Balansirajući brojevi

Plantak, Lucija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Plantak

BALANSIRAJUĆI BROJEVI

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zrinka Franušić

Zagreb, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad posvećujem svojoj obitelji, dečku, prijateljima i kolegama bez kojih ovo postignuće ne bi bilo moguće. Ujedno im zahvaljujem i na pruženoj podršci tijekom cijelog studija. Posebna zahvala mentorici izv. prof. dr. sc. Zrinki Franušić što je našla vremena za moja pitanje te svojim savjetima mi pomogla u izradi rada.

Diplomski rad napravljen je u sklopu aktivnosti Projekta KK.01.1.1.01.0004 - Znanstveni centar izvrsnosti za kvantne i kompleksne sustave te reprezentacije Liejevih algebri.

Sadržaj

Uvod

Geometrijsko predočavanje prirodnih brojeva točkicama ili kvadratićima omogućuje zorno izvođenje raznih algebarskih svojstava i relacija. Posebnim rasporedom i slaganjem točkica u pravilne n-terokute oblikuju se *figurativni brojevi.* Dijele se na kvadratne, trokutaste, peterokutne, itd. Nama su u ovom radu posebno zanimljivi trokutasti brojevi $T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Gauss je dokazao da se svaki prirodan broj može prikazati kao zbroj najviše 3 trokutasta broja.

Indijski matematičari A. Behera i G.K. Panda su krajem prošlog stoljeća razmatrali sljedeći problem:

Postoje li dva uzastopna trokutasta broja čiji je zbroj opet trokutasti broj?

Dakle, pitamo se postoje li cijeli brojevi n i r, $n > 1$, $r \geq 0$ takvi da je

$$T_{n-1} + T_n = T_{n+r},$$

odnosno takvi da vrijedi

$$(1 + 2 + \cdots + n - 1) + (1 + 2 + \cdots + n) = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) + \cdots + (n+r). \quad (1)$$

Relacija (1) je *diofantska jednadžba* u nepoznanicama n i r i njihov problem se svodi na traženje rješenja n u skupu prirodnih brojeva.

U ovom radu definirat ćemo *balansirajući broj* $n \in \mathbb{N}$ kao rješenje jednadžbe (1), a njemu pridružen broj $r \in \mathbb{N}_0$ kao *balanser.*

U prvom poglavlju, uz motivaciju i definiciju, izvest ćemo rekurzivnu formulu za niz balansirajućih brojeva B_k :

$$B_{k+1} = 6B_k - B_{k-1},\ k \in \mathbb{N},$$

te pokazati neka njihova svojstva i različite zanimljive identitete. Također ćemo povezati balansirajuće brojeve s kvadratno trokutastim brojevima.

U drugom poglavlju izvest ćemo funkciju izvodnicu za niz balansirajućih brojeva:

$$g(x) = \frac{x}{1 - 6x + x^2}$$

te promatrati još neke funkcije koje ih generiraju.

U trećem poglavlju povezat ćemo balansirajuće brojeve s rješenjima Pitagorine jednadžbe

$$x^2 + (x+1)^2 = y^2.$$

U četvrtom poglavlju, modificirat ćemo relaciju (1) i definirati *kobalansirajući broj* $n \in \mathbb{N}$ kao rješenje jednadžbe

$$1 + 2 + \cdots + n = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r),$$

gdje je $r \in \mathbb{N}_0$ *kobalanser* pridružen broj n. Pokazati ćemo da niz kobalansirajućih brojeva zapravo predstavlja niz balansera balansirajućih brojeva. Za niz kobalansirajućih brojeva b_k vrijedi rekurzivna relacija

$$b_{k+1} = 6b_k - b_{k-1} + 2, \; k \in \mathbb{N},$$

a funkcija izvodnica glasi

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1-x)(1-6x+x^2)}.$$

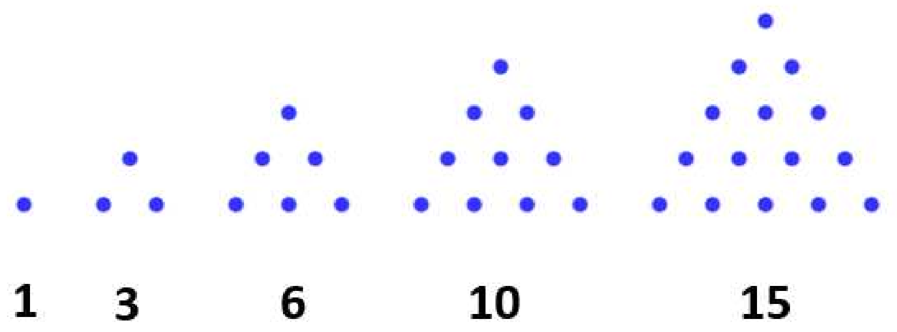
Nizovi balansirajućih i kobalasirajućih brojeva imaju mnoga zanimljiva svojstva te su područje interesa mnogih matematičara današnjice.

