Generalizirani poligoni

Marče, Petar

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:204503

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-16**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

Generalizirani poligoni

Marče, Petar

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:204503

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-06-19**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Petar Marče

Generalizirani poligoni

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, rujan 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik
2. ______________________________ , član
3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

1 Uvod

Cilj nam je u ovom radu opisati pojam generaliziranog poligona tj. generaliziranog n-terokuta. Posebno nas zanimaju slučajevi gdje n poprima vrijednosti $3, 4, 6$ i 8 s obzirom da na kraju izlaganja iskazujemo Feit-Higmanov teorem, koji se odnosi na spomenute slučajeve.

U drugom poglavlju iznosimo neophodne definicije iz teorije grafova preko kojih dolazimo do same definicije generaliziranog n-terokuta. Slijede dva primjera ove strukture, Fanova ravnina i Cremona-Richmondova konfiguracija. Radi se o primjerima najmanjih generaliziranih n-terokuta u slučajevima gdje n poprima vrijednosti 3 i 4. U nastavku iznosimo niz lema neophodnih pri karakterizaciji generaliziranog n-terokuta koja koristi isključivo jezik teorije grafova.

U trećem poglavlju iznosimo geometrijski pojam projektivne ravnine. Pokazujemo da je ona ekvivalentna pojmu generaliziranog n-terokuta u slučaju $n = 3$. Slijede teoremi koji govore o stupnju, broju točaka i broju pravaca projektivne ravnine. Za kraj ovog poglavlja opisujemo familiju projektivnih ravnina. Sadržaj četvrtog poglavlja je analogan trećem, ali nas sada zanima slučaj $n = 4$.

U petom poglavlju slijede poopćenja teorema koji su bili glavni interes prijašnjih dvaju poglavlja nakon čega iznosimo već spomenuti Feit-Higmanov teorem. Za kraj ovog rada objašnjavamo konstrukciju najmanjeg generaliziranog n-terokuta u slučaju $n = 6$ te kratko diskutiramo slučaj $n = 8$.

2 Definicija generaliziranog poligona

U drugom poglavlju navodimo nekoliko pojmova neophodnih za definiciju generaliziranog poligona. Uvedimo najprije osnovne pojmove iz teorije grafova.

Definicija 2.1. Graf *je uređeni par* $G = (V, E)$*, gdje je* $\emptyset \neq V = V(G)$ *skup* vrhova*,* $E = E(G)$ *skup* bridova*. Pritom je svaki brid* $e \in E$ *dvočlani podskup skupa vrhova, dakle* $e = \{u, v\}$ *za neka dva vrha* $u, v \in V$*. Kažemo da su tada* u *i* v incidentni *s* e*, a vrhovi* u *i* v susjedni*. Bridove sa zajedničkim krajem također zovemo incidentnim.*

Primijetimo da uzmemo li dva proizvoljna vrha $u, v \in V$ ova definicija ne dozvoljava postojanje dvaju različitih bridova koji bi ih spajali. Isto tako je jasno da ne postoji brid koji bi spajao vrh sa samim sobom. Drugim riječima, za potrebe ovog rada ograničavamo se na pojam *jednostavnog grafa.* Također i neke od definicija koje slijede pokrivaju samo ovaj poseban slučaj.

Definicija 2.2. *Neka je* $G = (V, E)$ *graf i neka je* $|V| = n$*. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da su* $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ *vrhovi od* G*.* Matrica incidencije *grafa* G *je kvadratna realna matrica reda* n *koja na poziciji* (i, j) *ima broj 1 ako i samo ako postoji brid* $\{v_i, v_j\} \in E$*, a inače se na toj poziciji nalazi broj 0.*

Definicija 2.3. *Graf* G *je* konačan *ako su* V *i* E *konačni skupovi, a inače je* beskonačan*.*

Definicija 2.4. *Graf* G *je* bipartitan *ako mu se skup vrhova može particionirati u dva skupa* X *i* Y *tako da svaki brid ima jedan kraj u* X*, a drugi u* Y*.*

Definicija 2.5. *U grafu* G stupanj *vrha* v *definiramo kao broj njegovih susjeda i označavamo sa* $d_G(v)$*.*

Definicija 2.6. Šetnja *u grafu* G *je niz* $W := v_0 e_1 v_1 e_2 ... e_k v_k$*, čiji članovi su naizmjence vrhovi* v_i *i bridovi* e_i*, tako da su krajevi od* e_i *vrhovi* v_{i-1} *i* v_i*, za* $1 \leq i \leq k$*. Kažemo da je* v_0 *početak, a* v_k *kraj šetnje* W *ili da je* W *šetnja od* v_0 *do* v_k *ili* (v_0, v_k)*-šetnja. Vrhovi* $v_1, v_2, ... v_{k-1}$ *su* unutrašnji vrhovi šetnje*, a broj* k *se zove* duljina *šetnje* W*. Šetnja* W *je* zatvorena *ako je* $v_0 = v_k$*.*

Definicija 2.7. *Ako su svi bridovi* $e_1, e_2, ..., e_k$ *šetnje* W *različiti, onda se* W *zove* staza*, a ako su na stazi i svi vrhovi* $v_1, v_2, ..., v_k$ *različiti, ona se zove* put*.*

Definicija 2.8. *Zatvorena staza pozitivne duljine čiji vrhovi (osim krajeva) su međusobno različiti zove se* ciklus.

Definicija 2.9. *Dva vrha u, v grafa G su* povezana *ako postoji (u, v)-put u G. Kažemo da je graf G* povezan *ako su povezana svaka dva njegova vrha.*

Definicija 2.10. Udaljenost $d_G(u, v)$ *dvaju vrhova u i v u grafu G je duljina najkraćeg (u, v)-puta u G. Ako nema puta u G koji spaja u i v stavljamo $d_G(u, v) = \infty$.*

Definicija 2.11. Dijametar *grafa G, $diam(G)$ je maksimalna udaljenost među njegovim vrhovima.*

Definicija 2.12. Struk *g grafa G je duljina najkraćeg ciklusa u grafu, a ako u grafu nema ciklusa onda uzimamo $g = \infty$.*

Slijedi jako jednostavna, ali jednako toliko i bitna lema, na koju ćemo se često pozivati u ovom radu. Naglasimo da oznaka $\pm$ ovdje znači "plus ili minus", a ne "plus i minus" jer je jasno kako je udaljenost dvaju vrhova u grafu jedinstvena.

Lema 2.13. *Neka je $G = (V, E)$ bipartitan graf i neka za neka dva njegova vrha x i y vrijedi $d(x, y) = 1$. Tada za sve $z \in V$ vrijedi $d(x, z) = d(y, z) \pm 1$.*

Dokaz. U slučaju da je $d(x, z) = \infty$, tada je očito i $d(y, z) = \infty$ i obratno, pa je tvrdnja trivijalno ispunjena. Uzmimo da su obje ove udaljenosti konačani brojevi (dovoljno je zahtijevati da je samo jedna konačna jer tada i druga mora biti konačna). Pretpostavka $d(x, y) = 1$ nam posebno govori da su x i y u različitim blokovima biparticije. Neka je $z \in V$ proizvoljan vrh. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da su x i z u istom bloku biparticije. Očito je da je $d(x, z)$ paran broj, a $d(y, z)$ neparan. Dakle, $d(x, z) \neq d(y, z)$. Neka je $c = min\{d(x, z), d(y, z)\}$. Ako je $c = d(x, z)$ tada zbog $d(x, y) = 1$ mora biti $d(y, z) = d(x, z)+1$. Analogno, za $c = d(y, z)$ vrijedi $d(x, z) = d(y, z)+1$. $\square$

Nakon ovih osnovnih pojmova teorije grafova krećemo na nešto složenije definicije koje će nam također biti potrebne, kako u iznošenju definicije generaliziranog poligona, tako i u daljnjem izlaganju.

Definicija 2.14. Geometrija (ranga 2) *je uređena trojka $\mathcal{I} := (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$, gdje su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{L}$ disjunktni neprazni skupovi i $I \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ je relacija, takozvana relacija incidencije. Elemente od $\mathcal{P}$ zvat ćemo točkama i označavati sa $p, q, x, y, ...$, a elemente od $\mathcal{L}$ pravcima, njih označavamo sa $L, M, K, ...$. Ako je $(p, L) \in I$ kažemo da su točka p i pravac L incidentni, a skup $\{p, L\}$ zovemo* zastava *od $\mathcal{I}$. Susjedne zastave su dvije zastave koje imaju točno jedan zajednički element. Standarda notacija za skup zastava je $\mathcal{F}$. Antizastava je skup $\{p, L\}$, gdje p i L nisu incidentni.*

Iako je preciznije koristiti nazive incidencijska struktura ili incidencijska geometrija ranga 2, najčešće ćemo, zbog jednostavnosti, u ovom radu koristiti naziv geometrija ili incidencijska struktura.

Definicija 2.15. *Za svaku incidencijsku strukturu $\mathcal{I}$ definiramo* dualnu *incidencijsku strukturu $\mathcal{I}^* := (\mathcal{L}, \mathcal{P}, I^*)$, gdje je $I^* = \{(L,p)|\ (p,L) \in I\}$. Ovo odgovara zamjeni imena "točke" i "pravci".*

Definicija 2.16. *Neka je $p \in \mathcal{P}$. Skup $\mathcal{I}(p) = \{L \in \mathcal{L}|\ (p,L) \in I\}$ svih pravaca koji prolaze kroz p zovemo* pramen pravaca *kroz p, a za $L \in \mathcal{L}$* niz točaka *pravca L definiramo sa $\mathcal{I}(L) = \{p \in \mathcal{P}|\ (p,L) \in I\}$.*

Definicija 2.17. *Dvije točke p i q su* kolinearne *ako su incidentne s barem jednim zajedničkim pravcem, npr. $p,\ q \in \mathcal{I}(L)$ za neki pravac L. U tom slučaju pišemo $p \perp q$. Ako je dodatno pravac L jedinstven, onda pišemo $L = pq$. Skup $p^\perp$ definiramo kao skup svih točaka kolinearnih sa p:*

$$p^\perp = \{q \in \mathcal{P}|\ p \perp q\} = \bigcup_{(p,L)\in I} \mathcal{I}(L).$$

Analogno, dva pravca L i M se sijeku *ako su incidentna s barem jednom zajedničkom točkom, npr. $L,\ M \in \mathcal{I}(p)$ za neku točku p. Tada pišemo $L \perp M$. Ako je dodatno točka p jedinstvena, onda pišemo $p = LM$. Skup $L^\perp$ definiramo kao skup svih pravaca koji se sijeku sa L:*

$$L^\perp = \{M \in \mathcal{L}|\ L \perp M\} = \bigcup_{(p,L)\in I} \mathcal{I}(p).$$

Definicija 2.18. Podgeometrija *od $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ je geometrija $\mathcal{I}' := (\mathcal{P}', \mathcal{L}', I')$, gdje je $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$, $I' = I \cap (\mathcal{P}' \times \mathcal{L}')$.*

Definicija 2.19. *Za geometriju $\mathcal{I}$ kažemo da je* debela *ako prameni pravaca svih točaka i nizovi točaka svih pravaca imaju kardinalitet barem* 3. *Dakle za debelu geometriju ovo znači da ne postoje "kratki" pravci (pravac koji prolazi samo kroz dvije točke), također ne postoje "tanke" točke (točke incidentne samo s dva pravca). Element koji je incidentan s barem tri elementa također ponekad zovemo* debelim. *Ako svi $\mathcal{I}(L)$, $L \in \mathcal{L}$ imaju isti (konačan ili beskonačan) kardinalitet s+1 i ako svi $\mathcal{I}(p)$, $p \in \mathcal{P}$ imaju isti (konačan ili beskonačan) kardinalitet t+1, tada kažemo da je $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ reda (s,t). Ako je $s = 1$ ili $t = 1$, tada je $\mathcal{I}$* mršava *geometrija. Ako je $s = t$, tada kažemo da je $\mathcal{I}$ reda s. Za geometriju $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ kažemo da je* konačna *ako su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{L}$ konačni skupovi.*

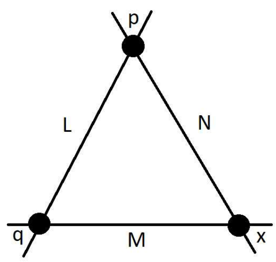
Definicija 2.20. Incidencijski graf *X($\mathcal{I}$) incidensijske strukture $\mathcal{I}$ je graf za čiji skup vrhova uzimamo $V = \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ gdje su dva vrha susjedna ako i samo ako su u relaciji incidencije. Ako je X($\mathcal{I}$) povezan, tada kažemo da je incidencijska struktura $\mathcal{I}$* povezana.

