SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Paula Ivas

POVIJEST KONIKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc.
Franka Miriam Brückler

Zagreb, prosinac, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Onome koji me najviše volio...
Posvećujem ovaj rad svom djedu koji je u meni probudio ljubav prema matematici i naučio me biti upornom i nepokolebljivom u rješavanju problema. Veliku zahvalu dugujem i svojoj mentorici doc. dr. sc. Franki Miriam Brückler na strpljenju i nesebičnim savjetima za izradu ovog diplomskog rada. Posebnu zahvalnost iskazujem cijeloj svojoj obitelji, posebno svojim roditeljima koji su me svojom bezgraničnom ljubavlju uvijek podržavali i vjerovali u mene.

Sadržaj

Uvod

Krivulje koje su dobivene presjekom ravnine i stošca nazivaju se konike ili čunjosječnice, a to su elipsa, hiperbola i parabola te kružnica i par ukrštenih pravaca kao specijalni slučajevi. One su među najranije proučavanim krivuljama, a proučavali su ih i o tome pisali već antički Grci, od Menehma preko Euklida, Arhimeda i Apolonija iz Perge sve do Papusa Aleksandrijskog.

Perzijski matematičar arapskog doba Omar Khayyam u 11./12. st. koristio je konike za rješavanje kubnih jednadžbi i donekle je prethodio Descartesu kao utemeljitelju analitičke geometrije u 17. st., koji je uveo njihove jednadžbe u koordinantom sustavu te su zbog oblika tih jednadžbi poznate i kao krivulje drugog reda. Sve do 18. st. teorija konika se temeljila na njihovom prostornom smještanju. Sredinom 18. stoljeća Ruđer Bošković je dao prvu opću teoriju konika izvedenu isključivo u ravninskom kontekstu.

Iako konike nisu tako jednostavne kao kružnica i pravac, one imaju veliku primjenu u svakodnevnom životu, umjetnosti i znanosti. Jedna od najčešće primjenjivanih krivulja je svakako elipsa, a razlog tome je što svaka kružnica, promatrana iskosa, postaje elipsa. U arhitekturi renesanse i baroka često se koristila elipsa, a posebno je poznat primjer Trga Sv. Petra u Rimu; a njezina primjena u graditeljstvu vidljiva je i u modernoj arhikteturi kao npr. na planetariju Tycho Brahe u Kopenhagenu. Također, još od Keplera znamo da su putanje planeta oko Sunca eliptičnog oblika. Primjena hiperbole također se nalazi u graditeljstvu, konkretnije pri izgradnji golemih rashladnih tornjeva nuklearnih elektrana, u arhitekturi (slika 0.1), kao i pri korištenju svojstava hiperbole u prijemnicima radiovalova. Da je putanja projektila parabola pokazao je Galileo u 17. stoljeću, a znamo i da su putanje kometa parabolične. Razne primjere parabole vidimo kad se igramo s igračkama, poput loptica koje skaču, u logotipima poznatog McDonald'sova luka, u arhitekturi i građevini (posebice mostova), a posebni značaj je njena primjena u svjetlosnim reflektorima i svjetiljkama, teleskopima i antenama zbog njihovih reflektirajućih svojstava.

Ovaj rad obrađuje povijest konika, a naglasak je na razvoju ključnih ideja uz komentare o odnosu povijesnih ideja prema suvremenom školskom pristupu. Rad je podijeljen u četiri poglavlja. Prva tri poglavlja prate povijesni razvoj, a posljednje, četvrto poglavlje, daje osvrt na odnos povijesnih ideja prema suvremenom školskom pristupu. Napomenimo da sve do 17. stoljeća nije postajala suvremena algebarska notacija, ali radi preglednosti i

Slika 0.1: Hiperboloid na aerodromu u Izmiru, Turska (slika: FMB 2017)

čitljivosti ćemo u radu koristiti suvremenu notaciju.

Poglavlje 1

Doba antičke Grčke

1.1 Menehmo

Geometrijske konstrukcije predstavljale su značajan dio matematike starih Grka. Oni su matematičke konstrukcije smatrali valjanim samo ako se provode isključivo ravnalom i šestarom, a taj se zahtjev iskristalizirao tijekom 5. st. pr. Kr. Navedeni pristup geometrijskim konstrukcijama doveo je do niza matematičkih problema, među kojima su najpoznatija tri: kvadratura kruga, duplikacija kocke i trisekcija kuta. Važno je napomenuti da su pokušaji rješavanja tih problema doveli do velikog razvoja tadašnje matematike. Duplikacija kocke je problem konstruiranja brida kocke čiji je volumen dvostruko veći od volumena zadane kocke.

Problemom duplikacije kocke bavio se i Menehmo (oko 380.–320. pr. Kr.). Poznata je legenda o tome kako je Aleksandar Veliki navodno tražio od Menehma da mu pokaže neki jednostavan način učenja geometrije. Menehmov odgovor je, navodno, bio: „O kralju, za putovanje zemljom postoje privatne ceste i kraljevski putovi, ali u geometriji postoji samo jedan put za sve".[15] Neki su iz ovoga zaključili kako je Menehmo bio učitelj Aleksandra Velikog. Pokušavajući riješiti problem duplikacije kocke, Menehmo je otkrio da se presjekom uspravnog stošca i ravnine koja je okomita na njegovu izvodnicu dobiju do tada nepoznate krivulje. Vrsta krivulje ovisi o kutu pri vrhu stošca pa tako za stožac šiljastog vrha dobivamo elipsu, pravokutnog vrha parabolu i tupog vrha hiperbolu.

Dva Menehmova rješenja problema duplikacije kocke opisao je Eutokije (5./6. st. n. e.), te se temeljem njegova opisa otkriće konika pripisuje Mehehmu. Oba rješenja traže određenu točku kao presjek dviju konika, u prvom slučaju parabole i hiperbole, a u drugom dvije parabole. Ta primjedba, zajedno s rješenjima, dovodi do zaključka da je Menehmo zaista bio otkrivač konusnih presjeka. Zapravo je problem koji je Menehmo krenuo rješavati bilo nalaženje srednjih geometrijskih proporcionala [1] x i y između a i $2a$, gdje je a duljina brida

[1] Hipokrat s Hiosa je u 5. st. pr. Kr. otkrio da je problem duplikacije kocke brida a ekvivalentan problemu

kocke koju želimo udvostručiti, tj. nalaženje duljina x i y takvih da vrijedi:

$$a : x = x : y = y : (2a).$$

Danas, kad znamo da su omjeri ekvivalentni kvocijentima, vidimo da iz prvog razmjera $a : x = x : y$ slijedi $x^2 = ay$, a iz razmjera $x : y = y : (2a)$ slijedi $y^2 = 2ax$. Konačno, iz razmjera $a : x = y : (2a)$ slijedi $xy = 2a^2$, tj. $y = \frac{2a^2}{x}$.

1. način Promatramo parabolu i hiperbolu zadane redom jednadžbama

$$x^2 = ay, \ y = \frac{2a^2}{x}.$$

Rješavanjem ovog sustava jednadžbi dolazimo do jednadžbe $x^3 = 2a^3$ čije je jedino realno rješenje jedanko $a\sqrt[3]{2}$, tj. stranica kocke dvostrukog volumena u odnosu na kocku brida a.

2. način Promatramo dvije parabole zadane jednadžbama

$$x^2 = ay, \ y^2 = 2ax.$$

Rješavajući sustav zadanih jednadžbi dolazimo do jednadžbe

$$x(x^3 - 2a^3) = 0,$$

čija su rješenja $x_1 = 0$ i $x_2 = a\sqrt[3]{2}$. [21]

Gornji pristup pomoću analitičke geometrije nije bio na raspolaganju Menehmu. Pogledajmo opis načina na koje je Menehmo riješio spomenuti problem (s tim da i ovdje koristimo modernu notaciju).

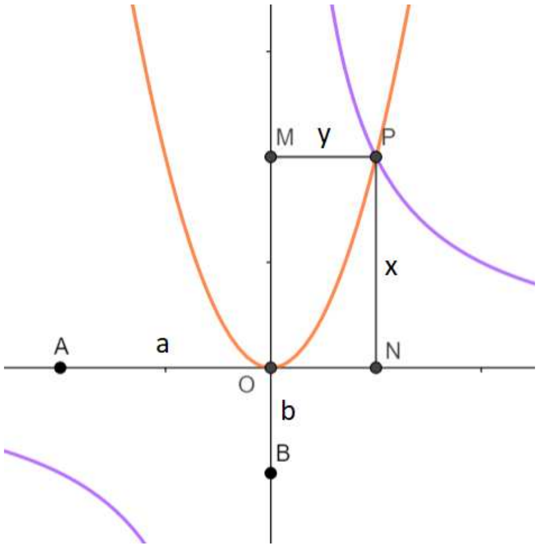
Prvo rješenje (slika 1.1).
Neka su su $\overline{AO}$ i $\overline{OB}$ dvije dužine takve da je $|AO| = a$, $|OB| = b$ i $a > b$ te neka je $\angle AOB$ pravi. Pretpostavimo da je problem riješen pa neka su $\overline{OM}$, $|OM| = y$ (na pravcu BO) i $\overline{ON}$, $|ON| = x$ (na pravcu AO) tražene srednje geometrijske proporcionale. Dopunimo do pravokutnika $OMPN$.
Tada, jer je

$$|AO| : |OM| = |OM| : |ON| = |ON| : |OB|,$$

tj.

$$a : y = y : x = x : b$$

konstrukcije srednjih geometrijskih proporcionala između a i $2a$.



Slika 1.1: Menehmovo rješenje duplikacije kocke pomoću parabole i hiperbole

imamo:

$$|OB| \cdot |OM| = |ON|^2 = |PM|^2,$$

gdje je P točka koja leži na paraboli koja ima O za tjeme, OM za os i $|OB|$ za parametar.

Također,

$$|AO| \cdot |OB| = |OM| \cdot |ON| = |PN| \cdot |PM|,$$

(tj. $ab = xy$) tako da P leži na hiperboli sa središtem u O i asimptotama OM i ON.

Neka je P bilo koja točka promatrane hiperbole. Tada je površina pravokutnika sa stranicama $\overline{PM}$ i $\overline{PN}$ (koje su paralelne asimptotama hiperbole) jednaka površini $|AO| \cdot |OB|$. Naposlijetku je tu Menehmo dokazao da vrijedi

$$|AO| : |PN| = |PN| : |PM| = |PM| : |OB|.$$

Drugo rješenje (slika 1.2)
Konstruiramo dvije parabole:
1. parabola s tjemenom O, osi ON i parametrom $|OA| = a$,
2. parabola s tjemenom O, osi OM i parametrom $|OB| = b$. Vrijedi:

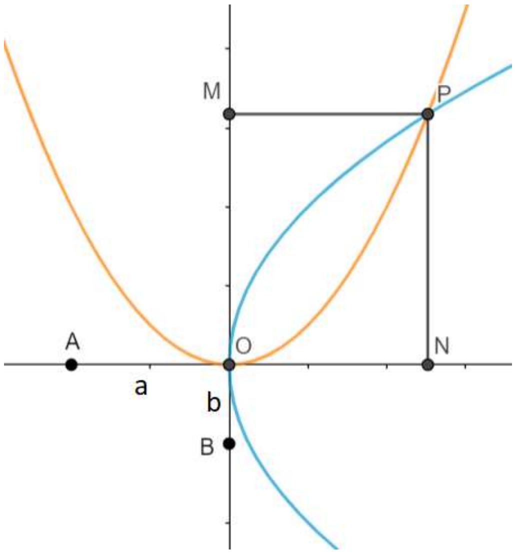
$$|OA| \cdot |ON| = |PN|^2,$$

$$|OB| \cdot |OM| = |PM|^2.$$

Kako je $|PN| = |OM|$ i $|PM| = |ON|$, slijedi:

$$|OA| : |OM| = |OM| : |ON| = |ON| : |OB|.$$

Dakle, $|OM|$ i $|ON|$ su srednje geometrijske proporcionale između $|OA|$ i $|OB|$.



Slika 1.2: Menehmovo rješenje duplikacije kocke pomoću dviju parabola

Napomenimo ovdje da iako je Menehmovo rješenje korektno, ono ne zadovoljava uvjete problema duplikacije kocke, tj. konstuktibilnost ravnalom i šestarom, a budući da danas znamo da se konike i njihovi presjeci ne mogu konstruirati ravnalom i šestarom, ovaj problem nije rješiv konstrukcijama ravnalom i šestarom.

