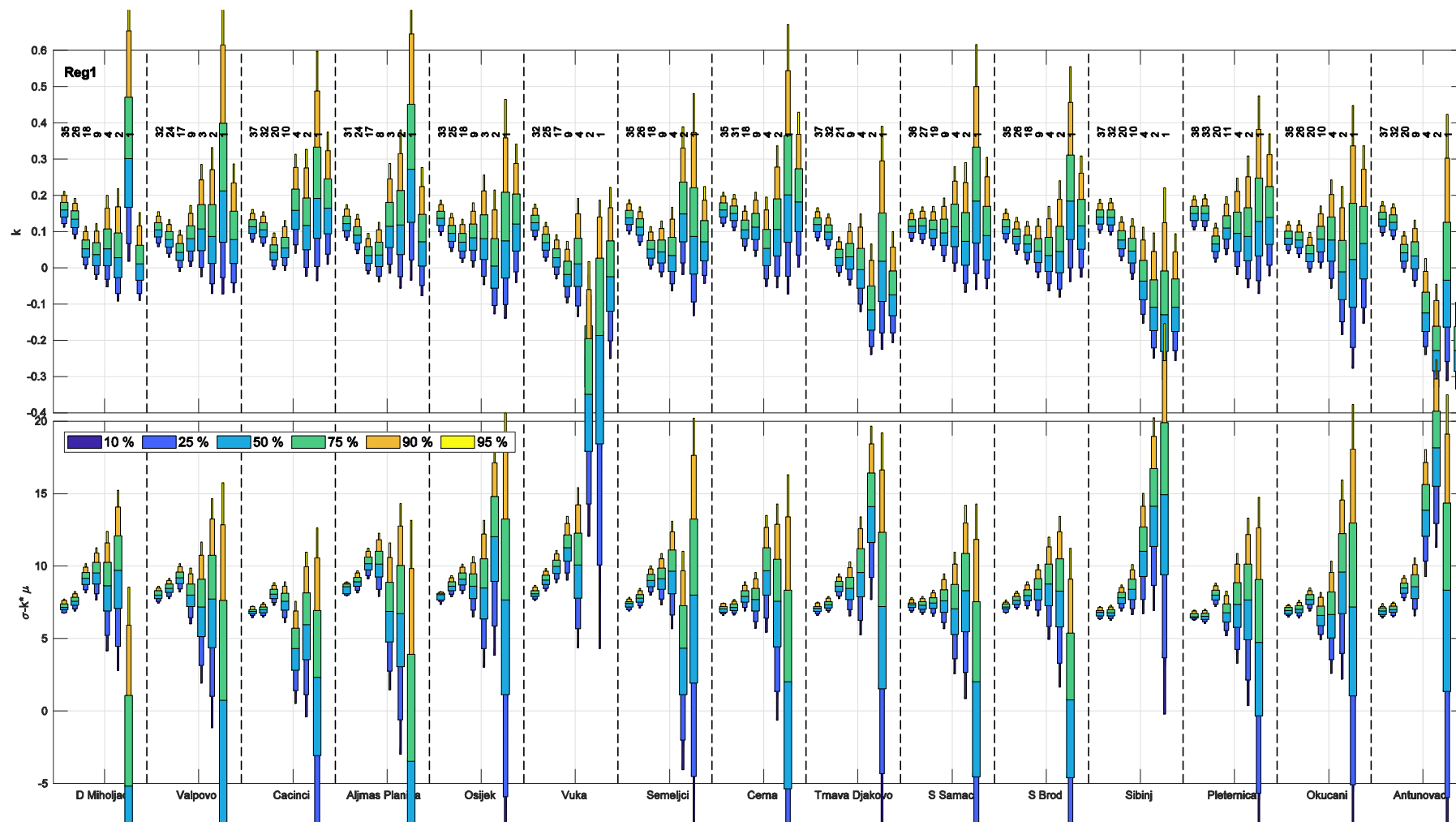
Slika C.7: Isto kao i slika C.6, samo za prametar skale (σ) opće razdiobe ekstrema.



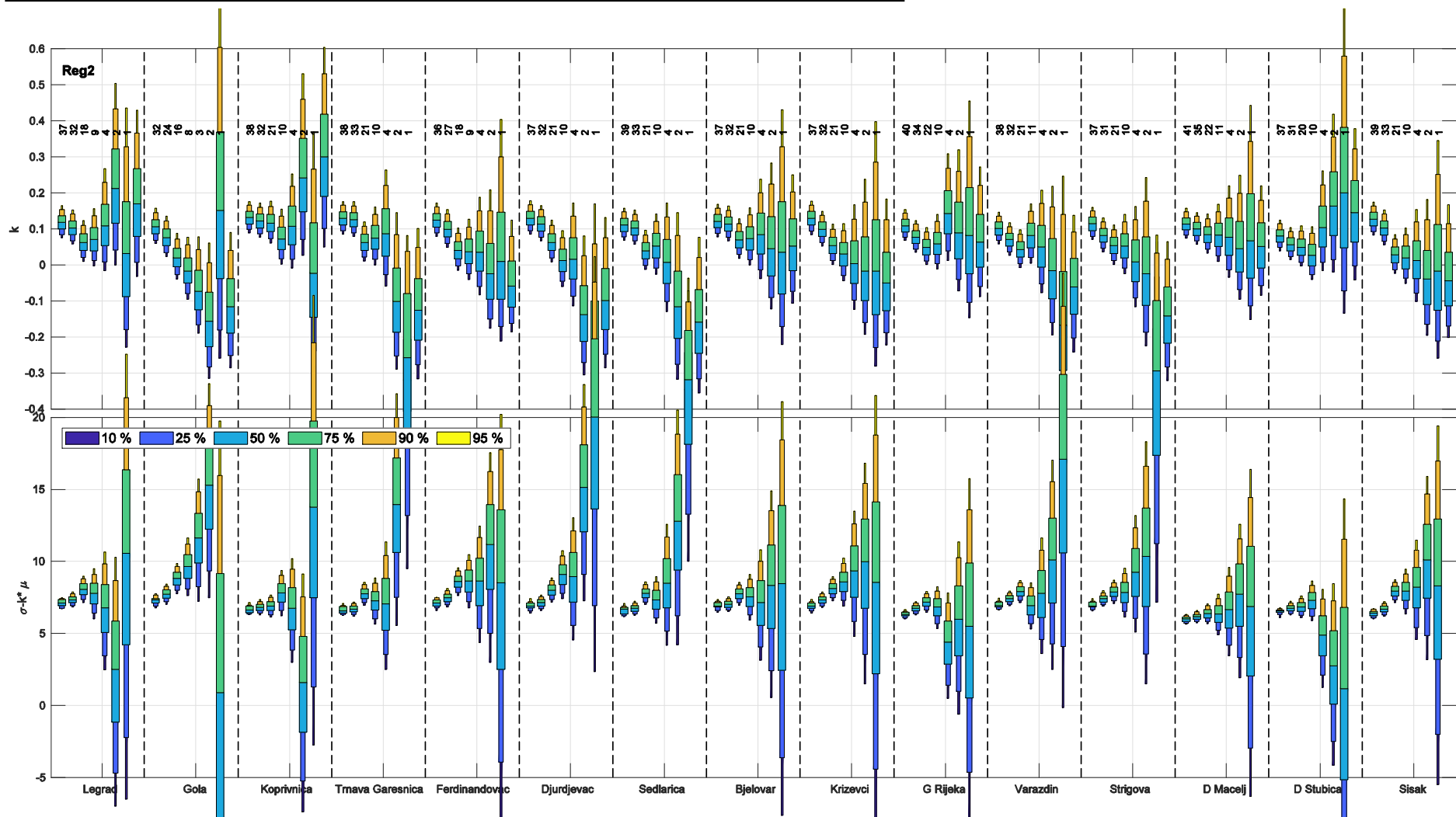
Slika C.8: Isto kao i slika C.6, samo za parametar lokacije (x_0) opće razdiobe ekstrema.