Definicija 2.21. *Neka je $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ geometrija takva da je $|\mathcal{P}| = n$, $|\mathcal{L}| = m$. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da su $p_1, p_2, p_3, ..., p_n \in \mathcal{P}$, $L_1, L_2, L_3, ..., L_m \in \mathcal{L}$.* Incidencijska matrica *geometrije $\mathcal{I}$ je matrica $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ koja na poziciji (i, j) ima broj 1 ako i samo ako je $(p_i, L_j) \in I$, a inače se na toj poziciji nalazi broj 0.*

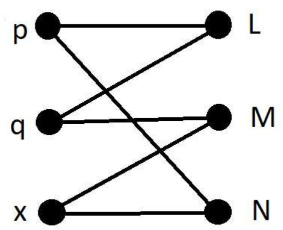
Definicija 2.22. *Neka je $n \geq 1$ prirodan broj.* Običan poligon (n-terokut) *je povezana geometrija $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ reda 1 (ako je $n > 1$) ili 0 (ako je $n = 1$) sa n točaka i n pravaca.*

Slijede primjeri koji proizlaze iz prethodne definicije uzmemo li $n = 3$ ili $n = 4$.

Slika 1: trokut ($n = 3$)



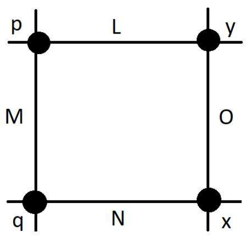
Slika 2: incidencijski graf trokuta



U skladu s definicijom 2.21 uzmimo $p_1 = p$, $p_2 = q$, $p_3 = x$, $L_1 = L$, $L_2 = M$, $L_3 = N$. Slijedi da je incidencijska matrica trokuta dana sa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

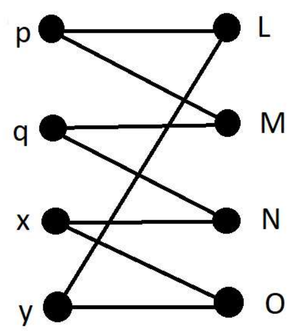
Slika 3: četverokut ($n = 4$)



Analogno prijašnjem primjeru uzimamo $p_1 = p$, $p_2 = q$, $p_3 = x$, $p_4 = y$, $L_1 = L$, $L_2 = M$, $L_3 = N$, $L_4 = O$ i dobivamo incidencijsku matricu četverokuta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Slika 4: incidencijski graf četverokuta



Iz upravo pokazanih primjera vidimo da se incidencijski graf n-terokuta sastoji od jednog ciklusa duljine $2n$. Uzmemo li proizvoljan n-terokut i neku njegovu točku p i pravac L tako da vrijedi $(p, L) \in I$, tada u pripadnom incidencijskom grafu postoji jedinstven ciklus $p, L, ..., p$ duljine $2n$.

Definicija 2.23. *Neka je $n \geq 3$ prirodan broj.* Slabi generalizirani n-terokut *je geometrija $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ koja zadovoljava sljedeća dva aksioma:*

(i) $\mathcal{I}$ ne sadrži običan k-terokut (kao podgeometriju), za $2 \leq k < n$.

(ii) Svaka dva elementa $x, y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ su sadržana u nekom običnom n-terokutu (opet kao podgeometriji) u $\mathcal{I}$, takozvanom apartmanu.

Generalizirani n-terokut *je slabi generalizirani n-terokut koji dodatno zadovoljava i sljedeći aksiom:*

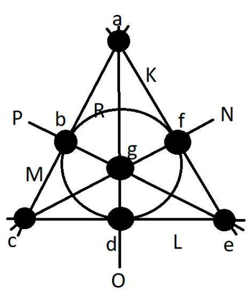
(iii) Postoji običan (n+1)-terokut (kao podgeometrija) u $\mathcal{I}$.

Primijetimo, (*ii*) kaže da udaljenost bilo koja dva vrha u incidencijskom grafu nikada nije veća od n, dakle: $d_{X(\mathcal{I})}(v, w) \leq n$ za sve $v, w \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$. U nastavku ovog rada ćemo jednostavnije koristiti d umjesto $d_{X(\mathcal{I})}$, iako ćemo uvijek podrazumijevati da se radi o udaljenosti vrhova u pripadnom incidencijskom grafu. Isto tako, svako spominjanje ciklusa podrazumijeva da se radi o ciklusu u pripadnom incidencijskom grafu.

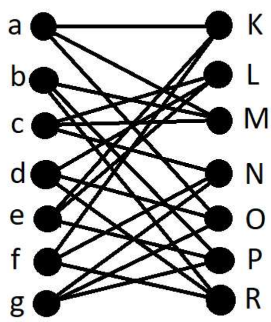
Očito je da su obični n-terokuti samo slabi generalizirani n-terokuti jer ne sadrže $(n+1)$-terokut kao podgeometriju. Sada navodimo dva primjera generaliziranog n-terokuta.

Prvi primjer je takozvana Fanova ravnina, najmanji generalizirani trokut. Sastoji se od 7 točaka i 7 pravaca od kojih svaka točka leži na točno 3 pravca, a svaki pravac prolazi kroz točno 3 točke. U nemogućnosti dočaravanja ove strukture točkama i pravcima euklidske ravnine, ovdje smo primorani jedan pravac prikazati kružnicom (slika 5).

Slika 5: Fanova ravnina



Slika 6: incidencijski graf Fanove ravnine



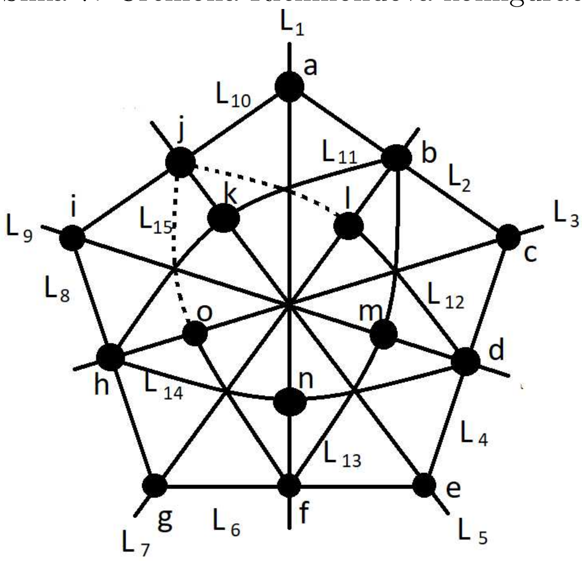
U skladu s definicijom 2.21 uzmimo $p_1 = a$, $p_2 = b$, $p_3 = c$, $p_4 = d$, $p_5 = e$, $p_6 = f$, $p_7 = g$, $L_1 = K$, $L_2 = L$, $L_3 = M$, $L_4 = N$, $L_5 = O$, $L_6 = P$,

$L_7 = R$. Slijedi da je incidencijska matrica Fanove ravnine dana sa:

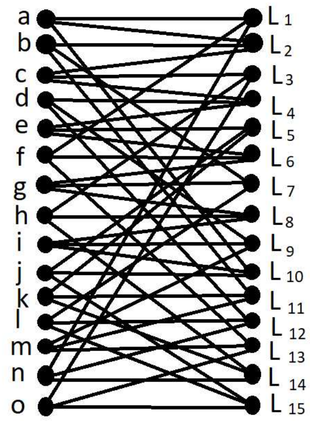
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Drugi primjer je takozvana Cremona-Richmondova konfiguracija, najmanji generalizirani četverokut. Sastoji se od 15 točaka i 15 pravaca od kojih svaka točka leži na točno 3 pravca, a svaki pravac prolazi kroz točno 3 točke. Ovdje ćemo neke pravce prikazati krivuljama, ali samo radi preglednosti, a ne radi nemogućnosti prikaza pravcima euklidske ravnine. Obratite pozornost na pravac L_{15} koji jedini nije označen punom linijom na slici 7. Svih pet takvih krivulja nam također predstavljaju pravce na toj slici.

Slika 7: Cremona-Richmondova konfiguracija



Slika 8: incidencijski graf Cremona-Richmondove konfiguracije



Istim postupkom kao i u prijašnjim primjerima dobivamo incidencijsku matricu Cremona-Richmondove konfiguracije:

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{bmatrix}.$$

Definicija 2.24. *Za dva elementa slabog generaliziranog n-terokuta kažemo da su* suprotni *ako je udaljenost među njima najveća moguća, tj. n.*

Lema 2.25. *Neka je $\mathcal{I}$ generalizirani n-terokut. Ako u $X(\mathcal{I})$ vrijedi $d(v, w) = n$, tada v i w imaju jednak stupanj u $X(\mathcal{I})$, tj. $|\mathcal{I}(v)| = |\mathcal{I}(w)|$.*

Dokaz. Znamo da je $X(\mathcal{I})$ bipartitan graf dijametra n, za bilo kojeg susjeda v' od v vrijedi $d(v', w) = n - 1$ i postoji jedinstveni put duljine $n - 1$ između vrhova v' i w jer bismo u suprotnom imali ciklus čija je duljina manja od $2n$, što je kontradikcija s definicijom generaliziranog n-terokuta. Također, taj put sadrži točno jednog susjeda od w. Na ovaj način smo uspostavili preslikavanje iz $\mathcal{I}(v)$ u $\mathcal{I}(w)$ koje je injekcija; susjedu v' od v pridružujemo jedinstvenog susjeda w' od w na (v', w)-putu u $X(\mathcal{I})$. Kad bi dva različita puta sadržala istog susjeda od w, ta dva puta bi tvorila ciklus duljine manje od $2n$ te bismo opet došli u kontradikciju s definicijom. Analogno se uspostavlja injekcija iz $\mathcal{I}(w)$ u $\mathcal{I}(v)$. Dakle, vrijedi $|\mathcal{I}(v)| = |\mathcal{I}(w)|$. □

U nastavku ove cjeline iznosimo nekoliko lema koje nam omogućuju da se postepeno prebacimo na jezik teorije grafova te njime opišemo upravo definirani generalizirani n-terokut. Započnimo sa sljedećom lemom koja nam daje dodatnu karakterizaciju svojstva (iii).

Lema 2.26. *Slabi generalizirani n-terokut $\mathcal{I}$ je generalizirani n-terokut ako i samo ako je debeo.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{I}$ debeo. Izravno iz definicije slabog generaliziranog n-terokuta znamo da postoji običan n-terokut (kao podgeometrija) u $\mathcal{I}$. Već smo diskutirali kako ga možemo reprezentatirati ciklusom duljine $2n$. Dakle, promatramo ciklus $(x_0, x_1, ..., x_{2n} = x_0)$. Iz pretpostavke je jasno da postoji $y \in \mathcal{I}(x_1) \setminus \{x_0, x_2\}$ i $z \in \mathcal{I}(x_n) \setminus \{x_{n-1}, x_{n+1}\}$. Promotrimo li put $(y, x_1, x_2, ..., x_n, z)$ i iskoristimo lemu 2.13, dolazimo do sustava:

$$
\begin{aligned}
d(y, x_1) &= 1, \\
d(y, x_2) &= d(y, x_1) \pm 1, \\
&\vdots \\
d(y, z) &= d(y, x_n) \pm 1.
\end{aligned}
$$

Sustav naravno nije predviđen rješavanju, ali ipak nas dovodi do bitnog zaključka: $d(y, z) \equiv n + 1 \pmod 2$. Drugim riječima, parnost broja $d(y, z)$ je različita od parnosti broja n. Dakle, očito je $d(y, z) \neq n$, tj. y i z nisu suprotni te je $d(y, z) < n$. Uzmimo sada neki običan n-terokut koji sadrži y i z (koji postoji zbog definicijskog uvjeta (ii)), on nam daje put $(y, y', ..., z', z)$ duljine $k < n$, a skupa sa već spomenutim $(y, x_1, x_2, ..., x_n, z)$ nam daje ciklus duljine $k + n + 1 \leq 2n$. Dakle, mora biti $k = n - 1$ jer bismo inače imali ciklus koji ima manje od $2n$ različitih elemenata, što je u kontradikciji sa (i). Jasno je, ali ovdje valja naglasiti da onda vrijedi $y' \neq x_1$ i $z' \neq x_n$. Konstruirajmo sada ciklus $(x_1, y, y', ..., z', z, x_n, x_{n+1}, ..., x_{2n}, x_1)$. To zaista jest ciklus jer ukoliko sadrži neka dva jednaka elementa tada opet dolazimo do kontradikcije sa (i). Ovaj ciklus je duljine $2(n + 1)$, dakle imamo običan $(n + 1)$-terokut, tj. $\mathcal{I}$ je generalizirani n-terokut.