Javlja se pitanje kako je Menehmo došao do razmišljanja o dobivanju krivulje rezanjem stošca, no nemamo podatak o tome. Demokrit je u jednom djelu govorio o presjeku stošca ravninom paralelnom i jako blizu bazi, što je naravno kružnica pa je najvjerojatnije pozornost starogrčkih matematičara privuklo presjecanje stošca ili pak valjka ravninom neparalelnom bazi. Slučaj u kojem se presjecanjem dobije elipsa je vjerojatno bio primiješen prvi te bi se pokušalo istražiti prirodu i geometrijsko mjerenje istezanja slike u odnosu na kružne presjeke iste figure. To bi u prvom redu bilo najlakše utvrđeno kad se radi o uspravnom cilindru. Prirodno se javlja pitanje ima li krivulja koja se dobije rezanjem stošca ista svojstva kao i krivulja dobivena rezanjem valjka. Nakon ovoga javlja se novo pitanje svojstva krivulja koje se dobiju presjecanjem stošca ravninom koja ne probija stožac u potpunosti, ali je ili paralelna ili nije paralelna s izvodnicom stošca, kao i imaju li takve krivulje ista svojstva kao elipsa i, ako ne, koja su njihova temeljna svojstva. [15]

1.2 Euklid

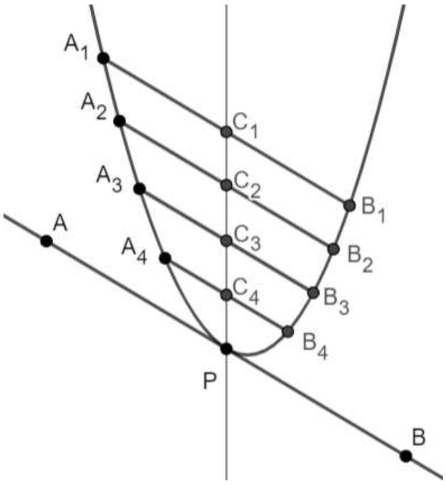
Konikama se također bavio i Euklid (oko 325.–265. pr. Kr.), no njegova djela koja se bave ovom temom su izgubljena. Papus za Euklidovo izgubljeno djelo kaže: „Četiri Euklidove knjige dovršio je Apolonije, dodavši još četiri i tako nam dao ukupno osam knjiga o konikama."[15] Euklid je, vrlo vjerojatno, napisao opću teoriju konika, ali je pokrio samo temelj Apolonijevih prvih triju knjiga, budući da Apolonije kaže da nitko prije njega nije dotakao temu četvrte knjige. Euklid je još uvijek koristio stara imena za konusne presjeke, nazivajući ih presjecima pravokutnog, šiljastokutnog i tupokutnog stošca, ali je bio svjestan da se elipsa može dobiti i rezanjem stošca na bilo koji način ravninom koja nije paralelna bazi stošca, kao i rezanjem valjka na isti način. To je jasno iz rečenice u njegovom djelu *Phenomena*: „Ako se valjak ili stožac presiječe ravninom neparalelnom bazi, dobije se presjek šiljastokutnog stošca koji nalikuje na štit." [15].

1.3 Arhimed

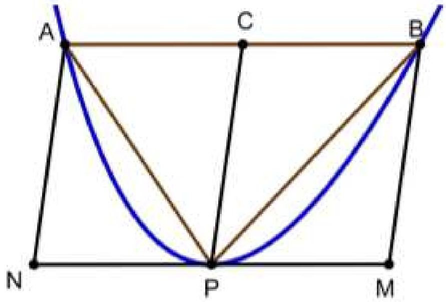
Dvije tisuće godina prije otkrića infinitezimalnog računa Arhimed (oko 287.–212. pr. Kr.) je koristio metodu iscrpljivanja (ekshaustije)[2] i dokazao da se odsječak parabole može kvadrirati ravnalom i šestarom, preciznije, da mu je površina jednaka $\frac{4}{3}$ povrišine trokuta kojem je jedna stranica tetiva parabole koja određuje odsječak, a jedan vrh u točki parabole u kojoj je tangenta paralelna s tom tetivom. Jednakost tih Površina je najprije naslutio koristeći teoreme iz mehanike, a zatim daje dokaz metodom iscrpljivanja (ekshaustije), koji je ovdje opisan uz korištenje suvremene notacije.

1. Koristi se sljedeće svojstvo parabole: Ako tangenta AB dira parabolu u točki P, a tetive A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,... su paralelnte tangenti, tada polovišta tih tetiva C_1, C_2, C_3,... leže na jednom pravcu koji je paralelan s osi parabole i prolazi točkom P (vidi sliku 1).
   Pritom vrijedi
$$\frac{|A_1C_1|^2}{|PC_1|} = \frac{|A_2C_2|^2}{|PC_2|} = \frac{|A_3C_3|^2}{|PC_3|}. \qquad (1)$$
2. Promatrajmo sada odsječak parabole omeđen lukom parabole APB i tetivom $\overline{AB}$. Tetivu $\overline{AB}$ nazivamo osnovicom, a dirallište P tangente zovemo vrhom. Točka C je polovište osnovice. Prema svojstvu (1) pravac PC paralelan je s osi parabole. U odsječak parabole upišimo trokut APB, a oko nje opišimo paralelogram $ABMN$ (slika 1.4). Budući da je površina trokuta jednaka polovini površine paralelograma ona je

[2] EEX — Eudoksova lema (metoda ekshaustije): Ako od neke veličine oduzmemo više od njene polovine, od ostatka više od njegove polovine itd., onda će, ako se postupak ponovi dovoljan broj puta, ostatak biti manji od bilo koje istovrsne veličine.



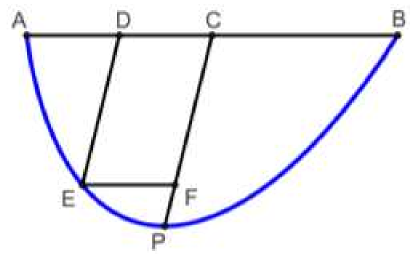
Slika 1.3: Polovišta međusobno paralelnih tetiva parabole su kolinearna



Slika 1.4: Odsječku opisani paralelogram

veća od polovine površine odsječka, a zbroj površina preostalih dvaju odsječaka iznad tetiva $\overline{AP}$ i $\overline{PB}$ manji je od polovine površine cijelog odsječka. Ako dalje na isti način upišemo dva trokuta u preostale odsječke, zbroj njihovih površina bit će veći od polovine zbroja odsječaka kojima su upisani, a zbroj površina četiri odsječka koja preostanu nakon drugog upisivanja trokuta biti će manji od jedne četvrtine površine čitavog odsječka. Ako još jednom ponovimo upisivanje, preostat će osam još manjih odsječaka kojima će zbroj površina biti manji od jedne osmine čitavog odsječka, itd. Nastavimo li postupak, u odsječak je moguće upisati takav mnogokut da površina koja preostane izvan mnogokuta bude po volji mala.

3. Raspolovimo dužinu $\overline{AC}$ točkom C i povucimo njome paralelu $\overline{DE}$ sa $\overline{CP}$ (slika 1.5).



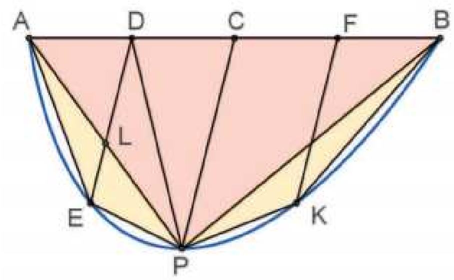
Slika 1.5: Segment parabole

Neka je zatim $\overline{EF}$ paralelno s $\overline{AB}$. Dokažimo da vrijedi:

$$|PC| = \frac{4}{3}|ED|. \qquad (2)$$

Prema (1), $\frac{|AC|^2}{|PC|} = \frac{|EF|^2}{|PF|}$. Budući da je $|AC| = 2|EF|$, tada je $|PC| = 4|PF|$, $|FC| = |ED| = 3|PF|$, iz čega izlazi (2).

4. Promatrajmo trokute $\triangle AEP$ i $\triangle PKB$ (slika 1.6).



Slika 1.6:

Površina trokuta $\triangle APB$ je osam puta veća od površine svakog od njih. Pravac ED raspolavlja tetivu $\overline{AP}$ u točki L jer je paralelan s $\overline{CP}$, a također raspolavlja i $\overline{AC}$. Vrijedi $|PC| = 2|LD|$ pa iz (2) slijedi $3|LD| = 2|ED|$, a otuda

$$|LD| = 2|EL|. \quad (3)$$

Odatle zaključujemo da vrijedi $P_{\triangle ADL} = 2P_{\triangle AEL}$. Analogno zaključujemo da vrijedi $P_{\triangle DLP} = 2P_{\triangle LEP}$, a iz tih dviju jednakosti je $P_{\triangle ABP} = 2P_{\triangle ADP} = 4P_{\triangle AEP}$ i konačno $P_{\triangle ABP} = 8P_{\triangle AEP}$. Analogno se dokazuje $P_{\triangle ABP} = 8P_{\triangle PKB}$.

5. Nastavljamo postupak upisivanja trokuta. Površinu prvog trokuta označimo s p_1, zbroj površina trokuta upisanih u drugoj iteraciji s p_2, u trećoj sa p_3 i tako redom. Dobivamo beskonačni niz:

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots \qquad (4)$$

pri čemu je svaki slijedeći član četiri puta manji od prethodnog, tj. vrijedi:

$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n. \qquad (5)$$

Sada dobivamo $(p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1}) + 4p_n = 4p_1 + (p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1}$, odnosno $3(p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1}) + 4p_n = 4p_1$. Podijelimo jednakost s 3 pa izlazi:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1} + \frac{4}{3}p_1. \qquad (6)$$

Sada se može dokazati da je površina odsječka $P = \frac{4}{3}p_1$. Pretpostavimo suprotno, tj. ili je $P > \frac{4}{3}p_1$ ili je $P < \frac{4}{3}p_1$. Neka je

$$P > \frac{4}{3}p_1. \qquad (7)$$

Primijetili smo, temeljem Eudoksove leme, da možemo ponavljati proces upisivanja trokuta dok ne dobijemo po volji mali ostatak. Izaberimo n tako da vrijedi da je ostatak manji od $P - \frac{4}{3}p_1$, tj. $P - (p_1 + p_2 + \dots + p_n) < P - \frac{4}{3}p_1$, no to je u kontradikciji sa (6). Nejednakost (7) ne vrijedi. Neka je sad

$$P < \frac{4}{3}p_1. \qquad (8)$$

Budući da članovi niza teže nuli možemo izabrati n takav da vrijedi $\frac{4}{3}p_n < \frac{4}{3}p_1 - P$. Koristeći (6) dobit ćemo $P < p_1 + p_2 + \dots + p_n$, a to je nemoguće. Dakle, nejednakost (8) ne vrijedi. Time je dokazano $P = \frac{4}{3}p_1$.

6. Zaključak: površina P odsječka parabole za jednu trećinu je veća od površine paraboli upisanog trokuta koji s odsječkom ima zajedničku osnovicu i visinu. U ovom je primjeru Arhimed *de facto* ujedno dokazao formulu za sumu geometrijskog reda s kvocijentom $\frac{1}{4}$. Naime, budući da trokuti koji se dobiju u n-tom koraku imaju zbroj površina $p_n = \frac{p_1}{4^{n-1}}$, za zbroj površina svih trokutova vrijedi:

$$p_1(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} + \dots) = \frac{4}{3}p_1.$$

Pri proučavanju Arhimedovih metoda na um nam pada koncept integriranja koji je egzaktno definirao tek Bernhard Riemann u 19. st. Arhimed ne koristi samo metodu iscrpljivanja s upisanim mnogokutima, već se oko lika „sažimaju” upisani i opisani mnogokuti tako da se razlika njihovih površina načini po volji malom. Koristio je ovu tehniku u određivanju površine kruga, u određivanju volumena rotacijskog elipsoida, paraboloida i hiperboloida. Unatoč tomu što nije poznavao pojam limesa, njegove metode su nalik na koncept gornje i donje Darbouxove sume koji danas koristimo u školskoj matematici za definiciju integrala, a ujedno su vrlo precizne. [23]

1.4 Apolonije

Najveći antički pisac o konikama je svakako Apolonije iz Perge (262.–190.pr.Kr.). O životu Apolonija malo je toga poznato, osim da je rođen u Pergi, blizu današnje Antalya-e (Turska),i da je kad je bio sasvim mlad otišao u Aleksandriju, gdje je je studirao sa nasljednicima Euklida. Njegovo glavno djelo *Konike* sastoji se od osam knjiga. Četiri knjige sačuvane su na grčkom jeziku, tri knjige u arapskom prijevodu, dok je zadnja knjiga izgubljena. Apolonije u tim knjigama starije rezultate nadopunjava vlastitim. Budući da su *Konike* bile opsežan referentni rad na tu temu, čak i prema današnjim standardima, njegova publika nije bila opća populacija koja nije mogla čitati ni pisati, nego je bio namijenjen poznavaocima matematike i malom broju obrazovanih čitatelja povezanih s državnim školama i pripadajućim knjižnicama. Sve tvrdnje dokazuje pomoću geometrijske algebre [3], a njegove metode i zaključci uglavnom se danas lakše opisuju analitičkom geometrijom. Sačuvanih prvih sedam knjiga sadrži 387 propozicija. [16]

Iz Apolonijevog predgovora, koji sadrži zanimljive povijesne detalje, vrlo dobro se iščitava plan kojeg slijedi za svaku knjigu te navodi da je cijelu temu obradio cjelovitije i općenitije nego njegovi prethodnici.

