Izoperimetrijski problem

Polić, Ivana-Marija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana – Marija Polić

IZOPERIMETRIJSKI PROBLEM

Diplomski rad

Zagreb, 2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana – Marija Polić

IZOPERIMETRIJSKI PROBLEM

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu :

1. ________________________ , predsjednik
2. ________________________ , član
3. ________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ________________________
2. ________________________
3. ________________________

SADRŽAJ

1. Uvod

1.1. Zadatak i ciljevi diplomskog rada

Zadatak ovog diplomskog rada je utvrđivanje poznatih činjenica na području geometrije, a povezano za izoperimetrijski problem. Klasični izoperimetrijski problem istražuje koji ravninski lik odabrane klase uz zadani opseg omeđuje maksimalnu površinu.

Ciljevi diplomskog rada su sljedeći:

- formulirati izoperimetrijski problem,
- proučiti izoperimetrijski problem za određene klase geometrijskih likova u ravnini (dvodimenzionalni geometrijski likovi),
- izraditi primjere izoperimetrijskog problema primjerene srednjoškolskoj nastavi matematike za odgovarajuće klase likova u ravnini, povezati izoperimetrijski problem i izoperimetrijsku nejednakost

Sporedni cilj rada je omogućiti educiranje i usvajanje novih znanja i spoznaja kod potencijalnog čitatelja rada koji ne posjeduje dovoljno znanja o zadanoj temi.

Sve slike u ovom diplomskom radu izrađene su u alatu dinamične geometrije ili nacrtane rukom.

1.2. Stručni doprinos

Stručni doprinos diplomskog rada „*Izoperimetrijski problem*" omogućit će utvrđivanje već poznatih znanja, činjenica i zakonitosti iz matematike kao znanstvenog područja, konkretno na podpodručju geometrije, a povezano s proučavanjem izoperimetrijskog problema na klasama likova u ravnini.

Izrada rada podrazumijevala je odabir odgovarajućih klasa likova u ravnini s ciljem objašnjenja izoperimetrijskog problema na konkretnim primjerima. Građa rada i zaključak mogu poslužiti kao temelj nekog budućeg stručnog rada iz matematike s fokusom na proučavanje izoperimetrijske nejednakosti za klase likova u dvije dimenzije (ravnina).

1.3. Izvori i metode prikupljanja podataka

Za obradu sadržaja vezanih uz izoperimetrijski problem, korišteni su izvori u pisanom i digitalnom obliku, primjerice, knjige, stručni članci i internetske stranice.

1.4. Korištene znanstvene metode

Obrada neke teme može sadržavati sljedeće znanstvene metode:

- *metoda deskripcije* - opisivanje činjenica, procesa i predmeta te njihovih obilježja,
- *metoda kompilacije* - preuzimanje već postojećih činjenica i rezultata dobivenih u okvirima drugih objavljenih znanstveno-istraživačkih radova,
- *metoda klasifikacije* - sustavna podjela složenijih entiteta na sastavne dijelove,
- metoda *komparacije* - postupak kritičkog razmatranja, tj. uspoređivanja i utvrđivanja sličnosti između određenih entiteta i pojava,
- *metoda analize* - raščlanjivanje određenih tvrdnji, zaključaka i sl. na njihove sastavne dijelove, te
- *metoda sinteze* - povezivanje jednostavnijih tvrdnji, modela ili zaključaka u složenije i općenitije sustave,
- *metoda prikupljanja podataka iz sekundarnih izvora* (interni podaci iz dostupne literature),
- *induktivna metoda* - na temelju pojedinačnih činjenica ili saznanja formuliraju se nove spoznaje i zaključci,

- *deduktivno-logička metoda* - na temelju općih spoznaja potvrđenih u praksi utemeljuju se vlastite pojedinačne spoznaje i zaključci i potvrđuju inducirani zaključci,
- *metoda mišljenja eksperata*, te
- *metoda prezentiranja i interpretacije rezultata istraživanja* - korištena je metoda grafičkog prikaza pomoću ilustracija (matematički crteži).

Od toga smo u radu koristili sljedeće:

- *metoda kompilacije* - preuzimanje već postojećih činjenica i rezultata dobivenih u okvirima drugih objavljenih znanstveno-istraživačkih radova,
- metoda *komparacije* - postupak kritičkog razmatranja, tj. uspoređivanja i utvrđivanja sličnosti između određenih entiteta i pojava,
- *metoda analize* - raščlanjivanje određenih tvrdnji, zaključaka i sl. na njihove sastavne dijelove, te
- *metoda sinteze* - povezivanje jednostavnijih tvrdnji, modela ili zaključaka u složenije i općenitije sustave,
- *metoda prikupljanja podataka iz sekundarnih izvora* (interni podaci iz dostupne literature),

1.5. Kompozicija rada

Rad je podijeljen u tri glavne cjeline, uvod, razrada teme i zaključak. Uvod ukratko opisuje ciljeve diplomskog rada, glavne spoznaje, činjenice i poruke cjelokupnog sadržaja. Također, u uvodu se navode ključne početne informacije o temi koja je predmetom proučavanja. Cilj uvodnog dijela je zainteresirati čitatelja za zadanu temu, objasniti važnost kvalitetnijeg razumijevanja ove problematike, te identificirati temeljne elemente koji će se obrađivati u razradi, tj. ciljeve koji se žele postići.

Razrada teme podijeljena je na 3 poglavlja. Građa je strukturirana i obrađena prema metodi "lijevka", tj. od razrade općih znanja i činjenica o zadanoj tematici prema užim područjima (odabranim konkretnim primjerima).

Drugo poglavlje „*Pojam izoperimetrijskog problema geometrijskih likova*“ objašnjava temeljna (polazna) znanja i zakonitosti s područja geometrije, a povezano s tematikom izoperimetrijske nejednakosti za klase geometrijskih likova u ravnini.

U trećem poglavlju „*Primjeri izoperimetrijske nejednakosti za određene klase geometrijskih likova u ravnini*“ pojašnjeni su konkretni prikazi izoperimetrijskog problema na odabranim geometrijskim likovima u ravnini.

Četvrto poglavlje „*Primjeri izoperimetrijskog problema primjereni za primjenu u srednjoškolskoj nastavi matematike*“ obrađuje konkretne primjere izoperimetrijske nejednakosti za određene klase geometrijskih likova u ravnini, ali primjereno razini srednjoškolskog obrazovanja. Prikazani primjeri imaju praktičnu vrijednost, tj. mogu se uvrstiti i primijeniti u postojeći sustav srednjoškolskog obrazovanja na području matematike.

Zaključak opisuje kratak prikaz svih bitnih činjenica i spoznaja diplomskog rada, a oblikovan je na temelju induciranih zaključaka i smjernica na osnovu utvrđenih činjenica i rezultata provedenog istraživanja u glavnom dijelu rada - razradi teme.

2. Pojam izoperimetrijskog problema geometrijskih likova u ravnini

2.1. Teorija krivulja

U diferencijalnoj geometriji krivulja se najčešće definira kao trag čestice u gibanju, odnosno kao funkcija jednog parametra. Krivulja se zadaje preslikavanjem, tj. parametrizacijom, no glavni cilj je definirati geometrijska svojstva krivulje, a u takva svojstva pripadaju sva svojstva koja ne ovise o parametrizaciji, već o svojstvima skupa točaka koje definiraju krivulju.

Za svaku krivulju $c: R \to R^2$ može se utvrditi da je zatvorena ako postoji pozitivna konstanta $a \in R$ za koju je $c(t+a) = c(t)$, za sve $t \in R$. Najmanja moguća konstanta zove se perioda krivulje c. Za svaku jednostavnu zatvorenu krivulju u ravnini može se utvrditi da ima vanjštinu i unutrašnjost (Teorem o Jordanovoj krivulji), te da krivulja nema međusobnih presijecanja. Ovaj teorem podrazumijeva da je skup svih točaka koje nisu točke krivulje, disjunktna unija dva podskupa od R^2. Unija ima sljedeća svojstva:

- unutrašnjost int(c) je ograničen skup,
- vanjština ext(c) je neograničen skup, te
- unutrašnjost int(c) i vanjština ext(c) su povezani skupovi što znači da svake dvije točke iz istog skupa mogu biti povezane krivuljom koja je cijela sadržana u tom skupu.

Jednostavne zatvorene krivulje mogu imati i kompleksnije oblike pri čemu nije jednostavno uočiti pripada li neka proizvoljno odabrana točka vanjštini ili unutrašnjosti jednostavne zatvorene krivulje (Slika 1.).

Slika 1. Vanjština i unutrašnjost jednostavne zatvorene krivulje - položaj proizvoljno odabrane točke *P* kao na slici pripada unutrašnjosti

Svaka jednostavna zatvorena krivulja c s periodom a može se parametrizirati i reparametrizirati pomoću duljine luka u $\tilde{c}$ pri čemu vrijedi da je period parametrizacije $\tilde{c}$ jednak broju L

$$L = \int_0^a \|\dot{c}(t)\| dt$$

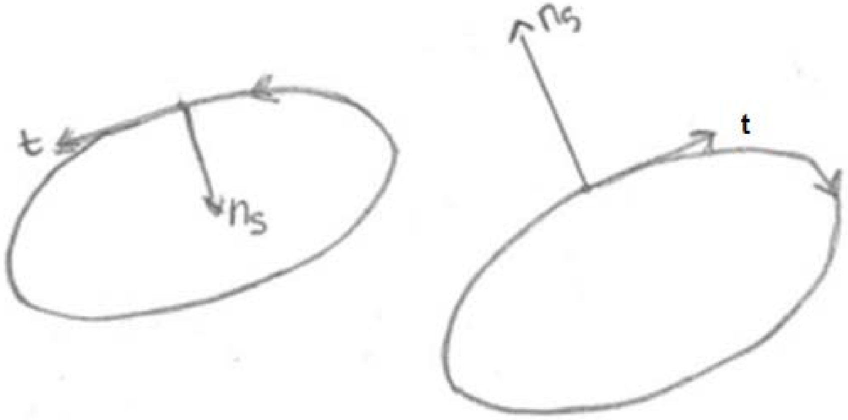
pri čemu je duljina luka definirana s

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{c}(t)\| dt \ .$$

Sukladno tome, L je duljina luka jednostavne zatvorene krivulje c s periodom a koji je opseg te krivulje. Ukupnu zakrivljenost određuje indeks rotacije k koji je jednak broju punih okreta tangente krivulje. Za zatvorenu krivulju c u R^2 s parametrom duljine luka s i orijentiranom zakrivljenošću $k_s(s)$ vrijedi

$$\int_0^L k_s(s) ds = 2\pi k, k \in Z$$

Indeks rotacije može biti pozitivan ili negativan, pa se sukladno tome krivulje razlikuju prema pozitivnom ili negativnom indeksu rotacije (Slika 2.).



Slika 2. Negativni i pozitivni indeks rotacije

Za realne funkcije $f = f(x,y), g = g(x,y)$ i pozitivnu orijentiranu krivulju c, primjenom Greenovog teorema vrijedi

$$\int_{\mathrm{int}(c)} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = \int_c f(x,y)dx + g(x,y)dy \qquad (2.1)$$

Ako se Greenov teorem (2.1) primjeni na funkcije $f(x,y) = -\frac{1}{2}y, g(x,y) = \frac{1}{2}x$, tada se može utvrditi da je površina unutrašnjosti pozitivno orijentirane jednostavne zatvorene krivulje $c(t) = (x(t), y(t))$ definirana pomoću sljedeće formule i da površina ne ovisi o parametrizaciji krivulje

$$A(\text{int}(c)) = \frac{1}{2}\int_0^a (x\dot{y} - y\dot{x})dt .$$

2.2. Izoperimetrijska nejednakost

Prije iskaza i dokaza teorema izoperimetrijske nejednakosti, iskažimo i dokažimo sljedeću propoziciju, koju smo zapravo spominjali prethodno.

Propozicija o površinama parametriziranih krivulja:

Ako je $c(t) = (x(t), y(t))$ pozitivno orijentirana, jednostavna, zatvorena krivulja u $\mathbb{R}^2$ s periodom T, tada vrijedi

$$A(\text{int}(c)) = \frac{1}{2}\int_0^T (x\dot{y} - y\dot{x})dt . \qquad (2.2)$$

Dokaz

Ako prema Greenovu teoremu (1) uzmemo da su $f = -\frac{1}{2}y, g = \frac{1}{2}x$, dobijemo

$$A(\text{int}(c)) = \int_c \left(-\frac{1}{2}y\right)dx + \left(\frac{1}{2}x\right)dy$$

$$\Leftrightarrow A(\text{int}(c)) = \frac{1}{2}\left(\int_c (-y)\,dx + (x)\,dy\right)$$

$$\Leftrightarrow A(\text{int}(c)) = \frac{1}{2}\left(\int_c (x\dot{y} - y\dot{x})dt\right).$$

Što je upravo jednakost (2.2).

Teorem izoperimetrijske nejednakosti:

Ako je c jednostavna zatvorena krivulja, $L(c)$ njen opseg (duljina luka), $A(\text{int}(c))$ površina unutrašnjosti od krivulje c, tada vrijedi

$$A(\text{int}(c)) \le \frac{1}{4\pi} L(c)^2 \tag{2.3}$$

Pritom, jednakost vrijedi ako i samo ako je jednostavna zatvorena krivulja c kružnica. Kako bi dokazali ovaj teorem, potrebno je iskazati sljedeću propoziciju.

Writngerova nejednakost:

Neka je $F:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ glatka funkcija takva da $F(0)=F(\pi)=0$, tada vrijedi

$$\int_0^\pi \left(\frac{dF}{dt}\right)^2 dt \ge \int_0^\pi F(t)^2\, dt, \tag{2.4}$$

i jednakost vrijedi ako i samo ako je $F(t) = D\sin t$, za sve $t\in[0,\pi]$, gdje D konstanta.

Pretpostavljajući da ova nejednakost vrijedi, pokazat ćemo kako izvesti iz nje izoperimetrijsku nejednakost.

Dokaz

Krećemo s nekim pretpostavkama o krivulji *c* koje će pojednostavniti dokaz. Prvo, možemo pretpostaviti da je krivulja *c* parametrizirana duljinom luka *s*. Međutim, zbog π koji se pojavljuje u teoremu izoperimetrijske nejednakosti, ispada da bi bolje bilo pretpostaviti da je period od c π. Ako promijenimo parametar krivulje *c*, *s* u *t*,

$$t = \frac{\pi s}{L(c)},$$

parametrizirajuća krivulja je i dalje jednostavna, zatvorena, s periodom π, jer kad *s* "naraste" za $L(c)$, *t* naraste za π. Od sada ćemo pretpostaviti da je *c* parametrizirana parametrom *t*, $t = \dfrac{\pi s}{L(c)}$.

Drugo, napomenimo da se opseg, $L(c)$ i površina, $A(c)$ ne mijenjaju ako se *c* translatira za neki konstantni vektor *b*, tj. $c(t)\to c(t)+b$. Ako uzmemo da je $b=-c(0)$, možemo pretpostaviti da $c(0)=0$, tj. da translatirana krivulja počinje i završava kao početna.

Da bi dokazali izoperimetrijsku nejednakost (2.3), izračunat ćemo opseg, $L(c)$ i površinu, $A(c)$ pomoću polarnih koordinata

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \,.$$

Deriviranjem polarnih koordinata po t,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(r\cos\theta)}{dt} = \dot{r}\cos\theta + r(-\sin\theta)\dot{\theta}\,,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(r\sin\theta)}{dt} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\cdot\dot{\theta}\,.$$

Kvadriranjem tih koordinata

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\cdot\dot{\theta}/^2$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\cdot\dot{\theta}/^2,$$

vrijedi

$$\dot{x}^2 = \dot{r}^2\cos^2\theta - 2\dot{r}\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot\dot{\theta} + r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}^2$$

$$\dot{y}^2 = \dot{r}^2\sin^2\theta + 2\dot{r}\sin\theta\cdot r\cos\theta\cdot\dot{\theta} + r^2\cos^2\theta\cdot\dot{\theta}^2\,.$$

Izračunajmo $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$,

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2\cos^2\theta - 2\dot{r}\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot\dot{\theta} + r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\sin^2\theta + 2\dot{r}\sin\theta\cdot r\cos\theta\cdot\dot{\theta} + r^2\cos^2\theta\cdot\dot{\theta}^2$$

$$= \dot{r}^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + r^2\dot{\theta}^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right).$$

Koristeći trigonometrijski identitet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, slijedi

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\,.$$

Izračunajmo $x\dot{y} - y\dot{x}$,

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r\cos\theta\left(\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\cdot\dot{\theta}\right) - r\sin\theta\left(\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\cdot\dot{\theta}\right)$$

$$= r\dot{r}\cos\theta\sin\theta + r^2\cos^2\theta\cdot\dot{\theta} - r\dot{r}\cos\theta\sin\theta + r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}$$

$$= r^2\dot{\theta}\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)$$

$$= r^2\dot{\theta}.$$

Znamo

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2 .$$

Dakle,

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 .$$

Vrijedi

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt},\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} .$$

Onda slijedi

$$\begin{aligned}\dot{x}^2+\dot{y}^2&=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\\&=\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\right)^2\\&=\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\\&=\left(\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right)\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 .\end{aligned}$$

Znamo da vrijedi

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1,$$

a

$$\begin{aligned}&t=\frac{\pi s}{L(c)}\,/\cdot\frac{L(c)}{\pi}\\&\Leftrightarrow s=\frac{L(c)\cdot t}{\pi}\,/\,\frac{d}{dt}\\&\Leftrightarrow \frac{ds}{dt}=\frac{L(c)}{\pi}\,/^2\\&\Leftrightarrow \left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{L(c)^2}{\pi^2}.\end{aligned}$$

Onda vrijedi

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{L(c)^2}{\pi^2}.$$

Koristeći jednakost (2.2), imamo

$$A(c) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (x\dot{y} - y\dot{x})dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 \dot{\theta}\, dt .$$

Kako bi dokazali teorem izoperimetrijske nejednakosti (2.3), moramo pokazati da vrijedi

$$\frac{L(c)^2}{4\pi} - A(c) \geq 0 .$$

Gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je c kružnica.