Poglavlje 1

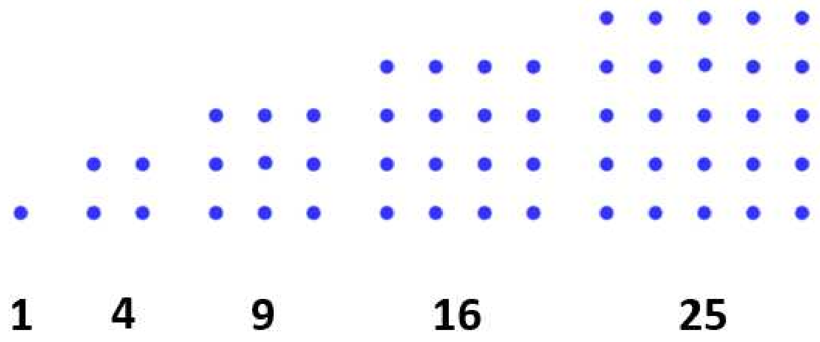
Balansirajući brojevi

1.1 Motivacija i definicija

Brojeve koje možemo reprezentirati različitim geometrijskim likovima nazivaju se *figurativni brojevi*. Dijele se na trokutaste, kvadratne, peterokutne, itd. Njima su se bavili starogrčki matematičari, posebno Pitagorejci. Konkretno ih dobivamo preslagivanjem nekog broja točkica u pravilne n-terokute. Na slikama ispod generirani su *trokutasti* i *kvadratni brojevi*.



Slika 1.1: Niz trokutastih brojeva 1,3,6,10,15



Slika 1.2: Niz kvadratnih brojeva 1,4,9,16,25

Označimo n-ti trokutasti broj s T_n. Sa Slike 1.1 vidimo da je

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 + n = \frac{1}{2}n(n+1),\ n \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, iz prethodne relacije vidimo da niz trokutasti brojeva možemo generirati pomoću rekurzivne formule

$$T_n = T_{n-1} + n,\ n \geq 2,$$

pri čemu je $T_1 = 1$.

Zanimljivo je da vrijedi da se svaki prirodan broj može prikazati kao zbroj najviše 3 trokutasta broja. Tu je tvrdnju dokazao Gauss i predstavlja specijalni slučaj tvrdnje koja kaže da se svaki prirodan broj može prikazati kao zbroj najviše n n-terokutnih brojeva.[1]

Teorem 1.1.1. *Prirodan broj m je trokutasti broj ako i samo ako je $8m+1$ potpuni kvadrat.*

Dokaz. Broj m je trokutasti broj ako i samo ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$m = \frac{n(n+1)}{2},$$

tj. ako i samo ako postoji pozitivno cjelobrojno rješenje jednadžbe

$$n^2 + n - 2m = 0.$$

[1]Ovu tvrdnju iskazao je Fermat a u potpunosti dokazao Cauchy.

Pozitivno rješenje prethodne jednadžbe je

$$\frac{-1+\sqrt{8m+1}}{2}. \tag{1.1}$$

Ako je ono i cjelobrojno, onda je $\frac{-1+\sqrt{8m+1}}{2} = k$ za neki $k \in \mathbb{N}$, tj. $8m + 1 = (2k + 1)^2 = \square$. Obratno, ako je $8m + 1$ potpuni kvadrat, onda on očito mora biti kvadrat nekog neparnog prirodnog broja, tj. $8m + 1 = (2k + 1)^2$ pa je izraz (1.1) poprima vrijednost u $\mathbb{N}$. $\square$

Indijski matematičari Behera i Panda su krajem 90-tih godina prošlog stoljeća u [1] razmatrali sljedeći problem:

Postoje li dva uzastopna trokutasta broja čiji je zbroj opet trokutasti broj?

Dakle, pitamo se postoje li cijeli brojevi n i r, $n > 1$, $r \geq 0$ takvi da je

$$T_{n-1} + T_n = T_{n+r}. \tag{1.2}$$

Uočimo da je

$$T_5 + T_6 = 15 + 21 = 36 = T_8,$$

te

$$T_{34} + T_{35} = 595 + 630 = 1225 = T_{49},$$

pa su $(n, r) = (6, 2)$ i $(n, r) = (35, 14)$ rješenja postavljenog problema. Prirodno je pitati se ima li još parova prirodnih brojeva koji zadovoljavaju postavljeni problem. Pokazat ćemo da ih ima beskonačno mnogo. Relacija (1.2) ekvivalentna je izrazu

$$(1 + 2 + \cdots + n - 1) + (1 + 2 + \cdots + n) = 1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) + \cdots + (n + r),$$

tj.