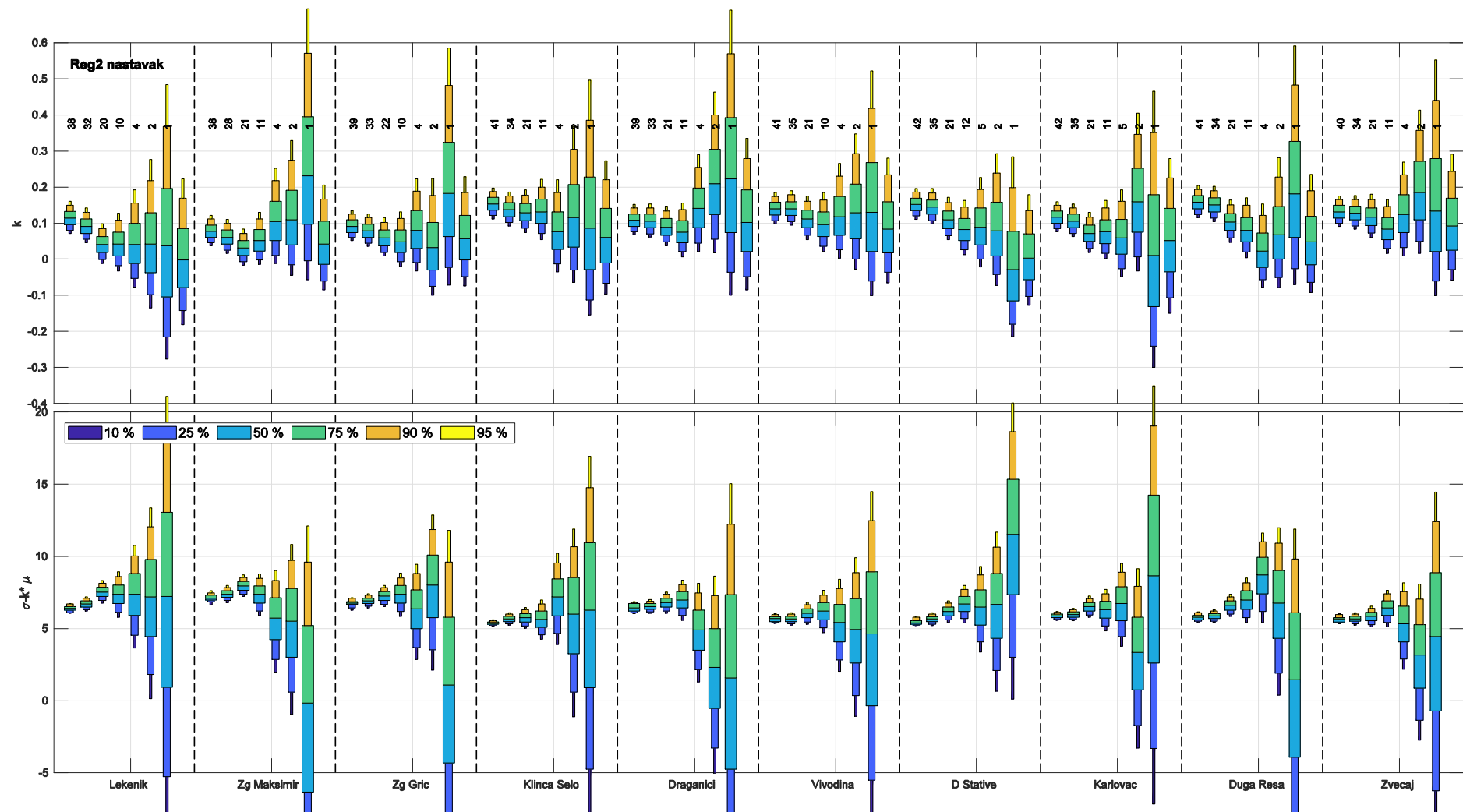
Slika C.9: Procjene očekivanih trajanja sušnih razdoblja za različite povratne periode ($T = 5, 10, 25, 50$ i 100 godina) procijenjene pomoću opće razdiobe ekstrema, usrednjene po regijama.



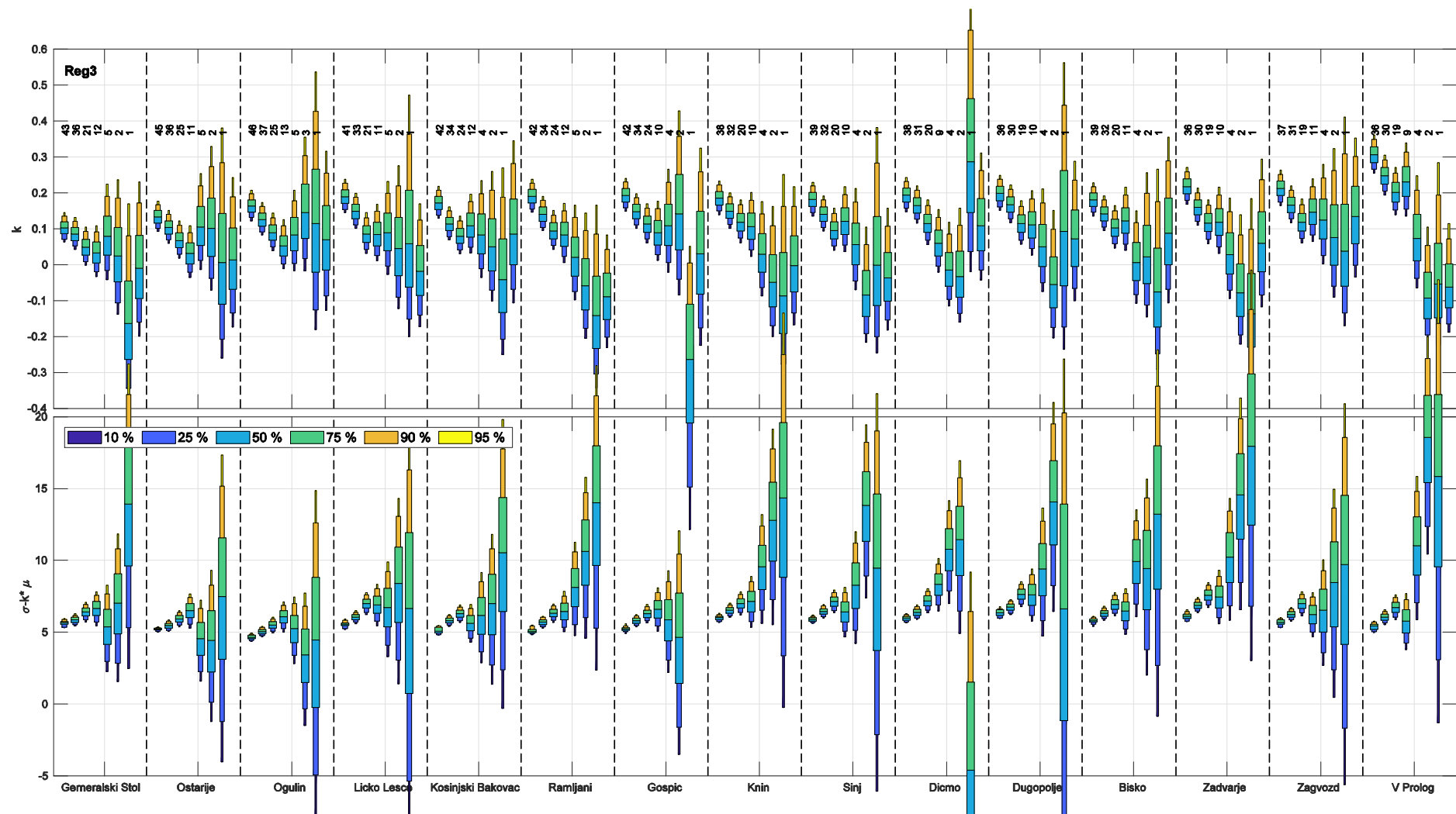
Slika C.10: Procjena parametra oblika, k , razdiobe zGP (gornji red) i razlika $\sigma - k\mu$ (donji red) za različite odabire pragova (percentil 10, 25, 50, 75, 90, 95 i 98; s lijeva na desno) na pojedinoj postaji unutar regije 1. Procijenjene vrijednosti su prikazane pomoću razdiobe percentila dobivenih iz pojedinačnih posteriornih razdiobi. Za parametar k prikazane su i procjene dobivene primjenom razdiobe GEV (zadnji stupac kod pojedine postaje).



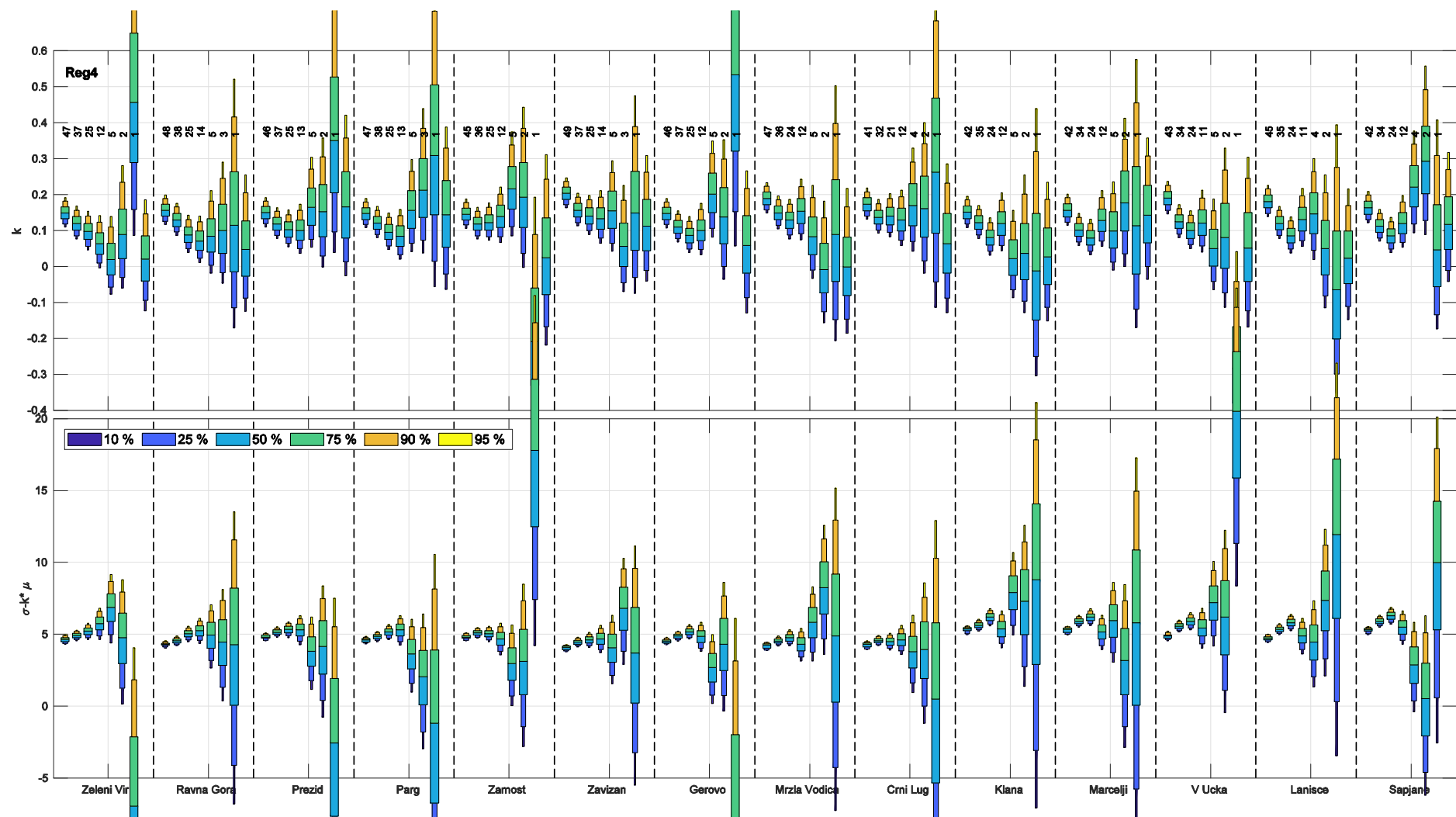
Slika C.11a: Isto kao i slika C.10 samo za prvih 15 postaja regije 2.