Izračunajmo

$$\int_0^{\pi}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}\right)dt = \int_0^{\pi}\frac{L(c)^2}{\pi^2}dt = \frac{L(c)^2}{\pi^2}t\Big|_0^{\pi} = \frac{L(c)^2}{\pi^2}\cdot\pi - \frac{L(c)^2}{\pi^2}\cdot 0 = \frac{L(c)^2}{\pi}.$$

Iz toga slijedi

$$\begin{aligned}
\frac{L(c)^2}{4\pi} - A(c) &= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)dt - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\dot{\theta}\, dt \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\dot{r}^2\, dt + \frac{1}{4}\int_0^{\pi} r^2\dot{\theta}^2\, dt - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\dot{\theta}\, dt \\
&= \frac{1}{4}I,
\end{aligned}$$

gdje je

$$I = \int_0^{\pi}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 - 2r^2\dot{\theta}\right).$$

Kako bi dokazali teorem izoperimetrijske nejednakosti moramo pokazati da vrijedi $I \geq 0$ i da je $I = 0$ ako i samo ako je c kružnica.

Jednostavnim računom slijedi

$$I=\int_0^{\pi}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2-2r^2\dot{\theta}+r^2-r^2\right)$$

$$\Leftrightarrow I=\int_0^{\pi}\left(r^2+r^2\dot{\theta}^2-2r^2\dot{\theta}-r^2+\dot{r}^2\right)$$

$$\Leftrightarrow I=\int_0^{\pi}\left(r^2+r^2\dot{\theta}^2-2r^2\dot{\theta}\right)+\int_0^{\pi}\left(\dot{r}^2-r^2\right)$$

$$\Leftrightarrow I=\int_0^{\pi}\left(r^2\left(1+\dot{\theta}^2-2\dot{\theta}\right)\right)+\int_0^{\pi}\left(\dot{r}^2-r^2\right)$$

$$\Leftrightarrow I=\int_0^{\pi}\left(r^2\left(\dot{\theta}-1\right)^2\right)+\int_0^{\pi}\left(\dot{r}^2-r^2\right).$$

Uočimo da je prvi integral očito veći ili jednak nuli, a drugi je po Writingerovoj nejednakosti (2.4) također veći ili jednak nuli, jer ako uzmemo $F=r$, $r(0)=r(\pi)=0$, kako je $c(0)=c(\pi)=0$. Dakle, vrijedi da je $I\geq 0$.

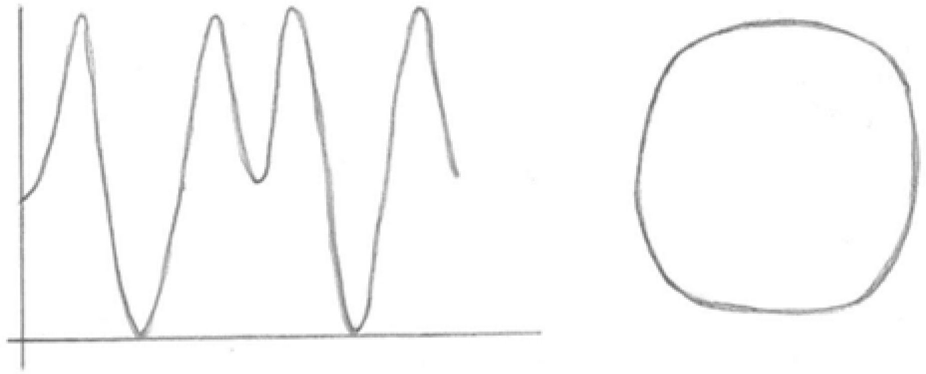
Dalje, kako su oba integrala na desnoj strani veća ili jednaka nuli, njihov zbroj I je jednak nuli ako i samo su oba integrala nula.

Prvi integral jednak je nuli samo ako je $\dot{\theta}=1$ za sve *t*, a drugi je jednak nuli samo ako je $r=D\sin t$, za neku konstantu *D* (što opet slijedi po Writingerovoj nejednakosti (2.4)).

Ako je $\theta=t+\alpha$, gdje je α konstanta i zbog toga $r=D\sin(\theta-\alpha)$.

Lako se vidi da je to polarna jednadžba kružnice s promjerom *D*, čime smo upotpunili dokaz teorema izoperimetrijske nejednakosti.

Globalno svojstvo jednostavnih zatvorenih krivulja je teorem o četiri tjemena, pa ga samo navodimo. Odnosno, za svaku konveksnu zakrivljenu krivulju u ravnini vrijedi da ima barem 4 tjemena (Teorem o četiri tjemena). Primjer jednostavne konveksne zakrivljene krivulje je oval koji sadrži ukupno 8 tjemena (Slika 3).



Slika 3. Primjer jednostavne konveksne zatvorene krivulje – oval

Na sljedećoj slici prikazan je primjer nekonveksnog i konveksnog geometrijskog lika u ravnini (Slika 4.).

Slika 4. Primjer nekonveksnog i konveksnog geometrijskog lika u ravnini

Izoperimetrijsku nejednakost primjenjujemo samo na probleme vezane uz konveksne geometrijske likove u ravnini. Nekonveksni geometrijski lik u ravnini je lik koji ima svojstvo da postoji dužina čiji su krajevi pripadaju tome liku, ali dužina ne.

Svaki nekonveksni lik možemo pretvoriti u konveksni osnom simetrijom tako da os bude pravac na kojem leži dužina koja ne pripada liku. Osnom simetrijom preslikamo dio nekonveksnog lika kao na slici (Slika 5.).

Slika 5. Primjer ″pretvaranja″ nekonveksnog geometrijskog lika u ravnini u konveksni

Sada bi mogli primjeniti izoperimetrijsku nejednakost, ali se pojavljuje problem. Lako uočavamo da površina nije jednaka, a površina je bitna za izoperimetrijski problem.

Izoperimetrijski problem geometrijskih likova u ravnini obuhvaća sve slučajeve na području geometrije kao grane matematike, gdje se nastoje definirati odgovori na dva pitanja:

- koji geometrijski lik u ravnini ima najveću površinu među svim geometrijskim likovima jednakog opsega, te
- koji geometrijski lik u ravnini ima najmanji opseg među svim geometrijskim likovima jednake površine.

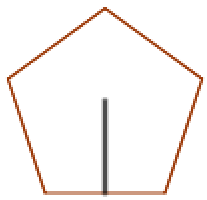
2.3. Rješavanje izoperimetrijskog problema, teoremi i dokazi

Rješavanje izoperimetrijskog problema potiče iz antičke Grčke (Zenodorus). Sukladno tadašnjoj razini matematičkih spoznaja i znanja, te metoda kojima su se pokušale dokazati matematičke zakonitosti, Zenodorus je uspio dokazati da krug ima veću površinu nego bilo koji geometrijski lik (mnogokut) jednakog opsega (perimetar). No najvažniji utjecaj na daljnji razvoj rješavanja izoperimetrijskog problema imao je razvoj astronomije.

Zenodorusov teorem: *Za sve pravilne mnogokute jednakog opsega, više stranica podrazumijeva veću površinu.*

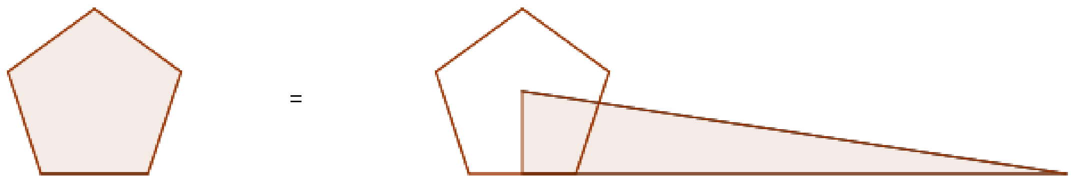
Dokaz: Na Slici 6. je pravilni peterokutni mnogokut. Okomicu nacrtanu iz središta mnogokuta na središte svake stranice mnogokuta nazivamo apotema. Za mnogokut s n

stranica postoji *n* apotema. Apotema je ujedno i polumjer (radijus) unutarnjeg kruga mnogokuta kojeg opisuju središta stranica. U pravilnom mnogokutu sve apoteme su jednake duljine (Slika 6.).



Slika 6. Apotema

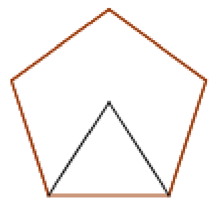
Produljena apotema izvan mnogokuta i produljena stranica mnogokuta tvore lik koji ima površinu jednaku površini mnogokuta. Taj dobiveni lik je pravokutni trokut (Slika 7.).



Slika 7. Površina produljenog apothema i stranice mnogokuta

Apotema je ujedno i visina karakterističnog trokuta. U pravilnom mnogokutu trokuti su jednakokračni. Broj trokuta jednak je *n,* koliko ima i stranica u *n* - terokutu (Slika 8.).

Uočimo da unutarnji kut dobivenog pravokutnog trokuta koji se nalazi unutar polaznog peterokuta iznosi 72°. Iz toga slijedi da je veličina drugog šiljastog kuta jednaka 18°. Rekli smo, duljina jedne katete pravokutnog trokuta iznosi *v*, a duljina druge katete $\frac{a}{2}+x$. Dok je duljina hipotenuze jednaka $v+y$. Laganim računom, uz primjenu trigonometrije možemo izračunati površinu dobivenog pravokutnog trokuta.

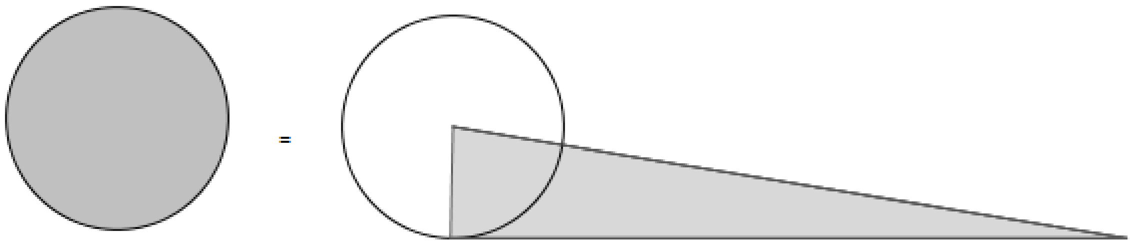


Slika 8. Jednakokračni trokuti u pravilnom mnogokutu

Ako se poveća broj stranica mnogokuta, bazna stranica trokuta se skraćuje, a visina povećava. Iz navedenog slijedi slijedeći Zenodorusov teorem.

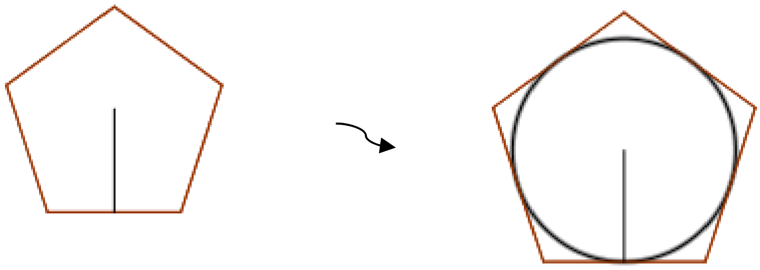
Teorem: *Krug ima veću površinu od bilo kojeg mnogokuta jednakog opsega.*

Dokaz: Za krug vrijedi ista zakonitost kao i za pravilni mnogokut. Lik kojeg tvore pružena apotema izvan mnogokuta i duljina iz točke koju dodiruje druga apotema, jednaka je površini mnogokuta (Slika 9.).



Slika 9. Površina produljene apoteme i duljine iz točke na kružnici koju dodiruje druga apotema

Potrebno je dokazati da je apotema svakog pravilnog nmnogokuta kraći nego polumjer kruga jednakog opsega. Mnogokut je potrebno povećati (skalirati) kako bi središta njegovih stranica obuhvatili krug (Slika 10.).

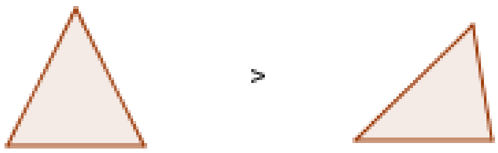


Slika 10. Skaliranje mnogokuta

Opseg peterokuta je sada veći nego nego što je opseg kruga i također veći nego što je bio prije skaliranja. Pošto je postupak skaliranja bio povećavanje, apotema se povećala na veličinu polumjera kruga, tj. visinu iz središta kruga prema bilo kojoj perifernoj točki kruga. Iz navedenog slijedi ključni teorem, može se pretpostaviti da među svim n-terokutima s određenim opsegom postoji barem jedan mnogokut koji ima veću površinu od svih ostalih.

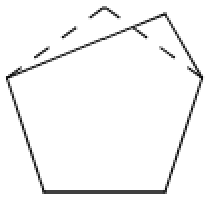
Teorem: *Pravilni mnogokut s n stranica ima veću površinu nego svi drugi mnogokuti s n stranica jednakog opsega.*

Dokaz: Među izoperimetrijskim trokutima jednakih osnovica, jednakokračni trokut ima najveću površinu (Slika 11.).



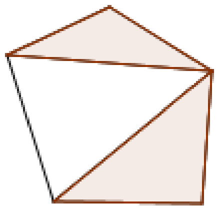
Slika 11. Površina jednakokračnog trokuta u odnosu na druge trokute

Maksimalni n-terokut mora biti pravilan. Ako to nije slučaj, mnogokut se može modificirati tako da apoteme tvore jednakokračne trokute (Slika 12.).



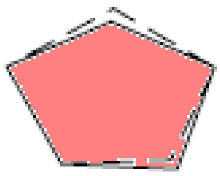
Slika 12. Modifikacija mnogokuta

Iz prethodne slike se može zaključiti da maksimalni n-terokut mora biti jednakostraničan. Ako se radi o pravilnom mnogokutu, takav mnogokut ima jednake veličine unutarnjih kutova. Ako se kod nepravilnog mnogokuta spoje vrhovi mnogokuta, mogu se uočiti nepravilni trokuti (Slika 13.).



Slika 13. Spajanje vrhova nepravilnog mnogokutaa

Ovakve mnogokute može se prepraviti redistribucijom opsega na način da se šiljasti kutovi transformiraju u tupe kutove sve dok kutovi nisu jednaki. Provođenjem redistribucije opsega povećala se površina mnogokuta. Sukladno tome, maksimalni n-terokut mora imati kutove jednakih veličina, ako to nije slučaj, tada se može redistribuirati opseg (Slika 14.).



Slika 14. Redistribucija opsega

Kako bi navedena tvrdnja bila moguća, mora postojati teorem da ako dva jednakokračna trokuta imaju različite osnovice, a ostale stranice jednake, tada se ukupna površina povećava kada se trokuti izjednačavaju postupkom redistribucije opsega.

Iz navedenog slijedi izopermetrijski problem, odrediti geometrijski lik koji ima najveću površinu među svim geometrijskim likovima jednakog opsega. Površina je označena s A, a opseg s L. Rješenje izoperimetrijskog problema je krug opsega L. Ovakvo rješenje može se izraziti kao izoperimetrijska nejednakost koja glasi

$$L^2 - 4\pi A \geq 0$$

i pri čemu jednakost vrijedi samo za krug. Izoperimetrijska nejednakost podrazumijeva dualni izoperimetrijski problem, tj. postavlja se i pitanje koji geometrijski lik ima najmanji opseg od svih geometrijskih likova jednake površine. Dualni problem je očigledni ekvivalent prvom problemu, a poveznica originalnog i dualnog problema je skaliranje geometrijskog lika.

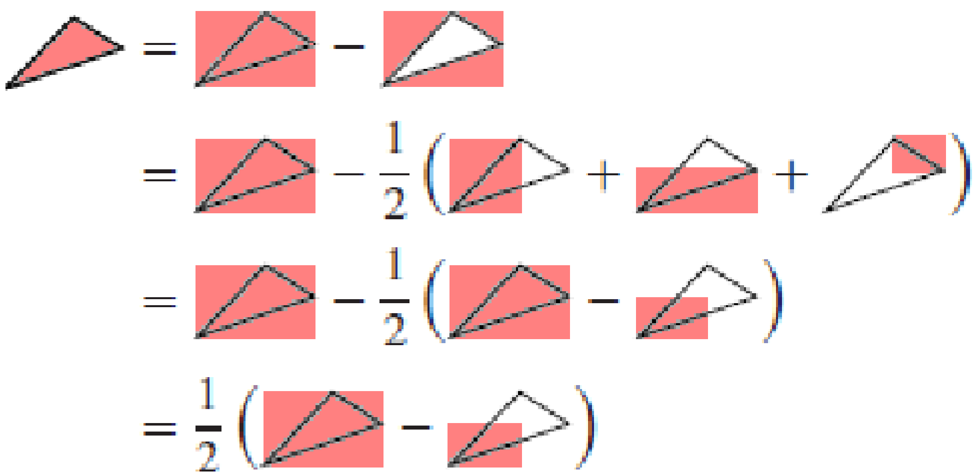
Logična je pretpostavka da krug rješava samo dualni problem. To znači da ako se skalira mnogokut istog opsega kao krug, ali s većom površinom, na način da mnogokut ima istu površinu kao krug, opseg mnogokuta će se smanjiti. Navedene veličine su u kontradikciji ako se uspoređuju prije i nakon skaliranja. Može se zaključiti da izoperimetrijska nejednakost ne pravi razliku između originalnog i dualnog problema.

Teorem konveksnosti: *Rješenje izoperimetrijskog problema mora biti konveksno.*

Dokaz: U svrhu dokazivanja teorema, poslužit će suprotna pretpostavka, tj. da rješenje izoperimetrijskog problema nije konveksno. Definiranje novog lika, na način da nekonveksni ″pretvorimo″ u konveksni povećava površinu i smanjuje opseg. Površine likova računaju se prema sljedećoj formuli

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx = \int_{\partial D} xdy = \int_{\partial D} -ydx.$$

Izraz se ne tretira kao posljedica Greenovog teorema. Objašnjenje formule najrazumljivije je na sljedećim primjerima trokuta (Slika 15.).