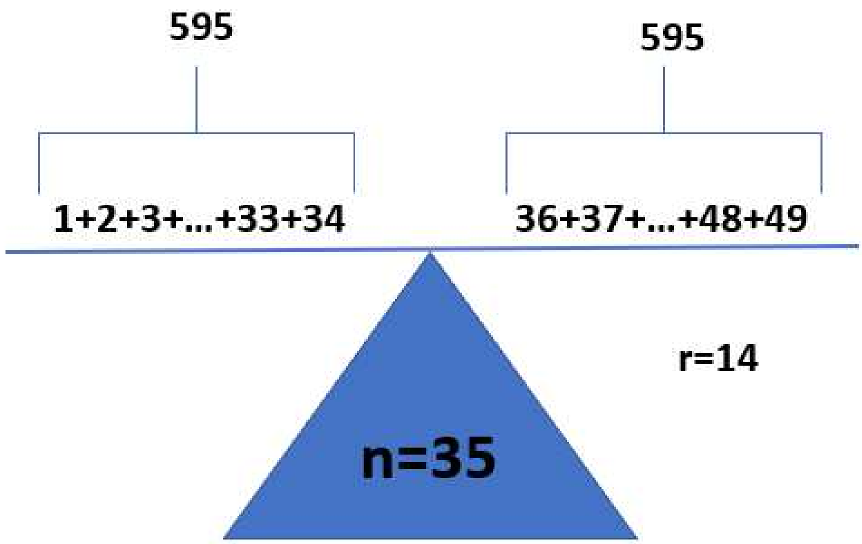
$$1 + 2 + \cdots + n - 1 = (n + 1) + (n + 2) \cdots + (n + r). \tag{1.3}$$

Na prethodnu relaciju možemo gledati kao na *diofantsku jednadžbu* u nepoznanicama n i r a početni problem se svodi na traženje rješenja u skupu prirodnih brojeva jednadžbe (1.3).

Definicija 1.1.2. *Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $r \in \mathbb{N}_0$ brojevi koji zadovoljavaju jednadžbu* (1.3). *Tada se n naziva **balansirajući broj** a r njemu pridruženi **balanser**. Oznaka za k-ti balansirajući broj je B_k.*

Uočimo da je trivijalno rješenje jednadžbe (1.3) uređeni par $(n, r) = (1, 0)$. Označavamo ga s $B_1 = 1$. Pokazali smo da su 6 i 35 balansirajući brojevi s pripadnim balanserima $r = 2$ i $r = 14$, respektivno. To su sljedeća dva balansirajuća broja, tj. $B_2 = 6$ i $B_3 = 35$.

Na prvi pogled naziv ovog niza - *balansirajući brojevi*, odnosno *balancing numbers* (engl.) zvuči neobično. No, pogledamo li Sliku 1.3 na kojoj smo vizualizirali balansirajući broj B_3, vidimo "ravnotežu", tj. "balans" dva zbroja uzastopnih prirodnih brojeva



Slika 1.3: Balansirajući broj $n = 35$ s pripadnim balanserom $r = 14$

Jednadžbu (1.3) možemo zapisati kao

$$\frac{1}{2}n(n-1) = nr + \frac{1}{2}r(r+1), \tag{1.4}$$

odnosno

$$n^2 = \frac{(n+r)(n+r+1)}{2}. \tag{1.5}$$

Uočimo da je desna strana u (1.5) upravo jednaka $n+r$-tom trokutastom broju pa stoga vrijedi sljedeća karakterizacija balansirajućeg broja.

Teorem 1.1.3. *Prirodan broj n je balasirajući ako i samo ako je n^2 trokutasti broj.*

S druge stane (1.4) možemo shvati i kao kvadratnu jednadžbu u r:

$$r^2 + (2n+1)r - n^2 + n = 0. \tag{1.6}$$

Jasno je da je n balansirajući ako i samo postoji pozitivno cjelobrojno rješenje prethodne jednadžbe, tj. ako i samo ako je

$$r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2} \tag{1.7}$$

prirodan broj. Dalje, analognim zaključivanjem kao u dokazu Teorema 1.1.1 dobivamo još jednu karakterizaciju balansirajućeg broja:

Teorem 1.1.4. *Prirodan broj n je balasirajući ako i samo ako je $8n^2 + 1$ potpuni kvadrat.*

Prema prethodnoj tvrdnji zaključujemo da su balasirajući brojevi upravo rješenja Pellove jednadžbe

$$m^2 - 8n^2 = 1, \tag{1.8}$$

pa ih stoga postoji beskonačno mnogo. Skup svih rješenje Pellove jednadžbe (1.8) u nepoznanici n je upravo niz balansirajućih brojeva (B_k).