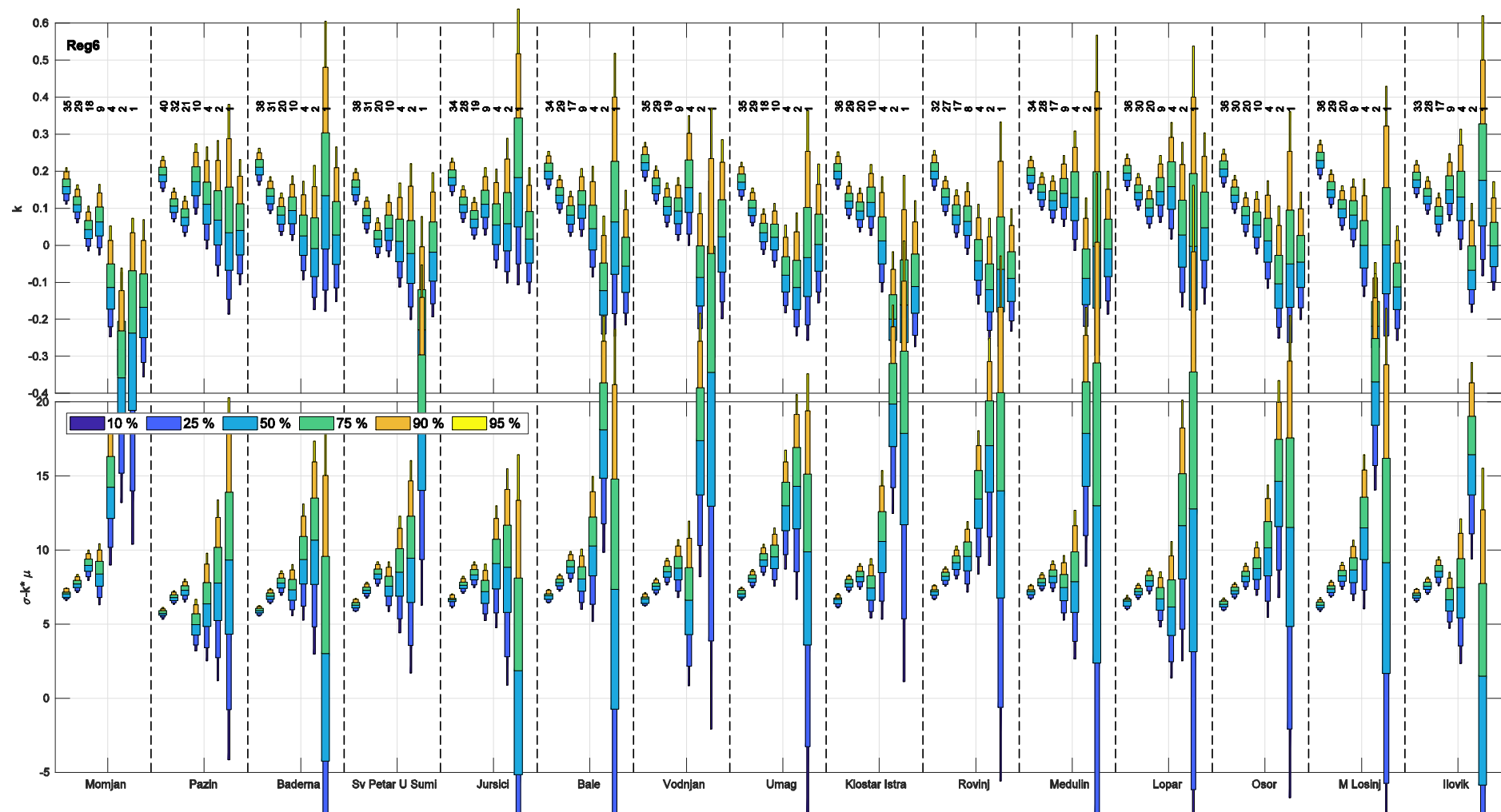
Slika C.11b: Nastavak slike C.11a, za preostalih 10 postaja regije 2.



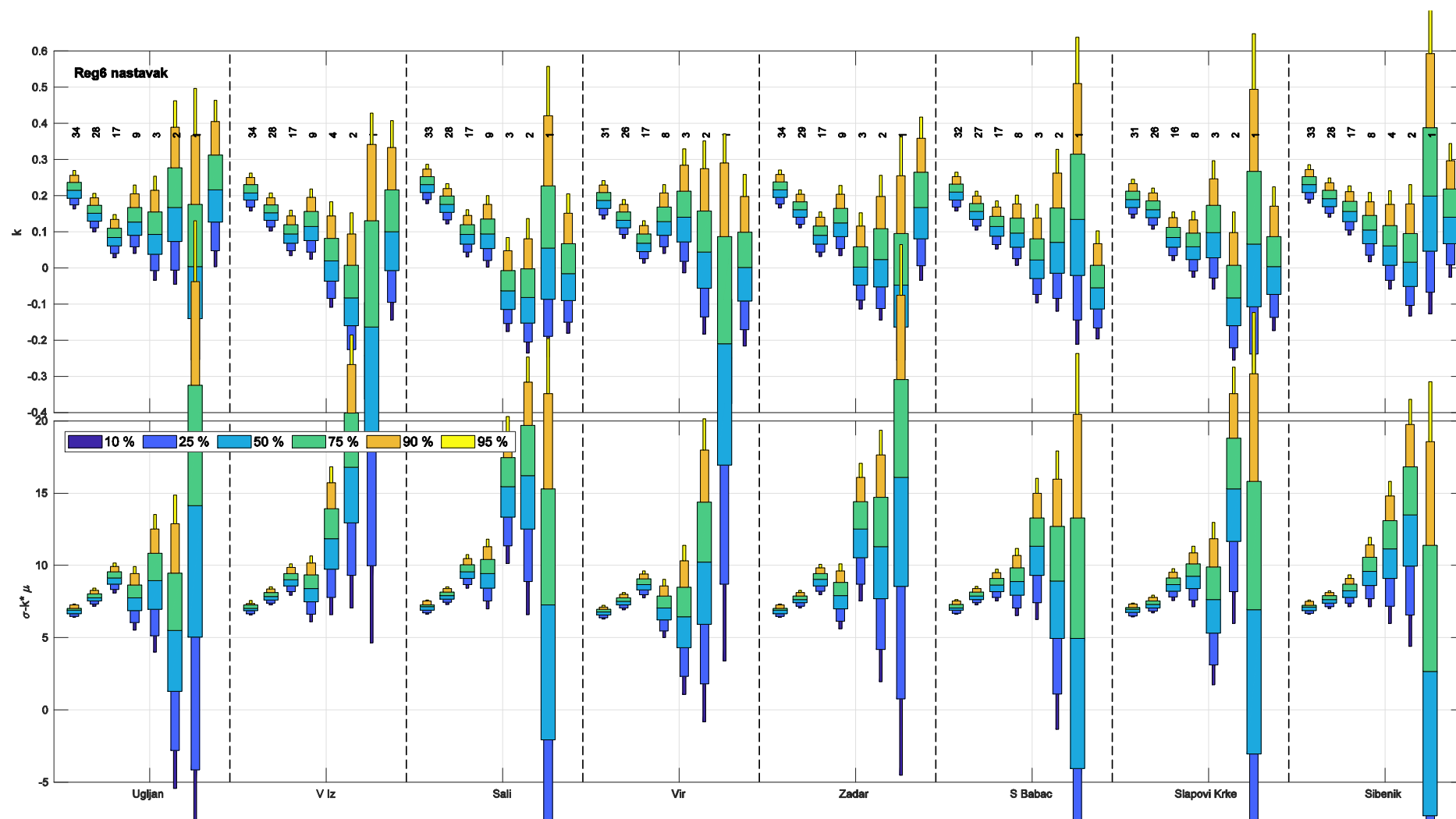
Slika C.12: Isto kao i slika C.10 samo za regiju 3.