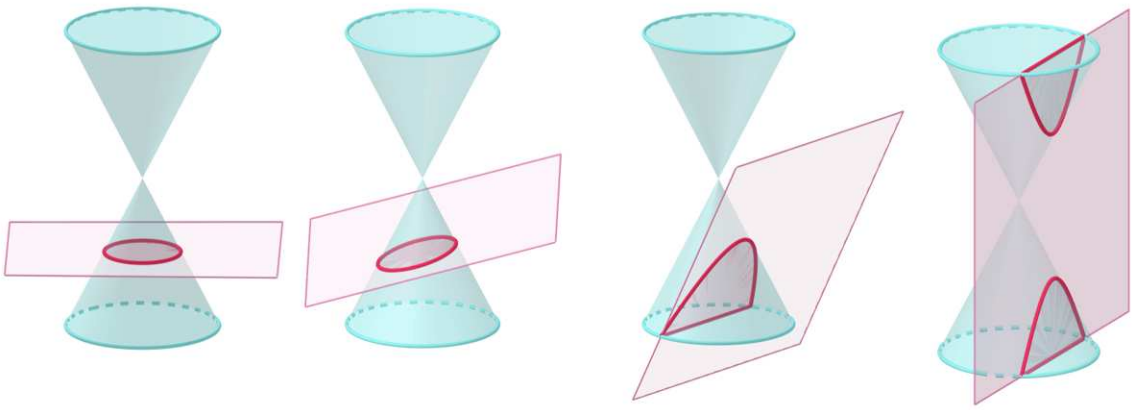
Prve četiri knjige čine, kako sam kaže, osnovni uvod pod kojim podrazumijeva predstavljanje elemenata konika, odnosno definicije i temeljne propozicije za uporabu i primjenu. Prva knjiga opisuje nastanak konika i njihova osnovna svojstva pa tako Apolonije započinje opisivanjem dvostrukog kružnog stošca (za razliku od Menehma) na najopćenitiji način:

Teorem 1.4.1. *Neka je dan krug i bilo koja točka izvan ravnine tog kruga koja ne leži na pravcu koji prolazi kroz središte kruga okomitom na ravninu kruga. Pravac koji prolazi*

[3] Geometrijska algebra je naziv za starogrčka rješenja geometrijskih problema koji bi se u suvremeno doba interpretirali, opisivali i rješavali algebarski.

tom točkom i točkom kružnice koja se giba po kružnici tako da pravac prolazi svim točkama kružnice opisuje dvostruki stožac koji je općenito kosi.

Nakon toga Apolonije daje brojne definicije koje su značajne za konike. Definira tako i os stošca kao pravac koji prolazi kroz vrh stošca i središte baze.
Nakon što je pokazao da su svim presjeci stošca ravninom paralelnom bazi također kružnice, nastavlja promatrati presjeke stošca u svim smjerovima.
Apolonije je prvi uvidio da se na jednom te istom stožcu, bio on kos ili uspravan, šiljast ili tup, mogu kao presjek stošca i ravnine dobiti sve tri krivulje (vidi sliku 1.7). Koju krivulju ćemo dobiti ovisi o nagibu ravnine koja siječe stožac. Kod uspravnog stošca, ravnina koja je okomita na os stožca će nam dati kružnicu. Što je ravnina bliža vrhu stošca to presjek manje površine i u samom vrhu stošca prelazi u točku. Ukoliko ravninu malo nagnemo, dobivamo elipsu. Postavio li ravninu tako da je paralelna s jednom od izvodnica stošca kao presjek dobivamo parabolu. Ukoliko je ravnina postavljena tako da je paralelna s osi stošca dobivamo hiperbolu.

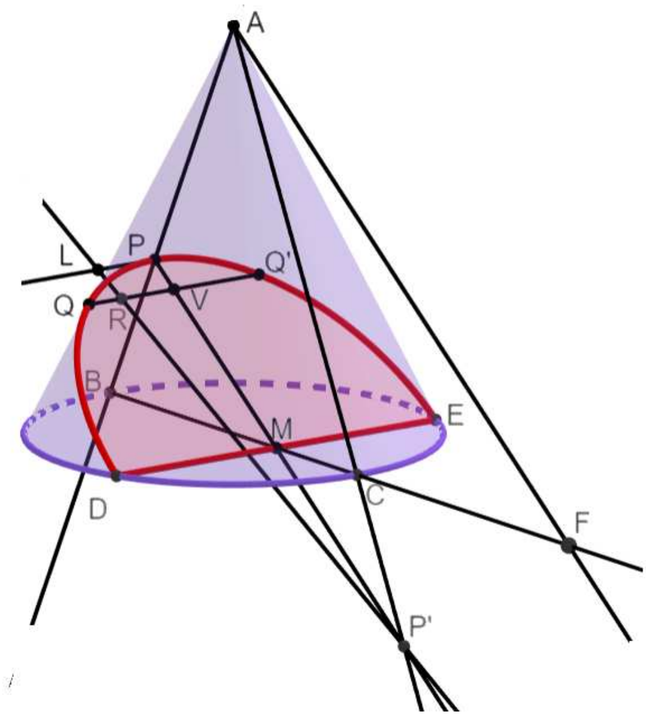


Slika 1.7: Presjek stošca ravninama

Apolonijev opis tri tipa konika

Neka je dan dvostruki kosi stožac s vrhom A. Neka je presjek dane ravnine s osnovkom dužina $\overline{DE}$ te neka je $\overline{BC}$ na nju okomit promjer osnovke (vidi sliku 1.8).

Neka je P probodište pravca AB i zadane ravnine te neka je $M = \overline{DE} \cap \overline{BC}$. Za proizvoljnu tetivu $\overline{QQ'}$ konike paralelnu s $\overline{DE}$ Apolonije dokazuje da ju PM raspolavlja u V.



Slika 1.8: Apolonijev opis tri tipa konika

Ako postoji presjek pravaca PM i AC, označimo ga s P'. Neka je q paralela s pravcem PM kroz točku A te neka je $F = BC \cap q$.

Neka je PL okomito na PM, gdje je L takva da $|PL|$ zadovoljava određeni razmjer. Ako imamo P', nacrtajmo pravac $P'L$ te nacrtajmo paralelu s PL kroz V koja pravac $P'L$ siječe u točki R.

Koristeći argumentaciju preko sličnosti, Apolonije dokazuje da je u prvom slučaju $|QV|^2 = |PV| \cdot |VR|$, a u drugom slučaju $|QV|^2 = |PV| \cdot |PL|$. Vidimo da u slučaju hiperbole kvadrat nad $|QV|$ u odnosu na pravokutnik nad $|PV|$ i $|PL|$ ima višak, u slučaju parabole imamo jednakost, a u slučaju elipse manjak. Korijeni naziva tih triju tipova konika upravo su višak, jednakost odnosno manjak,

Druga knjiga opisuje osi, tangente i asimptote, u trećoj se opisuju fokusi, pol i polara, a u četvrtoj presjeci dvije konike. Jedna od propozicija u četvrtoj knjizi daje metodu crtanja dviju tangenti na koniku iz točke T koja je izvan nje:

Propozicija 1.4.2. *Treba nacrtati bilo koja dva pravca kroz T koja sijeku koniku u točkama Q i Q' te R i R' redom. Neka su točke O na QQ' i O' na RR' takve da su TQ' i TR'*

harmonično podijeljeni[4]. *Presjek OO' sa konikom daje dvije točke dirališta.*

Ostatak četvrte knjige bavi se presjecanjem konika i brojem točaka u kojima se, ovisno o slučaju, sijeku ili dodiruju pa su tako dokazane sljedeće propozicije.

Propozicija 1.4.3. *Dvije konike koje imaju zakrivljenje u suprotnim smjerovima sijeku se u najviše dvije točke.*

Propozicija 1.4.4. *Ako konika ima dodirnih točaka s jednom granom hiperbole, tada drugu granu hiperbole siječe u najviše dvije točke.*

Zatim slijede propozicije koje pokazuju da se dvije konike ne mogu presijecati u više od četiri točke kao i da dvije konike koje se dodiruju u jednoj točki mogu imati još najviše dvije zajedničke točke te da dvije konike koje se dodiruju u dvjema točkama nemaju više nijednu zajedničku točku.

Preostale knjige koje počinju s petom knjigom posvećene su specijaliziranijem istraživanju pojedinih dijelova teme. Tako se u petoj knjizi opisuju normale i središta zakrivljenosti, u šestoj sličnost konika, a u sedmoj svojstva konjugiranih promjera.

Kao što je već rečeno, osma knjiga je izgubljena. Njen sadržaj može samo biti pretpostavljen iz Apolonijevih vlastitih primjedbi. Nažalost, Papusovi rezultati nam također ne omogućavaju da stvorimo jasniju ideju, ali je vjerojatno da je knjiga sadržavala brojne probleme pronalaska konjugiranih promjera dane konike.

Prijevodi napisani na engleskom jeziku počinju krajem 19. stoljeća. Posebno treba istaknuti Heathovu raspravu o konusnim presjecima. Heathov rad je važan jer uz izvorne Apolonijeve geometrijske izraze na grčkom jeziku pojašnjava tekst uspoređujući ga sa modernim zapisima, te ističe podudarnosti.

Apolonije je također prvi za konike upotrijebio nazive elipsa i hiperbola. Naziv parabola prvi je upotrijebio Arhimed. [14]

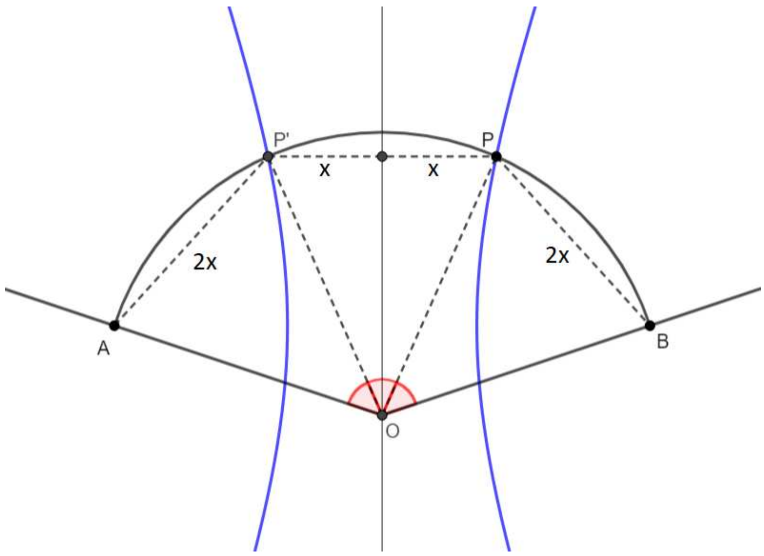
[4]Dužina je harmonijski podijeljena ako je podijeljena u jednakim omjerima iznutra i izvana.

1.5 Papus Aleksandrijski

Posljednji veliki antičkogrčki matematičar je Papus iz Aleksandrije (oko 290.-350.). Njegovo djelo *Kolekcija* jedan je od glavnih izvora današnjih znanja o starogrčkoj matematici. Prvi je uveo pojam fokusa i direktrise parabole. Papus se bavio jednim od tri klasična problema, trisekcijom kuta. Problem se sastoji u traženju postupka kojim bismo za bilo koji proizvoljan kut α mogli ravnalom i šestarom konstruirati njegovu trećinu. On je našao rješenje pomoću konika.

Rješenje trisekcije kuta pomoću konika

Neka je dana kružnica $k(O, 1)$, gdje je O vrh danog kuta AOB, te pravac d koji je simetrala kuta AOB. Na kružnici označimo točku P koja se giba po kružnici tako da je njezina udaljenost od točke B uvijek dva puta veća od udaljenosti do pravca d (slika 1.9).



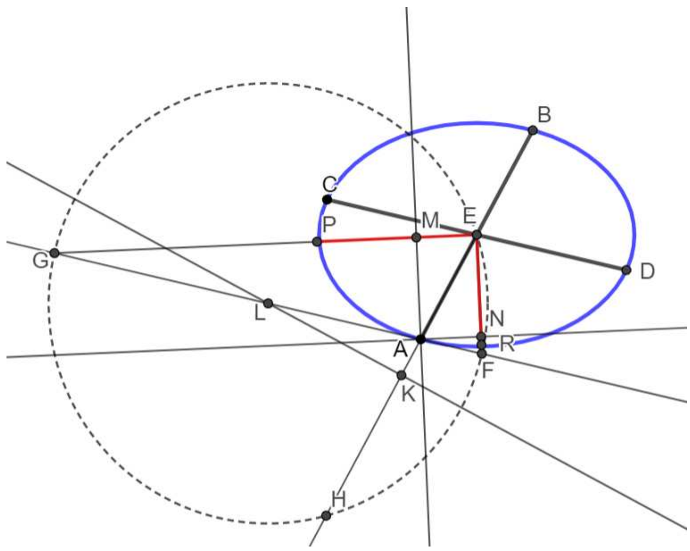
Slika 1.9: Trisekcija kuta pomoću konika

Tako nastaje jedna grana hiperbole s fokusom B i ravnalicom d. Konstruiramo zatim njezinu zrcalnu sliku s obzirom na pravac d. Zrcalna slika točke P desne grane hiperbole odgovara točki P' lijeve grane te hiperbole. Točke p i P' dobivene kao sjecišta kružnice k i hiperbole dijele luk određen točkama A, P, P' i B, dakle i kut AOB, na tri jednaka dijela [22].

Papus je objasnio (bez dokaza) i kako, kada imamo dva konjugirana promjera elipse, možemo naći njene osi.

Nalaženje osi elipse ako su zadana dva konjugirana promjera

Neka su $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ konjugirani promjeri takvi da $|CD| > |AB|$ te neka je E središte elipse. Neka je H točka na pravcu EA takva da je $|EA| \cdot |AH| = |DE|^2$. U točki A nacrtamo paralelu p sa CD. Neka je K polovište dužine $\overline{EH}$ te nacrtamo okomicu KL sa EH koja siječe p u L (slika 1.10).



Slika 1.10: Nalaženje osi elipse

Nacrtajmo kružnicu $k(L, |LE|)$. Ta kružnica siječe p u F i G kao na slici. Nacrtajmo dužine $\overline{EF}$ i $\overline{EG}$ te iz A nacrtajmo paralele AM sa EF i AN sa EG. Odaberimo točke P na EG i R na EF takve da je $|EP|^2 = |GE| \cdot |EM|$ i $|ER|^2 = |FE| \cdot |EN|$. Tada je $\overline{EP}$ velika poluos, a $\overline{ER}$ mala poluos elipse.

Iskazao je i dokazao sljedeći teorem [16]:

Teorem 1.5.1. *Neka je dan pravac AB i točka C u ravnini. Neka je iz točke D u istoj ravnini povučen pravac CD i okomica DE na AB te neka je zadan omjer $|CD| : |DE|$. Tada je D*

na konici, i to na paraboli ako je taj omjer jednak 1*, na hiperboli ako je veći od* 1*, odnosno na elipsi ako je manji od* 1.