Slika 15. Zbrajanje osjenčanih površina trokuta

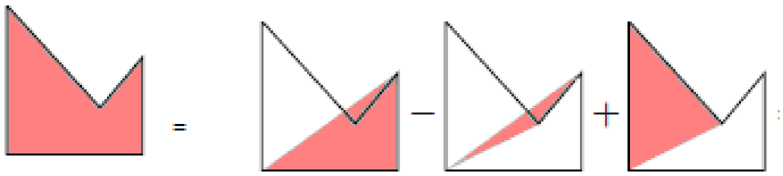
Površina trokuta *T*, primjerice u prvom kvadrantu +/+, s vrhovima $(0,0)$, (x_1, y_1) i (x_2, y_2), označenih u suprotnom smjeru kazaljke na satu, računa se prema

$$A(T) = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{2}.$$

Općenito gledano, područje površine *n*-terokuta *P* s vrhovima $(0,0)$, (x_1, y_1) i (x_2, y_2),..., (x_n, y_n) označenih suprotno smjeru kazaljke na satu dobiva se dijeljenjem *P* na koherentne trokute i zbrajanjem njihovih osjenčanih površina

$$A(P) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} x_k y_{k+1} - y_k x_{k+1}.$$

Na slici je prikazan primjer odnosa osjenčanih površina (Slika 16.).



Slika 16. Odnos osjenčanih površina mnogokuta

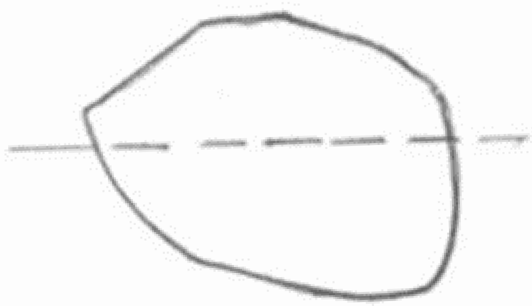
Uzimajući u obzir ograničenja formule za izračun $A(P)$, može se izračunati površina bilo kojeg lika D s pogodnim odgovarajućim zaglađenim granicama ∂D

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x(y+dy) - y(x+dx) = \int_{\partial D} xdy - ydx.$$

2.4. Steinerov teorem i dokazi

Steinerov teorem: *Svaki geometrijski lik u ravnini s maksimalnom površinom mora biti krug.*

Prvi Steinerov dokaz (tzv. dokaz četiri zgloba): Kao primjer poslužit će proizvoljan geometrijski lik. Njegov opseg prepolovit će se s nacrtanom linijom. Ta linija će podijeliti površinu na pola (Slika 17.).



Slika 17. Prepolovljeni proizvoljan geometrijski lik

Razmatra se jedna polovina površine (npr. donja) za koju se pretpostavlja da nije polukrug.

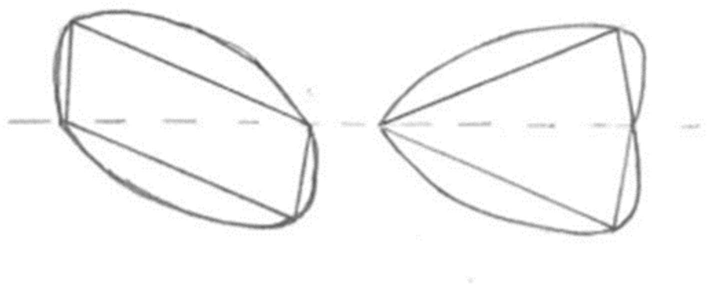
Na obodu lika pretpostavlja se da postoji točka iz koje se crtaju linije do spojišta oboda lika s linijom koja je razdvajala lik na dva dijela, dobiveni kut pretpostavlja se da nije pravi kut (Slika 18.).

Slika 18. Formiranje trokuta unutar polovice proizvoljnog lika

Pomicanjem vrha trokuta po obodu lika doći će se do pozicije gdje će stranice trokuta činiti pravi kut (Slika 19.). Pri tome se oblik lika mijenja sukladno pomicanju vrha trokuta, pa se pri tome čini kao da je površina izvan trokuta "zalijepljena" na stranice trokuta.

Slika 19. Pomicanje vrha trokuta po obodu proizvoljnog lika

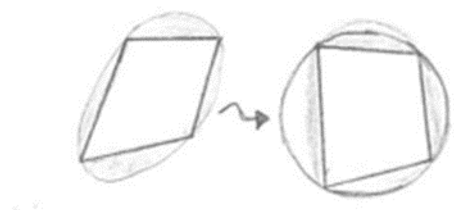
Pomicanje će povećati površinu lika, dok će opseg i dalje biti jednak. Taj rezultat nije moguć, stoga polovice lika moraju biti polukrugovi, tj. početni lik mora biti krug. Ako se nacrta dva polovična lika jedan do drugoga i kreira njihova simetrična refleksija ispod linije koja je sjekla originalni cijeli lik, dobivaju se kvadrilaterali, tj. tetragoni. Na lijevom liku napravljena je i refleksija u centralnoj točki linije presijecanja originalnog lika, pa je dobiveni tetragon paralelogram (Slika 20.).



Slika 20. Zrcalna slika - tetragoni

Može se zaključiti da je proces proširenja mnogokuta refleksijama konvergentan i usmjeren je prema formiranju kruga.

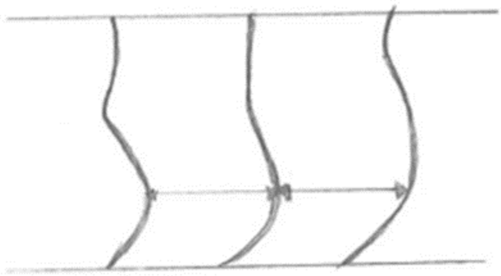
Steinerov dokaz pokazuje i da optimalni $2n$-terokut mora biti pravilan. Ako se odsječe lik na pola crtanjem linije od tjemena 1 do tjemena $n + 1$, određena tjemena neće biti na polukrugu od tjemena 1 do tjemena $n + 1$, pa se Steinerovom metodom može dobiti bolji izoperimetrijski $2n$-terokut. Postoje još dva slična Steinerova dokaza istog teorema, npr. jedan od njih je svojevrsni "obilazni" dokaz koji tvrdi da ako se formira četverokut pomoću zamišljenih štapova, za maksimiziranje površine potrebno je postaviti vrhove četverokuta (tjemena) na obod kruga. Iz toga slijedi tvrdnja da ako postoje bilo koje 4 točke na optimalnom liku koji ne dodiruje obod kruga, lik se može poboljšati (Slika 21.).



Slika 21. Poboljšanje četverokuta

Drugi Steinerov dokaz (označavanje granica):

Dane su dvije zakrivljene linije, te granična krivulja na pola puta između (Slika 22.).

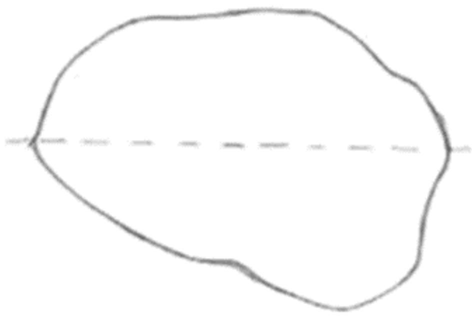


Slika 22. Proizvoljne zakrivljene linije i granična linija

Duljina te linije će biti manja nego zakrivljena duljina zadanih krivulja (lijevo i desno) ili jednaka ako su zadane krivulje jednake. To se može ustanoviti ako se uzimaju odsječci svih danih krivulja beskonačno male veličine i uspoređuju dijelovi (Slika 23.).

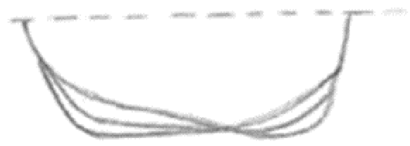
Slika 23. Odsječak proizvoljnih zakrivljenih linija i granične linije

Na sljedećoj slici opseg lika s maksimalnom površinom presječen je linijom (Slika 24.).



Slika 24. Proizvoljan lik u ravnini presječen linijom

Kao i u prethodnom primjeru, linija siječe površinu na pola, a ako to nije tako tada se može uzeti polovina veće površine s vlastitom refleksijom oko linije siječenja i dobiti lik s jednakim opsegom, ali većom površinom. Pretpostavka je da dvije polovine nisu refleksija jedna drugoj. Tada se može napraviti refleksija na istoj strani lika u odnosu na liniju presijecanja lika i nacrtati granična linija (Slika 25.).



Slika 25. Refleksija lika na istoj strani odsijecanja

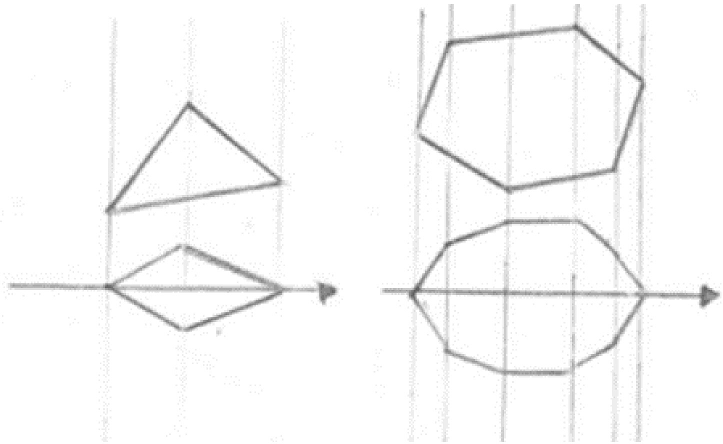
Ta granična linija je kraća, ali zatvara istu površinu i sadrži sve površine koje dvije linije imaju zajedničke, te polovinu dodatne površine prve i polovinu dodatne površine druge linije. Međutim, te dodatne površine su onoliko veće koliko granična linija zapravo zatvara površinu u odnosu na originalne zakrivljene linije.

Ako se odsječe opseg maksimalnog lika na pola, tada polovine mogu biti različitog oblika, a ako jesu, tada se takva konstrukcija može upotrijebiti za dobivanje lika s istim površinama i manjim opsegom. Sukladno navedenom, maksimalan lik ne može biti niti jedan drugi oblik nego krug.

Treći Steinerov dokaz (tzv. "*pravljenje grude snijega*"):

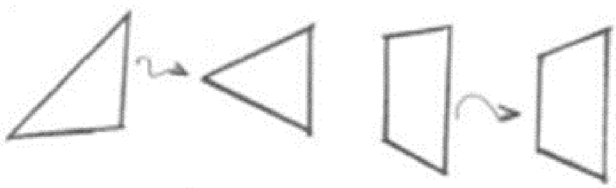
Ovaj dokaz temelji se na praktičnom primjeru formiranja grude od snijega. Proces formiranja snježne grude podrazumijeva kompresiju (pritisak) jedne ruke na snijeg u drugoj ruci. Postupak se ponavlja iz svih kuteva i krajnji rezultat je gruda u obliku lopte, tj. sfere. Postupak pritiska postepeno je minimizirao površinu lika. Steinerov treći dokaz temelji se na ovom primjeru, ali u dvije dimenzije, tj. na mnogokutima u ravnini.

Postupak započinje konveksnim likom kojeg treba modificirati na način da postane simetričan pomoću linije. Kako bi se navedeno postiglo, zamišljen je lik koji se sastoji od "kliznih" okomitih odsječaka tako da polovina od svakog odsječka leži svaki na svojoj strani u odnosu na liniju presijecanja. Potrebno je pratiti što se događa s vrhovima mnogokuta (Slika 26.).



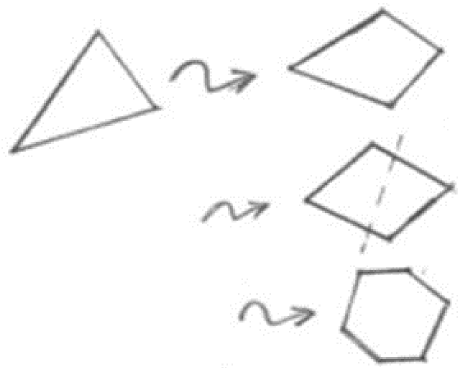
Slika 26. Klizni okomiti odsječci likova

Površina je i dalje jednaka, ali je ispunjena jednakokračnim trokutima i trapezoidima koji učinkovitije pokrivaju površinu (Slika 27.).



Slika 27. Ispunjenost lika jednakokračnim trokutima i trapezoidima

Za sve dobivene mnogokute, opseg se smanjuje dok god su svi trokuti i trapezoidi jednakokračni, a to se događa kada je originalni mnogokut simetričan u liniji presijecanja. Ako se navedeno primjeni na beskonačno male veličine, može se zaključiti da tvrdnja vrijedi za bilo koji konveksan lik. Prema tome, rješenje mora biti simetrično u bilo kojem smjeru i lik se može poboljšati. Poboljšani lik je očigledno krug. U pogledu konvergencije i matematičkog modeliranja praktičnog primjera “pravljenja snježne grude”, može se definirati proizvoljan lik i vidjeti je li krajnji rezultat procesa simetrizacije krug (Slika 28.).



Slika 28. Proces simetrizacije

Iz navedenog primjera, može se lako zaključiti da procesom simetrizacije lik teži prema krugu. Razlika između najmanjeg i najvećeg promjera se smanjuje. Kad god je primjenjena nova os (dok god nije paralelna s prethodnom), najveći promjer će biti sve manji, a najmanji će biti sve veći. Pravilnim odabirom novih osi, promjeri će biti sve više jednaki jedan drugome. Na temelju navedenog, može se zaključiti da pravilna odabrana simetrizacija uvijek vodi poboljšanju lika, a suštinska pretpostavka je da taj proces ne završava ranije prije nego mnogokut postane krug. U konačnici to znači da se može uzeti bilo koji proizvoljan mnogokut, poboljšavati ga sve dok se ne postigne oblik kruga.

Takva tvrdnja podupire izoperimetrijski teorem bez ikakve prethodne pretpostavke postojanja rješenja izoperimetrijskog problema.

3. Primjeri izoperimetrijske nejednakosti za određene klase geometrijskih likova u ravnini

Osnovno obilježje Steinerovih dokaza je sintetsko dokazivanje pomoću geometrije bez upotrebe analitike. Analitički pristup ispravlja propuste Steinerovih dokaza. Izoperimetrijski teorem suprotstavlja dvije tvrdnje:

Tvrdnja 1: Među svim likovima u ravnini istog opsega, krug ima najveću površinu.

Tvrdnja 2: Među svim likovima u ravnini iste površine, krug ima najmanji opseg.

Teorem: Tvrdnje (1) i (2) su ekvivalentne.

Dokaz: Tvrdnja (1) ima oznaku A, tvrdnja (2) ima oznaku B. Pod pretpostavkom da je A istinita, potrebno je dokazati B. Pretpostavit će se suprotno, tj. da je B neistinito. Tada za dati krug *C* postoji lik *F* s istom površinom, ali s manjim opsegom od *C*. Pretpostavimo da se lik *C* smanji u *C'* čiji je opseg jednak liku *F*. Površina od *C'* će očigledno biti manja od lika *C* i posljedično tome, bit će manji od površine lika *F*. To je u suprotnosti s pretpostavkom da je A istinito jer *C'* i *F* imaju isti opseg, ali površina *C*' je manja nego površina od *F*. Sukladno tome, $A \Rightarrow B$. Tvrdnja $B \Rightarrow A$ se dokazuje na potpuno jednaki način. Ovim postupkom nije zasebno dokazan A, niti B, nego da su obje tvrdnje ili istinite ili lažne. Ako je A istinito, a $A \Rightarrow B$, tada je i B istinito.

Krug se nameće kao rješenje tvrdnje (1). Krug je jedinstven lik zbog svoje zaobljenosti, tj. simetričnosti linija iz centra u svim smjerovima. Zbog toga je krug idealan kandidat među svim likovima u ravnini za zadovoljenje izoperimetrijskog teorema. Svi drugi geometrijski likovi su manje pogodni i savršeni u odnosu na krug. Ipak, u svakoj kategoriji geometrijskih likova, postoji i lik koji je manje savršen od ostalih u istoj kategoriji. Zanimljivost je da upravo takvi manje savršeni likovi zadovoljavaju izoperimetrijske uvjete. Sukladno tome može se reći:

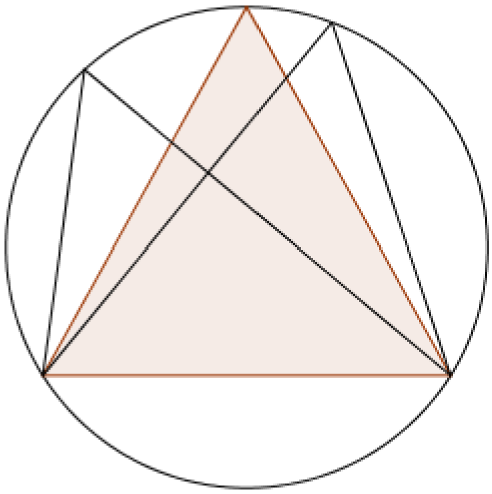
- među svim trokutima istog opsega, jednakostranični trokut ima najveću površinu,
- među svim četverokutima istog opsega, kvadrat ima najveću površinu,
- među svim pravokutnicima istog opsega, kvadrat ima najveću površinu,
- posljednja navedena tvrdnja je ekvivalentna s $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$, što je specifični slučaj nejednakosti među geometrijskim likovima izraženo u aritmetičkom obliku,
- među bilo kojim konačnim skupom pravilnih mnogokuta istog opsega, mnogokut s najvećim brojem stranica ima najveću površinu,
- među svim n-terokutima istog opsega, pravilni n-nterokut ima najveću površinu (Zenodorusov teorem),

- među svim krivuljama u ravnini s fiksnom duljinom i fiksnim krajnjim točkama, kružni luk zatvara maksimalnu površinu koju zatvara linija koja spaja krajnje točke, te
- od svih mnogokuta s n stranica s upisanim krugovima koje dodiruju stranice mnogokuta, pravilni mnogokut ima najveću površinu.

3.1. Izoperimetrijski problem za trokut

Teorem: Među svim trokutima upisanima unutar kruga, jednakokračni ima najveću površinu.

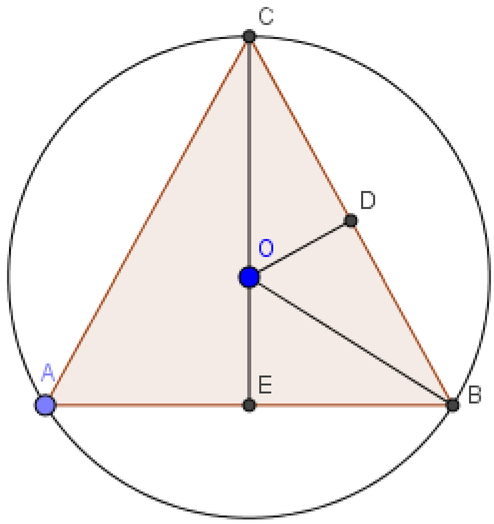
Dokaz: O sljedećoj tvrdnji ovisi dokaz navedenog teorema - među svim trokutima zadane osnovice upisanima unutar kruga, jednakokračni trokut ima najveću površinu. Navedena tvrdnja se očigledno može ustanoviti na sljedećoj slici (Slika 29.).