Obratno, neka vrijedi (iii). Sada neka je $(x_0, x_1, ..., x_{2n+2} = x_0)$ ciklus običnog $(n+1)$-terokuta u $\mathcal{I}$. Analogno prvom dijelu dokaza ovdje imamo $d(x_0, x_{n+1}) \equiv n+1 \pmod 2$, tj. $d(x_0, x_{n+1}) < n$. Uzmimo najkraći put od x_0 do x_{n+1}, $(x_0, x', ..., x_{n+1})$, njegova duljina je maksimalno $n-1$. Sada promotrimo ciklus $(x_0, x', ..., x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x_0)$ čija je duljina maksimalno $2n$, dakle sada je jasno da je $x' \neq x_1$ jer bismo u protivnom imali kontradikciju sa (i), tj. ciklus čija je duljina manja od $2n$. Analogno postupamo i sa x_{2n+1} pa zaključujemo da $x' \notin \{x_1, x_{2n+1}\}$. Znači $|\mathcal{I}(x_0)| \geq 3$. Naravno, postupak je neovisan o izboru vrha pa vrijedi $|\mathcal{I}(x_i)| \geq 3$ za sve $0 \leq i \leq 2n+1$. Neka je sada x bilo koja točka ili pravac od $\mathcal{I}$. Dovoljno je uspostaviti bijekciju između skupova $\mathcal{I}(x)$ i $\mathcal{I}(x_i)$ za bilo koji $0 \leq i \leq 2n+1$ kako bismo zaključili da je $|\mathcal{I}(x)| \geq 3$. Postoji indeks i iz dozvoljenog intervala takav da je $d(x, x_i) = n$, inače opet dolazimo u kontradikciju sa (i). Koristimo prethodnu lemu te slijedi $|\mathcal{I}(x)| = |\mathcal{I}(x_i)|$. □

Dvije leme koje slijede daju nam ekvivalentne definicije slabog generaliziranog poligona, na jeziku teorije grafova.

Lema 2.27. *Geometrija $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ je slabi generalizirani n-terokut ako i samo ako vrijede sljedeća dva aksioma koja se odnose na udaljenost d u incidencijskom grafu od $\mathcal{I}$:*

(i) Ako su $x, y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ i $d(x, y) = k < n$, onda postoji jedinstven (x, y)-put duljine k.

(ii) Za svaki $x \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ imamo $n = max\{d(x, y) : y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}\}$. Posebno, ovo znači da pripadni incidencijski graf ima dijametar n.

Dokaz. Prije svega valja naglasiti da ćemo u ovom dokazu sa (i)* i (ii)* označavati uvjete iz definicije slabog generaliziranog poligona. Uvjet (i) je uvijek trivijalno ispunjen za $k = 1$, uzmimo $k \geq 2$ i pokažimo da je (i) ekvivalentno sa (i)*. Dakle pretpostavimo da (i) nije ispunjen, tj. postoje dva vrha $x, y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ takva da je $d(x, y) = k < n$ i da postoje dva različita (x, y)-puta duljine k. Tada bi ta dva puta ujedinjena dala ciklus čija je duljina manja od $2n$, dakle ne bi bio ispunjen niti (i)*. Slično, vrijedi li (i) tada sigurno ne možemo konstruirati ciklus duljine $2k$, dakle vrijedi i (i)*. Upravo smo pokazali ekvivalenciju uvjeta (i) i (i)*. Nadalje, (ii) proizlazi iz (i)* i (ii)*: uzmemo li proizvoljan $x \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$, tada je on sadržan u nekom običnom n-terokutu. Tada postoji njemu suprotan element y takav da je $d(x, y) = n$, a već smo pokazali da je to najveća moguća udaljenost.

Preostaje nam dokazati da (i) i (ii) povlače (ii)*. Dovoljno je pokazati da je svaki put duljine $k \leq n$ sadržan u nekom običnom n-terokutu. Pomoću uvjeta (ii) pokažimo da je svaki element iz $\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ incidentan s barem dva elementa. U suprotnom bismo imali neku zastavu $\{x_1, x_2\}$ gdje je x_1 takozvana rubna točka, tj. incidentna je samo s x_2. Tada bi vrijedilo:

$$max\{d(x_1, y) : y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}\} = max\{d(x_2, y) : y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}\} + 1.$$

Ovo je kontradikcija s (ii), dakle, svaki element je incidentan s najmanje dva elementa. To znači da je proizvoljan put duljine $k < n$ sadržan u nekom putu duljine $k+1$. Sada je jasno da je dovoljno promatrati samo puteve duljine n. Neka je $(x_0, ..., x_n)$ proizvoljan put duljine n. Postoji $x_1' \in \mathcal{I}(x_0) \setminus \{x_1\}$. Kao i prije koristimo činjenicu da je $d(x_1', x_n) = d(x_1, x_n) \pm 1$, a jer je $d(x_1, x_n) = n$, mora biti $d(x_1', x_n) = n-1$, tj. postoji put $(x_1', ..., x_n)$ duljine $n-1$. Spojimo li $(x_0, ..., x_n)$ i upravo konstruirani put duljine $n-1$ dobivamo običan n-terokut koji očito sadrži put $(x_0, ..., x_n)$.

$\square$

Lema 2.28. *Geometrija $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ je (slabi) generalizirani n-terokut ako i samo ako je incidencijski graf od $\mathcal{I}$ povezan graf čiji dijametar je n, a struk $2n$, takav da je svaki vrh incidentan s bar 3 (bar 2) brida.*

Dokaz. Prisjetimo se leme 2.26 i primijetimo da je zbog nje ovdje dovoljno dokazati tvrdnju za slabi generalizirani n-terokut. Pretpostavimo da je $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ slabi generalizirani n-terokut. Izravno iz definicije je jasno da je njegov incidencijski graf uistinu povezan jer (ii) između ostalog govori da su svaka dva njegova vrha povezana. Već smo više puta pokazali da proizvoljan $x \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ ima svoj suprotan element y takav da je $d(x, y) = n$, također smo diskutirali kako udaljenost bilo koja dva vrha u incidencijskom grafu slabog generaliziranog n-terokuta ne može biti veća od n. Dakle, n je dijametar incidencijskog grafa. Izravno iz definicije slabog generaliziranog n-terokuta je jasno da je duljina najmanjeg ciklusa u pripadnom incidencijskom grafu upravo $2n$. Napokon, u prethodnoj lemi smo pokazali da je svaki element slabog generaliziranog n-terokuta u relaciji incidencije s barem dva različita elementa, dakle svaki vrh u incidencijskom grafu je incidentan s najmanje dva brida.

Obratno, pretpostavimo da incidencijski graf geometrije $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ zadovoljava sva gore navedena svojstva. Koristimo prethodnu lemu te nam je cilj pokazati da su ispunjeni njeni uvjeti (i) i (ii). Odmah je jasno da (i) vrijedi jer bismo u suprotnome bili u mogućnosti konstruirati ciklus čija je duljina manja od $2n$ te bismo došli u kontradikciju s pretpostavkom o struku. Preostaje pokazati da vrijedi (ii). Prije svega, pretpostavka o dijametru nam kaže da je $d(x, y) \leq n$ za sve $x, y \in V{=}\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$. Pretpostavimo da (ii) ne vrijedi, cilj nam je doći do kontradikcije. Dakle pretpostavljamo da postoji $x \in V$ takav da je $d(x, y) \leq n - 1$, za sve $y \in V$. Fiksirajmo y takav da je ta udaljenost najveća moguća, recimo m, dakle $d(x, y) = m \leq n - 1$. Sada iskoristimo pretpostavku o tome da je svaki vrh našeg grafa incidentan s barem 2 brida. Ta pretpostavka nam je ovdje potrebna jer garantira da je $|\mathcal{I}(y)| \geq 2$. Neka su y' i y'' dva različita elementa iz $\mathcal{I}(y)$. Sada imamo, slično prijašnjim lemama, $d(x, y') = d(x, y) \pm 1$. Uz činjenicu da je $d(x, y) = m$ maksimalna udaljenost, zaključujemo da je $d(x, y') = m-1$ i analogno $d(x, y'') = m-1$. Sada promotrimo elemente x, y, y', y''. Prešutno je već spomenut $(x, ..., y')$, najkraći (x, y')-put duljine $m - 1$, jednako kao i $(x, ..., y'')$, najkraći (x, y'')-put duljine $m - 1$. Ta dva puta zajedno s putem (y', y, y'') tvore ciklus čija je duljine najviše $2m$, što je svakako manje od $2n$, dakle ponovno dolazimo u kontradikciju s pretpostavkom o struku. $\square$

U prethodnim lemama smo pokazali dvije bitne karakterizacije generaliziranog n-terokuta, ali primijetimo da one kao polazište pretpostavljaju postojanje geometrije $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$. Željeli bismo, ukoliko je to moguće, opisati strukturu generaliziranog n-terokuta najjednostavnijim jezikom i pojmovima teorije grafova. Iz prethodne leme je jasno da ukoliko uzmemo proizvoljan generalizirani n-terokut, njegov incidencijski graf je bipartitan graf čiji je dijametar n, a struk $2n$, također svaki vrh je stupnja barem 3. No što krenemo li obratno?

Neka je $G = (V, E)$ proizvoljan bipartitan graf čiji je dijametar n, struk $2n$ te su svi njegovi vrhovi stupnja barem 3. Želimo konstruirati geometriju $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ čiji je incidencijski graf upravo graf G. Za početak blokove particije našeg bipartitnog grafa nazovimo $\mathcal{P}$ i $\mathcal{L}$ (svejedno je koji blok nosi koje ime). Napomenimo da ćemo elemente iz $\mathcal{P}$ zvati "točke", a elemente iz $\mathcal{L}$ "pravci". Definiramo relaciju incidencije s obzirom na relaciju susjedstva u grafu G. Dakle, za proizvoljne $p \in \mathcal{P}$ i $L \in \mathcal{L}$ definiramo $(p, L) \in I$ ako i samo ako $\{p, L\} \in E$. Upravo smo definirali geometriju $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ čiji je incidencijski graf upravo graf G. Primijetimo da je dijametar grafa G konačan prirodan broj n, dakle G je povezan, iz pretpostavke također vrijedi da je njegov struk $2n$ te da je njegov svaki vrh stupnja barem 3. Po prethodnoj lemi je jasno da je $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ upravo generalizirani n-terokut. Ovo razmatranje nam pokazuje da smo generalizirani n-terokut jednako tako mogli definirati jezikom teorije grafova kao bipartitan graf dijametra n i struka $2n$, čiji su svi vrhovi stupnja barem 3.

3 Generalizirani trokuti

Generalizirani trokut je poseban slučaj generaliziranog mnogokuta čiji je dijametar tri, a struk šest. Cilj ovog poglavlja je iznošenje teorema koji povezuje pojam generaliziranog trokuta s geometrijskim pojmom projektivne ravnine. Odredivši smjer ovog izlaganja započinjemo s osnovnim definicijama.

Definicija 3.1. Parcijalni linearni prostor *je incidencijska struktura čije su svake dvije točke incidentne s najviše jednim zajedničkim pravcem.*

Prethodna definicija implicira da su svaka dva pravca incidentna s najviše jednom zajedničkom točkom.

Lema 3.2. *Neka je $\mathcal{I}$ parcijalni linearni prostor, a $X(\mathcal{I})$ njegov incidencijski graf. Tada $X(\mathcal{I})$ ima struk barem šest.*

Dokaz. $X(\mathcal{I})$ je bipatritan graf i kao takav eventualno sadrži cikluse parne duljine. Pretpostavimo da postoji ciklus p, L, q, M, p duljine četiri, tada su obje točke p i q incidentne s dva različita pravca, a to je kontradikcija s uvjetom prethodne definicije. Preostaje zaključiti da je tada struk barem šest. □

Napomenimo da kada je riječ o parcijalnom linearnom prostoru često koristimo geometrijsku terminologiju. Tako kažemo da su dvije točke kolinearne ako su incidentne s istim pravcem. Također, kažemo da se dva pravca sijeku u točki ako su oba incidentna s tom točkom.