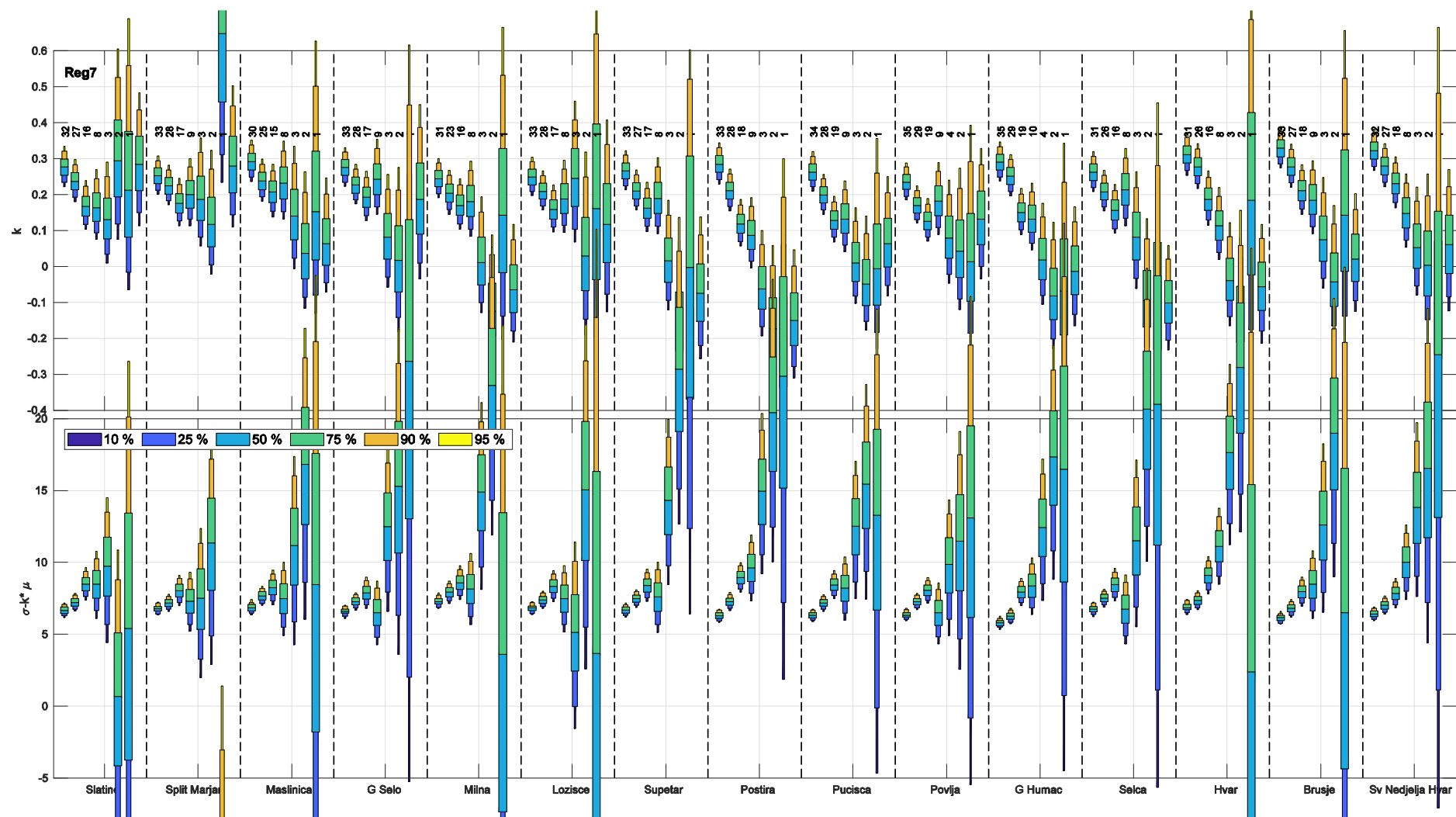
Slika C.13: Isto kao i slika C.10 samo za regiju 4.



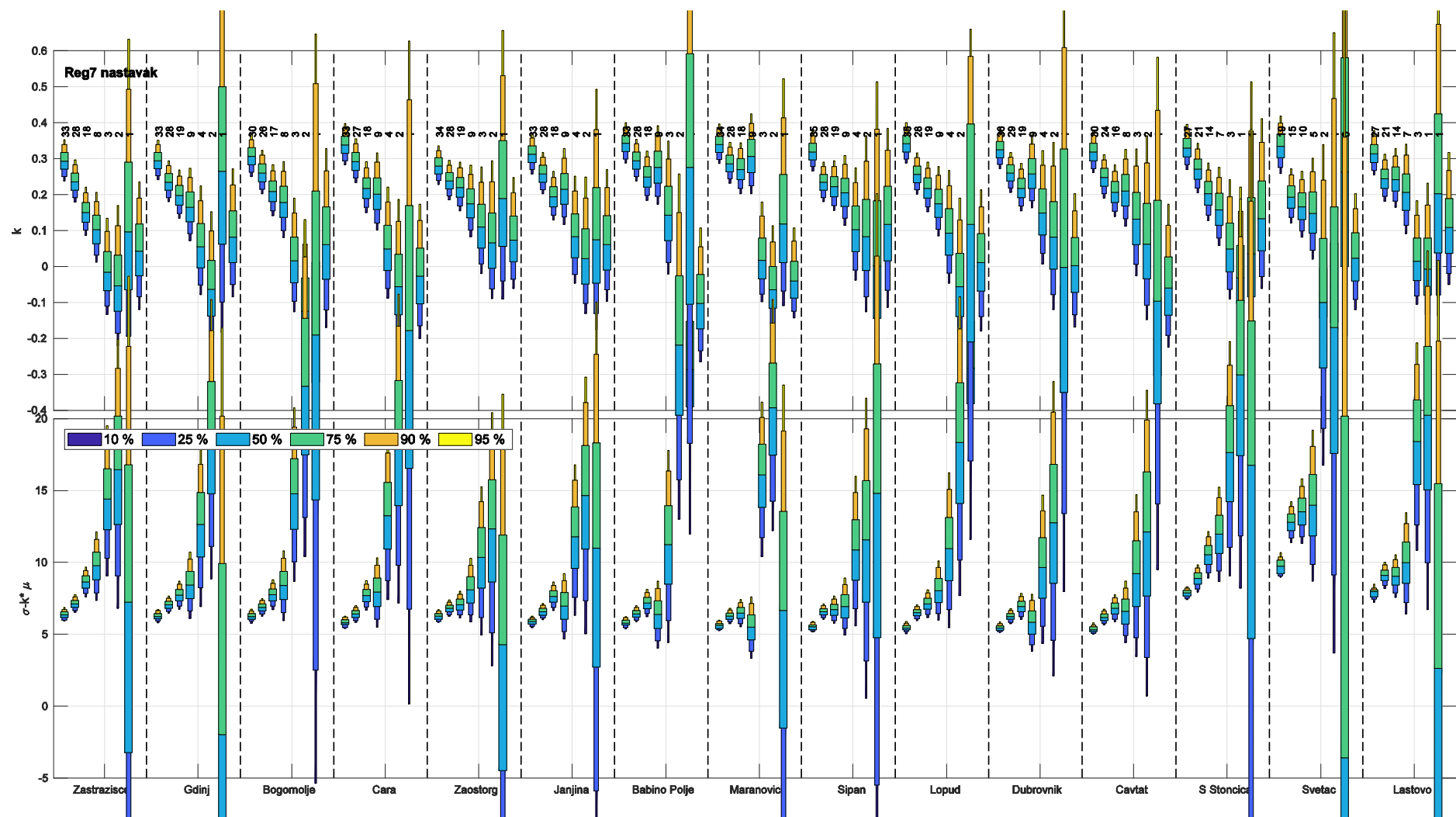
Slika C.14a: Isto kao i slika C.10 samo za prvih 15 postaja regije 6.



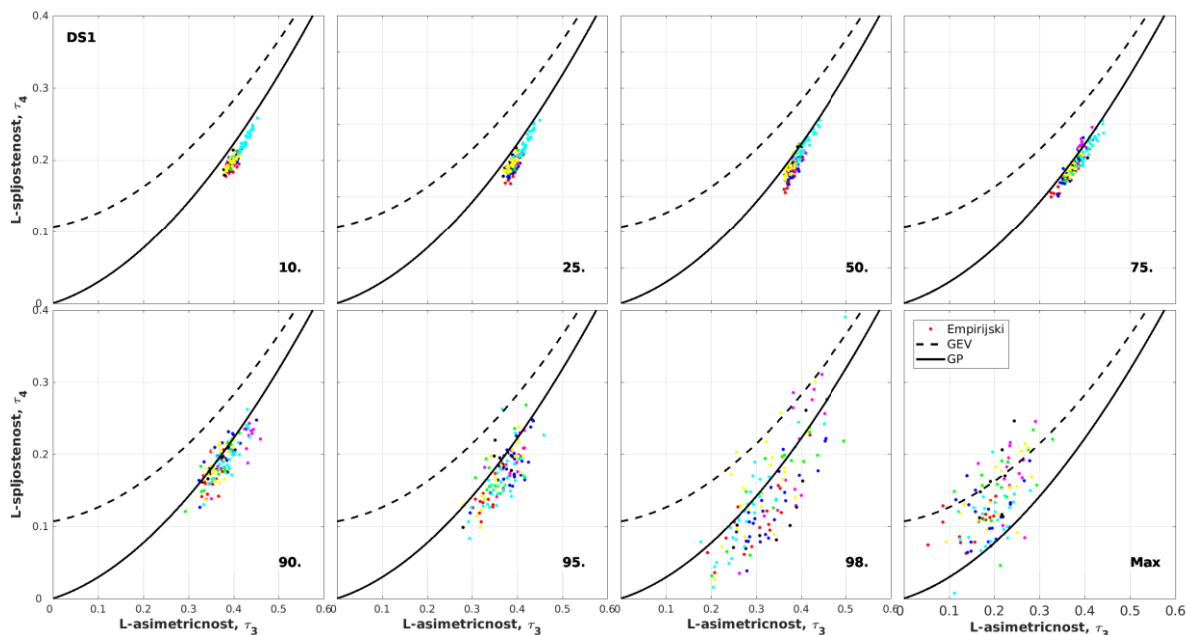
Slika C.14b: Nastavak slike C.14a, za preostalih 8 postaja regije 6.