Slika 29. Jednakokračni trokut unutar kruga

Među svim upisanim trokutima zadanih osnovica, najviši je jednakokračni, stoga ima najveću površinu zbog standardne formule $P = \frac{a \cdot v_a}{2}$, gdje su P površina, a duljina osnovice i v_a duljina visine na osnovicu trokuta. Navedena tvrdnja pokazuje da za trokut koji ima dvije nejednake stranice, postoji još jedan trokut (jednakokračni je jedan od njih) s jednakim opisnim krugom ali većom površinom. Jedini trokut za kojeg ne postoji poboljšanje je jednakostranični trokut. Odnosno, potrebno je sagledati među jednakokračnim trokutima s istim opsinim krugom koji ima najveću površinu (Slika 30.).

Teorem: Među svim jednakokračnim trokutima upisanima unutar kruga, jednakostranični ima najveću površinu.



Slika 30. Poboljšanje jednakokračnog trokuta u jednakostranični

Ako je a kut pri osnovici jednakokračnog trokuta ABC, tada je polovina kuta pri vrhu C jednaka $90^o - a$. Neka je O središte opisane kružnice trokuta, a D i E polovišta stranica BC i AB. Na temelju toga vrijede sljedeće jednakosti:

$$\angle ACB = 180^o - 2a$$

$$\angle BCE = \angle OCD = 90^o - a$$

$$OB = OC, \; BD = CD$$

$$\angle OBD = \angle OCD = 90^o - a$$

$$\angle OBE = a - (90^o - a) = 2a - 90^o$$

$$OE = R\sin(2a - 90^o) = R(-\cos(2a)) = -R\cos(2a).$$

A kako je duljina dužine $CE = R + OE$, onda je $CE = R - R\cos(2a)$, tj.

$$CE = R(1 - \cos(2a)).$$

Primjenom trtigonometrije na pravokutni trokut BOE vrijedi
$AB = 2EB = 2R\cos(2a - 90^o) = 2R\sin(2a)$.

Iz toga slijedi da je površina trokuta ABC jednaka

$$P(\Delta ABC) = (AB \cdot CE)/2 = R^2(1 - \cos(2a))\sin(2a).$$

Sukladno navedenim jednakostima, za maksimiziranje površine trokuta ABC potrebno je pronaći maksimum funkcije $f(\beta) = \sin(\beta)(1 - \cos(\beta))$, gdje je $\beta = 2a$. Najjednostavniji način rješavanja je izjednačavanje s nulom:

$$\begin{aligned} f'(\beta) &= \cos(\beta)(1 - \cos(\beta)) + \sin(\beta)\sin(\beta) \\ &= \cos(\beta) - \cos^2(\beta) + (1 - \cos^2(\beta)) \\ &= -2\cos^2(\beta) + cos(\beta) + 1. \end{aligned}$$

Ako je $x = \cos(\beta)$, tada se rješava kvadratna jednadžba $f(x) = -2x^2 + x + 1 = 0$. Rješavanjem se dobiju dva rješenja $x = -\frac{1}{2}$ i $x = 1$. U području promatranja $0 < \beta < 180^o$, samo jednadžba $\cos(\beta) = -\frac{1}{2}$ daje rješenje, i to jedno $\beta = 120^o$, stoga je $2a = 120^o$ i $a = 60^o$, što znači da je ΔABC jednakostraničan.

Posljedično tome, može se utvrditi da među svim trokutima zadane površine, jednakostranični ima najmanji opseg.

Teorem: Među svim trokutima istog opsega, jednakostranični trokut ima najveću površinu.

Dokaz: a, b i c su stranice trokuta, P je površina, $s=(a+b+c)/2$ je poluopseg.

Obzirom da je P konstanta, pitanje je kako maksimizirati $\frac{P^2}{s}=(s-a)(s-b)(s-c)$ za $a+b+c=2s$. Kako bi se riješio problem, primijenimo aritmetički i geometrijski način da za tri uvjeta u, v i w vrijedi tvrdnja da je

$$(u+v+w)/3 \geq (uvw)^{\frac{1}{3}}$$

s jednakošću ako i samo ako je $u=v=w$. Za sva tri uvjeta $(s-a)$, $(s-b)$ i $(s-c)$ slijedi

$$(s/3)^3 \geq (s-a)(s-b)(s-c)=\frac{P^2}{s}.$$

Odnosno,

$P^2 \leq s^4/27$, s jednakošću samo kada je $s-a=s-b=s-c$, tj. za $a=b=c$.

Zaključno, površina trokuta s opsegom $2s$ nikada ne prelazi $\frac{s^2\sqrt{3}}{9}$, tj. točno je $\frac{s^2\sqrt{3}}{9}$ za jednakostranični trokut stranice $\frac{2s}{3}$. Sukladno tome, teorem podrazumijeva ekvivalentnu tvrdnju, tj. među svim trokutima iste površine, jednakostranični trokut ima najmanji opseg.

Alternativni dokaz: Gregoire Nicollierev dokaz podrazumijeva pretpostavku da trokut ABC nije jednakostraničan, tj. ima različite stranice pri čemu je $a=CB$ i $b=CA$. Pretpostavka je da postoji elipsa s fokusom A i B kroz C. Pretpostavit će se da postoji trokut jednakog opsega i veće površine zamjenom C s točkom elipse koja je na osi drugačijoj od AB. Mogu se reducirati mogući jednakokračni trokuti za koje vrijedi $a = b$ i $c = 2d$. Uzimanjem opsega 2, jedan od trokuta je $a = 1 - d$ i površina trokuta je

$$[ABC]^2 = d^2(a^2 - d^2) = d^2 - 2d^3$$

Pod uvjetom $d \geq 0$ vrijedi

$$d^2 - 2d^3 = \frac{1}{27} - \left(d - \frac{1}{3}\right)^2\left(2d + \frac{1}{3}\right)$$

što se naziva Taylorovo proširenje s vrijednošću $\frac{1}{3}$. Slijedi

$d^2 - 2d^3 \leq \frac{1}{27}$. Vrijednost $\frac{1}{27}$ dobivena je za $d = \frac{1}{3}$ i za $a = b = c = \frac{2}{3}$.

3.2. Izoperimetrijski problem četverokuta

Teorem: Među svim četverokutima istog opsega, kvadrat ima najveću površinu.

ili

Teorem: Među svim četverokutima iste površine, kvadrat ima najmanji opseg.

Dokaz: Dokazivanje izoperimetrijskog teorema za četverokute provodi se u tri koraka.

1. Za svaki četverokut (koji nije paralelogram), postoji paralelogram s manjim opsegom, ali jednakom površinom.
2. Za svaki paralelogram (koji nije pravokutnik), postoji pravokutnik s većom površinom, ali manjim opsegom.
3. Za svaki pravokutnik (koji nije kvadrat), postoji kvadrat veće površine, ali istog opsega.

Ako je O opseg, a P površina geometrijskog lika u ravnini, tada za kvadrat vrijedi $O^2 = 16P$. Ovo vrijedi iz sljedećeg:

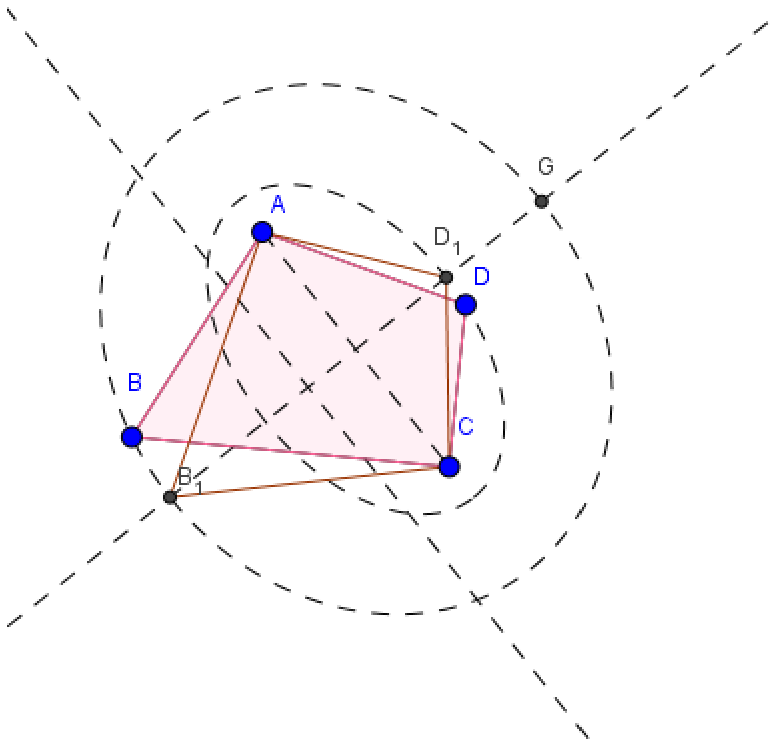
Neka je a duljina stranice kvadrata, tada je opseg tog kvadrata, O jednak $4a$, tj. $O = 4a$. Površina tog istog kvadrata, P, jednaka je $P = a^2$. Kvadriranjem opsega, dobije se $O^2 = 16a^2$, dok množenjem površine s 16 se dobije $16P = 16a^2$. Iz toga se lako da zaključiti da vrijedi $O^2 = 16P$.

Ova jednakost je ekvivalentna nejednakosti $O^2 \geq 16P$ za bilo koji četverokut, s jednakošću jedino za kvadrat. Za nekonveksni četverokut, jedna od dijagonala prelazi u vanjštinu lika. Ako je dijagonala AC, tada je četverokut $ABCD'$, gdje je D' zrcalna slika od D u AC i ima jednak opseg kao $ABCD$, ali očigledno veću površinu.

Za konveksni četverokut, dokaz se odvija u tri koraka, počevši od četverokuta koji nema oblik deltoida ("zmaja"), ali je potrebno naći četverokut oblika deltoida ("zmaja") istog opsega, ali veće površine. Za lik oblika deltoid ("zmaja") koji nije romb, potrebno je naći romb jednakog opsega, ali veće površine. I u konačnici, za romb koji nije kvadrat, potrebno je naći kvadrat jednakog opsega, ali veće površine.

a) četverokut u deltoid (lik oblika "zmaja")

Ako je $AD \neq CD$, potrebno je nacrtati elipsu s fokusima u A i C i koja prolazi kroz D. Neka simetrala od AC presijeca elipsu u D_1 na istoj strani osi AC kao D. Tada vrijedi $AD + AC = AD_1 + CD_1$ (zato što su to točke elipse), ali i $P_{ACD_1} > P_{ACD}$ jer dva trokuta imaju jednaku osnovicu AC s različitim visinama (Slika 31.). Naime, visina trokuta ACD_1 je dulja od visine trokuta ACD. Iz razloga tog, što visina trokuta ACD_1 pripada maloj osi elipse s fokusima u A i C, koja prolazi kroz točku D.

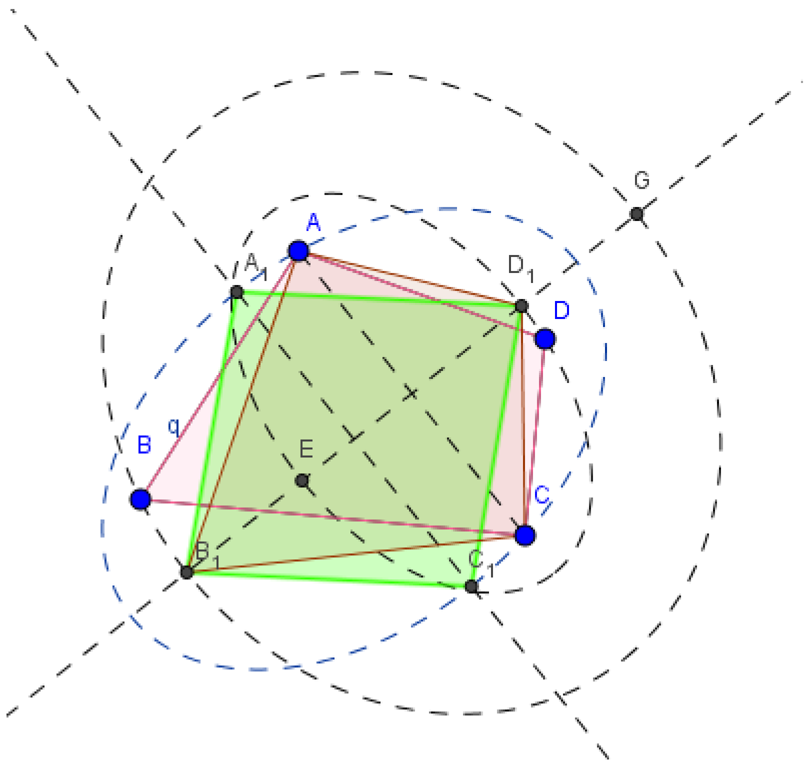


Slika 31. Prvi korak dokaza izoperimetrijskog problema za četverokute - četverokut u oblik "zmaja"

U slučaju $AB = BC$ može se pristupiti sljedećem koraku. Ako ne, ucrtava se elipsa s fokusima u A i C koja prolazi kroz B, pa je $AB + BC = AB_1 + B_1C$ i $P_{AB'C} > P_{ABC}$, gdje je B_1 sjecište elipse s fokusima u A i B i simetrale AC. Uspoređujući trokute, može se utvrditi da četverokut AB_1CD_1 ima jednaki opseg kao četverokut $ABCD$, ali veću površinu.

b) lik oblika deltoid ("zmaja") u romb

Za četverokut AB_1CD_1 vrijedi $AB_1 = B_1C$ i $AD_1 = CD_1$. Ako vrijedi $AB_1 = AD_1$, četverokut je romb i može se pristupiti sljedećem koraku. Ako ne, potrebno je nacrtati elipsu s fokusima u B_1 i D_1 koja prolazi kroz A, a C također leži na elipsi (Slika 32.).



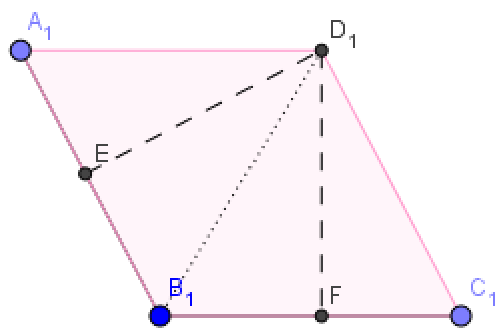
Slika 32. Drugi korak dokaza izoperimetrijskog problema za četverokute - oblik "zmaja" u romb

Zaključno, četverokut $A_1B_1C_1D_1$ ima isti opseg (zbog svojstva točaka elipse) kao četverokut AB_1CD_1, ali veću površinu (zato što trokuti $A_1B_1C_1$ i $B_1C_1D_1$ imaju veću površinu nego trokuti AB_1C_1 i B_1CD_1).

c) romb u kvadrat

Romb $A_1B_1C_1D_1$ ima površine od dva trokuta $A_1B_1D_1$ i $B_1C_1D_1$. Njihove površine su jednake polovini umnoška njihovih osnovica A_1B_1 i B_1C_1 s visinama D_1E i D_1F. Obje visine nisu dulje od stranice A_1D_1 i C_1D_1 trokuta. Jednake su samo kada je $A_1B_1C_1D_1$ kvadrat (Slika 33.).

Znamo da je opseg romba jednak $O = 4a$, što je i ujedno opseg traženog kvadrata. Površina romba je $P = a \cdot v$, dok je površina kvadrata $P = a^2$. Vidimo da je visina romba manja od stranice kvadrata, stoga možemo zaključti da je površina romba manja od površine kvadrata.

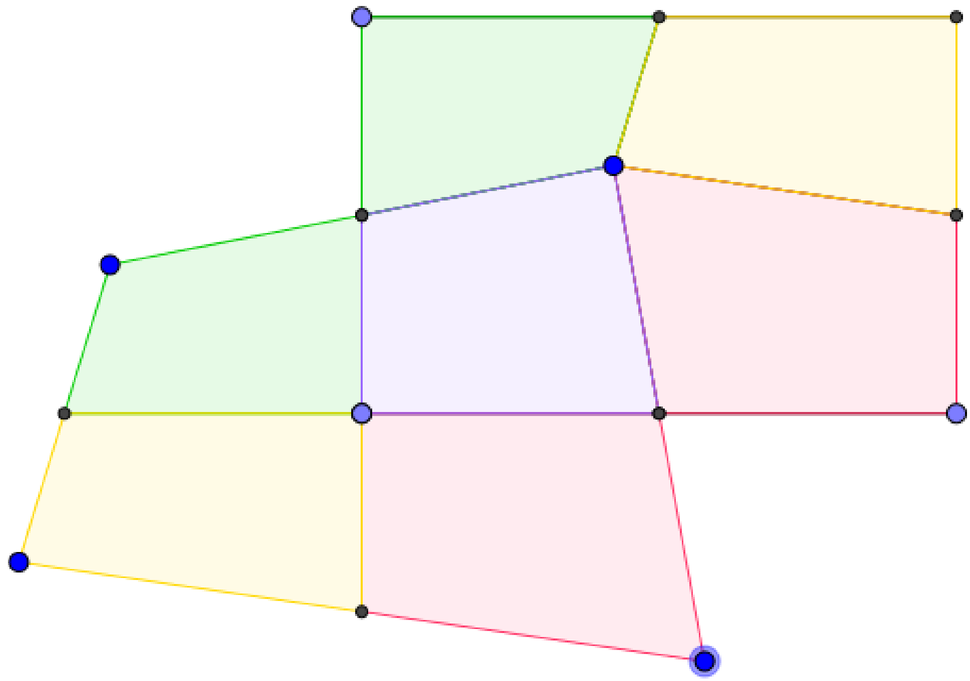


Slika 33. Treći korak dokaza izoperimetrijskog problema za četverokute - romb u kvadrat

3.3. Paralelogrami među četverokutima

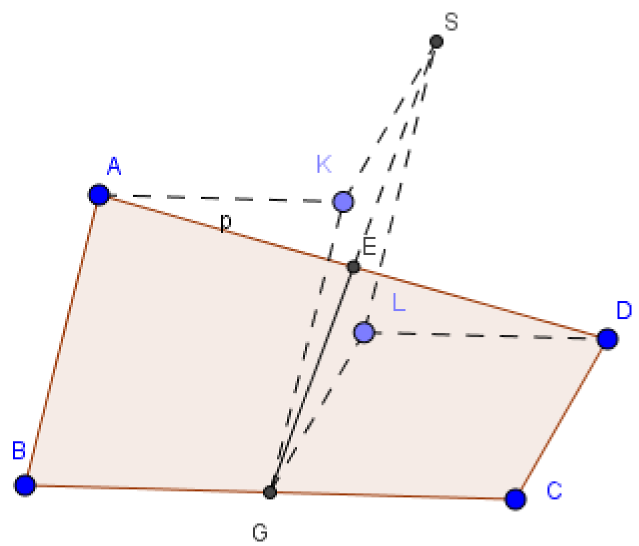
Teorem: Za svaki konveksni i nekonveksni četverokut *ABCD*, postoji paralelogram $(OO'B'O'')$ iste površine, ali manjeg opsega.