Definicija 3.3. Projektivna ravnina *je parcijalni linearni prostor čije točke i pravci zadovoljavaju uvjete:*

(i) svaka dva pravca incidentna su s jedinstvenom točkom,

(ii) svake dvije točke incidentne su s jedinstvenim pravcem,

(iii) postoje četiri točke od kojih nikoje tri nisu kolinearne (potpuni četverovrh).

Lema 3.4. *Neka je $\mathcal{I}$ parcijalni linearni prostor čije točke i pravci zadovoljavaju uvjete (i) i (ii) iz prijašnje definicije. Tada je ekvivalentno:*

(iii) postoje četiri točke od kojih nikoje tri nisu kolinearne (potpuni četverovrh)

(iv) postoji običan četverokut (kao podgeometrija) u $\mathcal{I}$.

Dokaz. Neka vrijedi (iii). Promotrimo bilo koji četverovrh, neka su a, b, c i d njegove točke. Uzmimo točke a i b, tada postoji jedinstveni pravac L_1 incidentan s te dvije točke. Analogno za točke b i c odabiremo pravac L_2, za točke c i d pravac L_3, a za točke d i a pravac L_4. Konstruirajmo podgeometriju tako da kao podskup točaka uzmemo skup $\{a, b, c, d\}$, a kao podskup pravaca skup $\{L_1, L_2, L_3, L_4\}$. Ova podgeometrija je očito običan četverokut.

Obratno, neka vrijedi (iv). Neka je taj običan četverokut određen s točkama i pravcima $a, L_1, b, L_2, c, L_3, d, L_4$. Običan četverokut sadrži četiri točke i četiri pravca. Pokazat ćemo da ove četiri točke čine potpuni četverovrh u $\mathcal{I}$, tj. da nikoje tri nisu kolinearne. Pretpostavimo obratno, neka su, bez smanjenja općenitosti, točke a, b i c kolinearne. Tada sve tri leže na jedinstvenom pravcu M. Pravac L_1 prolazi kroz a i b isto kao i pravac M pa koristeći (ii) zaključujemo da je $L_1 = M$. Analogno imamo $L_2 = M$, dakle slijedi da je $L_1 = L_2$, tj. došli smo u kontradikciju sa brojem pravaca običnog četverokuta. $\square$

Teorem 3.5. *Incidencijska struktura $\mathcal{I}$ je projektivna ravnina ako i samo ako je generalizirani trokut.*

Dokaz. Prije samog dokaza napomenimo da koristimo karakterizaciju generaliziranog trokuta iskazanu svojstvima pripadnog incidencijskog grafa (lema 2.28).

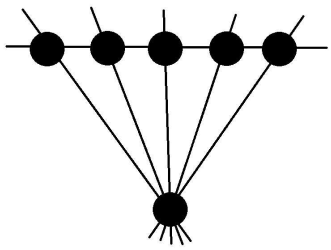
Neka je $\mathcal{I}$ projektivna ravnina. Promotrimo bipartitan graf $X(\mathcal{I})$, u jednom bloku particije imamo točke, a u drugom pravce. Uzmimo dvije proizvoljne točke a i b i pokažimo da je $d_{X(\mathcal{I})}(a, b) = 2$. Iz činjenice da je $\mathcal{I}$ projektivna ravnina slijedi da postoji pravac P koji je incidentan s obje točke. Dakle, $d_{X(\mathcal{I})}(a, b) \leq 2$ jer postoji (a, b)-put duljine 2 u $X(\mathcal{I})$. Također, $d_{X(\mathcal{I})}(a, b) \geq 2$ jer u bipartitnom grafu promatramo udaljenost različitih vrhova iz istog bloka particije. Analogno se pokaže da uzmemo li bilo koja dva pravca C i D iz $X(\mathcal{I})$ vrijedi $d_{X(\mathcal{I})}(C, D) = 2$.

Sada neka je L proizvoljan pravac, a p proizvoljna točka. U slučaju da p leži na L jasno je da je $d_{X(\mathcal{I})}(L, p) = 1$, pa pretpostavimo da p ne leži na L. Bilo koji pravac M kroz točku p mora sijeći pravac L u nekoj točki p'. Iz ovoga slijedi da postoji put L, p', M, p duljine 3 između L i p, zaključujemo da je $d_{X(\mathcal{I})}(p, L) \leq 3$. Vidimo da je $diam(X(\mathcal{I})) \leq 3$, a činjenica da $\mathcal{I}$ sadrži trokut nam garantira postojanje dvaju vrhova u $X(\mathcal{I})$ čija je udaljenost točno 3. Upravo smo pokazali da je $diam(X(\mathcal{I})) = 3$. Nadalje, $\mathcal{I}$ je parcijalni linearni prostor, pa po prijašnjem rezultatu znamo da je struk od $X(\mathcal{I})$ barem šest, a postojanje trokuta garantira nam da je on točno šest. Zaključujemo da je $\mathcal{I}$ slabi generalizirani trokut, a on je generalizirani trokut ako i samo ako postoji običan četverokut (kao podgeometrija) u $\mathcal{I}$, a to nam garantira prethodna lema.

Obratno, neka je neka je $\mathcal{I}$ generalizirani trokut, tj. $X(\mathcal{I})$ ima dijametar tri, a struk šest te neka je svaki njegov vrh incidentan s bar tri brida. Ovo je bipartitan graf čiji jedan blok particije odgovara točkama od $\mathcal{I}$, a drugi njegovim pravcima. Svake dvije točke su na parnoj udaljenosti, a jer je dijametar tri slijedi da je udaljenost svake dvije točke točno dva. Mora postojati jedinstven put duljine dva između tih dviju točaka jer bismo inače imali ciklus duljine četiri što bi bilo u kontradikciji s pretpostavkom da je struk od $X(\mathcal{I})$ jednak šest. Dakle, postoji jedinstven pravac na kojem leže proizvoljne dvije točke. Analogno se pokaže da se bilo koja dva pravca sijeku u jedinstvenoj točki. Sjetimo se da nam definicija generaliziranog trokuta garantira postojanje generaliziranog četverokuta (kao podgeometrije) u $\mathcal{I}$. Prethodna lema garantira nam da je $\mathcal{I}$ projektivna ravnina. □

Prethodni teorem nam pokazuje ekvivalenciju projektivnih ravnina i generaliziranih trokuta. Ako umjesto aksioma (*iii*) projektivne ravnine zahtijevamo samo postojanje triju nekolinearnih točaka (trokuta), pokazuje se da su takve strukture ekvivalentne slabim generaliziranim trokutima. Osim projektivnih ravnina, uključuju takozvane degenerirane projektivne ravnine (slika 9).

Slika 9: primjer degenerirane projektivne ravnine



Teorem 3.6. *Neprazni generalizirani trokut ima red s, tj. sve njegove točke imaju stupanj $s+1$ i svi njegovi pravci imaju stupanj $s+1$.*

Dokaz. Neka su v_1 i v_2 dvije proizvoljne točke generaliziranog trokuta. Tada iz definicije generaliziranog trokuta znamo da postoji točka v koja zajedno sa v_1 i v_2 čini običan trokut (kao podgeometriju). Neka je w pravac suprotan vrhu v u tom običnom trokutu. Znamo da je v debela, dakle, postoji pravac v' kroz v koji ne pripada spomenutom običnom trokutu. Jasno, w i v' se sijeku u točki koja je različita od v_1 i v_2. Jasno je da vrijedi $d(v', v_1) = 3$ i $d(v', v_2) = 3$. Po lemi 2.25, v_1 i v_2 imaju jednak stupanj kao v', pa su, naravno, ta dva broja jednaka. Upravo smo pokazali da su sve točke jednakog stupnja, a analogno se pokaže i da su svi pravci jednakog stupnja. Uzmimo sada proizvoljnu točku i pravac koji ne prolazi kroz nju. Njihova udaljenost mora biti tri, dakle oni su suprotni elementi, pa nam lema 2.25 garantira da imaju jednake stupnjeve. $\square$

Teorem 3.7. *Konačni generalizirani trokut reda s ima ukupno $s^2 + s + 1$ točaka i jednako toliko pravaca.*

Dokaz. Neka je v broj točaka generaliziranog trokuta. Fiksiramo točku p_0 i prebrojavamo parove (p, L), pri čemu je $p \neq p_0$ točka, a L pravac kroz p i p_0. Tada p možemo izabrati na $v - 1$ načina, a time je jedinstveno određen pravac L, pa parova ima $v - 1$. S druge strane, pravac L kroz p_0 možemo izabrati na $s + 1$ načina, a točku $p \neq p_0$ na s načina, pa parova ima $(s + 1)s$. Izjednačavanjem slijedi $v - 1 = (s + 1)s$, tj. $v = s^2 + s + 1$. Tvrdnja za pravce dokazuje se analogno. $\square$

Idući cilj je opisati familiju projektivnih ravnina.

Definicija 3.8. *Neka je $\mathbb{F}$ polje i neka je V trodimenzionalni vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Definiramo incidencijsku strukturu $PG(2, \mathbb{F})$ na način da za pripadni skup "točaka" uzmemo jednodimenzionalne potprostore od V, a "pravci" neka budu dvodimenzionalni potprostori od V. Kažemo da je točka p incidentna s pravcem L ako je jednodimenzionalni potprostor p sadržan u dvodimenzionalnom potprostoru L.*

Slijedi iskaz Grassmanove formule koju ćemo koristiti u sljedećem teoremu.

Teorem 3.9. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, te neka su L i M potprostori od V. Tada je $dim(L + M) + dim(L \cap M) = dim(L) + dim(M)$.*

Teorem 3.10. *Incidencijska struktura $PG(2, \mathbb{F})$ je projektivna ravnina.*

Dokaz. Dva jednodimenzionalna potprostora od V leže u jedinstvenom dvodimenzionalnom potprostoru od V, dakle kroz svake dvije točke prolazi jedinstven pravac. Dva dvodimenzionalna potprostora od V sijeku se u jedinstvenom jednodimenzionalnom potprostoru od V, dakle svaka dva pravca sijeku se u jedinstvenoj točki (ovo vrijedi direktnom upotrebom Grassmanove formule). Također, jasno je da postoje četiri jednodimenzionalna potprostora od V tako da nikoja tri ne leže u istom dvodimenzionalnom potprostoru od V. Pokažimo to koristeći bilo koju bazu $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ od V. Sada za spomenuta četiri jednodimenzionalna potprostora uzimamo $[\{e_1\}], [\{e_2\}], [\{e_3\}], [\{e_1 + e_2 + e_3\}]$. Uzmemo li bilo koja tri od navedenih jednodimenzionalnih potprostora očito je da su vektori koji ih razapinju linearno nezavisni, dakle ne mogu ležati u dvodimenzionalnom potprostoru. $\square$

Slijedi razmatranje za slučaj konačnog polja. Napomenimo da broj elemenata svakog konačnog polja mora biti potencija prostog broja. Neka je $\mathbb{F}$ konačno polje sa q elemenata. Tada incidencijsku strukturu $PG(2, \mathbb{F})$ označavamo $PG(2, q)$, što je opravdano jer su svaka dva konačna polja istog reda izomorfna.

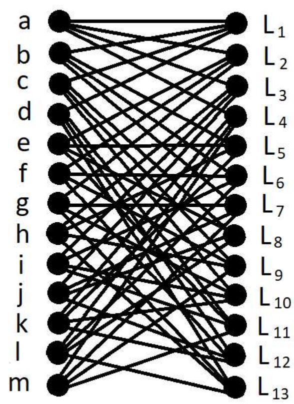
Neka je V trodimenzionalni vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Cijeli V sadrži $q^3 - 1$ nenul vektora. Svaki pravac sadrži $q^2 - 1$ nenul vektora jer je dvodimenzionalni potprostor od V, analognim argumentom dobivamo da svaka točka sadrži $q - 1$ nenul vektora. Dakle, $PG(2, q)$ sadrži $(q^3 - 1)/(q - 1) = q^2 + q + 1$ točaka, a svaki pravac prolazi kroz $(q^2 - 1)/(q - 1) = q + 1$ točaka. Slično se pokaže da $PG(2, q)$ također ima $q^2 + q + 1$ pravaca, te da kroz svaku točku prolazi $q + 1$ pravaca.