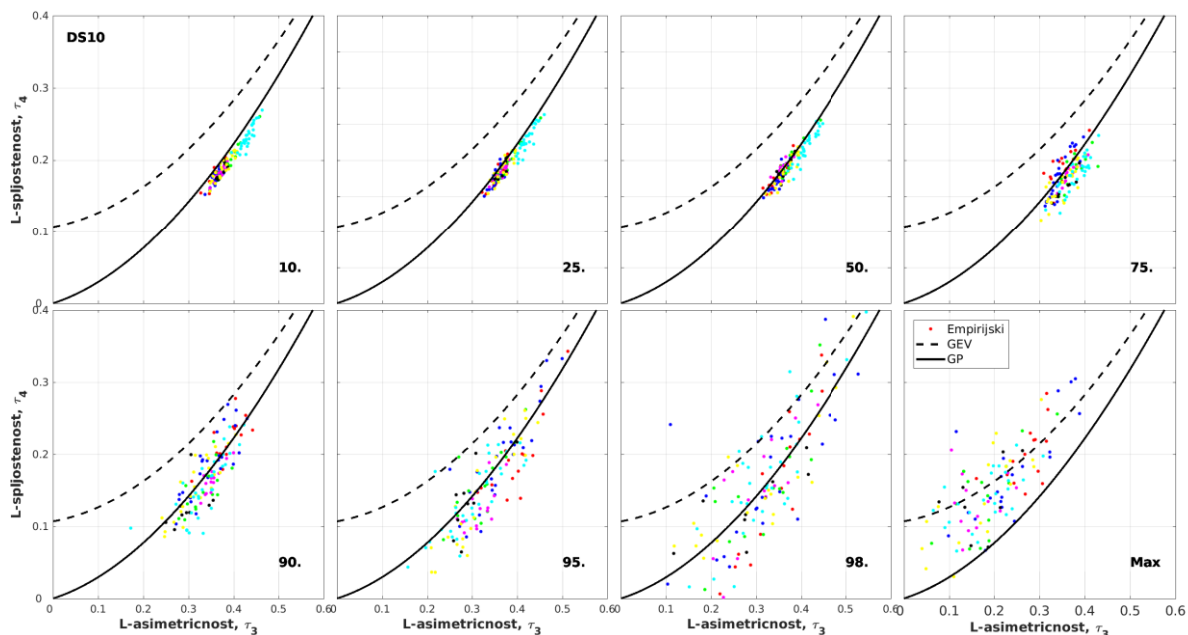
Slika C.15a: Isto kao i slika C.10 samo za prvih 15 postaja regije 7.



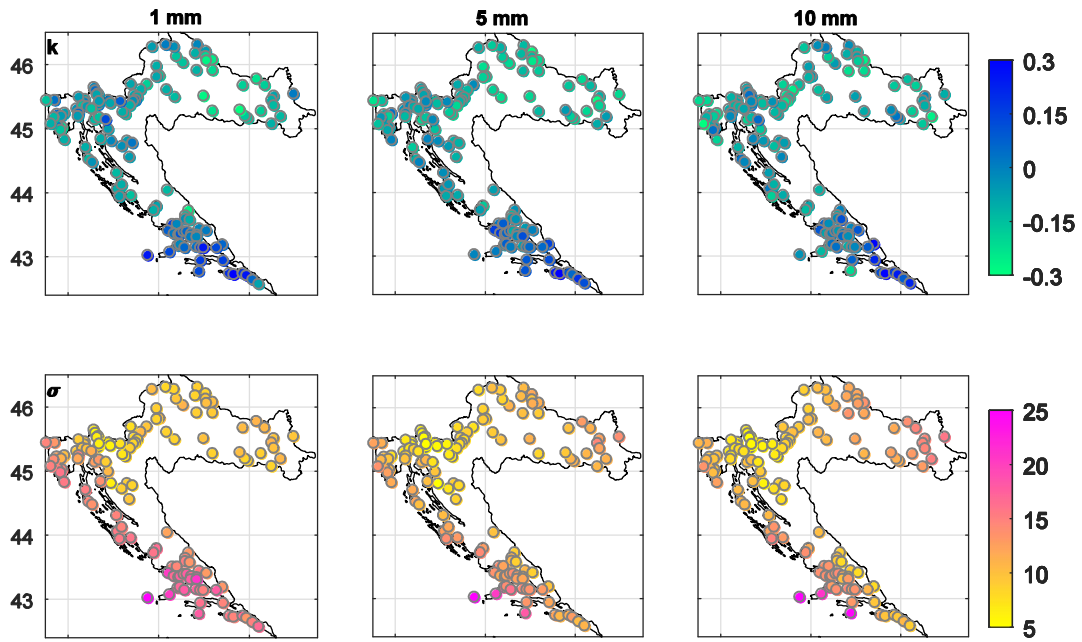
Slika C.15b: Nastavak slike C.15a, za preostalih 15 postaja regije 7.



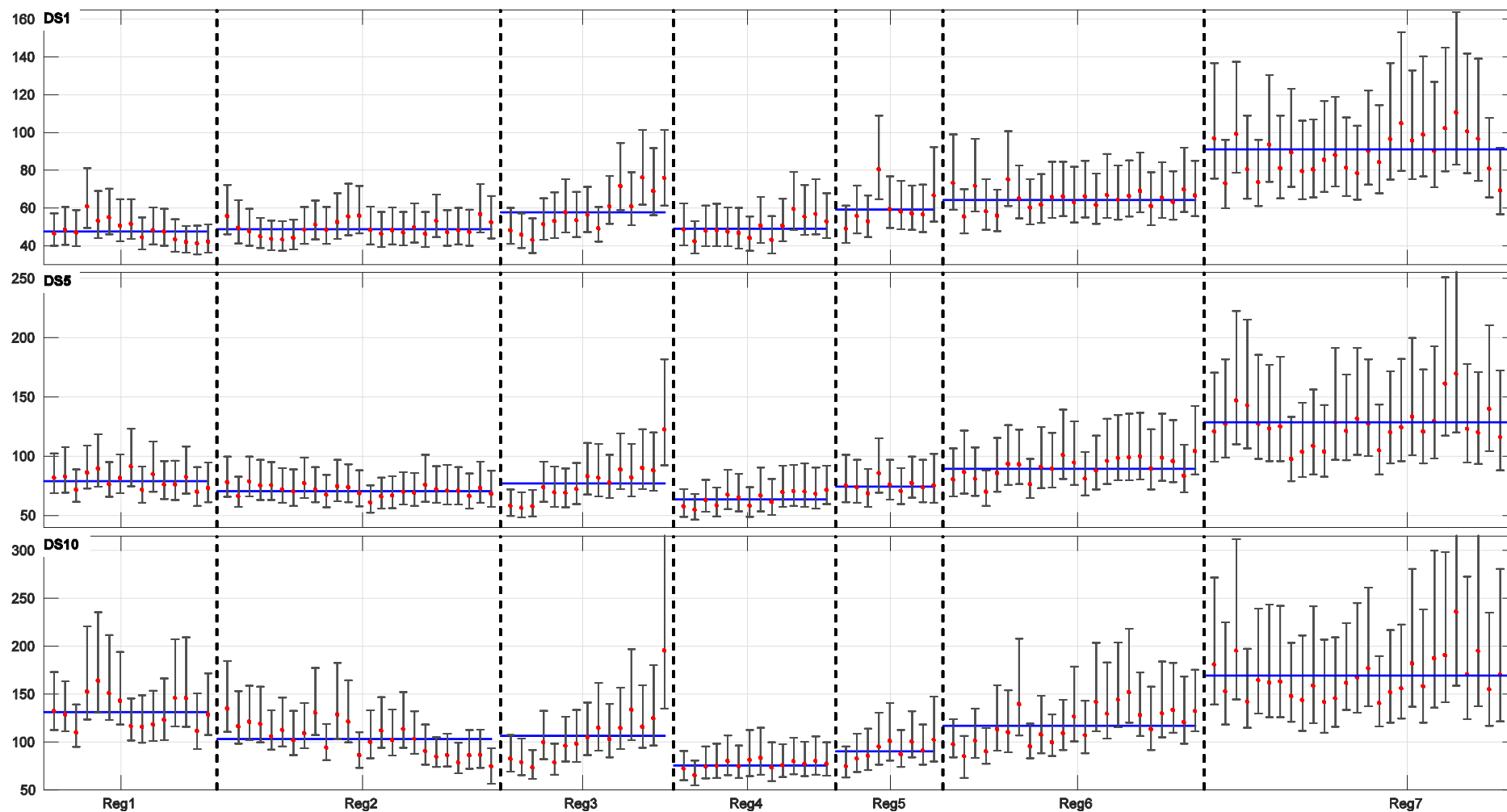
Slika C.16: Dijagram omjera L–momenata za kategoriju sušnih razdoblja kategorije DS1. Točkicama su označeni procijenjeni L–momenti iz nizova premašaja različitih pragova (percentili 10., 25., 50., 75., 90. i 95.) za 131 postaju. Na zadnjem panelu prikazani su empirijski L–momenti dobiveni iz uzorka godišnjih maksimuma sušnih razdoblja DS1. Krivuljama su naznačeni pripadni omjeri za teorijske razdiobe GEV (crtkana) i GP (puna), a različitim bojama točkica razdvojene su postaje pojedine regije (Reg1 – crvena, Reg2 – tamno plava, Reg3 – zelena, Reg4 – ružičasta, Reg5 – crna, Reg6 – žuta, Reg7 – svijetlo plava).



Slika C.17: Isto kao na slici C.16 samo za sušna razdoblja kategorije DS10.



Slika C.18: Prostorna raspodjela parametra oblika (k) i skale (σ) zaokružene opće Paretove razdiobe primijenjene na nizove sušnih razdoblja trajanja većih od pripadnog 75. percentila na 131 postaji. Prikazane vrijednosti odnose se na odgovarajuće tjeme pripadnih posteriornih razdioba pojedinog parametra.