Dokaz: Na slici je primjer različitih četverokuta (Slika 34.).



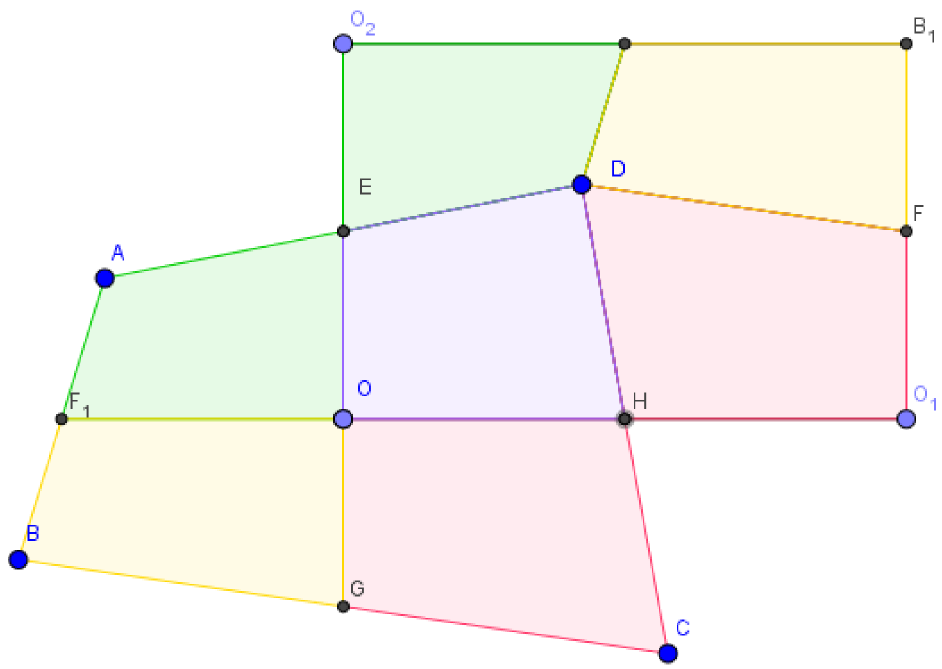
Slika 34. Primjer proizvoljnih četverokuta u ravnini

Dokazivanje ovisi o svojstvima srednjica, tj. dužina koje spajaju središnje točke nasuprotnih stranica četverokuta (Slika 35.).



Slika 35. Obilježja linija koje spajaju središnje točke nasuprotnih stranica četverokuta

U navedenom primjeru, u četverokutu $ABCD$, E je polovište od AD, G je polovište od BC. Iz toga proizlazi da je $2EG \leq GK + KS = GK + GL = AB + CD$. Jednakost se primjenjuje na primjer četverokuta (Slika 36.).



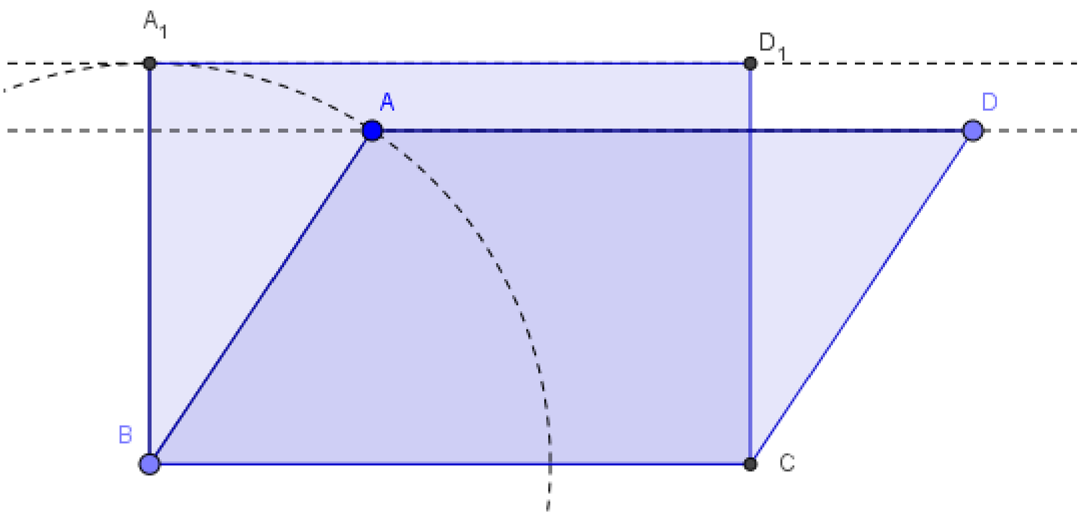
Slika 36. Primjena srednjice na proizvoljni primjer četverokuta u ravnini

Slijedi $2OO_1 = 2F_1H \leq AD + BC$ i $2OO_2 = 2EG \leq AB + CD$. Može se zaključiti da paralelogram $OO_1B_1O_2$ s opsegom $2(OO_1 + OO_2) \leq AD + BC + AB + CD$ je opseg od $ABCD$. Iz navedenog primjera može se utvrditi da se rekonstrukcijom može lako zaključiti da dva četverokuta imaju istu površinu.

3.4. Izoperimetrijski problem paralelograma

Teorem: Za bilo koji paralelogram (koji nije pravokutnik), postoji pravokutnik istog opsega, ali veće površine.

Dokaz: Paralelogrami istih osnovica i istih paralela imaju jednaku površinu. Rekonstrukcijom u pravokutnike, očigledno je da među pravokutnicima iste osnovice površina raste promjenom udaljenosti između paralelnih linija. Unutar kruga, točka najdalja od promjera leži na okomici radijusa, dok je površina pravokutnika među svim paralelogramima s istim stranicama najveća (Slika 37.).



Slika 37. Izoperimetrijski problem paralelograma

4. Primjeri izoperimetrijskog problema primjereni primjeni u nastavi matematike u srednjim školama

4.1. Obilježja nastave matematike u srednjim školama u Republici Hrvatskoj

Stanje srednjoškolskog obrazovanja, s naglaskom na područja prirodnih znanosti kao što je matematika, daleko je od zadovoljavajućeg. Nastavna građa matematike te proces poučavanja učenika i dalje ima sljedeća obilježja: nastavne cjeline su jasno podijeljene, slabo je usvajanje znanja, nastava matematike je slabo povezana s nastavom iz drugih predmeta, znanja se prenose uglavnom deduktivno u strukturiranom obliku, te rijetko izlazi iz okvira matematičke građe, a praktički nikada iz okvira građe matematike isključivo samo za razinu srednje škole.

Glavna obilježja nastavne građe matematike u srednjim školama su:

- zadaci su najčešće zatvorenog tipa, tj. zadaci su zadani precizno samo s onim podacima koji su potrebni za njihova rješavanja,
- zadaci imaju jedinstveno rješenje,
- zadatkom je zadana i metoda rješavanja,
- veliki je nedostatak zadataka otvorenog tipa koji podrazumijevaju problemsko i samostalno istraživanje, eksperimentiranje i otkrivanje metoda rješavanja i rješenja, pri tome se podrazumijeva i samostalni izbor metode rješavanja, te
- zadaci su rijetko povezani s realnim svijetom, tj. s problemima iz života koje je potrebno matematički opisati i postaviti matematički problem.

Dodatni problemi izvođenja nastave iz matematike su:

- nastava se odvija prema metodi predavanja i dijaloga na relaciji nastavnik-učenik,
- prevladava individualni način rada učenika,

- u praksi je rijetko prisutan suradnički rad više učenika na istom matematičkom problemu, tj. vrlo je slaba komunikacija između učenika s ciljem rješavanja matematičkog problema, te
- nastavom se ne razvija samoorganizacija, duh poticanja i analitički način razmišljanja kod učenika.

Sukladno navedenom, potrebno je osuvremeniti način odvijanja nastave matematike na način da se:

- u nastavnu građu uključi otvorenost prema problemskim zadacima iz stvarnog života,
- nastavna građa matematike češće povezuje s drugim predmetima, tj. drugim znanstvenim područjima i djelatnostima,
- uvede model timskog rada učenika,
- razvija učenička matematička kompetencija, a ne samo vještina rješavanja matematičkih zadataka, te
- posveti pažnja razvoju drugih vještina (posebno komunikacijskih i organizacijskih).

4.2. Primjeri zadataka primjereni nastavi matematike u srednjim školama

U ovom podpoglavlju prikazani su primjeri jednostavnijih zadataka s područja diferencijalne geometrije, a povezano s pojmom izoperimetrijskog problema geometrijskih likova u ravnini, te se kao takvi mogu tretirati kao primjereni za nastavu matematike u srednjim školama. Važno je istaknuti da se brojni problemi mogu riješiti na različite načine pomoću primjene metode analogije i generalizacije.

Počinjemo najprije s aktivnošću u kojoj učenici otkrivaju AG – nejednakost.

Aktivnost 1. AG – nejednakost

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti AG – nejednakost, tj. da za svaki izbor nenegativnih realnih brojeva a i b vrijedi $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Nastavna metoda: metoda dijaloga

Oblik rada: frontalni, indivudualni

Potrebni materijal: bilježnica, pribor za pisanje i brisanje

Tijek aktivnosti:

- nastavnik postavlja učenicima problem $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ na ploču i kaže im da pokušaju riješiti sami
- učenici uočavaju da se na lijevoj strani nalazi kvadrat razlike te da ta nejednakost uvijek vrijedi za bilo koji izbor nenegativnih realnih brojeva a i b
- primjer učeničkog rješenja:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

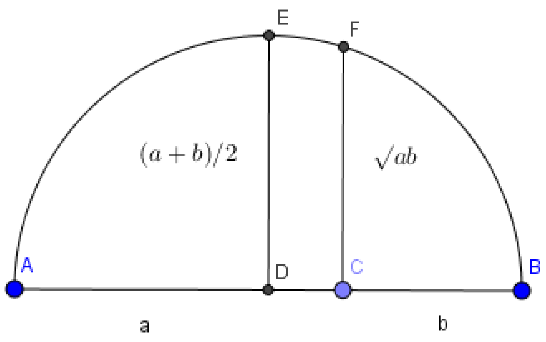
$$\Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

- nastavnik govori učenicima da se dobivena nejednakost naziva AG – nejednakost, odnosno aritmetičko – geometrijska nejednakost
- nakon toga nastavnik može u alatu dinamične geomtrije pokazati vizualno nejednakost



Slika 38. AG – nejednakost

Aktivnost 2. Dokaz AG – nejednakosti

Cilj aktivnosti: Učenici će dokazati AG – nejednakost, tj. da za svaki izbor nenegativnih realnih brojeva *a* i *b* vrijedi $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

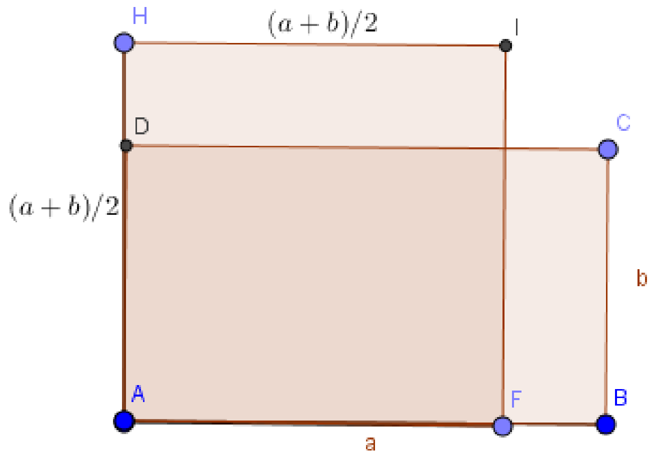
Nastavna metoda: metoda dijaloga

Oblik rada: frontalni, indivudualni

Potrebni materijal: bilježnica, pribor za pisanje i brisanje

Tijek aktivnosti:

- nastavnik piše na ploču iskaz AG – nejednakosti: *Za svaki izbor nenegativnih realnih brojeva a i b vrijedi* $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$*, s jednakošću ako i samo ako je a = b.*
- Dokaz:
- 1. način :



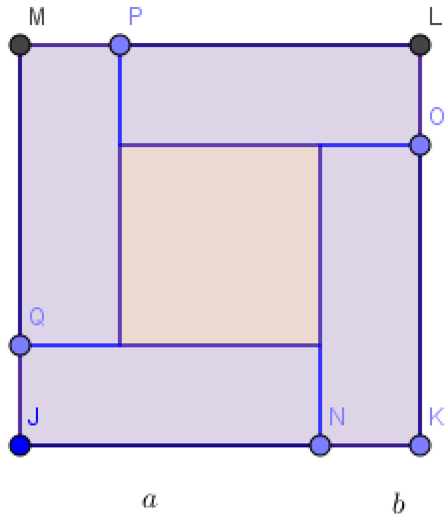
Slika 39. Dokaz 1 – AG-nejednakost

- neka je četverokut *ABCD* pravokutnik koji ima duljine stranica a i b
- površina mu je onda jednaka $P = a \cdot b$
- nacrtajmo kvadrat *AFIH* kao na slici tako da mu je duljina stranice $\frac{a+b}{2}$
- površina tog kvadrata iznosi $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
- uspoređujući pravokutnik i kvadrat gledajući sliku uočavamo da je površina pravokutnika manja od površine kvadrata, tj.

$$a \cdot b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$$

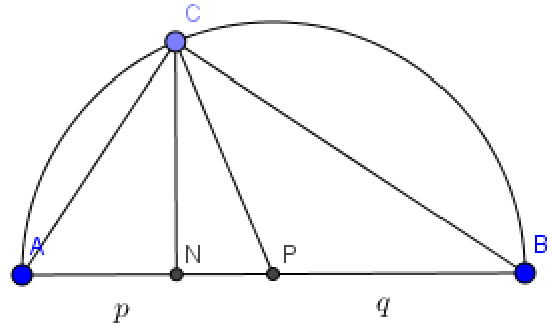
- 2. način:



Slika 40. Dokaz 2 - AG-nejednakosti

- neka je dan kvadrat *JKLM* sa stranicom duljine $a + b$
- podijeljen na sukladne pravokutnike sa duljinama stranica a i b
- površina kvadrata iznosi $(a+b)^2$
- površina jednog pravokutnika iznosi $a \cdot b$
- onda površina četiri takva pravokutnika iznosi $4ab$
- iz slike možemo zaključiti da vrijedi $(a+b)^2 \geq 4ab$
- korjenovanjem lijeve i desne strane dobije se $a+b \geq 2\sqrt{ab}$
- dijeljenjem lijeve i desne strane s 2 dobije se $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

- 3. način:



Slika 41. Dokaz 3 – AG-nejednakost

- trokut ABC je pravokutan s pravim kutom pri vrhu C
- duljina dužine $|AB| = c = p + q$
- $|PA| = |PB| = \frac{|AB|}{2} = \frac{c}{2} = \frac{p+q}{2}$
- $|PC| = \frac{p+q}{2}$, jer je C točka kružnice sa središtem u P i polumjerom $\frac{p+q}{2}$
- Po Euklidovom poučku vrijedi $|CN| = \sqrt{pq}$
- kako je trokut NPC pravokutni (hipootenuza je dulja od katete) vrijedi $\frac{p+q}{2} \geq \sqrt{pq}$

Aktivnost 3: Izoperimetrijski problem trokuta

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti da od svih trokuta jednakog opsega najveću površinu ima jednakostranični.

Oblik rada: frontalni, individualni

Nastavna metoda: metoda dijaloga

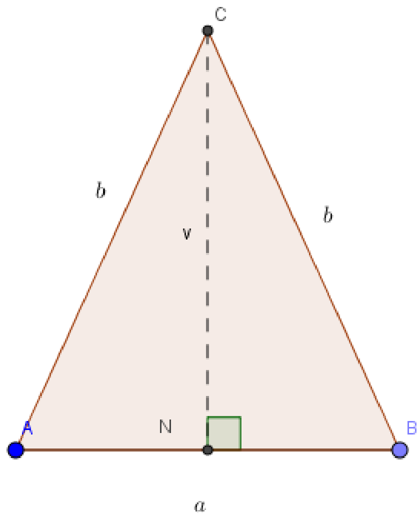
Potrebni materijal: bilježnica, pribor za pisanje

Tijek aktivnosti:

- nastavnik postavlja učenicima problem na ploču:

Primjer: Od svih jednakokračnih trokuta zadanog opsega odredite onaj s najvećom površinom.

Rješenje: Neka je dan trokut *ABC*, kao na slici.



Slika 42. Primjer jednakokračnog trokuta

Opseg jednakokračnog trokuta iznosi $O = a + 2b$. Opseg je zadan, dakle konstantan. Tražimo maksimalnu površinu. Površina bilo kojeg trokuta jednaka je polovini umnoška duljine stranice i duljine visine na tu stranicu, tj. $P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2}$.

Iz izraza za opseg $O = a + 2b$, možemo izraziti a, tj.

$$a = O - 2b$$

Uočavamo das možemo izračunati visinu primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut ΔANC, s hipotenuzom $\overline{AC}$, te katetama $\overline{AN}$ i $\overline{NC}$.