Upravo ta svojstva kasnije će Ruđer Bošković iskoristiti u svom radu.

Poglavlje 2

Arapsko doba

Jedan od najutjecajnijih znanstvenika islamskog svijeta u srednjem vijeku bio je Omar Khayyam (1048.–1131.). Rođen je u obitelji obrtnika u gradu Nišapuru koji se nalazi na sjeveru današnjeg Irana. Omar Khayyam se tijekom svog života bavio matematikom, astronomijom, geografijom, filozofijom i poezijom i djelovao u feudalno doba kad je je položaj znanstvenika bio vrlo težak pa i Omar Khayyam naglašava da je bio lišen mogućnosti da se bavi svojim interesom. Prvo matematičko djelo Omara Khayyama *Problemi aritmetike* nije sačuvano pa nam je njegov sadržaj danas nepoznat. Zahvaljujući sponzorstvu jednog samarkandskog pokrovitelja, Omar Khayyam je uspio završiti svoja znanstvena istraživanja i napisati poznato djelo *O računanju pomoću al-džabr i al-muqabale*[1], podijeljenu na pet dijelova. Djelo daje klasifikaciju jednadžbi i opisuje rješavanje jednadžbi 1., 2. i 3. stupnja.

U prvim poglavljima traktata Khayyam predstavlja algebarsku metodu za rješavanje kvadratnih jednadžbi koju je opisao al-Hvarizmi. U sljedećim poglavljima on razvija geometrijsku metodu za rješavanje kubnih jednadžbi čiji temelji sežu još do Arhimeda: korijeni ovih jednadžbi u ovoj su metodi definirani kao sjecišta dviju konika. Khayyam je dao opravdanje za ovu metodu, klasifikaciju vrsta jednadžbi, algoritam za odabir vrste konika, procjenu broja (pozitivnih) korijena i njihove veličine. Nažalost, Khayyam nije primijetio da kubna jednadžba može imati tri realna korijena, ali jest primijetio da rješenje ne mora biti jedinstveno. Omar Khayyam nije mogao dostići eksplicitne algebarske formule, ali je izrazio nadu da će se u budućnosti naći eksplicitna rješenja. U uvodu ovog traktata Omar Khayyam daje prvu definiciju koja je došla do nas o algebri kao znanosti, tvrdeći da je algebra znanost određivanja nepoznatih količina koje su u nekom odnosu s poznatim veličinama [17].

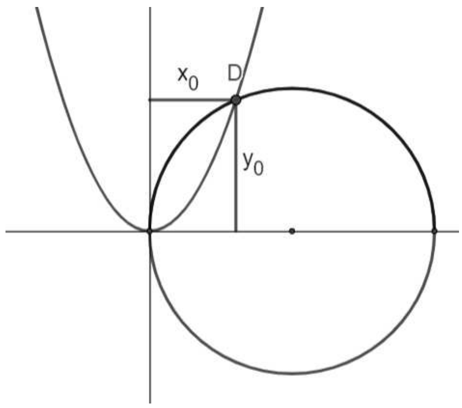
[1] Izrazi *al-džabr* i *al-mukabala* naslijeđeni su iz Al-Hverizmijeve studije o algebri *Al-Kitab al-muhtasar fi hisab al-gabr wa-l-muqabala* u kojoj se bavi rješavanjem linearnih i kvadratnih jednadžbi. Izraz *al-džabr* koristi za uklanjanje nedativnih članova, a izraz *al-mukabala* za grupiranje članova s istom potencijom. Iz izraza *al-džabr* izveden je naziv *algebra*.

U djelu daje klasifikaciju kubnih jednadžbi na 9 tipova, a ona proizlazi iz tadašnjeg zahtjeva da svi koeficijenti u sređenom obliku budu pozitivni brojevi te da rješenja moraju biti pozitivna. Za svaki od tipova daje i njegovo geometrijsko rješenje pomoću presjeka konika. Pet tipova imaju slobodni član jednak nuli te se supstitucijom svode na kvadratne jednadžbe, a u razmatranju svakog od preostalih slučajeva Khayyam je bio svjestan postojanja više pozitivnih rješenja, ovisno o tome kako se razmatrane konike sijeku. U svom se radu poziva na prve dvije Apolonijeve knjige o konikama, i daje algebarsku metodu kako druge kubne jednadžbe pretvoriti u kvadratnu ili neki od tipova iz svoje sistematizacije.

Primjer 2.0.1. *Neka je dana kubna jednadžba oblika $x^3 + qx = r^2$, koju on opisuje kao*

$$x^3 + b^2 x = b^2 c.$$

Omar dolazi do rješenja ove kubne jednadžbe nalaženjem sjecišta parabole i kružnice (slika 2.1). Jezikom analitičke geometrije rekli bismo da je određivao sjecište različito od (0,0) parabole $x^2 = by$ i kružnice $y^2 = x(c - x)$. Sjecište tih dviju konika je točka



Slika 2.1: Khayyamovo rješenje jednog tipa kubne jednadžbe pomoću konika

$D(x_0, y_0)$. Provjerimo je li ona zaista rješenje polazne kubne jednadžbe.
Budući da D leži na paraboli, imamo $x_0^2 = by_0$. Ali, D leži i na kružnici te je zato $y_0^2 = x_0(c - x_0)$. Iz te dvije jednakosti dobije se:

$$x_0^4 = b^2 x_0 (c - x_0),$$

tj.

$$x_0^3 = b^2 (c - x_0).$$

Odatle slijedi da x_0 zadovoljava jednadžbu $x^3 + b^2 x = b^2 c$.

Aproksimativnu numeričku vrijednost rješenja dobio je interpolacijom pomoću trigonometrijskih tablica. Tvrdio da se rješenje takve kubne jednadžbe općenito ne može dobiti konstrukcijom ravnalom i šestarom, što će biti dokazano tek oko 750 godina kasnije. Khayyam je bio svjestan nepotpunosti vlastitog rada te je napisao da se nada dati potpun opis algebarskog rješenja kubnih jednadžbi.

Poglavlje 3

Konike od renesanse nadalje

Nakon rimske nebrige za znanost i provala barbara, u Europi u srednjem vijeku dolazi do zamiranja obrazovanja i znanosti. Tijekom renesanse ponovno je „otkrivena" antika, kako u umjetnosti i kulturi, tako i u znanosti. Iako su Euklid, Ptolomej i Arhimed bili poznati u srednjem vijeku, djela poznatih autora poput Diofanta i Papusa prvi su se put prevodila tijekom renesanse. Tako je Regiomontanus ili pravim imenom Johannes Müller, njemački matematičar, astronom, astrolog i prevoditelj prilikom posjete Rimu prepisao Senekine tragedije dok je učio grčki da bi preuzeo mnogo razumljiviji prijevod Ptolemejevog *Almagesta* i potom Apolonijeve *Konike*. Kao i većim dijelom antičkog nasljeđa, iz navedenih razloga, do 15. stoljeća u Europi se nitko nije bitno bavio konikama, ali tada se povećava interes za konike i ostale krivulje zahvaljujući brojnim misliocima, umjetnicima, filozofima i matematičarima. Prve četiri Apolonijeve knjige o konikama su do tog vremena bile sačuvane na grčkom (prijevod na latinski objavljen u Veneciji 1537.) i još tri su bile arapski prijevodi (pronađene u 17.stoljeću). Papusova djela su originalno bila napisana u osam knjiga, ali su do 15. stoljeća samo djelomice sačuvana [26].

Johannes Werner (1468.-1528.) bio je njemački matematičar. Wernerov odabir određenih dijelova materijala koji će biti uključeni u njegovo djelo o konikama *Libellussuper viginti duobus elementis conicis* (1522.) zasnovan je u velikoj mjeri na metodama starih Grka o duplikaciji kocke i dijeljenu kugle u zadanom volumnom omjeru i smatra se prvim originalnim djelom o konikama u Europi nakon antike. U centru Wernerovog interesa našla se samo parabola i hiperbola. Razlog tomu je njegovo zanimanje za udvostručavanje kocke, pri čemu elipsa nije imala značaja.

U to se vrijeme Wernerovo djelo nije puno citiralo, najvjerojatnije jer je prijevod Apolonijevih *Konika* ubrzo doveo do toga da je njegov rad bio suvišan s obzirom da nije bio originalan, već je jednostavno prikupio jedanaest metoda koje su bile poznate starim Grcima.

No, u renesansi ne samo da se ponovno „otkrivaju" već ranije Grcima i Arapima poznata svojstva konika, nego one po prvi puta postaju važan predmet istraživanja jer se otkrila njihova primjena u stvarnome svijetu. Tu se posebno ističu Johannes Kepler i Galileo Galilei koji su otkrili pojavu konika u astronomiji.

3.1 Galileo Galilei

Galileo Galilei (1564.–1642.) bio je talijanski matematičar, fizičar, astronom i filozof. Nakon završenih medicinskih studija, posvetio se proučavanju geometrije i Arhimedovih djela, te postao jedan od najvećih fizičara i astronoma.

Galileo je promijenio način na koji su ljudi razumijevali gibanje i uveo radikalno drugačiji način povezivanja gibanja i geometrije. Otkrivši matematičku povezanost između horizontalnog i vertikalnog gibanja otvorio je vrata objašnjenju određenih gibanja koje je bilo osobito teško razmjeti unutar aristotelskih okvira. Njegov matematički prikaz slobodnog pada i putanje projektila je pristašama „mehaničke filozofije“ u 17. stoljeću poslužio kao oslonac razmatranja mogućnosti matematičkoga opisivanja svih „zemaljskih“ gibanja. Galileo je uočio da se putanja projektila može odrediti ako vertikalnu i horizontalnu komponentu gibanja promatramo odvojeno i zatim ih kombiniramo zajedno (danas bismo rekli: zbrojimo vektore).

Također radio je na matematičkom modelu koji opisuje kretanje tijela u padu, koje je proučavao mjereći vrijeme potrebno loptama da se skotrljaju preko različitih razdaljina na nagnutim pločama.

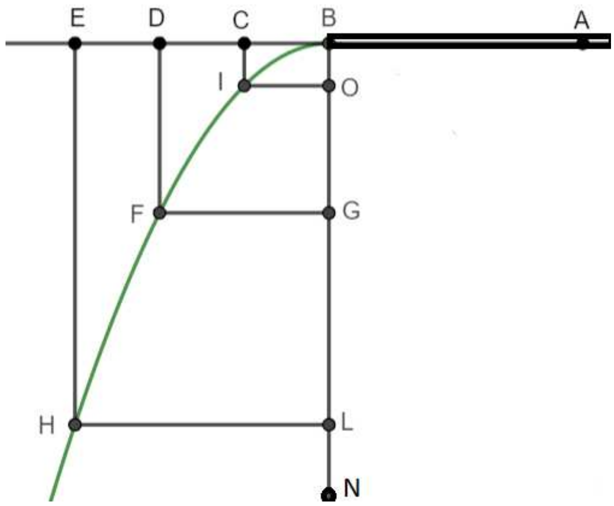
Pokusom je oborio dva tisućljeća staru, a dotad prevladavajuću, Aristotelovu teoriju da teža tijela padaju brže od lakših, a opaženu razliku o brzini padanja različitih tijela pripisao je otporu zraka. Pomoću pokusa i briljantnog teorijskog razmatranja otkrio je zakon jednoliko ubrzanog gibanja i izrazio ga u matematičkom obliku. Galileo je svijet izložio svojim fizičkim nalazima u knjizi *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (*Dijalozi o dvije nove znanosti*, 1638.). Nevjerojatno je da je Galileo eksperimentom pronašao ovaj rezultat koji i danas koristimo i podučavamo. U toj knjizi izložio je misaone pokuse kojima je potkrijepio svoju teoriju i pokazao da padajuća tijela ubrzavaju prema navedenim omjerima [4].

Na temelju Galileovih bilješki o gibanju, sačuvanih u Nacionalnoj središnjoj knjižnici u Firenci u svesku *72 Galilejeve bilješke o pokretu* zaključujemo da je Galileo otkrio paraboličnu putanju još 1608. i matematički je dokazao početkom 1609. godine, premda punih 30 godina to nije objavio u tiskanim izdanjima svojih radova. Galileo je u zadnjem dijelu *Dijaloga o dvije nove znanosti* dokazao da je putanja projektila, ako se zanemari otpor zraka, parabola [11].

Prije 16. stoljeća postojalo je uopćeno mišljenje da je brzina tijela u slobodnom padu proporcionalna masi tijela, tj. teže tijelo padat će brže od lakšeg tijela. Galileo Galilei proširio je ta razmatranja o slobodnom padu kroz niz pokusa puštajući tijela da se kotrljaju niz kosine i uspio je povezati slobodni pad sa silom teže. Ove eksperimente Galilei je ponovio nekoliko stotina puta i tako je uspio nakupiti dovoljno podataka. Galileo u svojim bilješkama nije opisivao takve eksperimente i nije davao rezultate u numeričkom obliku, kao što je bio običaj među njegovim nasljednicima.

U to vrijeme, da bi se izveo dokaz o paraboličnoj putanji, dva zakona su morala biti poznata. Jedan je zakon slobodni pad, koji kaže da je prijeđeni put s proporcionalan kvadratu protekloga vremena t, a brzina v jednoliko raste s proteklim vremenom i koji je Galileo otkrio 1604. godine. Drugi zakon koji je trebao za dokaz bio je zakon tromosti kojeg tvrdi da svako tijelo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikoga gibanja po pravcu dok ga neka vanjska sila ne prisili da to stanje promijeni. Iz tih zakona Galileo je izveo paraboličnu putanju.