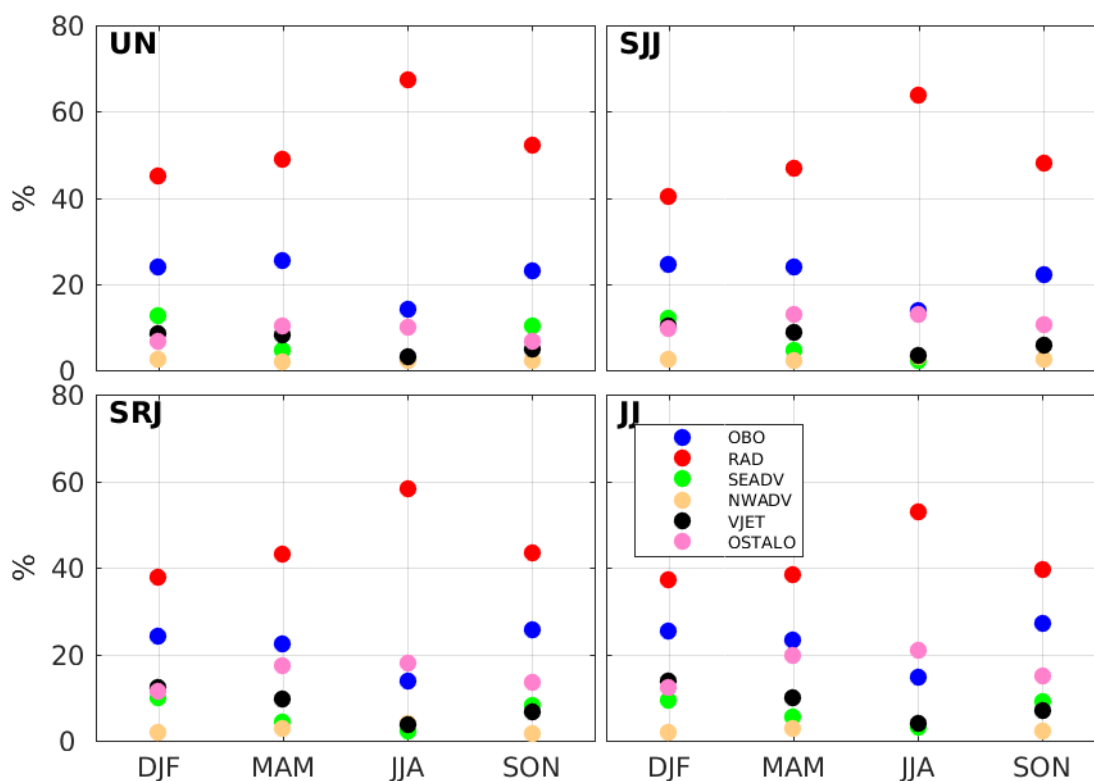


Slika C.19: Očekivana trajanja sušnih razdoblja (DS1, DS5 i DS10; redci) za povratni period 50 godina dobivene primjenom zaokružene opće Paretove razdiobe na nizove sušnih razdoblja trajanja većih od pripadnog 75. percentila. Crvene točke označavaju medijan pripadnih posteriora povratnih razdoblja, a sive linije označavaju 95–postotne intervale povjerenja dobivene iz 2.5 i 97.5 percentila pripadnih posteriora.

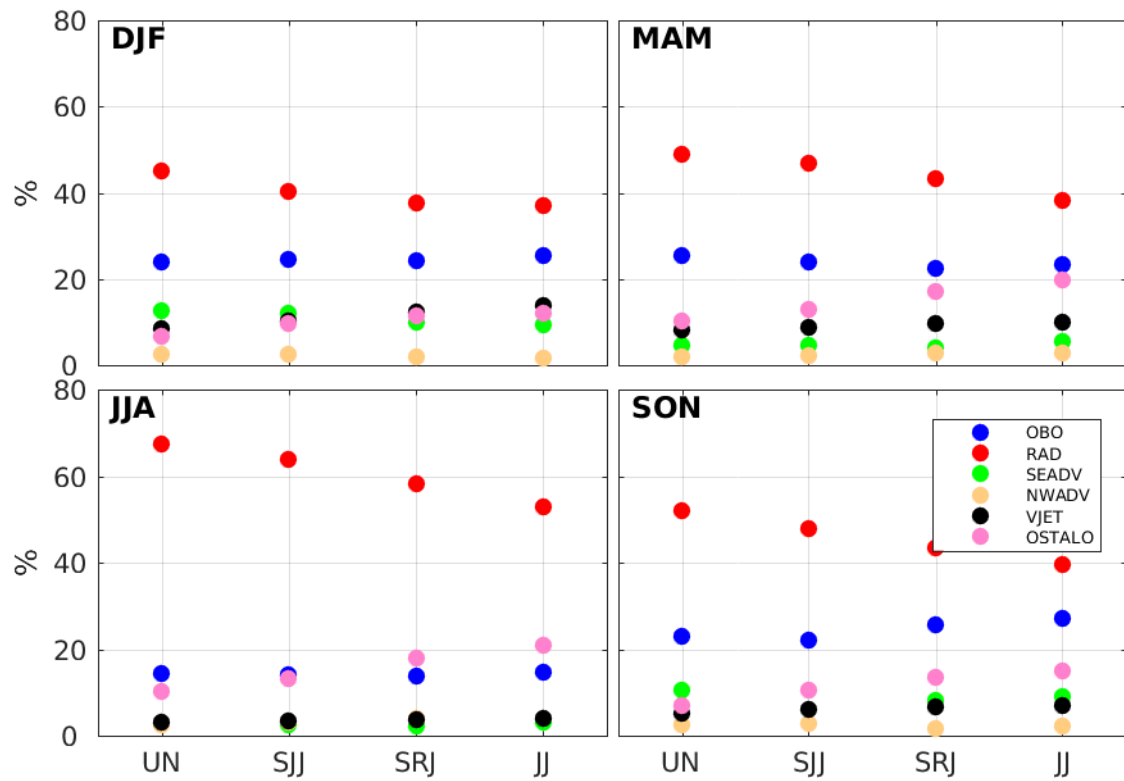
C.1. Prikaz vremenskih tipova na području Hrvatske

Kako bi dobili detaljniji meteorološki osvrt u raspodjelu sušnih razdoblja, analizirani su prevladavajući tipovi vremena, dostupni za kontinentalnu Hrvatsku te za sjeverni Jadran (Istra i sjeverno primorje), srednji Jadran (dalmatinsko područje) i južni Jadran. Tipovi vremena za navedena područja određena su u Državnom hidrometeorološkom zavodu (DHMZ) za razdoblje 1971. – 2000. (kontinentalna Hrvatska i sjeverni Jadran) odnosno za 1981. – 2000. (srednji Jadran) i 1991. – 2000. (južni Jadran). Na žalost, u narednom periodu došlo je do prekida redovitog određivanja vremenskih tipova u DHMZ-u, no s vremenom se ta aktivnost ponovno uspostavila uključivši i retrogradno određivanje vremenskih tipova. U trenutku pisanja ovog rada dostupni podaci o tipovima vremena obuhvaćaju i novije razdoblje 2011. – 2018. Međutim, treba naglasiti kako su vremenski tipovi u Hrvatskoj klasificirani prema tzv. Pojinoj tipizaciji (Zaninović i sur. 2008) u kojoj je pridruživanje određenog tipa vremena razdiobi prizemnog polja tlaka subjektivno i uvelike ovisi o meteorologu koji određuje kategoriju tipa vremena. Imajući u vidu da su u starijem i novijem razdoblju različiti stručnjaci određivali tipove smatramo da je potreban određeni oprez prilikom korištenja ta dva niza podataka u združenom obliku, a osobito za potrebe donošenja relevantnih klimatoloških zaključaka (na primjer, za detektiranje klimatskih promjena). Kako vremenski tipovi nisu glavna tema ove dizertacije, ostavljamo detaljnije usklađivanje podataka o tipovima vremena za buduća istraživanja. Ovdje nas zanima osnovna klimatologija prevladavajućih tipova vremena u Hrvatskoj za koju je dovoljan niz podataka iz ranijeg razdoblja za koji možemo pretpostaviti da je homogen. Tipovi vremena određeni su na osnovi prizemne razdiobe tlaka zraka na sinoptičkim kartama u dnevnim terminima (06 ili 12 UTC), a svi opisi tipova vremena mogu se pronaći u Zaninović i sur. (2008). Osim toga, u radovima Lončar i Bajić (1994) i Lončar i Vučetić (2003) provedena je osnovna statistička analiza vremenskih tipova za kontinentalnu Hrvatsku (za razdoblje 1971. – 1990.) i područje sjevernog Jadrana (za razdoblje 1971. – 2000.). Ta analiza je ovdje također uključena i proširena uključivanjem srednjeg i južnog Jadrana (i produljenjem niza za kontinentalnu regiju). Sedam regija koje koristimo za analizu sušnih razdoblja uključene su u ove četiri regije na sljedeći način: kontinentalna unutrašnjost (KONT) sadrži Reg1 i Reg2; sjeverni Jadran (SJJ) Reg5 i Reg6; središnji Jadran (SRJ) Reg3 te dio Reg7; južni Jadran (JJ) sadrži veći dio Reg7. Regija 4 nalazi se na prijelazu KONT i SJJ. Kako bi se analiza prevladavajućih tipova vremena mogla provesti što preglednije, najčešće se pojedinačni tipovi vremena

svrstavaju u posebne režime. Ovdje su preuzeti podaci DHMZ-a koji su klasificirani prema Lončar i Bajić (1994) koje su koristile sljedećih pet grupa tipova vremena prema istom ili sličnom utjecaju na vrijeme: oborinski režim (OBO), radijacijski režim (RAD), advekcija iz jugoistočne Europe (SEADV), advekcija iz sjeverozapadne Europe (NWADV), vjetrovni režim (VJET), greben visokog tlaka (GA) te ostali tipovi. Na slici C.20 prikazane su regionalne učestalosti pojedinih vremenskih režima po sezonama. Sličan prikaz nalazi se na slici C.21, ali se odnosi na sezonske učestalosti po regijama.