Vrijedi sljedeće

$$|AC| = b, |AN| = \frac{a}{2}, |NC| = v$$

$$b^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow v^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Zatim, za $a = O - 2b$, vrijedi

$$v = \sqrt{b^2 - \frac{(O-2b)^2}{4}}$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{b^2 - \frac{O^2 - 4Ob + 4b^2}{4}}$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{b^2 - \frac{O^2}{4} + Ob - b^2}$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{-\frac{O^2}{4} + Ob}.$$

Za $a = O - 2b$ i $v = \sqrt{-\frac{O^2}{4} + Ob}$ vrijedi

$$P = \frac{(O-2b)}{2} \cdot \sqrt{Ob - \frac{O^2}{4}}.$$

Uočavamo da je površina funkcija koja ovisi o *b, O* je konstanta.

Stoga, možemo pisati

$$P:\left\langle 0,\frac{O}{4}\right\rangle \to \mathbb{R}, P(b)=\left(\frac{O}{2}-b\right)\sqrt{Ob-\frac{O^2}{4}} .$$

Učenici četvrtog razreda srednje škole ovaj zadatak riješit će primjenom derivacije i izjednačavanja s nulom.

$$P'(b)=\left(\frac{O}{2}-b\right)'\sqrt{Ob-\frac{O^2}{4}}+\left(\frac{O}{2}-b\right)\left(\sqrt{Ob-\frac{O^2}{4}}\right)'$$

$$\Leftrightarrow P'(b)=-\sqrt{Ob-\frac{O^2}{4}}+\left(\frac{O}{2}-b\right)\left(\frac{O}{2\sqrt{Ob-\frac{O^2}{4}}}\right)$$

- desnu stranu svodimo na zajednički nazivnik

$$\Leftrightarrow P'(b)=\frac{-2\left(Ob-\frac{O^2}{4}\right)+\left(\frac{O}{2}-b\right)\cdot O}{2\sqrt{Ob-\frac{O^2}{4}}}$$

$$\Leftrightarrow P'(b)=\frac{-2Ob+\frac{O^2}{2}+\frac{O^2}{2}-Ob}{2\sqrt{Ob-\frac{O^2}{4}}}$$

$$\Leftrightarrow P'(b)=\frac{-3Ob+O^2}{2\sqrt{Ob-\frac{O^2}{4}}}$$

- učenici su uočili da trebaju odrediti ekstrem kvadratne funkcije
- nakon što su derivirali funkciju potrebno je prvu derivaciju izjednačiti s nulom

$$\Leftrightarrow P'(b)=0$$

$$\Leftrightarrow -3Ob+O^2=0$$

$$\Leftrightarrow -3Ob=-O^2 \;/\div(-3O)$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{-O^2}{-3O}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{O}{3}$$

- učenici uočavaju da je duljina stranice *b* jednaka trećini opsega, a znamo da je opseg na početku jednak

$$O = a + 2b$$

- iz toga slijedi

$$O = a + 2\frac{O}{3}$$

$$\Leftrightarrow a = O - 2\frac{O}{3}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{O}{3}$$

- učenici zaključuju da je riješenje problema jednakostranični trokut
- nakon toga nastavnik postavlja učenicima sljedeći zadatak

Primjer: Od svih trokuta zadanog opsega $(a + b + c = const)$, potrebno je odrediti trokut najveće površine.

Rješenje: $a + b + c = const \Rightarrow s = \dfrac{a+b+c}{2} = const$

Potrebno je primjeniti Heronovu formulu:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s}\left(\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}\right)^{\frac{3}{2}} \leq \sqrt{s}\left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right)^{\frac{3}{2}} =$$

$$\sqrt{s}\left(\frac{(s+s+s-(a+b+c)}{3}\right)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{s}\left(\frac{3s-2s}{3}\right)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{s}\left(\frac{s}{3}\right)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{s}\,\frac{\sqrt{s^3}}{3\sqrt{3}}=\frac{s^2}{3\sqrt{3}},$$

s jednakošću samo za $a=b=c$, tj. jednakostranični trokut. Iz navedenog slijedi da jednakostranični trokut ima najveću površinu.

Primjer: Od svih jednakokračnih trokuta zadane površine potrebno je naći onaj s najmanjim opsegom.

Rješenje:

- površina je konstantna
- formula za površinu trokuta duljine stranice a i visine na tu stranicu v_a

$$P=\frac{a\cdot v_a}{2}=const.$$

- v_a možemo izračunati preko Pitagorinog poučka na pravokutan trokut s katetama duljina v_a, $\frac{a}{2}$ i b

$$v_a^{\,2}=b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow v_a=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$$

- izrazimo v_a iz formule za površinu

$$v_a=\frac{2P}{a}$$

- ako su lijeve strane jednadžbi jednake, onda su i desne, pa slijedi

$$\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{2P}{a} \,/^2$$
$$\Leftrightarrow b^2-\frac{a^2}{4}=\frac{4P^2}{a^2}$$
$$\Leftrightarrow b^2=\frac{4P^2}{a^2}+\frac{a^2}{4}$$
$$\Rightarrow b=\sqrt{\frac{4P^2}{a^2}+\frac{a^2}{4}}$$

- uočimo da bi uopće postojao trokut mora vrijediti $a > 0$, $b > 0$,

  stoga je očito $b=\sqrt{\frac{4P^2}{a^2}+\frac{a^2}{4}}>0$

- formula za opseg jednakokračnog trokuta s osnovicom duljine a i krakom duljine b je

$$O=a+2b$$

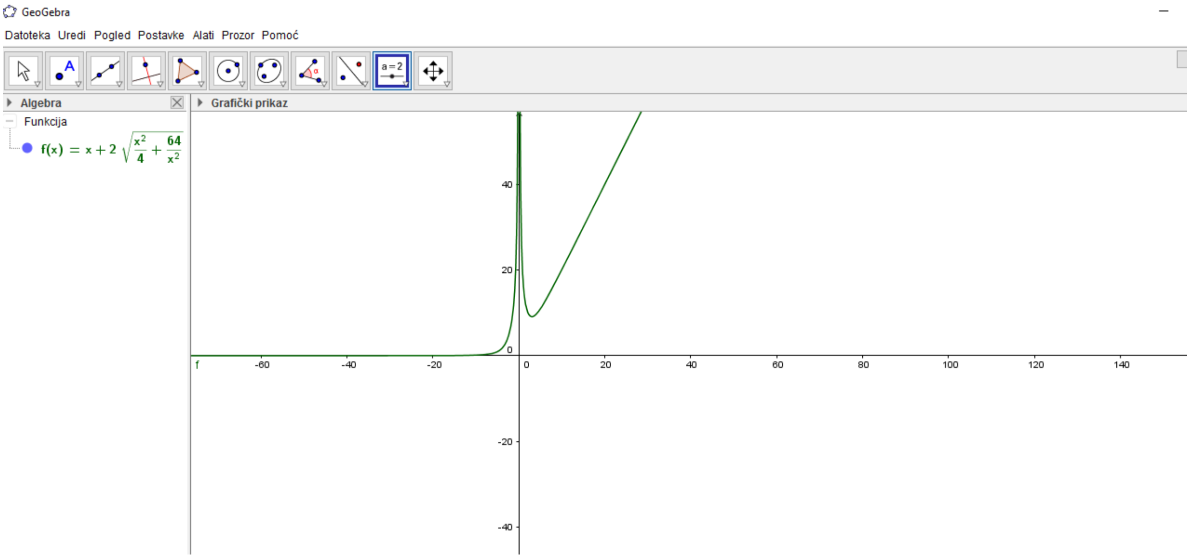
- uvrštavanjem dobivenog izraza za b u formulu za opseg jednakokračnog trokuta slijedi

$$O=a+2\sqrt{\frac{4P^2}{a^2}+\frac{a^2}{4}}$$

- upčimo da opseg ovisi samo o duljini osnovice a, pa ga možemo promatrati kao funkciju

$$O:\langle 0,+\infty\rangle\to\mathbb{R}, O(a)=a+2\sqrt{\frac{4P^2}{a^2}+\frac{a^2}{4}}$$

- graf ove funkcije učenicima pokažemo u geogebri za neku konkretnu površinu npr. $P=4$



Slika 43. Prikaz u Geogebri

- učenici uočavaju da za $x > 0$, graf funkcije je jedna grana hiperbole i da poprima minimum
- dakle, postoji trokut s najmanjim opsegom među svim trokutima iste površine

Aktivnost 4: Izoperimetrijski problem četverokuta

Možemo najprije učenicima ispričati motivacijsku priču, legendu o Dido.

Dido je bila kćer kralja Tyre, prema legendi ona je osnovala Kartagu. Kada je Dido 814. godine prije Krista stigla na obale Tunisa, tražila je komad zemlje. Na njezin zahtjev, dobila je onoliko zemlje kolko može prekriti volova koža. Uz izvanrednu matematičku intuiciju, ona je počela rezati volovu kožu na tanke trake, te njima okružila zemlju. Ovaj dio zemlje postao je Kartaga, a Dido kraljica. Dakle, Dido je s određenim opsegom, tarkicama od volove kože, zazuzela najveću površinu. Smatra se da je ovo jedan od prvih izoperimetrijskih problema.

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti da od svih četvrokuta jednakog opsega najveću površinu ima kvadrat. I njemu dualni problem, od svih četverokuta jednake površine najmanji opseg ima kvadrat.

Oblik rada: frontalni, individualni

Nastavna metoda: metoda dijaloga

Potrebni materijal: bilježnica, pribor za pisanje

Tijek aktivnosti:

- nastavnik postavlja učenicima problem na ploču:

Primjer: Ogradom zadane duljine treba ograničiti pravokutno zemljište najveće moguće površine.

Rješenje: Od svih pravokutnika istog opsega potrebno je odrediti pravokutnik s najvećom površinom. U tu svrhu će se definirati polazne veličine.
a, b - duljine susjednih stranica pravokutnika
O - opseg pravokutnika
P - površina pravokutnika

$$P = a \cdot b\,,\ O = 2a + 2b\,,\ O = const\,,\ a,b > 0\,,\ a,b = ?$$

- iz formule za opseg izrazimo jednu stranicu pravokutnika, npr. *a*

$$\begin{aligned} &O = 2a + 2b \\ &\Leftrightarrow 2a = O - 2b / : 2 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}O - b \end{aligned}$$

- nakon toga uvrstimo u formulu za površinu

$$\begin{aligned} &P = \left(\frac{1}{2}O - b\right) \cdot b \\ &\Leftrightarrow P = \frac{1}{2}Ob - b^2 \end{aligned}$$

- učenici uočavaju da im je opseg konstanatn te da zapravo imaju funkciju površine koja ovisi o *b*, dakle

$$P(b) = \frac{1}{2}Ob - b^2$$

- nakon toga trebaju odredit domenu te funkcije

$$\frac{1}{2}Ob - b^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow b^2 = \frac{1}{2}Ob / : b$$
$$\Leftrightarrow b = \frac{1}{2}O$$

- dakle, domena funkcije je

$$D_{P(b)} = \left\langle 0, \frac{1}{2}O \right\rangle$$

- učenici drugog razreda srednje škole ovaj zadatak će riješiti koristeći formulu za tjeme grafa kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$T\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

- zato što znaju da je tjeme grafa funkcije "najviša" ili "najniža" točka grafa funkcije
- učenici mogu sebi ispisati

$$a = -1$$
$$b = \frac{1}{2}O$$
$$c = 0$$

- kako je $a < 0$, graf funkcije će imati "najvišu" točku, odnosno funkcija će imati maksimum
- uvrštavajući vrijednosti koeficijenata u formulu za tjeme slijedi

$$T\left(\frac{-\frac{1}{2}O}{2\cdot(-1)},\frac{4\cdot(-1)\cdot 0-\left(\frac{O}{2}\right)^2}{4\cdot(-1)}\right)$$

$$\Leftrightarrow T\left(\frac{-\frac{1}{2}O}{-2},\frac{-\frac{O^2}{4}}{-4}\right)$$

$$\Leftrightarrow T\left(\frac{O}{4},\frac{O^2}{16}\right)$$

- učenici uočavaju da za stranicu $b=\frac{O}{4}$, taj lik ima najveću površinu.
- opseg pravokutnika duljina stranica a,b je $O=2a+2b$, pa imamo

$$2a+2\frac{1}{4}O=O$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a+\frac{1}{2}O=O$$

$$\Leftrightarrow 2a=\frac{1}{2}O$$

$$\Leftrightarrow \quad a=\frac{1}{4}O$$

- stranice a i b su jednake duljine, dakle radi se o kvadratu
- učenici četvrtog razreda srednje škole, ovaj zadatak bi riješili primjenom derivacije te izjednačavanjem prve derivacije s nulom
- dakle, funkciju površine o ovisnosti o b

$$P(b)=\frac{1}{2}Ob-b^2$$

- deriviraju

$$P'(b) = \frac{1}{2}O - 2b$$

- zatim izjednačavaju s nulom

$$\begin{aligned} & P'(b) = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{2}O - 2b = 0 \\ & \Leftrightarrow 2b = \frac{1}{2}O \\ & \Leftrightarrow b = \frac{1}{4}O \end{aligned}$$

- zatim uvrštavamo u formulu za opseg

$$\begin{aligned} & O = 2a + 2b \\ & \Rightarrow O = 2a + 2 \cdot \frac{1}{4}O \\ & \Leftrightarrow O = 2a + \frac{1}{2}O \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{2}O = 2a \\ & \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}O \end{aligned}$$

- dakle, vrijedi da je $a = b = \frac{1}{4}O$, što znači da je traženi pravokutnik kvadrat

- treći način rješavnja je primjena AG – njednakosti na

$$P(b) = \frac{1}{2}Ob - b^2$$

- AG – nejednakost za realne brojeve a, b je

$$\frac{1}{2}(a+b) \geq \sqrt{a \cdot b}$$

- slijedi

$$P(b)=\frac{1}{2}Ob-b^2=b\left(\frac{1}{2}O-b\right)=\sqrt{\left[b\left(\frac{1}{2}O-b\right)\right]^2}$$
$$\le\left(\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{2}O-b\right)\right)^2=\left(\frac{1}{4}O\right)^2=\frac{1}{16}O^2$$

- pitamo se kada je

$$P=\frac{1}{16}O^2$$

- to vrijedi samo kada je $a=b$
- dakle, rješenje problema je kvadrat
- nakon toga nastavnik pred učenike postavlja dualni problem

Primjer: Od svih pravokutnika iste površine potrebno je odrediti pravokutnik najmanjeg opsega.

Rješenje: Neka su a, b duljine susjednih stranica pravokutnika.

- formula za površinu pravokutnika je $P=a\cdot b$
- opseg pravokutnika računa se po formuli $O=2a+2b$
- površina je konstantna

$$P=a\cdot b=const.$$

- iz formule za površinu izrazimo jednu stranicu, npr.

$$P=a\cdot b$$
$$\Leftrightarrow b=\frac{P}{a}$$

- uvrstimo u izraz za opseg

$$O = 2a + 2b$$
$$\Leftrightarrow O = 2(a + b)$$
$$\Leftrightarrow O = 2\left(a + \frac{P}{a}\right)$$
$$\Leftrightarrow O = 2a + 2\frac{P}{a}$$

- kako je površina konstantna, ovaj izraz ovisi samo o *a*, dakle radi se o funkciji u ovisnosti od *a*

$$O(a) = 2a + 2\frac{P}{a}$$

- domena funkcije je

$$D_O = \langle 0, +\infty \rangle$$

- kosa asimptota funkcije $O(a) = 2a + 2\frac{P}{a}$ je

$$b = 2a$$

- nema maksimuma, nego minimum, funkcija nije poznata, pa se primjenjuje AG nejednakost na izraz

$$O(a) = 2a + 2\frac{P}{a}$$

- AG nejednakost za realne brojeve *a*, *b* je

$$\frac{1}{2}(a + b) \geq \sqrt{a \cdot b}$$

- namještamo AG nejednakost

$$\frac{1}{2}(a + \frac{P}{a}) \geq \sqrt{a \cdot \frac{P}{a}}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a + \frac{P}{a}\right) \geq 4\sqrt{P}$$

- sada primijenjujemo

$$O(a)=2a+2\frac{P}{a}=2\left(a+\frac{P}{a}\right)=4\cdot\frac{1}{2}\left(a+\frac{P}{a}\right)\geq 4\sqrt{a\frac{P}{a}}=4\sqrt{P}$$

$$\Rightarrow O(a)\geq 4\sqrt{P}, P=const$$

- pitamo se kada je $O(a)=4\sqrt{P}$
- znamo

$$O=2a+2b$$

$$4\sqrt{P}=4\sqrt{(a\cdot b)}\text{ , jer je } P=a\cdot b$$

- iz toga slijedi

$$2a+2b=4\sqrt{a\cdot b}\ /^2$$

$$\Leftrightarrow (2a+2b)^2=16ab$$

$$\Leftrightarrow 4a^2+8ab+4b^2=16ab$$

$$\Leftrightarrow 4a^2-8ab+4b^2=0$$

$$\Leftrightarrow (2a-2b)^2=0\ /\sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow 2a-2b=0$$

$$\Leftrightarrow 2a=2b\ /:2$$

$$\Leftrightarrow a=b$$

- dakle, riješenje je kvadrat
- onda je površina jednaka

$$P=a^2$$

- to možemo pisati kao

$$P=a\cdot a$$

- iz toga izrazimo a

$$a = \frac{P}{a}$$

- onda za opseg vrijedi

$$\Leftrightarrow 2a + 2\frac{P}{a} = 4\sqrt{P} \, /^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 8P + 4\frac{P^2}{a^2} = 16P$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 8P + 4\frac{P^2}{a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2a - \frac{2P}{a}\right)^2 = 0 \, / \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow 2a - \frac{2P}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a = \frac{2P}{a} \, / \cdot \frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = P \, / \sqrt{}$$

$$a = \sqrt{P} \Rightarrow a_{\min} = \sqrt{P}$$

$$b_{\min} = \frac{P}{a_{\min}} = \frac{P}{\sqrt{P}} \cdot \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P}} = \frac{P\sqrt{P}}{P} = \sqrt{P}$$

$$\Rightarrow a = b$$

- dakle, rješenje je kvadrat
- učenici četvrtog razreda srednje škole riješili bi ovaj zadatak primjenom derivacje na funkciju za opseg u ovisnosti o varijabli a te izjednačili s nulom
- kada deriviramo spomenutu funkciju imamo

$$O'(a) = 2 - 2\frac{P}{a^2}$$

- izjednačavamo s nulom

$$\begin{aligned} &O'(a) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 - 2\frac{P}{a^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\frac{P}{a^2} = 2 \\ &\Leftrightarrow 2P = 2a^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 = P \\ &\Leftrightarrow a = \sqrt{P} \end{aligned}$$

- uvrštavanjem u formulu za površinu pravokutnika $P = a \cdot b$ vrijedi

$$P = \sqrt{P} \cdot b$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{P}{\sqrt{P}} = \frac{P}{\sqrt{P}} \cdot \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P}} = \frac{P\sqrt{P}}{P} = \sqrt{P}$$

- dakle, radi se o kvadratu
- nakon toga može prijeći na rješavanje zadatka s malim varijacijama

Primjer: Od svih pravokutnika iste površine potrebno je odrediti pravokutnik najkraće dijagonale.