Ovdje nam se otvara mogućnost konstruiranja projektivnih ravnina, a samim time i generaliziranih trokuta. Prikažimo to najjednostavnijim primjerom. Promotrimo $PG(2, 2)$, to je projektivna ravnina koja sadrži 7 točaka i jednako toliko pravaca. Kroz svaku točku prolazi 3 pravca, a svaki pravac prolazi kroz 3 točke. Primijetimo da nas je ovo razmatranje dovelo do već prije spomenute Fanove ravnine.

Sljedeći primjer je $PG(2, 3)$ koji sadrži 13 točaka i jednako toliko pravaca. Kroz svaku točku prolazi 4 pravca, a svaki pravac sadrži 4 točke. Ovo nam je dovoljno informacija da ispunimo incidencijsku matricu od $PG(2, 3)$. Očekujemo kvadratnu matricu $A \in M_{13}(\mathbb{R})$. Pri popunjavanju moramo paziti da se u svakom retku i svakom stupcu javljaju točno 4 jedinice. Također, treba paziti da za svaka dva retka i i j postoji jedinstven stupac k takav da je $A[i, k] = 1$ i $A[j, k] = 1$. Prikažimo incidencijsku matricu i pripadni incidencijski graf:

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}.$$

Slika 10: incidencijski graf od $PG(2,3)$



Napomenimo da smo u prijašnjem primjeru prešutno koristili postojanje konačnih polja s točno 2 i točno 3 elementa. Općenitije, neka je p bilo koji prost broj. Realizacija polja sa p elemenata je sustav ostataka modulo p, $\mathbb{Z}/(p) = \{0, 1, 2, ..., p-1\}$ na kojem je operacija zbrajanja definirana tako da se brojevi zbroje na uobičajen način te se od dobivenog zbroja konačni rezultat dobije kao ostatak cjelobrojnog dijeljenja sa p. Analogno je definirana i operacija množenja.

No što ako je $q = p^n$ gdje je $n \in \mathbb{N}$, a p je prost broj? Zanima nas postoji li konačno polje s točno q elemenata, tj. možemo li konstruirati $PG(2, q)$ kao u prethodnim primjerima. Slijedi iskaz teorema koji nam daje odgovor.

Teorem 3.11. *Konačno polje reda q postoji ako i samo ako je $q \in \mathbb{N}$ oblika $q = p^n$, pri čemu je p prost broj, a $n \in \mathbb{N}$.*

Pokazali smo da postoje projektivne ravnine reda s kada je s potencija prostog broja. Postavlja se pitanje postoji li projektivna ravnina reda s kada s nije potencija prostog broja? Ovaj problem još nije u cijelosti riješen. Do sada nije poznat niti jedan primjer projektivne ravnine kojoj red nije potencija prostog broja. Za neke redove koji nisu potencije prostog broja se zna da ravnine ne postoje. Iznosimo iskaz teorema koji govori o tome.

Teorem 3.12 (Bruck-Ryser)**.** *Ako postoji projektivna ravnina reda $s \equiv 1$ ili $2 \pmod 4$, onda je s zbroj dvaju kvadrata.*

Iz teorema slijedi nepostojanje projektivnih ravnina reda $s = 6, 14, 21, 22,$ 30 i beskonačno mnogo drugih redova. Jedini red za koji je dokazano nepostojanje projektivne ravnine, a nije posljedica prethodnog teorema je $s = 10$. Za beskonačno mnogo redova pitanje egzistencije ravnine je otvoreno, počevši sa $s = 12, 15, 18, 20, 24, 26, 28...$

4 Generalizirani četverokuti

Za početak definirajmo pojam generaliziranog četverokuta. Primijetimo da u trenutku njegovog definiranja ne tvrdimo da se radi o generaliziranom n-terokutu za $n = 4$. Ipak, teoremom koji ubrzo slijedi pokazat ćemo da su ove dvije klase incidencijskih struktura ekvivalentne.

Definicija 4.1. Generalizirani četverokut *je parcijalni linearni prostor čije točke i pravci zadovoljavaju uvjete:*

(i) Za svaki pravac L i točku p koja ne leži na L postoji jedinstvena točka p' koja je kolinearna sa p i leži na L.

(ii) Sve točke i pravci su stupnja barem tri.

Lema 4.2. *Neka je $\mathcal{I}$ neprazan generalizirani četverokut. Tada u $\mathcal{I}$ postoje tri nekolinearne točke i postoje dva pravca koji se ne sijeku.*

Dokaz. Ako je $\mathcal{I}$ neprazan trivijalno se pokaže da sadrži barem jedan pravac (ukoliko sadrži točku, kroz tu točku prolaze barem tri pravca). Uzmemo li proizvoljan pravac L, na njemu postoje najmanje tri različite točke, neka su to točke a, b i c. Kroz točku a prolaze još barem dva pravca. Neka je M neki pravac različit od L takav da prolazi kroz a. Na pravcu M postoji točka a' različita od a. Tvrdimo da su točke a', b i c nekolinearne. Pretpostavimo da su kolinearne i da leže na zajedničkom pravcu N, tada je $N = L$ jer oba prolaze i kroz b i kroz c. Posebno, točke a' i a leže na pravcu L. Prisjetimo se da točke a i a' leže i na pravcu M. Slijedi da je $L = M$. Ovo je kontradikcija. Dakle, postoje tri nekolinearne točke.

Uzmimo sada dva različita pravca X i Y koji se sijeku u točki a. Na pravcu X postoji točka b različita od a. Kroz točku b prolazi neki pravac Z različit od X. Kada bi se Y i Z sijekli tada bismo imali kontradikciju sa uvjetom (i) iz definicije generaliziranog četverokuta. $\square$

Teorem 4.3. *$\mathcal{I}$ je generalizirani četverokut u smislu prethodne definicije ako i samo ako je generalizirani n-terokut za $n = 4$.*

Dokaz. Prije samog dokaza napomenimo da koristimo karakterizaciju generaliziranog n-terokuta iskazanu svojstvima pripadnog incidencijskog grafa (lema 2.28).

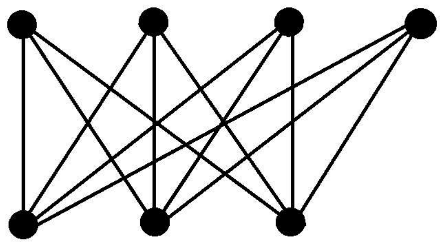
Neka je $\mathcal{I}$ generalizirani četverokut. Promotrimo sve slučajeve i pokažimo da su sve udaljenosti u $X(\mathcal{I})$ manje ili jednake četiri. Udaljenost točke p i pravca L je jedan ukoliko točka p leži na L, a tri inače (to nam garantira uvjet (i) iz prethodne definicije). Udaljenost dviju točaka p i p' je dva ukoliko su kolinearne, a četiri inače. Analogno vrijedi i za udaljenost dvaju proizvoljnih pravaca. Postojanje dvaju pravaca koji se ne sijeku nam garantira da u $X(\mathcal{I})$ postoje dva vrha čija je udaljenost četiri. Dakle, dijametar od $X(\mathcal{I})$ je četiri. Struk od $X(\mathcal{I})$ je barem šest, no kada bi bio točno šest tada bi kroz svaku točku tog ciklusa izlazila dva pravca koja sijeku treći pravac u dvije točke, što je kontradikcija s uvjetom iz prethodne definicije. Pokažimo da u $X(\mathcal{I})$ postoji ciklus duljine osam. Ovdje promotrimo nekolinearne točke p i q. Postoji pravac L_p koji prolazi kroz p, ali, naravno, ne prolazi kroz q. Analogno postoji i pravac L_q koji prolazi kroz q, ali ne prolazi kroz p. Koristeći definiciju generaliziranog četverokuta sada znamo da na L_p postoji jedinstvena točka koja je kolinearna sa q te da na L_q postoji jedinstvena točka koja je kolinearna sa p. Jasno je da imamo osam elemenata koji čine ciklus duljine osam u $X(\mathcal{I})$. Dakle, struk od $X(\mathcal{I})$ je osam.

Obratno, neka je $\mathcal{I}$ generalizirani n-terokut za $n = 4$. Tada $X(\mathcal{I})$ ima dijametar četiri i struk osam te su mu svi vrhovi stupnja barem tri. Iz leme 2.26 slijedi da je uvjet (ii) ispunjen. Pokažimo da vrijedi i uvjet (i). Jedan blok particije označava točke, a drugi pravce. Neka je p proizvoljna točka, a L proizvoljan pravac koji ne prolazi kroz p. Prisjetimo se da nam definicija generaliziranog n-terokuta (za $n = 4$) garantira da u $X(\mathcal{I})$ postoji ciklus duljine osam koji sadrži p i L. Jednostavno se vidi da taj ciklus mora izgledati ovako: $p, L', p', L, p'', L'', p''', L''', p$ (koristimo činjenicu da L i p nisu incidentni). Očito postoji (p, L)-put duljine tri te vrijedi $d(p, L) = 3$ jer bismo u suprotnom imali ciklus čija je duljina manja od osam, dakle, došli bismo u kontradikciju s pretpostavkom o struku. Iz istog razloga slijedi jedinstvenost puta duljine tri između p i L. Ovo razmatranje nam daje jedinstvenu točku p' koja zadovoljava uvjet (i) iz definicije generaliziranog četverokuta. □

Degenerirani generalizirani četverokuti su strukture koje zadovoljavaju uvjet (i), ali ne i uvjet (ii) iz naše definicije nego slabiji uvjet da su svi elementi stupnja barem dva. Takve strukture odgovaraju slabim generaliziranim n-terokutima za $n = 4$.

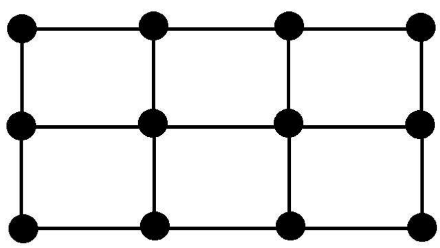
Definicija 4.4. *Kažemo da je bipartitni graf $G = (V, E)$* potpuni bipartitni graf *ako mu za jedan blok particije vrijedi $|X| = n$, a za drugi $|Y| = m$, pri čemu je $\{u, v\} \in E$ za sve $u \in X$ i $v \in Y$. Potpuni bipartivni graf označavamo s $K_{m,n}$.*

Slika 11: potpuni bipartitni graf $K_{3,4}$



Shvatimo li potpuni bipartitni graf kao incidencijsku strukturu točaka i pravaca, gdje su točke vrhovi, a pravci bridovi ovog grafa, tada nije teško pokazati da se radi o degeneriranom generaliziranom četverokutu. Ne smijemo zaboraviti da tada u tu kategoriju ulazi i dual pripadne incidencijske strukture, takozvana rešetka. Dual nastaje tako da u pripadnoj incidencijskoj matrici obrnemo značenja redaka i stupaca. Npr. ako su retci predstavljali točke, sada ih shvaćamo kao pravce. Naravno, stupci tada predstavljaju točke dualne strukture.

Slika 12: pripadna rešetka



Teorem 4.5. *Neprazni generalizirani četverokut ima red (s,t), tj. sve njegove točke imaju stupanj $s+1$, a svi njegovi pravci imaju stupanj $t+1$.*

Dokaz. Dokazat ćemo tvrdnju za pravce, tvrdnja za točke se dokazuje analogno. Koristimo aksiom (i) kako bismo pokazali da svaka dva pravca koja se ne sijeku imaju isti stupanj. Neka su L i M pravci koji se ne sijeku. Svakoj točki iz $\mathcal{I}(L)$ je koristeći (i) pridružena jedinstvena točka iz $\mathcal{I}(M)$, a preslikavanje je injekcija. Ukoliko bi se dvije točke preslikale u istu imali bismo kontradikciju sa (i). Potpuno analogno konstruiramo injekciju sa $\mathcal{I}(M)$ u $\mathcal{I}(L)$. Dakle, ova dva skupa imaju jednako elemenata.