Primjer iznimne kvalitete Galileove znanosti je u raspravi posvećenoj gibanju projektila: „Zamislimo tijelo pokrenuto po horizontalnoj ravnini bez ikakve zapreke. Kažemo da će njegovo gibanje po ravnini ostati jednoliko u beskonačnost, ukoliko se ravnina proteže u beskonačnost. Ali ako je ravnina ograničena i tijelo bude izbačeno u zrak, kad tijelo, za koje pretpostavljamo da je pod utjecajem gravitacije, prođe rub ravnine, dodat će prvotnom jednolikom i neuništivom gibanju težnju prema dolje koju ima zbog svoje težine. Zbog toga proizlazi složeno gibanje, složeno od horizontalnog gibanja i prirodnog ubrzanog padanja." Na tim stranicama Galileo pokazuje da je putanja projektila parabolična (slika 3.1): „Primijećeno je da projektili opisuju neku zakrivljenu putanju, ali nitko nije naglasio činjenicu da je ta putanja oblika parabole. Uzmimo horizontalnu ravninu AB, postavljenu na zraku, duž koje se tijelo giba jednoliko od A do B. U točki B, gdje prestaje oslonac, tijelo, zbog svoje težine, prisiljeno je na prirodno gibanje prema dolje duž linije BN, zbog svoje gravitacije. Nadopunimo liniju AB do linije BE koju ćemo koristiti za mjerenje tijeka vremena. Označimo jednake udaljenosti $|BC|$, $|CD|$ i $|DE|$ na BE i nacrtajmo paralele liniji BN kroz točke C, D i E. Na prvoj od tih paralela uzmimo proizvoljnu duljinu $|CI|$; na sljedećoj, duljinu $|DF|$ koja je četiri puta veća; na trećoj, duljinu $|EH|$ devet puta veću; i tako dalje, svaka slijedeća dužina veća kao kvadrat od duljine $|CB|$, $|DB|$, $|EB|$... Zamislimo da je vertikalni pad duž CI dodan pomaku tijela koje se giba od B do C u jednolikom gibanju. U vremenu BC tijelo će se nalaziti u točki I. U vremenu BD koje je dvostruko dulje od BC, njegova vertikalna udaljenost zbog pada bit će jednaka $4CI$. Pokazano je da se udaljenosti odnose kao kvadrati vremena u jednolikom ubrzanom gibanju. Na isti način, udaljenost EH koja je prijeđena u vremenu BE bit će $9CI$; prema tome, udaljenosti $|EH|$, $|DF|$, $|CI|$ se odnose jedna prema drugima kao kvadrati duljina $|EB|$, $|DB|$, $|CB|$... U točkama I, F, H prema tome, leži parabola." [12]



Slika 3.1: Galileov prikaz horizontalnog hitca

3.2 Johannes Kepler

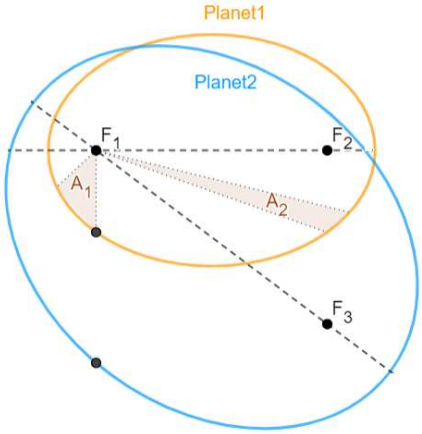
Dok je Nikolaj Kopernik ostao pri starogrčkom uvjerenju da je kružnica glavna kada se govori o kretanju nebeskih tijela, Johannes Kepler (1571.-–1630.) njemački astronom, matematičar i astrolog prvi je došao do spoznaje da se nebeska tijela kreću oko Sunca po eliptičnim putanjama. On u okviru svoje knjige *Astronomiae pars Optica* (1604.) prepoznaju eliptičnu putanju Marsa oko Sunca i konikama posvećuje jedno poglavlje (peto). Danas je opće prihvaćena činjenica da se planete oko Sunca kreću po elipsama o čemu govori i prvi Keplerov zakon. Kepler razlikuje pet vrsta konika: kružnicu, elipsu, parabolu, hiperbolu i pravac. Tvrdi da se svaka od njih može dobiti iz druge neprekidnim mijenjanjem. Pravac i parabola su dva ekstremna oblika hiperbole, a parabola i elipsa su dva ekstremna oblika kružnice [25].

Znamenita su tri Keplerova zakona o gibanju planeta, temeljem kojih je elipsa konačno dobila primjenu u stvarnom svijetu:

1. Putanje planeta su elipse, u čijem jednom žarištu je Sunce.

2. U jednakim vremenskim razmacima radij-vektor danog planeta prelazi jednake površine (slika 3.2).

3. Ukupna ophodna vremena (godine) dvaju planeta imaju omjer $\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{(\frac{a_2}{a_1})^3}$, gdje su t_1 i t_2 ophodna vremena planeta, a_1 je duljina velike poluosi eliptične putanje prvog planeta, a a_2 je duljina velike poluosi eliptične putanje drugog planeta.



Slika 3.2: Drugi Keplerov zakon

Kepler je prvi uveo naziv „fokus” za značajne točke na osi konike.

3.3 Marin Getaldić

Marin Getaldić (1568.-1626.) bio je hrvatski matematičar koji je napisao djelo *Nonnullae propositiones de parabola* (*Neki stavci o paraboli*, 1603.). Djelo je nastalo kao rezultat Getaldićevog velikog interesa za konstrukciju paraboličnih zrcala [8].

Parabolično zrcalo je konkavna zrcalna ploha oblika rotacijskoga paraboloida na kojoj se zrake koje izlaze iz žarišta reflektiraju paralelno s optičkom osi. S obzirom da svjetlosne zrake koje su usmjerene u jednu točku rezultiraju vrlo visokom temperaturom, ali nisu vidljive, neuki puk je smatrao takve pokuse zastrašujućima pa su Getaldića prozvali i čarobnjakom.

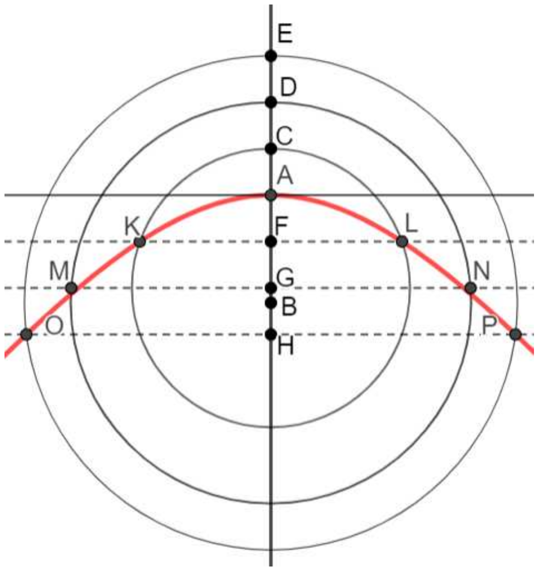
Da bi dokazao svoj zaključak da su sve parabole nastale presjecima pravokutnih, šiljastokutnih, tupokutnih pa i kosih stožaca (uz određene uvjete na pojedine presjeke) međusobno kongruentne, koristio se tada njemu jedinim poznatim izvorom, a to su četiri knjige Apolonijevih *Konika*. S obzirom da njemu tada poznati izvori nisu bili dovoljni za dokazivanje tvrdnje, Getaldić je sam razvio pojedine teoreme i stavke. On nije znao da su se takvi teoremi već nalazili u izgubljenim Apolonijevim djelima za koje on nije znao da postoje. Razlika između Apolonijevih i Getaldićevih teorema jest u tome što ih Apolonije razvija za pojedine slučajeve, dok ih Getaldić razvija za opći slučaj. Također, svoje poučke i teoreme Getaldić slaže redom kojim se vrlo lako dolazi do glavnog zaključka djela.

Getaldić u četvrtome poučku pokušava dokazati da je „parabola kao presjek bilo kojeg stošca kongruentna s parabolom koja se dobiva kao presjek uspravnog pravokutnog stošca". No „Getaldić nije uspio u potpunosti dokazati svoju tvrdnju pa njegov dokaz vrijedi samo za parabole dobivene presjecima uspravnih stožaca i presjecima kosih stožaca okomitih na ravninu simetrije" [9].

U drugome korolaru Getaldić izvodi jedan dio svog glavnog optičkog zaključka, a to je da su sve parabole dobivene od bilo kojeg stošca pogodne za konstrukciju zrcala kojima se može zapaliti maketa broda.

U petom poučku pronalazimo ostatak glavnog zaključka, a to je da se sve Sunčeve zrake koje padaju na parabolično zrcalo usporedno odbijaju s osi u jednoj točki koja je za četvrtinu parametra udaljena od tjemena parabole.

Getaldić daje dvije konstrukcije parabole i iznosi dokaz da su sve parabole jednako prikladne za konstrukciju paraboličnih zrcala i nisu samo presjeci uspravnog, pravokutnog stošca. Getaldić zahtjeva da u obje konstrukcije broj konstruiranih točaka kojima prolazi parabola bude što veći, tako da se dobije što preciznija parabola.



Slika 3.3: Getaldićeva konstrukcija parabole

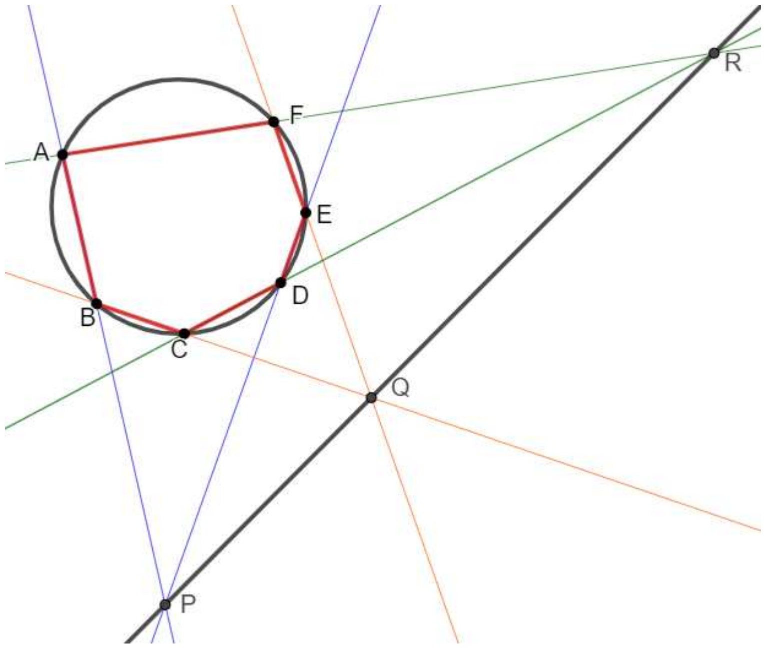
Getaldićeva konstrukcija parabole

Nacrtajmo dvije međusobno okomite osi. Na sjecištu osi označimo točku A. Na okomitoj osi zadajmo točku B, kao na slici 3.3. Nacrtajmo točke C, D, E iznad A tako da vrijedi $|AC| = |CD| = |DE|$. Nacrtajmo ispod A točke F, G, H tako da vrijedi $|AF| = |AC|$, $|AG| = |AD|$, $|AH| = |AE|$. Nacrtajmo kružnice sa središtem u točki B i pripadajućim polumjerima $|BC|$, $|BD|$, $|BE|$. Povucimo okomice na $\overline{AB}$ koje će prolaziti točkama F, G, H. Sjecišta okomica i kružnica označimo s točkama O, M, K, L, N i P, kao na slici 3.3. Krivulja koja povezuje točke O, M, K, L, N i P čini parabolu. Što su točke C, D, E, tj. F, G, H međusobno bliže, parabola će biti preciznije iscrtana.

3.4 Blaise Pascal

Blaise Pascal (1623.–1662.) bio je francuski filozof, matematičar i fizičar. Njegov matematički talent dolazi do izražaja već u njegovoj 16. godini, kada je napisao djelo o konikama s naslovom *Esej o konikama* (*Essay pour les coniques*, 1640.) i objavio ga na posteru u kojemu je postavio svoj teorem o heksagramima.

Teorem 3.4.1 (Pascalov teorem o mističnom heksagramu)**.** *Neka je u kružnicu upisan heksagram $ABCDEF$ [1] te neka je $AB \cap ED = P$, $BC \cap FE = Q$ i $CD \cap AF = R$. Tada su točke P, Q i R kolinearne (slika 3.4).*

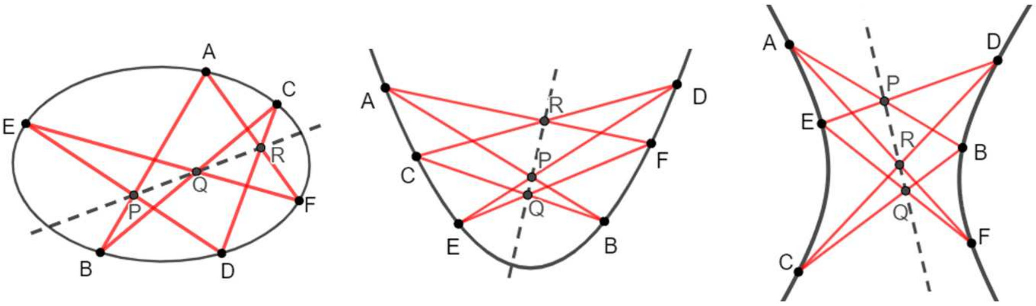


Slika 3.4: Pascalov teorem o mističnom heksagramu na kružnici

Ono što Pascalov teorem čini zanimljivim jest da vrijedi i za sve tipove konika. Dakle, umjesto da odaberemo šest točaka na kružnici, možemo odabrati šest točaka na elipsi, paraboli ili hiperboli. Pravci na kojima ležu parovi nasuprotnih stranica sijeku se u tri točke koje su kolinearne (slika 3.5).