Slika C.20: Relativne čestine pojedinih vremenskih režima (OBO – oborinski, RAD – radijacijski, SEADV – jugoistočna advekcija, NWADV – sjeverozapadna advekcija, VJET – vjetrovni i OSTALO – ostali tipovi) za sezone (DJF – zima, MAM – proljeće, JJA – ljeto, SON – jesen) po regijama (UN – unutrašnjost, SJJ – sjeverni, SRJ – srednji i JJ – južni Jadran).



Slika C.21: Isto kao na slici C.20, samo po sezonama.

Životopis

Ksenija Cindrić Kalin rođena je 3. kolovoza 1977. u Slavonskom Brodu. Srednjoškolsko obrazovanje završila je u Općoj gimnaziji u Županji, a diplomski studij 2004. godine na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu na Geofizičkom odsjeku, smjer Meteorologija s fizičkom oceanografijom. Iste godine zaposlena je u Državnom hidrometeorološkom zavodu, u Službi za klimatološka istraživanja i primijenjenu klimatologiju Sektora za meteorološka istraživanja i razvoj. Godine 2010. na PMF-u je stekla stupanj magistra znanosti obranivši rad na temu „Prostorno-vremenska analiza sušnih razdoblja u Hrvatskoj“. Od 2015. do 2019. godine bila je voditeljica Odjela za istraživanje klime i biometeorologiju, a trenutno radi kao voditeljica Odjela za razvoj klimatskih podloga i aplikacije u Službi za klimatologiju. Njezino područje istraživanja obuhvaća klimatsku varijabilnost, opažanje klimatskih promjena i praćenje oborinskih prilika. Ponajviše se bavi statističkom analizom klimatskih ekstrema s naglaskom na sušna razdoblja i intenzivne oborine. Rezultate istraživanja objavila je u većem broju znanstvenih i stručnih radova, a primjenjuje ih i u studijama utjecaja vremena i klime na okoliš u svrhu prilagođavanja društva i gospodarstva na ekstremne meteorološke uvjete. Sudjelovala je u nizu znanstvenih i stručnih skupova i radionica. Bila je suradnik u nekoliko domaćih i međunarodnih istraživačkih projekata (*Klima jadranske regije u njenom globalnom kontekstu – CARE; Centar za praćenje suše za jugoistočnu Europu – DMCSEE; Europski okvir za jačanje otpornosti kritične infrastrukture na klimatske promjene – EU-CIRCLE*), a od 2017. do 2019. godine koordinirala je aktivnosti DHMZ-a na projektu *Rizici od suše u Dunavskoj regiji (DriDanube)* koji se odvijao u sklopu programa međuregionalne suradnje Interreg Dunav. U sklopu predsjedanja Hrvatske Vijećem Europe u prvoj polovici 2020. godine predsjedala je Radnom skupinom za međunarodna okolišna pitanja za područje dezertifikacije. Članica je Hrvatskog meteorološkog društva i Hrvatskog agrometeorološkog društva.

Popis radova

Knjige i poglavlja u knjigama

- Zaninović, K., Gajić-Čapka, M., Perčec Tadić, M., Vučetić, M., Milković, J., Bajić, A., Cindrić, K., Cvitan, L., Katušin, Z., Kaučić, D., Likso, T., Lončar, E., Lončar, Ž., Mihajlović, D., Pandžić, K., Patarčić, M., Srnec, L., Vučetić, V. (2008) *Klimatski atlas Hrvatske / Climate atlas of Croatia 1961-1990., 1971-2000.* Državni hidrometeorološki zavod, Zagreb.
- Cindrić Kalin, K., Cvitan, L., Gajić-Čapka, M., Güttler, I., Perčec Tadić, M., Srnec, L. & Zaninović, K. (2019) Klima i klimatske promjene. U *Primijenjena znanstvena istraživanja u Državnom hidrometeorološkom zavodu: u povodu 50 godina istraživanja i 70 godina osnivanja DHMZ-a.* Ivančan-Picek, B. (ur.). Zagreb: Državni hidrometeorološki zavod, str. 49-74.
- Gajić-Čapka, M. & Cindrić Kalin, K. (2019) Vodno gospodarstvo - Meteorološki dio. U *Primijenjena znanstvena istraživanja u Državnom hidrometeorološkom zavodu: u povodu 50 godina istraživanja i 70 godina osnivanja DHMZ-a.* Ivančan-Picek, B. (ur.). Zagreb: Državni hidrometeorološki zavod, str. 184-198.
- Pilaš, I., Medak, J., Vrbek, B., Medved, I., Cindrić, K., Gajić-Čapka, M., Perčec Tadić, M., Patarčić, M., Branković, Č., Güttler, I. (2016) Climate variability, soil and forest ecosystem diversity of Dinaric Mountains. U *Sustainable Development in Mountain Regions: Southeastern Europe.* 2nd Edition, Zhelezov G. (ur.). Switzerland: Springer International Publishing, str. 113-140
- Kalin, L., Cindrić, K., Mihajlović, D., Matjačić, B. Possibilities on drought forecasting in Croatia. U *Drought: Research and Science-Policy Interfacing / Andreu, Joaquin A., Solera, A., Paredes-Arquiola, J., Har-Monteagudo, D., Van Lanen, H. A. J. (ur.).* Leiden: CRC Press/Balkema, str. 267-271.

Znanstveni radovi u časopisima indeksiranim u bazi *Current Contents*

- Tramblay, Y., Koutroulis, A., Luis Samaniego L., Vicente-Serrano, S. M., Volaire F., Boone A., Le Page, M., Carmen Llasat, M., Albergel, C., Burak, S., Cailleret, M., Cindrić Kalin, K., Davi, H., Dupuy, J., Greve, P., Grillakis, M., Hanich, L., Jarlan, L., Martin-StPaul, N., Martínez-Vilalta, J., Mouillot, F., Pulido-Velazquez, D., Quintana-Seguí, P., Renard, D., Turco, M., Türkeş, M., Trigo, T., Vidal J-P., Vilagrosa A., Zribi, M. & Polcher, J. (2020) Challenges for drought assessment in the Mediterranean region under future climate scenarios. *Earth-Science Reviews*, 210, 103348. doi: <https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2020.103348>.
- Cindrić Kalin, K., Juras, J. & Pasarić, Z. (2019) On precipitation monitoring with theoretical statistical distributions. *Theoretical and applied climatology*, 136, 145–156. doi:10.1007/s00704-018-2477-6 (međunarodna recenzija)

- Pasarić, Z. & Cindrić, K. (2019) Generalized Pareto distribution: Impact of rounding on parameter estimation. *Theoretical and Applied Climatology*, 136, 417–427. <https://doi.org/10.1007/s00704-018-2494-5>.
- Cindrić, K. & Pasarić, Z. (2018) Modelling Dry Spells by Extreme Value Distribution with Bayesian Inference. *Pure and Applied Geophysics*, 175, 3891–3908. doi: <https://doi.org/10.1007/s00024-018-2007-6>.
- Gajić-Čapka, M., Güttler, I., Cindrić, K. & Branković, Č. (2017) Observed and simulated climate and climate change in the lower Neretva river basin. *Journal of Water and Climate Change*, 9, 1, 124–136. doi:10.2166/wcc.2017.034.
- Cindrić, K., Telišman-Prtenjak, M., Herceg-Bulić, I., Mihajlović, D. & Pasarić, Z. (2016) Analysis of the extraordinary 2011/2012 drought in Croatia. *Theoretical and applied climatology*, 123, 3, 503–522. doi:10.1007/s00704-014-1368-8.
- Gajić-Čapka, M., Cindrić, K. & Pasarić, Z. (2015) Trends in precipitation indices in Croatia, 1961–2010. *Theoretical and applied climatology*, 121, 1/2, 167–177. doi:10.1007/s00704-014-1217-9.
- Patarčić, M., Gajić-Čapka, M., Cindrić, K. & Branković, Č. (2014) Recent and near-future changes in precipitation-extreme indices over the Croatian Adriatic coast. *Climate research*, 61, 2, 157–176 doi:10.3354/cr01250.
- Zahradniček, P., Rasol, D., Cindrić, K. & Štěpánek, P. (2014) Homogenization of monthly precipitation time series in Croatia. *International Journal of Climatology*, 34, 3671–3682. doi:10.1002/joc.3934.
- Cindrić, K., Pasarić, Z. & Gajić-Čapka, M. (2010) Spatial and temporal analysis of dry spells in Croatia. *Theoretical and Applied Climatology*, 102, 1-2, 171–184. doi:10.1007/s00704-010-0250-6.

Znanstveni radovi u ostalim časopisima

- Jakubínský, J., Bláhová, M., Bartošová, L., Steinerová, K., Bale, K., Dížková, P., Semerádová, D., Alexandru, D., Bardarska, G., Bokal, S. *et al.* (2019) Repository of Drought Event Impacts Across the Danube Catchment Countries Between 1981 and 2016 Using Publicly Available Sources. *Acta Universitatis Agriculturae et Silviculturae Mendelianae Brunensis*, 67, 925–938 .
- Perčec Tadić, M., Gajić-Čapka, M., Zaninović, K. & Cindrić, K. (2014) Drought vulnerability in Croatia. *Agriculturae Conspectus Scientificus*, 79: 31–39.
- Cindrić, K., Nimac, I., Gajić-Čapka, M. & Rubinić, J. (2014) Vremenske promjene kratkotrajnih jakih oborina u razdoblju 1955.–2010. za Split i Varaždin. *Hrvatske vode: časopis za vodno gospodarstvo*, 22, 89, 239–250.
- Gajić-Čapka, M. & Cindrić, K. (2011) Secular trends in indices of precipitation extremes in Croatia, 1901–2008. *Geofizika*, 28, 2, 293–312.
- Juras, J. & Cindrić, K. (2009) Analiza količina oborine unutar različitih vremenskih intervala. *Hrvatske vode: časopis za vodno gospodarstvo*, 17, 69, 213–220.