Nadalje, pokažimo da su svi pravci kroz proizvoljnu točku istoga stupnja. Neka je p točka, tada kroz nju prolaze barem tri pravca L_1, L_2 i L_3. Na pravcu L_3 postoji točka q različita od p, a kroz nju prolazi pravac M različit od L_3. Pravac M ne siječe L_1 niti L_2 jer bismo u suprotnom imali kontradikciju sa (i). Po prethodno dokazanom zaključujemo da L_1 i L_2 imaju isti stupanj kao M. Ovim postupkom možemo pokazati da svaka dva pravca koja prolaze kroz p imaju isti stupanj, dakle, svi pravci kroz p imaju isti stupanj.

Konačno, neka je N proizvoljan pravac koji ne prolazi kroz p. Tada točno jedan pravac kroz p siječe N, a svi ostali ga ne sijeku, pa je i njegov stupanj jednak stupnju svakog pravca kroz točku p. $\square$

Teorem 4.6. *Konačni generalizirani četverokut reda (s,t) ima ukupno $v = (s+1)(st+1)$ točaka i $b = (t+1)(st+1)$ pravaca.*

Dokaz. Dokazat ćemo tvrdnju za točke, tvrdnja za pravce se dokazuje analogno. Fiksiramo pravac L_0 i prebrojavamo incidentne parove (p, L) pri čemu je p točka koja nije na L_0, a L pravac koji siječe L_0. Po (i) za svaku točku p postoji jedinstven pravac L, pa parova ima jednako koliko i točaka p, a to je broj $v-(s+1)$ jer moramo oduzeti broj točaka koje su na pravcu L_0. S druge strane L možemo izabrat na $(s+1)t$ načina (biramo točku na L_0 i pravac kroz nju različit od L_0), a točku p iz $\mathcal{I}(L) \setminus \mathcal{I}(L_0)$ na $(s+1)-1 = s$ načina. Zato parova ima $s(s+1)t$. Izjednačavanjem slijedi $v = (s+1)(st+1)$. $\square$

Opišimo sada klasu generaliziranih četverokuta.

Definicija 4.7. *Neka je $\mathbb{F}$ polje i neka je V četverodimenzionalni vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Projektivni prostor $PG(3,\mathbb{F})$ je sustav jednodimenzionalnih, dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih potprostora od V, zvat ćemo ih točkama, pravcima i ravninama. Incidencija točaka, pravaca i ravnina definira se preko inkluzije, npr. točka a leži na pravcu L ako je $a \subseteq L$.*

Definirat ćemo incidencijsku strukturu $W(\mathbb{F})$ koristeći sve ove točke, ali samo neke od pravaca iz $PG(3,\mathbb{F})$. Naime, zanimat će nas samo potpuno izotropni pravci. Također, naglasimo da u razmatranjima koja slijede uzimamo poseban vektorski prostor $V = \mathbb{F}^4$, tj. uređene četvorke elemenata polja uz standardne operacije.

Definicija 4.8. *Definirajmo matricu H sa*

$$H := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Za neki potprostor $S \leq V$ kažemo da je potpuno izotropan *ako za sve $u, v \in S$ vrijedi $u^T Hv = 0$.*

Lako se vidi da za svaki vektor $u \in V$ vrijedi $u^T Hu = 0$. Sada uzmimo bilo koja dva nenul vektora u_1 i u_2 koja pripadaju istom jednodimenzionalnom potprostoru od V. Tada postoji skalar α tako da vrijedi $u_2 = \alpha u_2$, pa po uzoru na prethodno razmatranje vrijedi $u_1^T Hu_2 = 0$. Dakle, svaki jednodimenzionalni potprostor od V je potpuno izotropan. Što se tiče dvodimenzionalnih potprostora, zanimat će nas samo oni koji su potpuno izotropni. Lako se pokaže da je dvodimenzionalni potprostor od V kojeg razapinju u i v potpuno izotropan ako i samo ako vrijedi $u^T Hv = 0$. Za nenul vektor u definirajmo skup $u^\perp$ sa:

$$u^\perp = \{v \in V | \ u^T Hv = 0\}.$$

Matrica H je regularna jer joj je determinanta jedan. Također, bitno je uočiti da je vektor $u^T H$ različit od nulvektora. Upravo definiran skup je skup svih vektora koji su ortogonalni na $u^T H$, dakle to je trodimenzionalni potprostor od V koji očito sadrži u.

Teorem 4.9. *Upravo definirana incidencijska struktura $W(\mathbb{F})$ je generalizirani četverokut.*

Dokaz. Neka je p točka, a L pravac koji ne sadrži točku p. Pokazat ćemo da postoji jedinstvena točka na L koja je kolinearna sa p. Neka je točka p razapeta vektorom u. Tada bilo koja točka koja je kolinearna s p mora biti razapeta vektorom koji je sadržan u $u^\perp$. Iz činjenice da L ne sadrži p slijedi $L \nsubseteq u^\perp$. Dakle $dim(L + u^\perp) = 4$, pa koristeći Grassmanovu formulu zaključujemo da se trodimenzionalni potprostor $u^\perp$ siječe s dvodimenzionalnim potprostorom L u jedinstvenom jednodimenzionalnom potprostoru. Dakle, postoji jedinstvena točka na L koja je kolinearna sa p. Jednostavno se pokaže da vrijedi i drugi uvjet iz definicije generaliziranog četverokuta.

Pokažimo da vrijedi i drugi uvjet iz definicije generaliziranog četverokuta. Pravac je dvodimenzionalni potprostor razapet sa $\{u, v\}$. Sadrži bar tri točke: $[\{u\}]$, $[\{v\}]$ i $[\{u + v\}]$. Ta tri jednodimenzionalna potprostora su različiti jer su vektori u i v linearno nezavisni. Slično se pokaže za točke. Neka je $[\{u\}]$ točka, tada je $u^\perp$ trodimenzionalan i neka je $\{u, v_1, v_2\}$ njegova baza. Tri različita pravca (dvodimenzionalna potpuno izotropna potprostora) koja prolaze kroz točku $[\{u\}]$ su $[\{u, v_1\}]$, $[\{u, v_2\}]$, i $[\{u, v_1 + v_2\}]$. $\square$

Slijedi razmatranje za slučaj konačnog polja. Neka je $\mathbb{F}$ konačno polje sa q elemenata. Umjesto $PG(3, \mathbb{F})$ pisat ćemo $PG(3, q)$, a umjesto $W(\mathbb{F})$ pisat ćemo $W(q)$. Tada vektorski prostor $V = \mathbb{F}^4$ sadrži $q^4 - 1$ nenul vektora. S obzirom da svaki jednodimenzionalni potprostor od V sadrži $q - 1$ nenul vektora, a jasno je da sveukupno imamo $(q^4 - 1)/(q - 1) = (q + 1)(q^2 + 1)$ točaka. Htjeli bismo izbrojati sve izbore uređenog para vektora (u, v) tako da je $[u, v]$ dvodimenzionalni potpuno izotropan potprostor od V. Vektor u možemo izabrati na $q^4 - 1$ načina. Vektor v biramo iz trodimenzionalnog potprostora $u^\perp$ koji sadrži $q^3 - 1$ nenul vektora s tim da ne smijemo izabrati vektor koji pripada jednodimenzionalnom potprostoru razapetom sa u (takvih je $q - 1$). Dakle, imamo sveukupno $q^3 - 1 - (q - 1) = q^3 - q$ izbora za v. Po principu umnoška sveukupno imamo $(q^4 - 1)(q^3 - q)$ parova vektora koji razapinju dvodimenzionalni potpuno izotropan potprostor od V. Slično, svaki dvodimenzionalni potprostor je razapet sa $(q^2 - 1)(q^2 - q)$ parova vektora. Konačno, podijelimo li ova dva broja dobivamo da raspolažemo sa $(q^2 + 1)(q + 1)$ dvodimenzionalnih potpuno izotropnih potprostora od V.

Koristeći jezik geometrije kažemo da $PG(3, q)$ sadrži $(q^2 + 1)(q + 1)$ potpuno izotropnih točaka i isto toliko potpuno izotropnih pravaca. Dvodimenzionalni potprostor od V sadrži $q+1$ jednodimenzionalnih potprostora, dakle, svaki potpuno izotropni pravac sadrži $q + 1$ potpuno izotropnu točku. Jer je broj točaka i pravaca jednak, to znači da je svaka potpuno izotropna točka sadržana u $q + 1$ potpuno izotropnih pravaca.

Uzmimo sada da je $q = 2$, dakle zanima nas $W(2)$ koji ima $(q^2 + 1)(q + 1) = 15$ točaka i jednako toliko pravaca. Također znamo da kroz svaku točku prolazi točno $q + 1 = 3$ pravca, a svaki pravac prolazi kroz točno 3 točke. Primijetimo da je ovo primjer već spomenute Cremona-Richmondove konfiguracije.

Idući primjer $W(3)$ ima 40 točaka i jednako toliko pravaca. Kroz svaku točku prolazi 4 pravca, a svaki pravac prolazi kroz 4 točke.

Za kraj ovog poglavlja recimo da su redovi svih poznatih generaliziranih četverokuta jednog od sljedećih oblika:

- (q, q), gdje je q potencija prostog broja,
- (q, q^2), gdje je q potencija prostog broja,
- (q^2, q), gdje je q potencija prostog broja,

- (q^2, q^3), gdje je q potencija prostog broja,
- (q^3, q^2), gdje je q potencija prostog broja,
- $(q-1, q+1)$ ili $(q+1, q-1)$, gdje je $q \geq 3$ potencija prostog broja.

5 Konačni generalizirani poligoni

U ovom poglavlju ograničit ćemo se na konačne generalizirane poligone, tj. na slučaj kada su skupovi točaka $\mathcal{P}$ i pravaca $\mathcal{L}$ konačni. Uvedimo nekoliko definicija koje će nam biti potrebne u daljnjem izlaganju.

Definicija 5.1. *Neka je $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ slabi generalizirani n-terokut i neka je $b \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$. Za $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiramo $X_i(b) := \{x \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L} | \ d(b, x) = i\}$. Za $k \in \mathbb{N}$ definiramo $X_{\leq k}(b) := X_0(b) \cup X_1(b) ... \cup X_k(b)$. Često za skup svih susjeda od b umjesto $X_1(b)$ koristimo oznaku $X(b)$.*

Definicija 5.2. *Neka je $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ slabi generalizirani n-terokut i neka je $b \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$. Za proizvoljan $x \in X_{\leq n-1}(b)$ neka je $x, ..., x', b$ jedinstven put duljne $d(x, b)$. Tada kažemo da je element $x' = proj_b x$* projekcija *od x na b.*

Primijetimo da je upravo definirana projekcija $proj_b x$ zapravo funkcija sa $X_{\leq n-1}(b)$ u $X(b)$.

Definicija 5.3. *Neka je $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ slabi generalizirani n-terokut i neka su $a, b \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ suprotni elementi. S $[a, b]$ označavamo restrikciju prethodno definirane funkcije:*

$$[a, b] = proj_b|_{X(a)} : X(a) \to X(b).$$

Zovemo je perspektivitet *sa a u b.*

Ova definicija ima smisla jer za suprotne elemente $a, b \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ po definiciji vrijedi $d(a, b) = n$, a uz lemu 2.13 je jasno da za svaki c koji je susjed od a vrijedi $d(b, c) = n-1$. Dakle, vrijedi $X(a) \subseteq X_{\leq n-1}(b)$. Također, primijetimo da je $[a, b]$ bijekcija sa inverzom $[b, a]$ (ovdje se pozivamo na dokaz leme 2.25).

Definicija 5.4. *Neka je $a_0, ...a_k$ niz elemenata od $\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ takav da vrijedi $d(a_i, a_{i+1}) = n$, za sve $0 \leq i < k$. Tada s*

$$[a_0, a_1, ..., a_k] := [a_{k-1}, a_k] \circ ... \circ [a_1, a_2] \circ [a_0, a_1] : X(a_0) \to X(a_k)$$

definiramo kompoziciju koju zovemo projektivitet.

Kao kompozicija bijekcija, i ova funkcija je bijekcija.