Ako je prema Pascalovom teoremu konika degenerirana u dva pravca, tada izravno imamo Papusov teorem. Iako je otkriće Pascalovog teorema nastalo gotovo 1300 godina nakon otkrića Papusovog teorema, ono je očito generalizacija Papusovog teorema [24].

[1] Heksagram $ABCDEF$ je unija dužina : $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ i $\overline{FA}$



Slika 3.5: Pascalov teorem o mističnom heksagramu na konikama

3.5 René Descartes

Nakon gotovo dva tisućljeća matematičari su tijekom renesanse konačno postigli veliki pomak u razumijevanju konika povezivanjem geometrijskih i algebarskih tehnika, no nedostajao je efikasan način za obradu konika — nedostajala je analitička geometrija. Glavna prepreka uvođenju analitičke geometrije bilo je standardno fizikalno interpretiranje veličina (prva potencija je dužina, druga je površina, treća je volumen). Konačni korak i otkriće analitičke geometrije postiže René Descartes (1596.–1650.) u prilogu *La Géométrie* svog djela *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verit é dans les sciences* iz 1637. Prema anegdoti, Descartes je inspiraciju za uvođenje koordinatne ravnine dobio promatrajući muhu na stropu.

Descartes uvodi koordinatni sustav, odnosno poziciju točke u ravnini opisuje s dva broja (koordinatama) koji predstavljaju njene udaljenosti do dvaju međusobno okomitih pravaca. On se odmiče od spomenute interpretacije kvadrata i kubova brojeva: kod njega su x, x^2 i x^3 duljine. Dakle x^2 nije površina, već broj kojem geometrijski odgovara jednodimenzionalni objekt: parabola. Ovakvom interpretacijom dobivaju smisao i jednadžbe viših stupnjeva. Descartes želi pomoću algebre rješavati geometrijske probleme i stalno paralelno promatra algebarsku i geometrijsku analizu problema. Temeljem ideje koordinata Descartes zaključuje da se pravci mogu predstaviti kao skupovi točaka (x, y) koje zadovoljavaju jednadžbu oblika

$$ax + by + c = 0,$$

a konike kao skupovi točaka (x, y) koje zadovoljavaju jednadžbu oblika

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0;$$

općenito krivulje u ravnini zadovoljavaju jednadžbe oblika $f(x, y) = 0$ [7].

U prvom dijelu *La Géométrie*, Descartes se bavi Papusovim zadatkom, u kom se traži geometrijsko mjesto točaka u ravnini koje imaju konstantan omjer umnožaka udaljenosti do dvije skupine pravaca.

Za rješavanje Papusovog problema, Descartes postavlja koordinatni sustav tako da mu x-os leži na prvom od zadanih pravaca, da mu je ishodište u sjecištu prvog i drugog pravca te da je y-os nagnuta u odnosu na x-os pod kutom koji odgovara zadanom za mjerenje udaljenosti u odnosu na prvi pravac. Ako je $T = (x, y)$ točka koja zadovoljava Papusov uvjet, onda je za nju y točno udaljenost do prvog pravca. Zatim Descartes dokazuje da se udaljenosti d_i do ostalih pravaca ($i = 2, 3, \dots, n$) mogu zapisati u obliku $d_i = \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i$, gdje su $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ konstante izvedene iz kuta za mjerenje udaljenosti prema i-tom pravcu i razmaka među sjecištima po dva pravca. Tako se Papusov problem svodi na jednadžbu oblika

$$y \prod_{i=2}^{k} (\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i) = \prod_{i=k+1}^{n} (\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i).$$

Nakon tog je sistematizirao stupnjeve tih jednadžbi u odnosu na x, odnosno y, u ovisnosti o broju n zadanih pravaca te je iz te analize zaključio da su za slučaj $n \leq 9$ (osim ako se radi o 9 paralelnih pravaca) rješenja konike (uključivo pravaca i kružnica) [1].

U drugom dijelu *La Géométrie* Descartes krivulje dijeli na dvije vrste, koje naziva geometrijskim i mehaničkim. Ta podjela odgovara današnjoj podjeli na algebarske i transcendentne krivulje, dakle konike spadaju, u Descartesovoj terminologiji, u geometrijske krivulje [1].

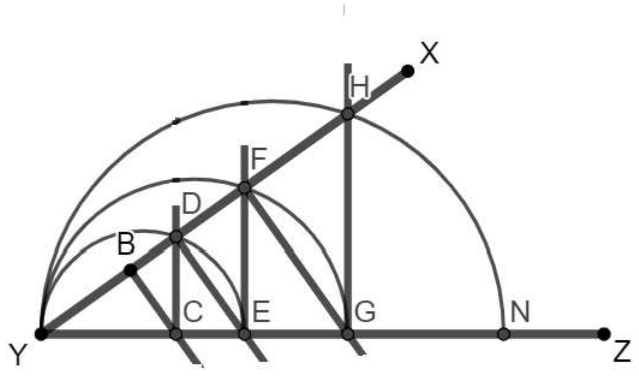
Descartes kaže da su crtanje geometrijskih krivulja dovoljna dva ili više pravaca koja se mogu pomicati jedan duž drugog tako da njihova sjecišta ocrtavaju krivulje. U drugom dijeu *La Géométrie* dao je dva primjera kako bi ilustrirao to pomicanje.

U prvom slučaju radi se o sustavu dvaju spojenih ravnala duljina $|YX|$ i $|YZ|$. Ravnalo duljine $|BC|$ je fiksirano okomito na ravnalo YX u točki B. Ravnala CD, EF i GH su napravljena tako da mogu kliziti po ravnalu YZ tako da ostanu okomiti na njega. Na početku pomicanja kut XYZ instrumenta je 0 i ravnala YX i YZ se podudaraju u točki A. Zatim se kut XYZ otvara držeći ravnalo YZ fiksno i rotirajući ravnalo YX. Ravnalo BC gura CD prema vani, CD gura DE, DE gura EF itd. Točka B koja je fiksirna na ravnalu YX opisuje kružnicu (slika 3.6).

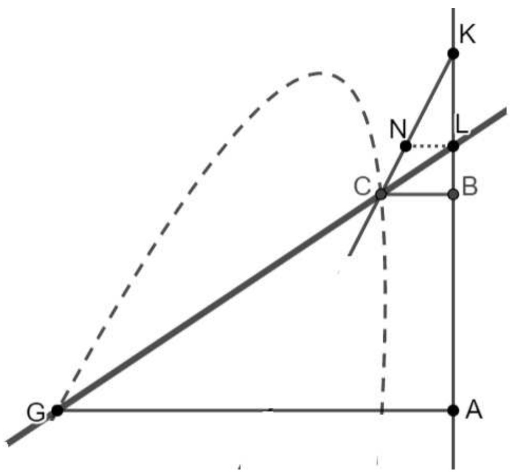
U drugom slučaju dano je ravnalo GL sa fiksnom točkom G vezano za spravu NKL u točki L koja se može pomicati duž vertikalne osi, dok je smjer pravca KN konstantan. Kada se L pomiče duž vertikalne osi, ravnalo se okreće oko G i pravac KN se pomiče prema dolje ne mijenjajući smjer. Sjecišta C ova dva pravca opisuju krivulju GCE. Descartes je izveo njenu jednadžbu:

$$y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac,$$

gdje je $|GA| = a$, $|KL| = b$, $|NL| = c$, $|CB| = y$ i $|AB| = x$ te je zaključio da je to krivulja prve klase, odnosno hiperbola (slika 3.7) [2].

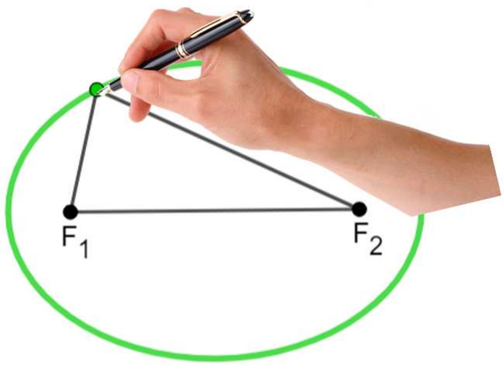


Slika 3.6: Descartesova konstrukcija kružnice



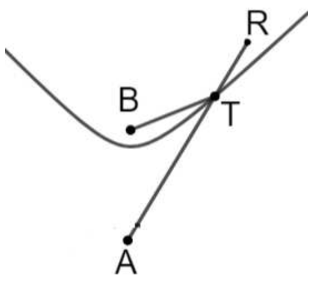
Slika 3.7: Descartesova konstrukcija hiperbole

Descartes opisuje i crtanje elipse na temelju njezine defnicije. Takvu konstrukciju i danas zovemo vrtlarskom (slika 3.8) jer je to praktičan način crtanja elipse. U zemlju se zabiju dva kolčića na mjestima F_1 i F_2 i uzme se nerastezljiva nit duljine $2a > \frac{1}{2}|F_1F_2|$. a zatim se zašiljeni kolčić postavi izmedu F_1 i F_2 i napne nit. Ako kolčić pomičemo u jednom smijeru tako da nit bude stalno napeta, onda njegov šiljak opisuje na zemlji oblik elipse [25].



Slika 3.8: Vrtlarska konstrukcija

Na sličan način, koristeći vezice, opisao je konstrukciju hiperbole. Neka je dano ravnalo AR s fiksnom točkom A. Vezica je pričvršćena u točki B i točki R na ravnalu i rasteže se u fiksnoj točki T na ravnalu. Kad se ravnalo okreće oko točke A, tada točka T opisuje jedna granu hipebole s fokusima A i B (slika 3.9) [1].



Slika 3.9: Konstrukcija hiperbole pomoću vezica

3.6 Isaac Newton

Isaac Newton (1642.–1727.), engleski fizičar, matematičar i astronom, jedan je od najznačajnijih znanstvenika u povijesti. Newton je ostvario značajan napredak u proučavanju gibanja planeta, što će kasnije objaviti u svojoj najpoznatijoj knjizi *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* iz 1687. [3].

Engleski znanstvenici Robert Hooke i Edmond Halley neuspješno su pokušavali riješiti problem gibanja planeta. U kolovozu 1684., Halley je posjetio Newtona na Cambridgeu, nadajući se odgovoru na sljedeće pitanje: „Kojeg je oblika putanja po kojoj se kreću planeti kada obilaze oko Sunca, ukoliko se gibaju pod djelovanjem privlačne sile koja opada s kvadratom udaljenosti?" Čim je postavio pitanje, Newton je spremno odgovorio: „Eliptična". To je, naravno, znao još i Kepler (1. Keplerov zakon). Kada ga je Halley zatražio objašnjenje, Newton je rekao da je to već izračunao. Na kraju rasprave, Newton je Halleyu obećao poslati nov matematički izvod. Kao djelomično ispunjenje svog obećanja, Newton je nedugo poslije objavio svoj slavni rad *De Motu* iz kojeg je kasnije nastalo njegovo najpoznatije djelo *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* [13].

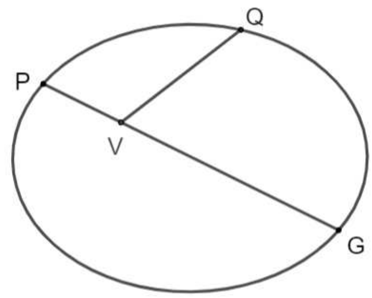
Danas znamo da je tijekom studija Newton na svoju ruku ovladao radovima René Descartesa, Pierrea Gassendia, Thomasa Hobbesa i drugih značajnih osoba znanstvene revolucije. Serije bilježnica dokazuju kako je Newton počeo savladavati Descartesovu geometriju i druge forme matematike, daleko naprednije od Euklidovih *Elemenata*. Newton je dao empirijsku interpolacijsku formulu i metodu za približna rješenja algebarske jednadžbe bilo kojega stupnja.

Iako se Newton nije sustavno bavio konikama, vezano za druge svoje rezultate otkrio je mnoge nove rezultate ili pak drugačije obradio stare. Jedanaesta propozicija trećeg odjeljka prve knjige *Principisa* nudi izvrstan primjer: Newton je tu riješio problem pronalaženja mjere centripetalne sile koja djeluje na tijelo tako da se tijelo giba po elipsi, a da je ta sila usmjerena prema jednom fokusu putanje. Propozicija tvrdi da je u tom slučaju u svakoj točci putanje iznos sile obrnuto proporcionalan kvadratu udaljenosti točke do fokusa prema kojemu je sila usmjerena.

Newton ovdje koristi jednadžbu elipse ne u smislu analitičke geometrije, već u antičkom duhu: Za fiksirani promjer elipse $\overline{PG}$ i proizvoljnu točku elipse Q vrijedi (slika 3.10)

$$|QV|^2 = k \cdot |GV| \cdot |PV|,$$

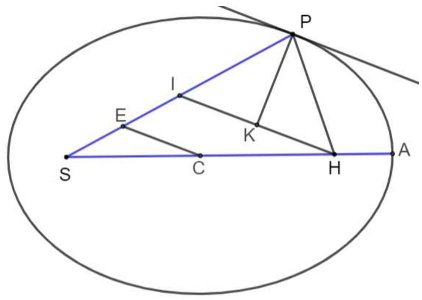
gdje je $|QV|$ ordinata u odnosu na taj promjer, a k konstanta.