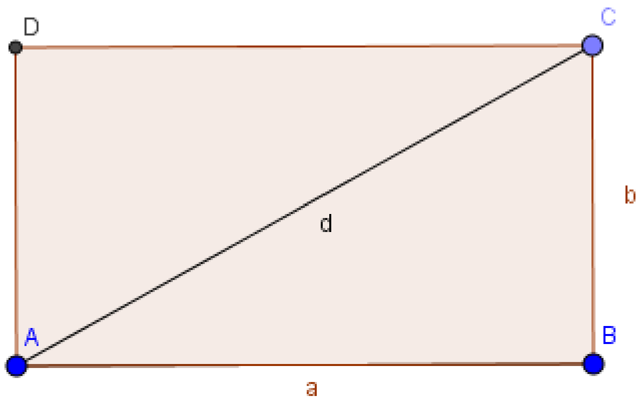
Rješenje:

- neka su *a, b* stranice pravokutnika
- možemo bez smanjenja općenitosti uzeti da je

$$P = 1$$

- površina pravokutnika je $P = a \cdot b$
- iz toga slijedi

$$a \cdot b = 1$$
$$\Leftrightarrow b = \frac{1}{a} \quad a, b > 0$$



Slika 44. Izoperimetrijski problem dijagonale pravokutnika

- dijagonalu možemo izračunati primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut *ABC*

$$d^2 = a^2 + b^2$$

- uvrstimo izraz za *a,* pa slijedi

$$d^2 = a^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}}$$

- učenici uočavaju da duljina dijagonale ovisi samo o *a,* pa onda možemo promatrati funkciju $d : \langle 0, +\infty \rangle \to \mathbb{R}$ zadanu pravilom pridruživanja

$$d(a) = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}}$$

- kvadriramo

$$d^2(a) = a^2 + \frac{1}{a^2}$$

- namještamo kako bi primijenili AG – nejednakost (dodajemo i oduzimamo 2)

$$d^2(a) = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 - 2$$

- uočavamo kvadrat zbroja

$$d^2(a) = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2$$

- AG nejednakost za realne brojeve x i y je

$$\frac{1}{2}(x + y) \geq \sqrt{x \cdot y}$$

- AG nejednakost za a i $\frac{1}{a}$ je

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 1 \,/ \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2 \,/^2$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 \geq 4$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} \geq 4 \,/ -2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$$

- znamo

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = d^2(a)$$

- onda slijedi $\quad d^2(a) \geq 2 \,/ \sqrt{\ }$

$$\Leftrightarrow d(a) \geq \sqrt{2}$$

- znamo da je $d(a) \geq 0, \forall a$, a za $a_{\min}$ $d(a) = \sqrt{2}$
- dakle $d(a) = \sqrt{2}$ je najkraća dijagonala, a to je dijagonala kvadrata stranice duljine $a = b = 1$
- sada možemo uzeti da je površina bilo koji realni broj

$$P = const \neq 1,\ P = a \cdot b \Rightarrow b = \frac{P}{a}$$

$$d(a) = \sqrt{a^2 + \frac{P^2}{a^2}} = \sqrt{2\left(\frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{P^2}{a^2}\right)\right)}$$

- primjenjujemo AG – nejednakost

$$d(a) = \sqrt{a^2 + \frac{P^2}{a^2}} = \sqrt{2\left(\frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{P^2}{a^2}\right)\right)} \geq \sqrt{2\sqrt{a^2 \frac{P^2}{a^2}}} = \sqrt{2P}$$

- dakle

$$d(a) \geq \sqrt{2P}$$

- dijagonala je najamnje duljine za

$$d(a) = \sqrt{2P}$$

- pitamo se kada je $d(a) = \sqrt{2P}$

$$\sqrt{a^2 + \frac{P^2}{a^2}} = \sqrt{2P} \ /^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + \frac{P^2}{a^2} = 2P \ / \ a^2$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 2Pa^2 + P^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{1,2}^2 = \frac{2P \pm \sqrt{(2P)^2 - 4P^2}}{2 \cdot 1} = \frac{2P}{2} = P$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{P} \Rightarrow a_{\min} = \sqrt{P}$$

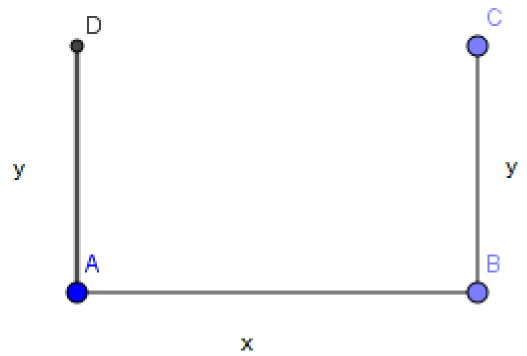
- dakle, dijagonala je najkraće duljine za $a = \sqrt{P}$

$$b_{\min} = \frac{P}{a_{\min}} = \frac{P}{\sqrt{P}} = \frac{P}{\sqrt{P}} \cdot \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P}} = \frac{P\sqrt{P}}{P} = \sqrt{P}$$

- uočimo $a = b$, što znači da od svih pravokutnika jednake površine najkraću dijagonalu ima kvadrat

Primjer: Ogradom zadane duljine, potrebno je s 3 strane ograditi zemljište pravokutnog oblika tako da je njegova površina najveća.

Rješenje:



Slika 45. Ograda

- matematički gledano, to je kao da imamo zadan opseg pravokutnika bez duljine jedne stranice
- dakle, zadano je $x + 2y = D = const., x, y > 0$
- izrazimo x

$$x = D - 2y$$

- formula za površinu pravokutnika duljina susjedniz stranica x, y je

$$P = x \cdot y$$

- izraz za x uvrstimo u prethodnu formulu pa vrijedi

$$P = (D - 2y) \cdot y$$
$$\Leftrightarrow P = yD - 2y^2$$

- uočimo da površina ovisi samo o y, jer je D konstanta, pa je zapravo površina kvadratna funkcija u ovisnosti o y

$$P : \left\langle 0, \frac{D}{2} \right\rangle \to R^+$$

$$P(y) = yD - 2y^2$$

$$P(y) = yD - 2y^2 = y(D - 2y) = 2\left(y\frac{D}{2} - y^2 \right) = 2\left(-y^2 + 2\frac{D}{4}y - \frac{D^2}{16} + \frac{D^2}{16} \right)$$

$$P(y) = \frac{D^2}{8} - 2\left(y^2 - 2\frac{D}{4}y + \frac{D^2}{16} \right) = \frac{D^2}{8} - 2\left(y - \frac{D}{4} \right)^2$$

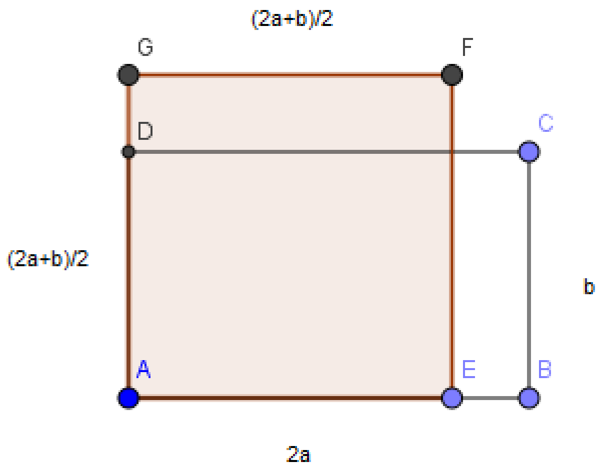
$$y - \frac{D}{4} \geq 0, \forall y$$

Traži se maksimum kad je $y_{\max} = \frac{D}{4}$. Tada je $x_{\max} = D - 2y_{\max} = D - 2\frac{D}{4} = \frac{D}{2}$.

$$P_{\max} = P(y_{\max}) = \frac{D^2}{8}$$

2. način rješavanja

- svesti problem na: maksimalnost površine zemljišta stranica a i b je ekvivalentna maksimalnosti zemljišta stranica $2a$ i b.
- rješenje problema će biti dvostruka površina od tražene



Slika 46. Ograda – 2. način rješavanja

- površina takvog zemljišta bi iznosila

$$P = 2a \cdot b$$

- primjenom AG – nejednakosti na $2a$ i b vrijedi

$$P = 2a \cdot b \leq \left(\frac{2a+b}{2} \right)^2$$

- dakle,

$$2ab \leq \left(\frac{2a+b}{2} \right)^2 \; / \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2ab} \leq \frac{2a+b}{2}$$

- što znači da je površina maksimalna ako je

$$P_{\max} = \left(\frac{2a+b}{2}\right)^2 = \frac{(2a+b)^2}{4} = \frac{D^2}{4}$$

- zapravo je ovo dvostruka površina od tražene pa je tražena

$$P_{pravi\max} = \frac{\frac{D^2}{4}}{2} = \frac{D^2}{8}$$

- pitamo se sada kada je površina maksimalna, tj. kada vrijedi jednakost

$$2ab = \frac{D^2}{4}$$

- znamo da je $D = 2a + b$, pa vrijedi

$$2ab = \frac{(2a+b)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2ab = \frac{4a^2 + 4ab + b^2}{4} \; / \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow 8ab = 4a^2 + 4ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 4ab + b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a-b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a - b = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 2a$$

- jednakost vrijedi za $b = 2a$
- izračunajmo sada a i b

$$2a \cdot 2a = \frac{D^2}{4}$$

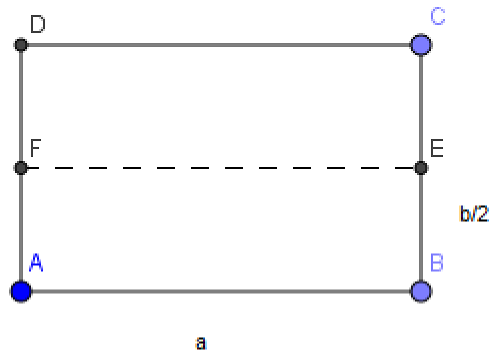
$$\Leftrightarrow 4a^2 = \frac{D^2}{4} \; / \div 4$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{D^2}{16} / \sqrt{}$$

- dakle, $a_{\max} = \frac{D}{4}$, $b_{\max} = \frac{D}{2}$
- za $a = \frac{D}{4}$ i $b = \frac{D}{2}$, površina zemljišta je maksimalna

3. način rješavanja

- svođenje problema na traženje pravokutnika maksimalne površine sa duljinama stranica a i $\frac{b}{2}$



Slika 47. Ograda- 3. Način rješavanja

- prisjetimo se AG – nejednakosti za neke realne brojeve a i b

$$\sqrt{ab} \le \frac{1}{2}(a+b)$$

- znamo da je

$$D = 2a + b / : 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{D}{2} = a + \frac{b}{2}$$

- namještamo AG – nejednakost

$$\sqrt{2a\frac{b}{2}} = \sqrt{2}\sqrt{a\frac{b}{2}} \le \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\left(a+\frac{b}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\frac{D}{2}\right) = \sqrt{2}\frac{D}{4}$$

- dakle, vrijedi

$$\sqrt{2}\sqrt{a\frac{b}{2}} \le \sqrt{2}\frac{D}{4} /^2$$

$$\Leftrightarrow 2a\frac{b}{2} \le 2\frac{D^2}{16}$$

$$\Leftrightarrow ab \le \frac{D^2}{8}$$

- pitamo se kada je $ab = \frac{D^2}{8}$

$$ab = \frac{(2a+b)^2}{8}$$

$$\Leftrightarrow ab = \frac{4a^2+4ab+b^2}{8} / \cdot 8$$

$$\Leftrightarrow 8ab = 4a^2+4ab+b^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2-4ab+b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a-b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a-b = 0$$

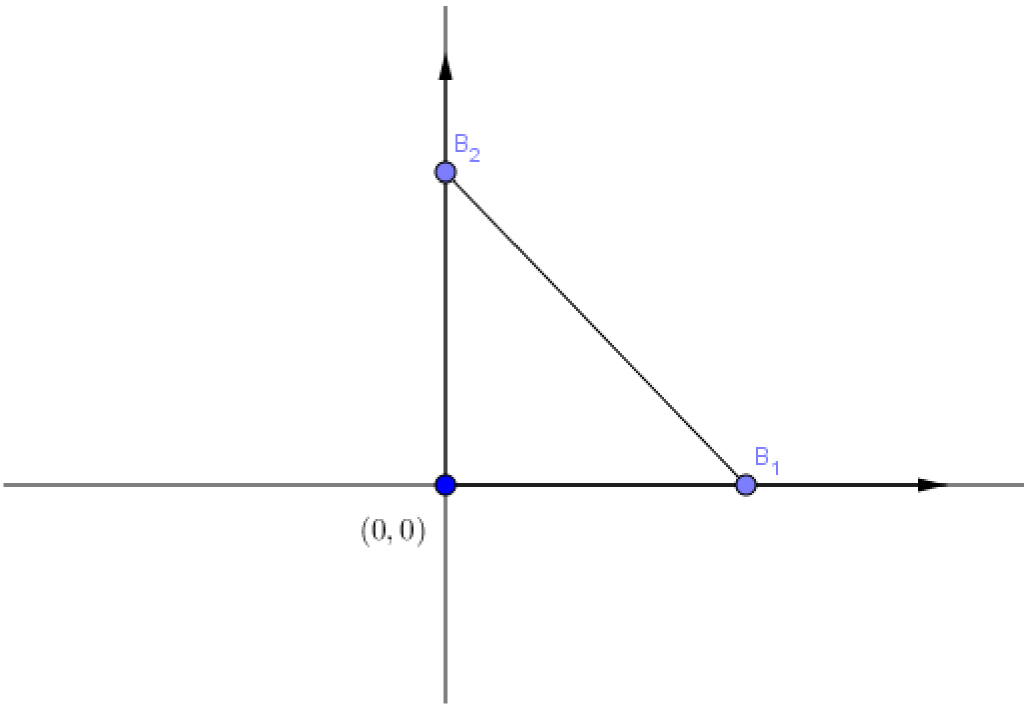
$$\Leftrightarrow b = 2a$$

- dakle, $a_{\max} = \frac{D}{4}$, $b_{\max} = \frac{D}{2}$

U sljedeća dva primjera se minimizira, odnosno maksimizira kvadratna funkcija. Kvadratnom funkcijom možemo opisati udaljenost dvije točke u pravokutnom koordinatnom sustavu.

Primjer: Biciklisti se kreću različitim brzinama svaki iz svog pravca prema istom odredištu. Brzina prvog biciklista je 30 *km/h*, a drugog 40 *km/h*. U jednom trenutku je prvi biciklist udaljen 10 *km* do odredišta (točka (0,0)), a drugi je udaljen 30 *km* do odredišta. Za koje će vrijeme biti najmanje udaljeni jedan od drugoga?

Rješenje: Problem se opisuje pomoću koordinatnog sustava s ishodištem u (0,0) (odredište kretanja oba biciklista).



Slika 48. Udaljenost biciklista

- uvodimo oznake :
  - B_1 - prvi biciklist
  - B_2 - drugi biciklist
  - t - vrijeme u satima

- $d(t)$ - udaljenost točaka B_1 i B_2, a ovisi o vremenu t

- formula za stalnu brzinu je

$$v = \frac{s}{t} / t$$

$$\Leftrightarrow s = v \cdot t$$

- dakle, put opisujemo funkcijom u ovisnosti od t

$$s_1(t) = 10 - 30t \,,\, s_2(t) = 30 - 40t$$

- u trenutku $t = 0$ koordinate točaka B_1 i B_2 su

$$B_1(0) = (10,0)\,,\ B_2(0) = (0,30)$$

- u trenutku $t = 0$ prvi biciklist nalazi se na 10 *km* od ishodišta, a za svako drugo t vrijedi

$$s_1(t) = 10 - 30t$$
$$\Rightarrow B_1(t) = (10 - 30t, 0)$$

- u trenutku $t = 0$ drugi biciklist se nalazi na 30 *km* od ishodišta, a za svako drugo t vrijedi

$$s_2(t) = 30 - 40t$$
$$\Rightarrow B_2(t)) = (0, 30 - 40t)\,.$$

- primjenjuje se formula za udaljenost točaka u koordinatnom sustavu

$$d(t) = \sqrt{\left((10 - 30t)^2 + (30 - 40t)^2\right)} = \sqrt{2500t^2 - 3000t + 1000}$$

- funkcija korijena je strogo rastuća funkcija

- traži se minimum funkcije pod korijenom

- postupak je izvediv jer je

$$a \le b \Rightarrow \sqrt{a} \le \sqrt{b}$$

$$f : < 0, +\infty > \to R$$

$$f(t) = 2500t^2 - 3000t + 1000$$

$$\Rightarrow 2500t^2 - 3000t + 1000 = 0 / : 500$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 - 6t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 5 \cdot 2}}{2 \cdot 5} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{10}$$

$$\Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{6 \pm 2i}{10} = \frac{3 \pm 2i}{5}$$

· minimalno vrijeme se nađe kao aritmetička sredina t_1 i t_2

$$t = \frac{\frac{3+i}{5} + \frac{3-i}{5}}{2} = \frac{\frac{3+i+3-i}{5}}{2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow t_{\min} = \frac{3}{5}$$

· dakle, dva biciklista će biti najmanje udaljeni jedan od drugog za $t = \frac{3}{5}$

· izračunajmo

$$d\left(\frac{3}{5}\right) = \sqrt{2500 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 3000 \cdot \frac{3}{5} + 1000} = \sqrt{900 - 1800 + 1000} = \sqrt{100} = 10km$$

U trenutku $t = \frac{3}{5}h$, biciklisti će biti najmanje udaljeni jedan od drugoga i to za 10 *km*.