Juras, J. & Cindrić, K. (2009) Prostorna razdioba SPI na području Jadrana za razdoblje od srpnja do rujna 2008. *Jadranska meteorologija*, 13, 54–58.

Stručni radovi

Oskoruš, D., Vujnović, T., Perčec Tadić, M. Cindrić Kalin, K., Gašparac, G., Horvath, K., Stanešić, A. (2019) Podrška Državnog hidrometeorološkog zavoda planskom upravljanju voda. *Hrvatska vodoprivreda*, 228, 29–34.

Ljubenković, I., Cindrić Kalin, K. (2016) Ocjena suše primjenom standardiziranog indeksa oborine i protoka te njihov odnos na primjeru Sinjskog polja. *Građevinar: časopis Hrvatskog saveza građevinskih inženjera*, 68, 2, 135–143. doi:10.14256/JCE.1337.2015.

Gajić-Čapka, M. & Cindrić, K. (2014) Pojava oborinskih ekstrema s osvrtom na poplave. *Hrvatska vodoprivreda*, XXII, 96–99.

Kisić, I., Husnjak, S., Gajić-Čapka, M., Cindrić, K., Bilandžija, D. & Prekalj, B. (2013) Erozijska tla vjetrom u Čepić polju - uzroci, posljedice i mjere ublažavanja. *Hrvatske vode: časopis za vodno gospodarstvo*, 21 (2013), 83, 25–38.

Cindrić, K. & Kalin, L. (2012) Analiza mogućnosti prognoze suše na području Hrvatske pomoću standardiziranog oborinskog indeksa (SPI). *Hrvatske vode: časopis za vodno gospodarstvo*, 79/80, 43–50.

Cindrić, K. The statistical analysis of wet and dry spells in Croatia by binary DARMA (1, 1) model. *Hrvatski meteorološki časopis*, 41, 43–51.

Znanstveni radovi u zbornicima skupova

Mihalić Arbanas, S., Bernat Gazibara, S., Sečan, M., Damjanović, V., Oršanić, D., Penović, S., Krkač, M., Cindrić Kalin, K., Đomlija, P., Jagodnik, V. & Arbanas, Ž. (2019) Landslide risk management in Croatia: Current state. Proceedings of the 4th Regional Symposium on Landslides in the Adriatic-Balkan Region, Uljarević, M., Zekan, S., Salković, S., Ibrahimović, Dž. (ur.). Sarajevo: Geotechnical Society of Bosnia and Herzegovina, str. 243–250.

Bernat Gazibara, S., Cindrić Kalin, K., Erak, M., Krkač, M., Đomlija, P., Arbanas, Ž. & Mihalić Arbanas, S. (2019) Landslide hazard analysis in national-scale for landslide risk assessment in Croatia. Proceedings of the 4th Regional Symposium on Landslides in the Adriatic-Balkan Region, Uljarević, M., Zekan, S., Salković, S., Ibrahimović, Dž. (ur.). Sarajevo: Geotechnical Society of Bosnia and Herzegovina, str. 175–182.

Nimac, I., Cindrić Kalin, K., Perčec Tadić M. & Gajić-Čapka, M. (2015) Analiza maksimalnih trodnevnih količina oborine u Hrvatskoj. 6. hrvatska konferencija o vodama s međunarodnim sudjelovanjem: hrvatske vode na investicijskom valu. Zbornik radova, Opatija, 20.-23. svibnja 2015. Biondić, D., Holjević, D.(ur.). Zagreb: Hrvatske vode, str. 151–160.

- Rubinić, J., Cindrić Kalin, K., Nežić, M., Radišić, M. & Ružić, I. (2015) Ekstremena suša na izvorištima vodoopskrbe u slivu Mirne tijekom 2012. godine. 6. hrvatska konferencija o vodama s međunarodnim sudjelovanjem: hrvatske vode na investicijskom valu. Zbornik radova, Opatija, 20.-23. svibnja 2015. Biondić, D., Holjević, D. (ur.). Zagreb: Hrvatske vode, str. 171–180.
- Cindrić, K., Pasarić, Z. & Gajić-Čapka, M. (2013) Time trends in dry and wet spells in Croatia (1961-2010). Proceedings of Climate Change Impacts on Water Resources International Conference, Dimkić, M. (ur.). Beograd: Jaroslav Černi Institute for the Development of Water Resources, str. 216–219
- Gajić-Čapka, M., Cindrić, K., Kisić, I. & Bilandžija, D. (2013) Meteorološke prilike i erozija tla vjetrom u Čepić polju. Zbornik radova V. Konferencija Hrvatske platforme za smanjenje rizika od katastrofa, Perinić, J. (ur.). Zagreb: Državna uprava za zaštitu i spašavanje, str. 171–182.
- Cindrić, K., Juras, J., Gajić-Čapka, M. & Mihajlović, D. (2011) Analiza suše pomoću standardiziranog oborinskog indeksa. 5. hrvatska konferencija o vodama s međunarodnim sudjelovanjem: Hrvatske vode pred izazovom klimatskih promjena: zbornik radova, Biondić, D., Holjević, D., Tropan, Lj. (ur.). Zagreb: Hrvatske vode, str. 145–153
- Gajić-Čapka, M. & Cindrić, K. (2010) Trend and variability in heavy precipitation in Croatia. 2nd Regional Rainfall Conference of the Balkans: Regional Rainfall and Climate Change: proceedings, Beograd, Srbija.
- Desnica, U. V., Cindrić, K. & Marki, A. (2006) Applicability of METEONORM Computer Program for Quantitative Estimates of Solar Radiation in Croatia. Energy and The Environment 2006: proceedings – Energija i okoliš 2006: zbornik, Franković, B. (ur.). Rijeka: Hrvatski savez za sunčevu energiju, str. 1–2 .

Stručni radovi u zbornicima skupova

- Cindrić Kalin, K., Marinović, I., Pelajić, I., Špoler Čanić, K., Matjačić, B., Srnc, L. & Kalin, L. (2019) Rezultati projekta DriDanube za Hrvatsku. 7. hrvatska konferencija o vodama s međunarodnim sudjelovanjem „Hrvatske vode u zaštiti okoliša i prirode”. Zbornik radova, Biondić, D., Holjević, D., Vizner, M. (ur.). Zagreb: Grafički zavod Hrvatske d.o.o., str. 121–131.
- Rubinić, J., Cindrić Kalin, K., Radišić, M., Güttler, I. & Krvavica, N. (2019) Projekt RAINMAN - usporedba PTP krivulja ombrografskih postaja na pilot područjima Istre i Zagreb. 7. hrvatska konferencija o vodama s međunarodnim sudjelovanjem „Hrvatske vode u zaštiti okoliša i prirode”. Zbornik radova, Biondić, D., Holjević, D., Vizner, M. (ur.). Zagreb: Grafički zavod Hrvatske d.o.o., str. 101–110.
- Sokol Jurković, R., Nimac, I. & Cindrić Kalin, K. (2019) O metodi i problemima izrade krivulja intenziteta – trajanja – povratnog razdoblja. 7. hrvatska konferencija o vodama s međunarodnim sudjelovanjem „Hrvatske vode u zaštiti okoliša i prirode”. Zbornik radova, Biondić, D., Holjević, D., Vizner, M. (ur.). Zagreb: Grafički zavod Hrvatske d.o.o., str. 76–83.

- Cindrić Kalin, K., Špoler Čanić, K., Kalin, L., Moderc, A., Sušnik, A. & Gregorič, G. (2018) Razvoj strategije odgovora na sušu u sklopu projekta DriDanube. Zbornik radova, Holcinger, N. (ur.). Zagreb: Državna uprava za zaštitu i spašavanje, str. 38–43.
- Mihalić Arbanas, s. Bernat Gazibara, S., Cindrić Kalin, K., Krkač, M., Sečanj, M., Domlija, P. & Arbanas, Ž. (2018) Analize hazarda i rizika klizanja: iskustva u svijetu i u Hrvatskoj tijekom posljednjih 20 godina. Zbornik radova, Holcinger, N. (ur.). Zagreb: Državna uprava za zaštitu i spašavanje, str. 180–187.
- Ivančan-Picek, B., Bajić, A., Cindrić Kalin, K., Güttler, I., Horvath, K. & Perčec Tadić, M. (2016) Integriranje upozorenja o vremenskim ekstremima u upravljanju rizikom od katastrofa. 9. Međunarodna znanstveno-stručna konferencija dani kriznog upravljanja. Zbornik radova, Toth I. (ur.). Split: Veleučilište Velika Gorica, str. 193–197.
- Patarčić, M., Gajić-Čapka, M., Cindrić, K. & Branković, Č. (2013) Promjene oborinskih ekstrema na Jadranu u bližoj budućnosti. Zbornik radova s V. Konferencije Hrvatske platforme za smanjenje rizika od katastrofa, Perinić, J. (ur.), Zagreb: Državna uprava za zaštitu i spašavanje, str. 67–74.
- Cindrić, K., Mihajlović, D., Juras, J. & Matjačić, B. (2012) Drought monitoring system in Croatia. Different approaches to drought monitoring - towards EuroGEOSS interoperability model. Kajfež-Bogataj, L., Medved-Cvikl, B., Ceglar, A. (ur.), Ljubljana: Forma Celje, d.o.o., 2012. str. 9–15.
- Gajić-Čapka, M. & Cindrić, K. (2010) Procjena oborinskih ekstrema u Hrvatskoj. Druga konferencija Hrvatske platforme za smanjenje rizika od katastrofa: Zbornik radova Zagreb, Hrvatska, 2010.
- Gajić-Čapka, M. & Cindrić, K. (2008) Klimatološko-statistička analiza oborine na širem zagrebačkom području. Savjetovanje Zagrebačke vode: zbornik radova / Conference Zagreb Waters: proceedings, Pavić, A. (ur.). Zagreb: Kigen d.o.o., str. 15–25.