Slika 3.10: Newtonova jednadžba elipse

Takvu jednadžbu Newton koristi da bi dokazao sljedeću lemu (slika 3.11).

Lema 3.6.1. *Neka su S i H fokusi elipse, a C njeno središte. Neka je HI pravac paralelan tangenti u točki P te neka je CE pravac paralelan toj tangenti. Neka je PK okomit na tangentu. Tada je $|PE| = |AC|$.*

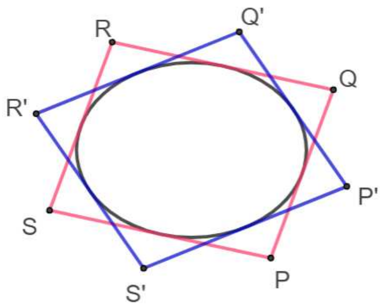


Slika 3.11: Newtonova nova lema

Nakon toga Newton dokazuje i koristi drugu lemu koju je dokazao u mladosti kada je čitao tekst u kojem se konike razmatraju na način koji se uvelike razlikuje od Apolonijeva. U trenutku pisanja *De Motu*, teksta koji je proširen na djelo *Principia*, nije se sjećao svog dokaza i brzopleto napisao je „*Constat ex Conicis*" („utvrđeno je iz Konika"), misleći na Apolonijevo djelo, izjavu koja je također ponovio u djelu *Principia*. Radi se o sljedećoj lemi (slika 3.12):

Lema 3.6.2. *Svi paralelogrami sa stranicama duljina jednakim duljinama dvaju konjugiranih promjera*[2] *elipse ili hiperbole imaju jednake površine.*

[2] Dva promjera konike su konjugirana ako svaki od njih raspolavlja tetive paralelne s drugim promjerom.



Slika 3.12: Paralelogrami opisani elipsi

Kombinacijom tih lema Newton je naposlijetku izveo željeni zaključak: Iznos sile uz dane uvjete je stvarno obrnuto proporcionalan kvadratu udaljenosti točke do fokusa [10].

Kao što vidimo, Newton je, bar u ovom dijelu, izbjegavao korištenje Descartesove analitičke geometrije, nešto što će od njega preuzeti Bošković. Također, Newton je u *Principia* prvi istakao ulogu Papusovog počka (sve konike se mogu definirati preko konstatnog omjera udaljenosti točke na krivulji do fokusa i direktrise), što će Bošković uzeti za definiciju konika. Ovo su samo dva od mnogih utjecaja Newtonova djela na posljednjeg matematičara u našem pregledu, a to je Bošković [10].

3.7 Ruđer Bošković

Ruđer Josip Bošković (1711.–1787.) jedan je od najvećih hrvatskih matematičara, fizičara i astronoma. Bavio se mnogim matematičkim problemima pa tako i konikama.

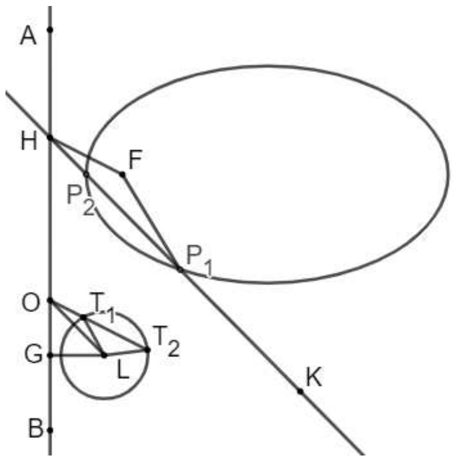
Koristeći se svojstvima koje je opisao Papus iz Aleksandrije, u svom djelu *Elementi presjeka stošca*, trećeg sveska *Elemenata sveukupne matematike*, sustavno je izložio svoju potpunu i originalnu teoriju i mnogobrojne nove rezultate o konikama. Tvrdnje je dokazao na čisto geometrijski način bez korištenja analitičkih tehnika, a za razliku od prethodnika, sva je svojstva konika izveo konstrukcijama u ravnini, ne pozivajući se na njihov opis kao presjeka stošca ravninom.

Prva novina Boškovićeve teorije konika njihova za to doba neuobičajena definicija. Za definiciju konika uzeo je svojstvo svih konika da im je omjer udaljenosti od bilo koje točke do čvrste točke (žarišta) i čvrstog pravca (direktrise) konstantan. Taj omjer, koji mi danas nazivamo numeričkim ekcentricitetom, odredbenim omjerom (*ratio determinans*). Ovisno o tome je li odredbeni omjer manji, jednak ili veći od 2, konika je elipsa, parabola ili hiperbola. Iako je to svojstvo otkrio već starogrčki matematičar Papus Aleksandrijski oko 300. godine, Bošković je prvi polazeći od njega izgradio potpunu teoriju [5].

Druga je novina Boškovićeve teorije konika generacijska kružnica, tj. kružnica kojoj je omjer polumjera i udaljenosti od središta do ravnalice konike jednak odredbenom omjeru konike (numeričkom ekscentricitetu). Iako je ona temeljna i glavna novina njegove teorije, Bošković joj nije dao ime. S pomoću nje dokazao je niz poznatih i mnoge nove rezultate o konikama. Primjerice, za koniku zadanu žarištem, ravnalicom i odredbenim omjerom s pomoću generacijske kružnice konstruirao je sjecišta s proizvoljnim pravcem, a to je pak koristio za konstrukciju točaka konike [5].

Boškovićeva konstrukcija sjecišta zadanoga pravca HK s elipsom

Neka je zadana elipsa s fokusom F, direktrisom AB i odredbenim omjerom ε (slika 3.13). Odaberimo točku L izvan direktrise te povucimo iz nje okomicu na direktrisu koja ju siječe u točki G. Konstruirajmo generacijsku kružnicu sa središtem u točki L i polumjerom jednakim umnošku $|LG|\cdot\varepsilon$. Kroz točku L nacrtajmo paralelu s pravcem HK koja ravnalicu siječe u točki O. Zatim nacrtajmo paralelu s pravcem HF kroz točku O koja siječe generacijsku kružnicu u točkama T_1 i T_2. Kroz točku F nacrtajmo paralele s LT_1 i LT_2. Te paralele sijeku pravac HK u točkama P_1 i P_2 elipse [5].

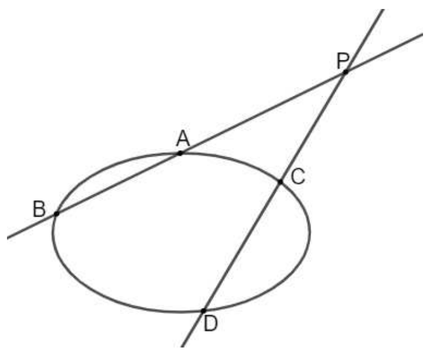


Slika 3.13: Sjecišta pravca i elipse

Bošković kružnicu ne spominje eksplicitno kao vrstu konike, ali iz korespondencije generacijske kružnice i konike proizlazi ekvivalentnost kružnice s konikama. Boškovićeva definicija konike ne isključuje kružnice iz konika: za kružnicu je odredbeni omjer 0, žarište je njezino središte, njezina ravnalica nalazi se u beskonačnosti, a generacijska kružnica neke kružnice oko neke točke upravo je ta točka. Boškovićevo neuvrštavanje kružnice u konike treba pripisati ponajviše tomu što iz svojstava kružnice izvodi svojstva konike, što podrazumijeva da su ta svojstva prije dokazana: Svoje rezultate Bošković temelji na euklidskim rezultatima o kružnicama. U časopisu *Giornale de'Letterati* pod naslovom *Di-*

mostrazione facile d'una principale proprieta delle Sezioni Coniche, la quale non depende da altri Thorerni Conici (*Jednostavan dokaz glavnog svojstva konika koji ne ovise o drugim teoremima o konikama*, 1746.) Bošković je dao neke rezultate o konikama, među ostalim novi dokaz poučka o sekantama konike, koji smatra osnovnim poučkom iz kojega se dalje izvode svojstva konika. Taj je poučak bio poznat još od starogrčkoga doba, ali se rijetko koristio u teoriji konika i nitko ga nije koristio tako sustavno kao Bošković [5].

Teorem 3.7.1 (Poučak o sekantama)**.** *Ako se iz točke P povuku dvije sekante na koniku koje koniku sijeku u točkama A i B odnosno u točkama C i D, onda omjer umnožaka odsječaka* $(|PA| \cdot |PB|) : (|PC| \cdot |PD|)$ *ovisi samo o odredbenom omjeru konike i smjerovima pravaca* AB *i* CD.



Slika 3.14: Poučak o sekantama

Bošković je poučak o sekantama dokazao tek otprilike na polovici teksta *Elemenata presjeka stošca* jer je mnoga svojstva izveo bez upotrebe toga poučka, koristeći definiciju i generacijsku kružnicu. Poučak o sekantama Bošković koristi kao treći bitan element svoje teorije konika, kako bi dokazao već ranije dokazane i dodatne tvrdnje [5].

Boškovićeva transformacija točaka generacijske kružnice u točke konike (i obratno) projektivno je preslikavanje, tj. geometrijska transformacija kakva će se početi sustavno proučavati tek sedamdesetak godina poslije. Boškovićeva je teorija konika vrhunac starijega doba tzv. sintetičke geometrije (geometrije u kojoj se tvrdnje izlažu i dokazuju klasičnim geometrijskim argumentima bez korištenja koordinata i ostalih analitičkih metoda) i najava novog, apstraktnijeg pristupa koji će u 19. stoljeću u sklopu projektivne geometrije razviti francuski matematičar J.-V. Poncelet i drugi [5].

Poglavlje 4

Odnos povijesnih ideja prema suvremenom školskom pristupu

U nastavnim programima za matematiku u srednjim školama i gimnazijama krivuljama drugog reda uglavnom se pristupa analitičkogeometrijski, preko algebarske jednadžbe tih krivulja, iz čega se onda izvode i njihova svojstva [20].

Definicija 4.0.1. *Neka su F_1 i F_2 dvije čvrste točke ravnine π i neka je a pozitivan realan broj, $a > \frac{1}{2}|F_1F_2|$. Skup svih točaka ravnine π za koje je zbroj udaljenosti do točaka F_1 i F_2 jednak $2a$ nazivamo* ***elipsa*** *sa žarištima F_1 i F_2 i duljinom velike poluosi a.*

Teorem 4.0.2. *Neka su F_1 i F_2 žarišta elipse te a duljina velike poluosi. Odaberimo pravokutni koordinatni sustav takav da polovište O dužine $\overline{F_1F_2}$ bude ishodište koordinatnog sustava, pravac F_1F_2 os x, a simetrala dužine $\overline{F_1F_2}$ os y. Sada se lako iz definicije elipse dobije da za svaku točku $T(x, y)$ na elipsi $E(F_1, F_2, a)$ vrijedi relacija*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

i obratno, da svaka točka $T(x, y)$ za koju vrijedi ova relacija pripada elipsi.

Na sličan način definiraju se hiperbola i parabola.

Definicija 4.0.3. *Neka su F_1 i F_2 dvije različite čvrste točke ravnine π i neka je a pozitivan realan broj, $a < \frac{1}{2}|F_1F_2|$. Skup svih točaka ravnine π za koje je razlika udaljenosti do točaka F_1 i F_2 jednaka $2a$ nazivamo* ***hiperbola*** *sa žarištima F_1 i F_2 i duljinom velike poluosi a.*

Kod hiperbole na analogan način kao kod elipse dolazimo do kanonske jednadžbe hiperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hiperbola ima dvije neprave točke. Tangente u tim točkama nazivaju se **asimptotama** hiperbole.

Definicija 4.0.4. *Neka je F čvrsta točka, a r čvrsti pravac ravnine π. Skup svih točaka ravnine π koje su jednako udaljene do točke F i do pravca r naziva se* ***parabola****. Točku F nazivamo žarištem ili fokusom parabolem, a pravac r ravnalicom ili direktrisom parabole.*

Da bismo izveli kanonsku jednadžbu parabole, potreban nam je pojam poluparametra. Duljinu tetive koja prolazi fokusom i okomita je na os parabole $P(F, d)$ nazivamo parametrom parabole i označavamo s $2p$. Poluparametar parabole je duljina p koja je jednaka $|OF|$, gdje je O ortogonalna projekcija točke F na d. Kanonsku jednadžbu parabole lako izvedemo ako koordinatni sustav odaberemo tako da je os x os parabole, a ishodište se nalazi u njezinom tjemenu. Za točku $T(x, y)$ na paraboli tada vrijedi

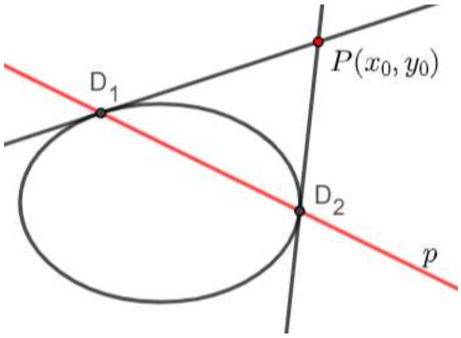
$$y^2 = 2px.$$

Kao što vidimo, ne samo da se iz definicija odmah izvode jednadžbe konika u Kartezijevom koordinatnom sustavu, što se naravno temelji na Descartesovom pristupu, nego se krivuljama pristupa čisto ravninski, dakle donekle u duhu Boškovića, a iz definicija i osnovnih iz njih izvedenih rezultata (jednadžbi i dr.) veza s njihovom pojavom kao presjeka stošca (dakle, s njihovim prostornim značenjem) nije vidljiva. Ovakav moderni pristup je pogodan za dokazivanje svojstava tangenata i asimptote i nekih manje poznatih, ali zanimljivih tvrdnji (Ponceletovi teoremi). No, u ovomu pristupu učenik ne može sagledati sličnost i vezu između ovih krivulja. Također, iz ovog pristupa je lako vidljivo zbog čega ove krivulje zajednički nazivamo krivuljama drugog reda.