1.2 Rekurzivna formula

Poznato je da je skup svih rješenja Pellove jednadžbe (1.8) dan s

$$m_k + n_k\sqrt{8} = (m_1 + n_1\sqrt{8})^k, k \in \mathbb{N},$$

gdje je (m_1, n_1) fundamentalno rješenje, tj. najmanje rješenje od (1.8) u skupu prirodnih brojeva. U ovom slučaju odmah se vidi da $(m, n) = (3, 1)$ zadovoljava jednadžbu (1.8) i to je očito najmanje moguće rješenje u $\mathbb{N}$. Stoga je

$$m_k + n_k\sqrt{8} = (3 + \sqrt{8})^k, k \in \mathbb{N}.$$

Kako je

$$m_k - n_k\sqrt{8} = (3 - \sqrt{8})^k, k \in \mathbb{N},$$

oduzimanjem prethodnih relacija i dijeljenjem s $2\sqrt{8}$ dobivamo

$$n_k = \frac{1}{2\sqrt{8}}((3+\sqrt{8})^k - (3-\sqrt{8})^k).$$

Budući da je

$$n_k = B_k,$$

dobivamo eksplicitnu formulu za niz balansirajućih brojeva:

Teorem 1.2.1. *Vrijedi*

$$B_k = \frac{\sqrt{2}}{8}\left((3+\sqrt{8})^k - (3-\sqrt{8})^k\right), \tag{1.9}$$

za $k \in \mathbb{N}_0$.

Relacija (1.9) se ponekad naziva *Binetova formula za balansirajuće brojeve*. Možemo je zapisati i u obliku

$$B_k = \frac{\sqrt{2}}{8}\left((1+\sqrt{2})^{2k} - (\sqrt{2}-1)^{2k}\right),$$

iz čega vidimo da je

$$B_k \approx \frac{\sqrt{2}}{8}(1+\sqrt{2})^{2k},$$

za dovoljno velike k. Prvih nekoliko članovi niza (B_n) je

$$1, 6, 35, 204, 1189, 6930, 40391, 235416, \ldots$$

Za niz rješenja (n_k) Pellove jednadžbe (1.8) vrijedi sljedeća rekurzija:

$$n_{k+2} = 2m_1 n_{k+1} - n_k, \ k \geq 0,$$

pri čemu je $m_1 = 3$, a početne vrijednosti su $n_0 = 0$, $n_1 = 1$. Direktno slijedi sljedeća tvrdnja.

Teorem 1.2.2. *Vrijedi*

$$B_{k+2} = 6B_{k+1} - B_k, \tag{1.10}$$

za $k \in \mathbb{N}_0$*, uz početne uvjete* $B_0 = 0$*,* $B_1 = 1$.

1.3 Identiteti

Budući da niz balansirajućih brojeva zadovoljava linearnu rekurziju (1.10), mogu se pokazati mnogi zanimljivi identiteti.

Teorem 1.3.1. *Za sve prirodne brojeve n vrijedi*

$$B_n^2 = 1 + B_{n-1}B_{n+1}. \tag{1.11}$$

Dokaz. Dokaz se provodi matematičkom indukcijom.

Baza: Za $n = 1$ imamo $B_1^2 = 1 + B_0 B_2$, tj. $1 = 1$, pa tvrdnja vrijedi.

Pretpostavka: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n = k$.

Korak: Promatramo vrijedi li tvrdnja za $n = k + 1$. Koristeći pretpostavku i Teorem 1.2.2 imamo

$$\begin{aligned} B_{k+1}^2 &= (6B_k - B_{k-1})B_{k+1} \\ &= 6B_kB_{k+1} - B_{k-1}B_{k+1} \\ &= 6B_kB_{k+1} - (B_k^2 - 1) \\ &= B_k(6B_{k+1} - B_k) + 1 \\ &= B_kB_{k+2} + 1, \end{aligned}$$

čime je pokazano da tvrdnja vrijedi za $n = k + 1$. □

Uočimo da relacija (1.11) predstavlja nelinearnu rekurziju drugog reda:

$$B_{n+1} = \frac{B_n^2 - 1}{B_{n-1}}, \; n \geq 2,$$

uz početne uvjete $B_1 = 1$, $B_2 = 6$.