Lema 5.5. *Neka je $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ generalizirani n-terokut. Tada postoji projektivitet $X(p) \to X(q)$ za bilo koje dvije točke $p, q \in \mathcal{P}$ i za bilo koja dva pravca $p, q \in \mathcal{L}$. Ako je n neparan, tada tvrdnja vrijedi za bilo koja dva elementa $p, q \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$.*

Dokaz. Neka su $p, q \in \mathcal{P}$. Pokažimo da je dovoljno dokazati tvrdnju da postoji projektivitet $X(p) \to X(q)$ za $d(p,q) = 2$. Recimo da je $d(p,q) = 4$, onda postoji točka $r \in \mathcal{P}$ takva da je $d(p,r) = 2$ i $d(r,q) = 2$. Po tvrdnji za $d = 2$ postoje projektiviteti $\sigma : X(p) \to X(r)$ i $\psi : X(r) \to X(q)$. Kompozicija $\psi \circ \sigma : X(p) \to X(r)$ je traženi projektivitet. Indukcijom tvrdnja slijedi za bilo koju (parnu) udaljenost od p i q.

Pokažimo da su p i q sadržane u nekom običnom $(n+1)$-terokutu. Pogledamo li dokaz leme 2.26 i uzmemo li na početku običan n-terokut takav da je $p = x_n$ i $q = x_{n+2}$, tada nam ona daje običan $(n+1)$-terokut koji sadrži p i q. U tom običnom $(n+1)$-terokutu uzmimo da je b' element suprotan od p i od q. Uzmimo $[p, b', q]$, projektivitet iz $X(p)$ u $X(q)$. Ako je n neparan, tada je dovoljno pokazati da postoji jedan perspektivitet $[x, L]$ za $x \in \mathcal{P}$ i $L \in \mathcal{L}$. Uzmimo onda $\{x, L\} = \{p, b'\}$. □

Slijede dva teorema koji su poopćenja teorema 3.6 i 3.7, odnosno 4.5 i 4.6.

Teorem 5.6. *Svaki generalizirani n-terokut ima red (s,t) (gdje su $s, t \geq 2$). Dodatno, ako je n neparan, tada je $s = t$.*

Dokaz. Tvrdnja vrijedi direktno iz prethodne leme jer znamo da su perspektiviteti bijekcije. □

Teorem 5.7. *Neka je $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ generalizirani n-terokut reda (s,t).*

(i) Ako je n paran, vrijedi

$$|\mathcal{P}| = (s+1)\frac{(st)^{\frac{n}{2}} - 1}{st - 1},$$

$$|\mathcal{L}| = (t+1)\frac{(st)^{\frac{n}{2}} - 1}{st - 1};$$

(ii) ako je n neparan, vrijedi

$$|\mathcal{P}| = |\mathcal{L}| = \frac{s^n - 1}{s - 1}.$$

Dokaz. Neka je $x \in \mathcal{P}$. Za početak odredimo $|X_0(x)|, |X_1(x)|, |X_2(x)|, ..., |X_{n-1}(x)|, |X_n(x)|$. Jasno je da je $|\mathcal{P}|$ suma svih $|X_i(x)|$, gdje je i paran, a $|\mathcal{L}|$ suma svih $|X_i(x)|$, gdje je i neparan indeks.

Jasno, $|X_0(x)| = 1$, a $|X_1(x)| = t + 1$ jer je x stupnja $t + 1$. Nadalje, neka je $i \in \{2, 3, 4, ..., n-1\}$. Tada je $|X_i(x)| = |X_{i-1}(x)|s$ ako je i paran jer je $X_{i-1}(x)$ skup pravaca. Svaki pravac ima $s + 1$ susjeda, od kojih je samo jedan iz $X_{i-2}(x)$, a preostalih s mora biti iz $X_i(x)$. Također je bitno primijetiti da nikoja dva pravca iz $X_{i-1}(x)$ ne mogu imati zajedničkog susjeda iz $X_i(x)$ jer bismo došli u kontradikciju sa definicijom generaliziranog n-terokuta. Analogno je $|X_i(x)| = |X_{i-1}(x)|t$ ako je i neparan.

Konačno, pokažimo da je $(t+1)|X_n(x)| = |X_{n-1}(x)|s$ ako je n paran, a $(s+1)|X_n(x)| = |X_{n-1}(x)|t$ ako je n neparan. Ako je n paran tada je $X_{n-1}(x)$ skup pravaca, a svaki pravac ima $s+1$ susjeda od kojih s mora biti iz $X_n(x)$, a jer je svaka točka iz $X_n(x)$ stupnja $t+1$, dobivamo tvrdnju. Analogno dokazujemo i slučaj kada je n paran.

Sljedećih nekoliko jednadžbi slijede iz prethodnog izlaganja:

$$|X_0(x)| = 1.$$

Za parne indekse $1 \leq i \leq n-1$ vrijedi

$$|X_i(x)| = (t+1)s^{\frac{i}{2}}t^{\frac{i-2}{2}},$$

a za neparne indekse $1 \leq i \leq n-1$ vrijedi

$$|X_i(x)| = (t+1)s^{\frac{i-1}{2}}t^{\frac{i-1}{2}}.$$

Ako je n paran tada je

$$|X_n(x)| = s^{\frac{n}{2}}t^{\frac{n-2}{2}},$$

a za neparan n imamo

$$|X_n(x)| = s^{n-1}.$$

Napomenimo da je u posljednjem slučaju $s = t$.

Sada nije teško izvesti formule za broj točaka i broj pravaca ovisno o parnosti broja n. Na primjer, za paran n imamo:

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{P}| &= |X_0(x)| + |X_2(x)| + |X_4(x)| + ... + |X_{n-2}(x)| + |X_n(x)| \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} (t+1) s^{\frac{2i}{2}} t^{\frac{2i-2}{2}} + s^{\frac{n}{2}} t^{\frac{n-2}{2}} \\
&= 1 + \frac{t+1}{t} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} (st)^i + s^{\frac{n}{2}} t^{\frac{n-2}{2}} \\
&= 1 + \frac{t+1}{t} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-2} (st)^{i+1} + s^{\frac{n}{2}} t^{\frac{n-2}{2}} \\
&= 1 + s(t+1) \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-2} (st)^i + s^{\frac{n}{2}} t^{\frac{n-2}{2}} \\
&= 1 + s(t+1) \frac{(st)^{\frac{n-2}{2}} - 1}{st-1} + s^{\frac{n}{2}} t^{\frac{n-2}{2}} \\
&= \frac{st - 1 + (st+s)((st)^{\frac{n-2}{2}} - 1) + (st-1) s^{\frac{n}{2}} t^{\frac{n-2}{2}}}{st-1} \\
&= \frac{st - 1 + (st)^{\frac{n}{2}} - st + s^{\frac{n}{2}} t^{\frac{n-2}{2}} - s + s^{\frac{n+2}{2}} t^{\frac{n}{2}} - s^{\frac{n}{2}} t^{\frac{n-2}{2}}}{st-1} \\
&= \frac{-1 + (st)^{\frac{n}{2}} - s + s^{\frac{n+2}{2}} t^{\frac{n}{2}}}{st-1} \\
&= \frac{(st)^{\frac{n}{2}}(s+1) - (s+1)}{st-1} \\
&= (s+1) \frac{(st)^{\frac{n}{2}} - 1}{st-1}.
\end{aligned}
$$

□

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 5.8 (Feit-Higman)**.** *Neka je $\mathcal{I}$ slabi generalizirani n-terokut reda (s,t) sa $n \geq 3$. Ako je $\mathcal{I}$ konačan, tada vrijedi jedna od tvrdnji koje slijede:*

(i) $s = t = 1$ *i* $\mathcal{I}$ *je običan* n*-terokut;*

(ii) $n = 3$, $s = t > 1$ *i* $\mathcal{I}$ *je projektivna ravnina;*

(iii) $n = 4$ *i broj*

$$\frac{st(1+st)}{s+t}$$

je cijeli broj;

(iv) $n = 6$, *a ako je* $s, t > 1$, *tada je* st *potpuni kvadrat. U tom slučaju uz* $u = \sqrt{st}$ *i* $w = s + t$ *broj*

$$\frac{u^2(1 + w + u^2)(1 \pm u + u^2)}{2(w - u)}$$

je cijeli broj bez obzira na izbor predznaka;

(v) $n = 8$, *a ako je* $s, t > 1$, *tada je* $2st$ *potpuni kvadrat. U tom slučaju uz* $u = \sqrt{\frac{st}{2}}$ *i* $w = s + t$ *broj*

$$\frac{u^2(1 + w + 2u^2)(1 + 2u^2)(1 \pm 2u + 2u^2)}{2(w \pm 2u)}$$

je cijeli broj bez obzira na izbor predznaka;

(vi) $n = 12$ *i* $s = 1$ *ili* $t = 1$.

Korolar 5.9. *Konačni generalizirani* n*-terokuti mogu postojati samo za* $n \in \{3, 4, 6, 8\}$.

Napomenimo da ćemo generalizirane n-terokute za $n = 6$ nazivati generaliziranim šesterokutima, a generalizirane n-terokute za $n = 8$ zvat ćemo generaliziranim osmerokutima. Sada smo u mogućnosti raspisati formule za broj točaka i pravaca generaliziranih šesterokuta i osmerokuta. Koristeći teorem 5.7 za šesterokut imamo

$$|\mathcal{P}| = (s + 1)\frac{(st)^3 - 1}{st - 1} = (s + 1)(1 + st + s^2t^2),$$

$$|\mathcal{L}| = (t + 1)\frac{(st)^3 - 1}{st - 1} = (t + 1)(1 + st + s^2t^2);$$

a za osmerokut slijedi

$$|\mathcal{P}| = (s + 1)\frac{(st)^4 - 1}{st - 1} = (s + 1)(1 + st)(1 + s^2t^2),$$

$$|\mathcal{L}| = (t + 1)\frac{(st)^4 - 1}{st - 1} = (t + 1)(1 + st)(1 + s^2t^2).$$

Poznato je da postoji beskonačno mnogo različitih generaliziranih šesterokuta, ali zbog kompliciranosti konstrukcije beskonačnih familija, u ovom radu ograničavamo se na jednu od jednostavnijih realizacija ove strukture. Radi se o najmanjem generaliziranom šesterokutu reda $(2, 2)$ koji ima 63 točke i 63 pravca. Prije same konstrukcije navodimo nekoliko neophodnih definicija.

Definicija 5.10. *Neka je* $G = (V, E)$ *povezan graf dijametra* n*. Kažemo da je* G distancijsko regularan graf *ako postoje konstante* c_i, a_i, b_i*, takve da za sve* $i = 0, 1, ..., n$ *i sve vrhove* x *i* y *na udaljenosti* $i = d(x, y)$*, među susjedima od* y *njih* c_i *su udaljeni za* $i - 1$ *od* x*,* a_i *udaljeni za* i *od* x*, a* b_i *udaljeni za* $i + 1$ *od* x*.*

Iz prethodne definicije slijedi da je G regularan graf, tj. svi njegovi vrhovi imaju jednak stupanj $k = b_0$. Također, činjenica da je $c_i + a_i + b_i = k$ za sve $i = 0, 1, ..., n$ omogućava nam da sve potrebne informacije reduciramo na takozvani *niz presjeka*

$$\{b_0, b_1, ..., b_{n-1}; c_1, c_2, ..., c_n\}.$$

Primijetimo da je uvijek $b_n = 0$ i $c_0 = 0$, pa ih nismo niti uključili u niz.

Definicija 5.11. *Neka je* $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ *geometrija.* Graf kolinearnosti *od* $\mathcal{I}$ *je graf čiji vrhovi su točke od* $\mathcal{I}$*, a dva vrha su susjedna ako su pripadne točke kolinearne u* $\mathcal{I}$*.*

Sljedeći iskaz navodimo kao motivaciju za definiciju distancijsko regularnog grafa.