Papus-Boškovićev pristup ovim krivuljama pojašnjava ulogu ravnalice kod elipse i hiperbole, ulogu numeričkog ekscentriciteta ε (kojeg se najčešće bez neke primjene i svrhe spominje u nastavi) te pokazuje kako se variranjem parametra ε krivulje mijenjaju od elipse, preko parabole i hiperbole do kružnice. Dok je pristup Papusa i Boškovića sintetički, kako smo vidjeli u prethodnom dijelu rada, moderni pristup koristi analitičku geometriju. Za primjer kako na moderan način dolazimo do klasičnih rezultata dajemo:

Moderan dokaz Papusovog poučka, tj. Boškovićeve definicije konika

Prije nego što krenemo u izvođenje Papus-Boškovićeve poučka moramo reći što je pol i polara. Ako iz točke konstruiramo dvije tangente na krivulju, dobivamo dva dirališta. Pravac kroz za dva dirališta zovemo polara, a točku iz koje smo nacrtali tangentu zovemo pol (slika 4.1). Neka je $P(x_0, y_0)$ pol. Tada je $b^2xx_0 + a^yy_0 = a^3b^2$ jednadžba polare za elipsu, $b^2xx_0 - a^2y_0 = a^2b^2$ jednadžba polare za hiperbolu, a $yy_0 = p(x + x_0)$, gdje je p parametar parabole, jednadžba polare za parabolu. Definicija polare za neku krivulju ne



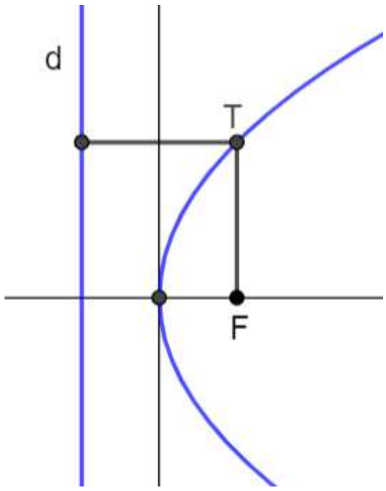
Slika 4.1: Pol i polara

isključuju promatranje polara točaka unutar pojedine konike. Mi ćemo za pol uzeti fokus konike.

Neka je pol parabole u njenom fokusu $F(\frac{p}{2})$. Tada njegova polara ima jednadžbu

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Prisjetimo se da je numerički ekscentricitet parabole $\varepsilon = \frac{e}{a}$. Bošković je gledao omjer udaljenosti točke krivulje od fokusa i udaljenosti točke od direktrise (polare fokusa). Kod parabole taj je omjer uvijek jednak 1 (slika 4.2).



Slika 4.2: Parabola i njena direktrisa

Neka je pol elipse njen fokus $F_1(-e, 0)$. Tada je njegova jednadžba polare

$$x = -\frac{a^2}{e}.$$

Kod elipse trebamo pokazati čemu je jednak spomenuti omjer.

$$|TF_1| = \sqrt{(e+x)^2+y^2} = \sqrt{(x+e)^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}$$

$$= \sqrt{x^2+2ex+e^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2} == \sqrt{a^2+2ex+\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}$$

$$= \sqrt{(a+\frac{e}{a})^2} = |a+x|$$

Analognim postupkom se dobije $|F_2T| = |a - \varepsilon x|$.

$$|Td_1| = \left|\frac{a^2}{e} - x\right| = \left|\frac{a-\varepsilon x}{\varepsilon}\right|$$

$$\frac{|TF_1|}{|Td_1|} = \varepsilon.$$

Isti rezultat se dobiva i za drugi fokus elipse, a analogno se cijeli račun može ponoviti i za hiperbolu. I za hiperbolu vrijedi da je taj omjer konstantan i jednak je ε. Promatrajući svojstva numeričkog ekscentriciteta za pojedine konike dobivamo sljedeći teorem. [19]

Teorem 4.0.5. *Neka je ε realan pozitivan broj, F čvrsta točka ranine i d čvrsti pravac te ravnine kojemu ne pripada točka F.*

Skup točaka T te ravnine za koje je omjer udaljenosti od F i udaljenosti od pravca d konstantan i jednak broju ε, tj. za koje vrijedi

$$\frac{|TF_2|}{|Td|} = \varepsilon$$

krivulja je drugo reda, i to elipsa ako je $0 < \varepsilon < 1$, parabola ako je $\varepsilon = 1$ i hiperbola ako je $\varepsilon > 1$.

Primjećujemo da koncept nastavnog plana i programa stavlja analitički pristup ispred geometrijskog, upućujući da je geometrijske zadatke najlakše rješavati svođenjem na odgovarajuće sustave jednadžbi do kojih dolazimo analitičkim pristupom. I sam Descartes se vodio mišlju da je ova metoda ne samo najpogodnija za rješavanje geometrijskih problema, već je i primijenjiva na sve ostale matematičke grane i znanosti. Ipak, uvjerio se da takva univerzalna metoda nije ostvariva jer tehnike analitičke geometrije, koje su bez daljnjega vrlo korisne, često puta sakriju i neka lijepa i zanimljiva svojstva geometrijskih objekata do kojih bismo mogli doći prirodnijim, geometrijskim putem. Najbolji primjer za to su krivulje elipsa, parabola i hiperbola o kojima učenici, po svršetku srednjoškolske naobrazbe, znaju isključivo u kontekstu njihovih kanonskih jednadžbi. Kružnica je izdvojena iz ove priče, jer se ona obrađuje još od nižih razreda osnovne škole. S najljepšim svojstvima kružnice (obodni kut, pojam tangente...) učenici su već upoznati po završetku osnovnoškolske naobrazbe, a analitički pristup u 3. razredu srednje škole predstavlja korisnu nadgradnju. A sada zamislimo da kružnicu, poput ostalih konika, učenici sustavno obrađuju tek u 3. razredu srednje škole i to uglavnom analitičkim pristupom. Više nego jasno je to da taj objekt ne bi doživjeli na prirodan način. Proučavanje ovih krivulja kao presjeka stošca ravninom opravdava naziv čunjosječnice ili konike. Nažalost, nastavni plan i program ne obuhvaća dokaze i objašnjenja da su prethodno analitički definirane konike zaista ti presjeci stošca, već se samo učenicima predoče primjeri na modelima iz svakodnevnog života, otvarajući im zanimljiv prostor za samostalne pokuse. Jedna od želja ovog rada je ukazati da bi se i ostale konike trebale obraditi prije 3. razreda srednje škole. Jedan razlog je potreba da se ove krivulje samostalno obrade, neovisno o koordinatizaciji ravnine, budući da se one javljaju u svijetu koji nas okružuje kao i u koreliranju s drugim nastavnim predmetima još od osnovne škole, a iz standardnog analitičkogeometrijskog pristupa mnoga takva geometrijska svojstva nisu jasno vidljiva. Drugi razlog jest što se primjenjujući geometrijski ili neki drugi pristup mogu, uz minimalno znanje elementarne geometrije, izvesti neka zanimljiva svojstva ovih krivulja s kojima se učenici po završetku srednjoškolske naobrazbe (a slično se može dogoditi i po završetku nekog matematičkog studija) nisu susreli, a koja ove krivulje čine primijenjivima u mnogim područjima i koja spadaju u opću matematičku kulturu [20].

Bibliografija

[1] H. J. M. Bos, *Descartes' solution of Pappus' problem. In: Redefining Geometrical Exactness. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*, Springer, 2001, New York, NY, dostupno na https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0087-8-23 (studeni 2020.)

[2] H. J. M. Bos, *On the Representation of Curves in Descartes' Géométrie*, dostupno na https://www.jstor.org/stable/41133624?seq=1 (studeni 2020.)

[3] C. B. Boyer, *History of Analytic Geometry*, Scripta Mathematica, New York, 1956.

[4] M. Bošnjaković, *Galileijeva teorija gibanja*, dostupno na https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf3A362/datastream/PDF/view (rujan 2020.)

[5] F. M. Brückler, *Leksikon Ruđera Boškovića: Konike*, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, dostupno na https://www.lzmk.hr/images/natuknice/nulti20arak-web.pdf (listopad 2020.)

[6] F. M. Brückler, *Povijest matematike: Eratosten, Apolonije i Arhimed*, dostupno na http://prelog.chem.pmf.hr/ fmbruckler/PovMat/povmat03b-2020.pdf (listopad 2020.)

[7] F. M. Brückler, *René Descartes*, Osječka matematička škola, 2004., str. 109-112

[8] R. Calinger, *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*, Cambridge University Press, 1996., str. 115

[9] Ž. Dadić, *Hrvati i egzaktne znanosti u osvitu novovjekovlja*, Školska knjiga, Zagreb, 1994., str. 168

[10] A. Del Centina, A. Fiocca, *„A masterly though neglected work", Boscovich's treatise on conic sections*, dostupno na

https://link.springer.com/article/10.1007/s00407-018-0213-3 (studeni 2020.)

[11] S. Drake, J. MacLachlan, *Gallileo's Discovery of the Parabolic Trajectory*, Scientific American Vol. 232, No. 3, 1975., str. 102-111

[12] R. Dugas, *A History of Mechanics*, Dover, New York, 1988.

[13] M. Galuzzi, *Newton's attempt to construct a unitary view of mathematics*, dostupno na https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086010000303 (listopad 2020.)

[14] A. Guberina, N. Koceić Bilan, *Generalizirani Apolonijev problem*, Acta Mathematica Spalatensia, Vol.2, 2019., str. 67-91

[15] T. Heath, *A History of Greek Mathematics, Vol. I.*, Vol. Clarendon Press, Oxford, 1921.

[16] T. Heath, *A History of Greek Mathematics, Vol. II.*, Vol. Clarendon Press, Oxford, 1921.

[17] S. Kocijan, *Arapski temelji školske matematike*, dostupno na https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf:3A5519/datastream/PDF/view (listopad 2020.)

[18] J. Majcen, *Matematički rad Boškovićev, II. dio: Sectionum Conicarum Elementa*, JAZU, Zagreb, 1921.

[19] D. Menon, *Konike*, dostupno na http://www.mathos.unios.hr/ dmenon/dmenon/Nastava/MNM2/mnm2semkonike.pdf (rujan 2020.)

[20] I. Moroševic, N. Koceić-Bilan, J. Jurko, *Različiti nastavno-metodički pristupi čunosječnicama*, dostupno na http://e.math.hr/category/klju-ne-rije-i/ru-er-bo-kovi (listopad 2020.)

[21] M. Murat, *Predeuklidsko razdoblje grčke matematike*, dostupno na https://repozitorij.unizg.hr/islandora/object/pmf:5344/preview (listopad 2020.)

[22] M. Musa, *Tri klasična problema*, dostupno na
`http://www.mathos.unios.hr/ mdjumic/uploads/diplomski/MUS05.pdf`
(rujan 2020.)

[23] E. Rac Marinić Kragić, *Kako je Arhimed računao površinu odsječka parabole, MiŠ 50 (5)*, Zagreb, 2008./2009., str. 207-211

[24] J. Richter-Geber, *Perspectives on Projective Geometry: A Guided Tour through Real and Complex Geometry*, Springer, 2010, dostupno na
`https://www-m10.ma.tum.de/foswiki/pub/Lehre/WS0910/ProjektiveGeometrie WS0910/GeomBook.pdf`

[25] M. Suvalj, *Krivulje drugog reda i primjene*, dostupno na
`http://www.mathos.unios.hr/ mdjumic/uploads/diplomski/SUV03.pdf`
(listopad 2020.)

[26] I. Tadić, *Matematika u doba renesanse*, dostupno na
`http://www.mathos.unios.hr/ mdjumic/uploads/diplomski/TAD01.pdf`

Sažetak

Konike (presjeci stošca s ravninom) se proučavaju više od 2000 godina. One su prvi puta u matematiku uvedene u antičkogrčko doba te su se njima posebno bavili Menehmo, Euklid, Apolonije i Papus. U arapsko doba, Omar Khayyam ih je iskoristio za rješavanje kubnih jednadžbi, a u doba renesanse otkrivene su njihove primjene u astronomiji (Galileo, Kepler). Nakon što je Descartes uveo analitičku geometriju, postale su poznate i kao krivulje drugog reda. U ovom radu pratimo navedenu povijest konika od njihova otkrića do Boškovića, koji je u 18. stoljeću prvi dao opću teoriju konika kao ravninskih krivulja. Na kraju rada osvrćemo se na odnos povijesnih pristupa s modernim.

Summary

Conic sections They were first introduced in ancient Greek times, and were studied specifically by Menachmus, Euclides, Apollonius, and Pappus. In the Arab era, Omar Khayyam used them to solve cubic equations, and in the Renaissance their applications in astronomy were discovered (Galileo, Kepler). After Descartes introduced analytic geometry, they also became known as second-order curves. In this thesis, we describe the above-mentioned history of conic sections from their discovery up to Bošković, who in the 18th century was the first to give a general theory of conics as plane curves. At the end of the theses, we compare the relationship between historical approaches and modern ones.

Životopis

Rođena sam 14. veljače 1996. godine u Šibeniku. Osnovnoškolsko obrazovanje započela sam 2002. godine u Osnovnoj školi u Vodicama nakon čijeg završetka sam upisala Gimnaziju Antuna Vrančića u Šibeniku. U srpnju 2014. godine upisala sam studij Matematika, smjer nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija, upisala sam 2018. godine diplomski studij Matematika, smjer nastavnički na istom fakultetu.