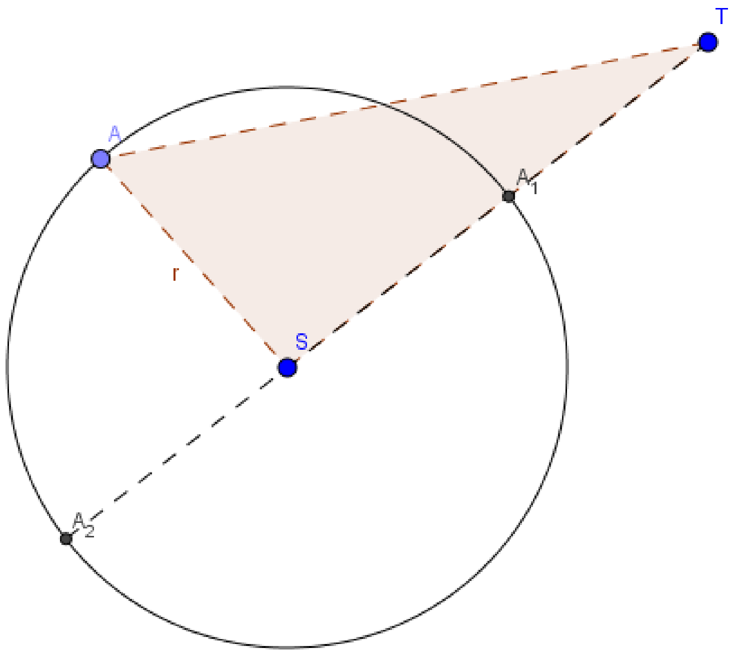
Primjeri varijacija zadatka s biciklistima metodama analogije i generalizacije:

- ceste nisu pod pravim kutem,
- ceste nisu ravne.

Primjer: Dana je kružnica i točka *T* koja joj ne pripada. Koja je od svih dužina kojima je jedan kraj točka *T*, a drugi točka na danoj kružnici, najdulja/najkraća?

Rješenje: Problem se rješava metodom nejednakosti trokuta za ΔAST .

$A_1 \in k, A \neq A_1$



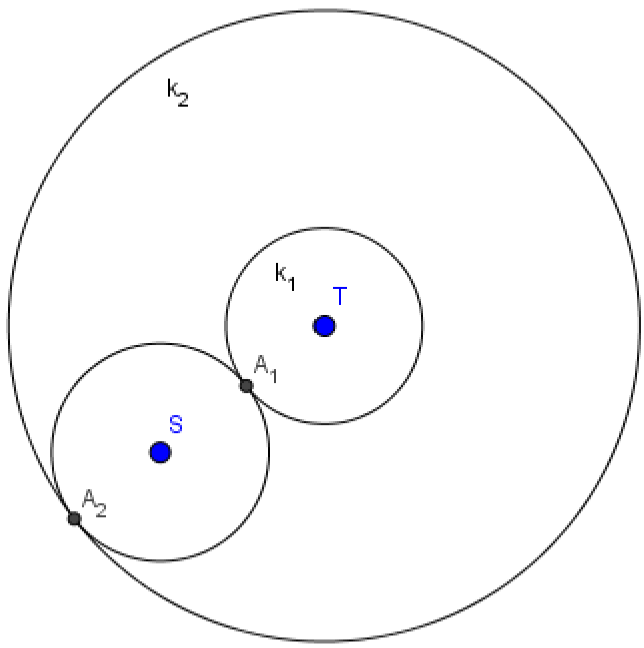
Slika 49. Udaljenost točaka – 1. način

$$\begin{aligned}
&|ST| < |AS| + |TA| \\
&\Leftrightarrow |TA_1| + |A_1S| < |AS| + |TA| \\
&\Leftrightarrow |TA_1| + r < r + |TA| \\
&\Leftrightarrow |TA_1| < |TA|
\end{aligned}$$

$$A_2 \in k, A \neq A_2$$

$$\begin{aligned} &|TA| < |AS| + |ST| \\ &\Leftrightarrow |TA| < r + |TS| \\ &\Leftrightarrow |TA| < |SA_2| + |TS| \\ &\Leftrightarrow |TA| < |TA_2| \end{aligned}$$

2. rješenje može biti pomoću kružnica:



Slika 50. Udaljenost točaka – 2. način

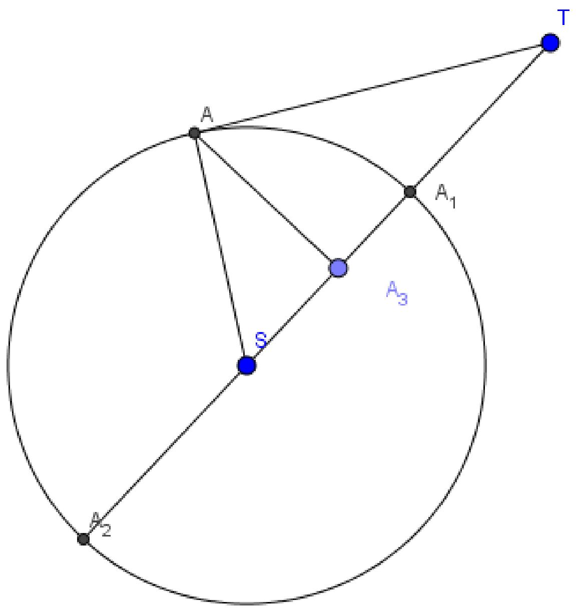
- kružnica k_1 sasredištem u točki T koja dodiruje k u A_1
- kružnica k_2 sa središtem u točki T koja dodiruje k u A_2
- sve točke zadane kružnice k nalaze se u vanjštini kružnice k_1 pa vrijedi

$$|TA_1| < |TA|$$

- sve točke kružnice *k* nalaze se unutar kruga omeđenog s kružnicom *k2* pa vrijedi

$$|TA_2| > |TA|$$

3. način rješenja problema:



Slika 51. Udaljenost točaka – 3. način

- označimo:
    - $d = |TA_1|$
    - $x = |A_1A_3| \in [0, r]$
    - $r = |SA_1| = |SA_2| = |SA|$
- iz toga slijedi

$$\Rightarrow |TA_3| = d + x\,,\ |SA_3| = r - x$$

$$\Rightarrow x + |A_3A_2| = 2r \Rightarrow |A_3A_2| = 2r - x$$

- primjenjujemo Pitagorin poučak na ΔAA_3S i ΔAA_3T

$$|AA_3| = \sqrt{r^2 - (r-x)^2}$$
$$\Leftrightarrow |AA_3| = \sqrt{r^2 - \left(r^2 - 2rx + x^2\right)}$$
$$\Leftrightarrow |AA_3| = \sqrt{r^2 - r^2 + 2rx - x^2}$$
$$\Leftrightarrow |AA_3| = \sqrt{2rx - x^2}$$

$$|TA| = \sqrt{|TA_3|^2 + |AA_3|^2}$$

$$\Leftrightarrow |TA| = \sqrt{2xr - x^2 + (x+d)^2}$$
$$\Leftrightarrow |TA| = \sqrt{2xr - x^2 + x^2 + 2xd + d^2}$$
$$\Leftrightarrow |TA| = \sqrt{2xr + 2xd + d^2}$$

$$|TA_1| = d \,/^2 \Rightarrow |TA_1|^2 = d^2$$

$$|TA_2| = d + 2r \,/^2 \Rightarrow |TA_2| = d^2 + 4rd + 4r^2$$

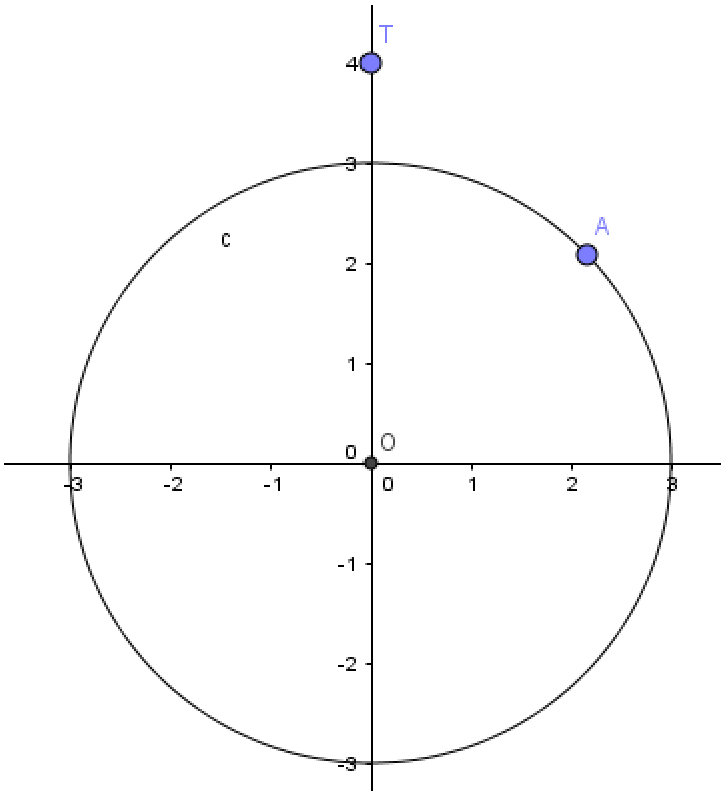
- proizlazi da je $|TA_1| < |TA| < |TA_2|$
- funkcija $f : [0, 2r] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2(r+d)x + d^2}$ je strogo rastuća, pa funkcija poprima minimum u lijevom, a maksimum u desnom rubu segmenta $[0,2r]$

$$f_{\min} = f(0) = d = |TA_1|$$

$$f_{\max} = f(2r) = \sqrt{2(r+d)2r + d^2} = \sqrt{4r^2 + 4rd + d^2} = |TA_2|$$

- pokazali smo da za svaku drugu točku A vrijedi da je njezina udaljenost od točke T veća, odnosno manja, od udaljenosti točke T do točaka A_1 i A_2.

4. rješenje problema: pomoću koordinatne metode



Slika 52. Udaljenost točaka – 4. način

- postavimo kružnicu u ishodište koordinatnog sustava s polumjerom *r*, tako postavljena kružnica ima jednadžbu

$$x^2 + y^2 = r^2$$

- koordinate točke $T(0,b)$, a točke $A(x,y)$
- koristimo formulu za udaljenost točaka u ranini

$$|TA| = \sqrt{x^2 + (y-b)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2by + b^2} = \sqrt{-2by + r^2 + b^2}$$

- dakle, udaljenost točke T od kružnice, odnosno točaka kružnice može se opisati funkcijom

$$f:[r,-r]\to\mathbb{R}, f(y)=\sqrt{-2by+r^2+b^2}$$

- uočimo da ova funkcija drugog korijena je padajuća, pa minimum prima u desnom rubu, a maksimum u lijevom rubu

$$y_{\max}=-r,\ f(y_{\max})=\sqrt{2br+r^2+b^2}=\sqrt{(b+r)^2}=b+r=|TA_2|$$

$$y_{\min}=r,\ f(y_{\min})=\sqrt{-2br+r^2+b^2}=\sqrt{(b-r)^2}=|b-r|=|TA_1|$$

- dakle, najmanje udaljena točka od točke T je $A_1(0,r)$, a najviše udaljena točka je $A_2(0,2r)$

5. Zaključak

Na temelju provedene razrade građe definirane zadatkom i ciljevima rada može se zaključiti da se izoperimetrijski problem geometrijskih likova u ravnini pojavljuje za sve slučajeve, tj. kategorije likova. Izoperimetrijski problem podrazumijeva traženje odgovora na dva pitanja: koji geometrijski lik u ravnini ima najveću površinu među svim geometrijskim likovima jednakog opsega, ili ekvivalentno, koji geometrijski lik u ravnini ima najmanji opseg među svim geometrijskim likovima jednake površine. Rješavanje izoperimetrijskog problema pojavljuje se još u antičkoj Grčkoj, no sve do suvremenog doba koristila su se metode s područja sintetičke geometrije bez analitičkog pristupa problemu. Posebno veliki utjecaj na razvoj rješavanja izoperimetrijskog problema je imao razvoj astronomije. Zakonitosti na području rješavanja izoperimetrijskog problema mogu se sažeti u slijedeće teoreme:

- *Krug ima veću površinu od bilo kojeg mnogokuta jednakog opsega.*
- *Pravilni mnogokuti s n stranica ima veću površinu nego svi drugi mnogokuti s n stranica jednakog opsega.*
- *Među izoperimetrijskim trokutima jednakih osnovica, jednakokračni trokut ima najveću površinu.*
- *Rješenje izoperimetrijskog problema mora biti konveksno.*
- *Glatka jednostavna zatvorena krivulja u ravnini s maksimalnom površinom mora biti krug.*
- *Među svim trokutima istog opsega, jednakostranični trokut ima najveću površinu.*
- *Među svim trokutima upisanima unutar kruga, jednakostranični ima najveću površinu.*
- *Među svim četverokutima istog opsega, kvadrat ima najveću površinu.*
- *Među svim četverokutima iste površine, kvadrat ima najmanji opseg.*

- *Za svaki konveksni i nekonveksni četverokut ABCD, postoji paralelogram* $(OO'B'O'')$ *iste površine, ali manjeg opsega.*
- *Za bilo koji paralelogram (koji nije pravokutnik), postoji pravokutnik istog opsega, ali veće površine.*

Izoperimetrijski problem za mnogokut podrazumijeva određivanje koji mnogokut ima najveću površinu među svim mnogokutima jednakog opsega. Ako je površina označena s *A*, a opseg *L*, rješenje izoperimetrijskog problema je pravilni mnogokut opsega *L*. Rješenje se izražava kao izoperimetrijska nejednakost $L^2 - 4\pi A \geq 0$ i pri čemu jednakost vrijedi samo za krug. Izoperimetrijska nejednakost podrazumijeva dualni izoperimetrijski problem. Dualni problem je ekvivalent prvom problemu, a poveznica originalnog i dualnog problema je skaliranje geometrijskog lika. Izoperimetrijski problem uvijek podrazumijeva suprotstavljene tvrdnje: među svim likovima u ravnini istog opsega krug ima najveću površinu i među svim likovima u ravnini iste površine krug ima najmanji opseg. Logična je pretpostavka da krug rješava samo dualni problem. Ako se skalira mnogokut istog opsega kao krug, ali s većom površinom, na način da mnogokut ima istu površinu kao krug, opseg mnogokuta će se smanjiti. Navedene veličine su u kontradikciji ako se uspoređuju prije i nakon skaliranja. Na temelju navedenog, može se utvrditi da izoperimetrijska nejednakost ne pravi razliku između originalnog i dualnog problema. Krug je jedinstven lik zbog svoje zaobljenosti, tj. simetričnosti linija iz centra u svim smjerovima. Zbog toga je krug idealan mnogokut za zadovoljenje izoperimetrijskog teorema. Unatoč tome, u svakoj kategoriji postoji i lik koji je manje savršen od ostalih i kao takav najčešće zadovoljava uvjete izoperimetrijske nejednakosti.

Radom se nastojalo sažeto objasniti izoperimetrijski problem geometrijskih likova u ravnini prikazom teorema i pripadajućih dokaza. Zaključno, prikazani su primjeri jednostavnijih zadataka koji mogu biti primjenjeni u nastavi matematike u srednjim školama.

I. Literatura

Knjige, znanstvene i stručne publikacije, članci

[1] V. Blasjo, The evolution of the isoperimetric problem, The American Mathematical Monthly, 112(2005), 526-566.

[2] R. Couraant, H. Robbins, What is mathematics, Oxford University Press, 1996.

[3] Cut The Knot - Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles: "*Isoperimetric Theorem and Inequality*" // http://cut-the-knot.org/do_you_know/isoperimetric.shtml

[4] Ž. Milin Šipuš, S. Vidak, Uvod u diferencijalnu geometriju, skripta v.2.3.

[5] A. N. Pressley, Elementary Differential Geometry, Springer, 2010.

II. Popis ilustracija

Slike

III. Sažetak

Izoperimetrijski problem istražuje koji geometrijski lik odabrane klase uz zadani opseg omeđuje maksimalnu površinu. U ovom radu obrađeni su primjeri koje se odnose na geometrijske likove u ravnini. Razradom građe nastojalo se postići slijedeće ciljeve: formulirati izoperimetrijski problem, obrazložiti i dokazati izoperimetrijske nejednakosti za odabrane klase geometrijskih likova, te obraditi nekoliko primjera izoperimetrijskog problema primjereno srednješkolskoj nastavi matematike.

ključne riječi: *izoperimetrijski problem, geometrija, matematika, nejednakost, ravnina*

IV. Summary

Isoperimetric problem explores geometric figures of a selected class which have the same perimeter, but maximal area. This paper discusses examples related to the two-dimensional geometric shape. The elaboration of the material seeks to achieve the following objectives: define isoperimetric problem, explain and prove isoperimetric inequality for selected classes of geometric shapes in two dimensions, and present several examples of isoperimetric problems appropriate for high-school mathematics curriculum.

In this work, all of these objectives are met.

keywords: *isoperimetric problem, isometric inequality, planar figures*

V. Životopis

Zovem se Ivana – Marija Polić, rođena sam 8. Listopada 1992. godine u Frankfurtu am Main, SR Njemačka. Pohađala sam Osnovnu školu Franice Dall´era u Viru, općina Posušje, Bosna i Hercegovina, i to u razdoblju od školske godine 1999./2000. do 2006./2007. Školske godine 2007./2008. Upisala sam Gimnaziju fra Gge Martića u Posušju, opći smjer. Završila sam je odličnim uspjehom školske godine 2010./2011.. Akademske godine 2011./2012. upisala sam integrirani studij Matematika i fizika; smjer nastavnički na Prirodoslovno – matematičkom fakultetu, Matematičkom odsjeku, Sveučilišta u Zagrebu.

Na početku akademske godine 2012./2013. premjestila sam se na preddiplomski studij matematike; smjer nastavnički, kojeg sam završila akademske 2013./2014. godine. Zatim sam sljedeće akademske godine, tj. 2014./2015., upisala diplomski studij Matematka; smjer nastavnički. Do kraja akademske godine 2015./2016. Položila sam sve programom propisane kolegije, osim kolegija Diplomski rad. Diplomski rad upisla sam ponovo akademske godine 2016./2017.

Trenutačno sam zaposlena kao učitelj matematike u Osnovnoj školi Ivana Mažuranića u Posušju te u Osnovnoj školi fra Stipana Vrljića, Sovići, općina Grude, Bosna i Hercegovina.