Teorem 5.12. *Ako je* $n \geq 4$*, tada je pripadni graf kolinearnosti distancijsko regularan s dijametrom* $d := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *i parametrima:*

- $a_0 = c_0 = 0$ *i* $b_0 = s(t + 1)$*;*
- $a_i = s - 1$*,* $b_i = st$ *i* $c_i = 1$*, ako je* $i \in \{1, 2, ..., d - 1\}$*;*
- $a_d = (s - 1)(t + 1)$*,* $b_d = 0$ *i* $c_d = t + 1$*, ako je* n *paran;*
- $a_d = st + s - 1$*,* $b_d = 0$ *i* $c_d = 1$*, ako je* n *neparan.*

Definicija 5.13. *Neka je* $G = (V, E)$ *konačan i povezan graf čiji je dijametar* n *i neka je* $u \in V$*. Tada sa* $X_i(u)$ *označavamo skup vrhova za i udaljenih od* u*. Particiju* $\{u, X_1(u), ..., X_n(u)\}$ *zovemo* particija udaljenosti *s obzirom na vrh* u*.*

Definicija 5.14. *Neka je* $G = (V, E)$ *graf. Tada sa* $S(G)$ *označavamo graf koji dobijemo tako da dodamo vrh na svaki brid iz* G*. Taj graf zovemo* subdivizija *od* G*.*

Definicija 5.15. *Neka je* $G = (V, E)$ *graf.* Sparivanje M *u grafu* G *je podskup skupa bridova* E *takav da nikoja dva brida nemaju zajednički vrh. Sparivanje koje pokriva sve vrhove iz* G *zovemo* savršenim sparivanjem*.*

Najmanji generalizirani šesterokut je reda $(2,2)$, dakle, to je regularan graf G stupnja 3, struka 6 i dijametra 12. Pokazuje se da je ovo distancijsko regularan graf s nizom presjeka

$$\{3,2,2,2,2,2;1,1,1,1,1,3\}.$$

Fiksirajmo neki vrh u i rekonstruirajmo particiju udaljenosti s obzirom na u. Svaki vrh je stupnja tri, dakle $|X_1(u)| = 3$. Nadalje, svakom vrhu iz $X_1(u)$ preostala su dva brida koja idu u $X_2(u)$, a svaki vrh iz $X_2(u)$ je povezan sa jednim iz $X_1(u)$ (u suprotnom bismo imali kontradikciju sa pretpostavkom u struku). Dakle, zaključujemo da je $|X_2(u)| = 6$. Slično zaključujemo da su $|X_3(u)| = 12$, $|X_4(u)| = 24$, $|X_5(u)| = 48$ i $|X_6(u)| = 32$.

Lema 5.16. $X_5(u) \cup X_6(u)$ *iz prethodnog primjera je subdivizija* $S(Y)$ *regularnog grafa stupnja* 3 *koji ima* 32 *vrha.*

Dokaz. Lako se vidi da je svaki od 48 vrhova iz $X_5(u)$ incidentan s dva vrha iz $X_6(u)$, a svaki vrh iz $X_6(u)$ je incidentan s tri vrha iz $X_5(u)$. $\square$

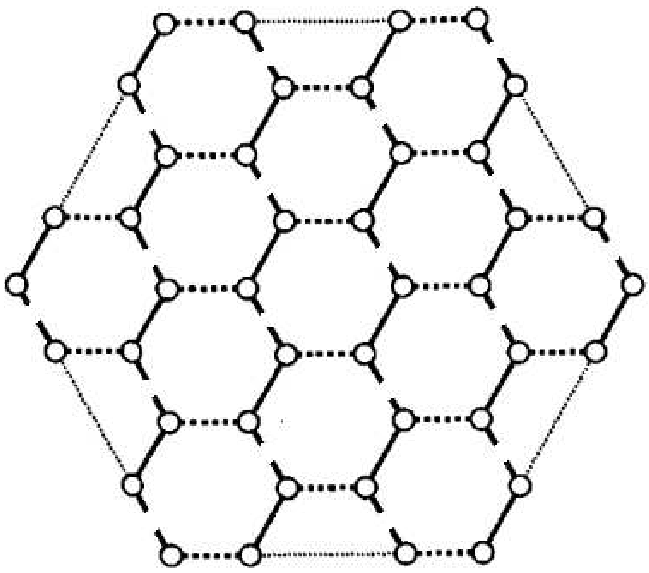
Konstruirat ćemo generalizirani šesterokut tako da uzmemo regularan graf Y čiji je stupanj 3 i koji ima 32 vrha te ćemo na njemu opisati koji vrh iz $X_5(u)$ raspolavlja koji brid iz Y. Prije svega trebamo imenovati svih 48 vrhova iz $X_5(u)$. Za početak tri vrha incidentna s u nazovimo r, g i b. Svaki od njih ima dva susjeda iz $X_2(u)$: zovemo ih $r0, r1, g0, g1, b0, b1$. Analogno, dva vrha susjedna s $r0$ nazovimo $r00$ i $r01$. Nastavimo li na isti način svaki vrh iz $X_5(u)$ označit ćemo sa 5 znakova. Prvi znak je slovo r, g ili b, a preostala 4 znaka su binarne znamenke.

Lema 5.17. *Neka je* $c \in \{r, g, b\}$, 16 *bridova iz* Y *koje subdivizioniraju vrhovi iz* $X_5(u)$ *s prvim znakom* c *čine savršeno sparivanje od* Y*.*

Dokaz. Pretpostavimo li da neka 2 od ovih 16 imaju zajednički vrh iz Y tada bismo imali kontradikciju s pretpostavkom o struku generaliziranog šesterokuta. $\square$

Idući slika prikazuje Y zajedno s tri različita savršena sparivanja koja se odnose na tri različite boje (r, g i b). Ovaj graf je nacrtan na način da se svaka stranica šesterokuta preklapa sa suprotnom. Tako na ovom grafu prikazujemo 32 vrha i 48 bridova. Također, zamislimo u nastavku da su ovi bridovi obojani prikladnim bojama. Tako ćemo npr. 16 bridova koji se subdivizioniraju vrhovima čiji prvi znak je r zvati crveni bridovi.

Slika 13: Graf Y i njegova tri savršena sparivanja (preuzeto iz [2, Figure 5.3]).



Privremeno definirajmo udaljenost između dva brida grafa G kao udaljenost koju pripadni vrhovi imaju u subdiviziji $S(G)$. Idući teorem iznosimo bez dokaza.

Teorem 5.18. *Neka je Y upravo prikazan graf i neka je $C = R, G$ ili B skup svih bridova pripadne boje. Tada za svaki brid $e \in C$ postoji jedinstven brid $e' \in C$ tako da je njihova udaljenost* 10. *Također vrijedi:*

(i) postoji jedinstvena particija ovih osam parova $\{e, e'\}$ na četiri četvorke bridova tako da je unutar svake četvorke udaljenost svaka dva brida barem osam,

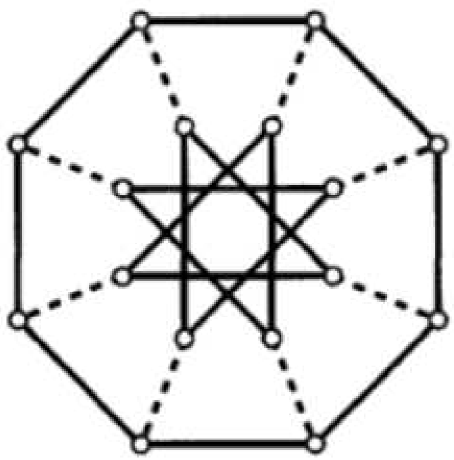
(ii) postoji jedinstvena particija ove četiri četvorke na dvije osmorke bridova tako da je unutar obje osmorke udaljenost svaka dva brida barem šest.

Sada je jasno kako ćemo napraviti subdiviziju od Y. Započnimo sa crvenim bridovima. Dakle, bridovi iz R su pridruženi vrhovima iz $X_5(u)$ čiji je prvi znak r. Dvije osmorke bridova su pridružene dvjema osmorkama vrhova iz $X_5(u)$ čiji se znakovi podudaraju na prve dvije pozicije, četiri četvorke bridova pridružene su četvorkama vrhova čiji se znakovi podudaraju na prve tri pozicije, a osam parova bridova pridruženi su parovima vrhova čiji se znakovi podudaraju na prve četiri pozicije. Preostaje nam odrediti zadnju znamenku kako bismo potpuno odredili imena vrhova iz $X_5(u)$ koje pridružujemo bridovima iz Y. Npr. ovim postupkom smo dva brida imenovali sa $r000$, jednome na kraj dodajmo 0, a drugome 1 i tako za svaki od osam parova.

Cijeli postupak ponavljamo za preostale dvije boje i na taj način određujemo koji vrh iz $X_5(u)$ subdivizionira koji brid iz Y, odnosno iz $X_6(u)$. Za kraj jednostavno spajamo vrhove unazad preko $X_4(u)$ pa sve do u.

Ovime je konstrukcija završena, ali se ipak pitamo jesmo li mogli krenuti od različitog grafa Y? Naravno, postoji barem još jedna realizacija grafa Y takva da je konačna konstrukcija dual prijašnjeg primjera. Bez dokazivanja navodimo da tada Y ima sljedeći oblik:

Slika 14: Graf od kojeg se dobiva dualni generalizirani šesterokut reda (2,2) (preuzeto iz [2, Figure 5.4]).



Pokazuje se da su ovo jedine dvije realizacije od Y, tj. postoji jedinstven dualni par generaliziranih šesterokuta reda $(2,2)$.

Za generalizirane osmerokute algebarska konstrukcija je komplicirana, a geometrijska nije poznata. Navodimo samo da najmanji primjer reda $(2,2)$ ima 255 točaka i 255 pravaca.

Literatura

[1] F. De Clerck, J. A. Thas, H. Van Maldeghem *Generalized Polygons and Semipartial Geometries*, University of Ghet, Eindhoven, 1996.

[2] C. D. Godsil, G. Royle, *Algebraic graph theory*, Springer-Verlag, New-York, 2001.

[3] V. Krčadinac, *Polarni prostori*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2013., dostupno na:
`https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/nastava/polarni.pdf`

[4] V. Krčadinac, *Kvazisimetrični dizajni*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2017., dostupno na:
`https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/nastava/kvazisim.pdf`

[5] J. Šiftar, V. Krčadinac, *Konačne geometrije*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2013., dostupno na:
`https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kg/kg-skripta.pdf`

[6] H. Van Maldeghem, *Generalized polygons*, Springer Science and Business Media, 2012.

[7] D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

[8] Wikipedia, *Cremona–Richmond configuration*, dostupno na:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Cremona-Richmond_configuration` (travanj 2020.)

[9] Wikipedia, *Division ring*, dostupno na:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Division_ring` (travanj 2020.)

[10] Wikipedia, *Fano plane*, dostupno na:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Fano_plane` (prosinac 2019.)

[11] Wikipedia, *Generalized quadrangle*, dostupno na:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_quadrangle#Classical_generalized_quadrangles` (rujan 2019.)

[12] Wikipedia, *Projective plane*, dostupno na:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Projective_plane#A_finite_example` (lipanj 2020.)

[13] Wikipedia, *Ring (mathematics)*, dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Ring_(mathematics) (srpanj 2020.)

Sažetak

Cilj nam je u ovom radu opisati pojam generaliziranog poligona tj. generaliziranog n-terokuta. Preko osnovnih definicija iz teorije grafova dolazimo do same definicije generaliziranog n-terokuta, zatim navodimo najmanje primjere, Fanovu ravninu i Cremona-Richmondovu konfiguraciju. U slučajevima $n = 3$ i $n = 4$ obrađujemo osnovne teoreme vezane za stupanj i broj elemenata ovakvih struktura, koje nas motiviraju da iznesemo iste teoreme u općenitom slučaju. Na kraju ovog rada iznosimo Feit-Higmanov teorem koji nam govori da su u konačnom slučaju jedine moguće vrijednosti za n upravo $3, 4, 6$ i 8.

Summary

Our aim in this thesis is to describe a structure called generalized polygon or generalized n-gon. Through the basic definitions from graph theory we come to the very definition of the generalized n-gon, then we give the smallest examples, the Fano plane and the Cremona-Richmond configuration. In the cases $n = 3$ and $n = 4$ we prove the basic theorems related to the degree and number of elements of such structures, which motivate us to present the same theorems in the general case. At the end of this thesis, we state the Feit-Higman theorem that tells us in the finite case the only possible values for n are exactly $3, 4, 6$ and 8.

Životopis

Rođen sam u Makarskoj 22. lipnja 1995. godine gdje sam pohađao osnovnu i srednju školu. Nakon završene srednje škole 2014. godine upisao sam preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Prirodoslovno-Matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija 2017. upisao sam Diplomski sveučilišni studij Matematička statistika na istom fakultetu. Aktivno se bavim sportom, treniram nogomet od svoje sedme godine. Također, nastupam za ekipu fakulteta u sveučilišnoj futsal ligi. U slobodno vrijeme se bavim penjanjem, hodanjem po slacklineu i jogom.