Napomena 1.3.2. *Iz Teorema 1.3.1 možemo uočiti još jedno zanimljivo svojstvo. Naime, n-ti balansirajući broj je približno jednak geometrijskoj sredini svog neposrednog prethodnika i svog neposrednog sljedbenika,*

$$B_n = \sqrt{B_{n+1}B_{n-1} + 1} \approx \sqrt{B_{n+1}B_{n-1}}.$$

Na primjer, $B_6 = 6930$ *a* $\sqrt{B_7B_5} \approx 6929.99992$. *Rastom indeksa n, aproksimacija postaje sve bolja. Preciznije, vrijedi*

$$B_n = \left\lceil \sqrt{B_{n+1}B_{n-1} + 1} \right\rceil,$$

pri čemu $\lceil x \rceil$ *označava najmanji cijeli broj koji nije manji od x a naziva se* najmanje cijelo *od x ili "strop" (eng. ceiling) od x.*

Teorem 1.3.3. *Neka su m i n prirodni brojevi. Tada vrijedi*

$$B_{m+n} = B_mB_{n+1} - B_{m-1}B_n.$$

Dokaz. Dokaz se provodi matematičkom indukcijom.

Baza: Iz Teorema 1.2.2 slijedi da tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

Pretpostavka: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \leq k$.

Korak: Promatramo vrijedi li tvrdnja za $n = k + 1$. Koristeći pretpostavku i Teorem 1.2.2 imamo

$$\begin{aligned} B_{m+k+1} &= 6B_{m+k} - B_{m+k-1} \\ &= 6(B_mB_{k+1} - B_{m-1}B_k) - (B_mB_k - B_{m-1}B_{k-1}) \\ &= B_mB_{k+2} - B_{m-1}B_{k+1}. \end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za $n = k + 1$. □

Korolar 1.3.4. *Za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijede sljedeći identiteti:*

(a) $B_{n+1} \cdot B_{n-1} = (B_n + 1)(B_n - 1)$,

(b) $B_n = B_k \cdot B_{n-k+1} - B_{k-1} \cdot B_{n-k}$, $k \leq n$,

Dokaz. (a) Direktno iz (1.11).

(b) Uz $m + n = k$ iz Teorema 1.3.3 dobivamo $B_k = B_m B_{k-m+1} - B_{m-1} B_{k-m}$, $m \leq k$.

□

Korolar 1.3.5. *Za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijede sljedeći identiteti:*

(a) $B_{2n} = B_n(B_{n+1} - B_{n-1})$,

(b) $B_{2n+1} = B_{n+1}^2 - B_n^2$.

Dokaz. (a) Iz Korolara 1.3.4(b) zamjenom n s $2n$ i $k = n + 1$ dobivamo

$$B_{2n} = B_n \cdot B_{n+1} - B_{n-1} \cdot B_n.$$

(b) Analogno, iz Korolara 1.3.4(b) zamjenom n s $2n + 1$ i $k = n + 1$ dobivamo jednakost.

□

Korolar 1.3.6. *Ako je n prirodan broj, tada vrijedi*

(a) $B_1 + B_3 + \cdots + B_{2n-1} = B_n^2$,

(b) $B_2 + B_4 + \cdots + B_{2n} = B_n B_{n+1}$,

(c) $B_1 + B_2 + \cdots + B_{2n} = B_n(B_n + B_{n+1})$.

Dokaz. (a) Zbrajanjem niza jednakosti iz Korolara 1.3.4(b) za $n = 1, 2, \cdots, k$ dobivamo

$$\begin{aligned}
B_3 &= \cancel{B_2^2} - B_1^2, \\
B_5 &= \cancel{B_3^2} - \cancel{B_2^2}, \\
B_7 &= \cancel{B_4^2} - \cancel{B_3^2}, \\
&\vdots \\
B_{2k-1} &= \cancel{B_k^2} - \cancel{B_{k-1}^2}, \\
B_{2k+1} &= B_{k+1}^2 - \cancel{B_k^2},
\end{aligned}$$

$$B_3 + B_5 + \cdots + B_{2k+1} = B_{k+1}^2 - B_1^2 = B_{k+1}^2 - B_1,$$

pa slijedi tražena relacija jer je $B_1 = 1$.

(b) Na isti na način kao prethodno, samo iz Korolara 1.3.4(a).

(c) Zbrajanjem jednakosti iz (a) i (b).

□

1.4 Veza s kvadratno trokutastim brojevima

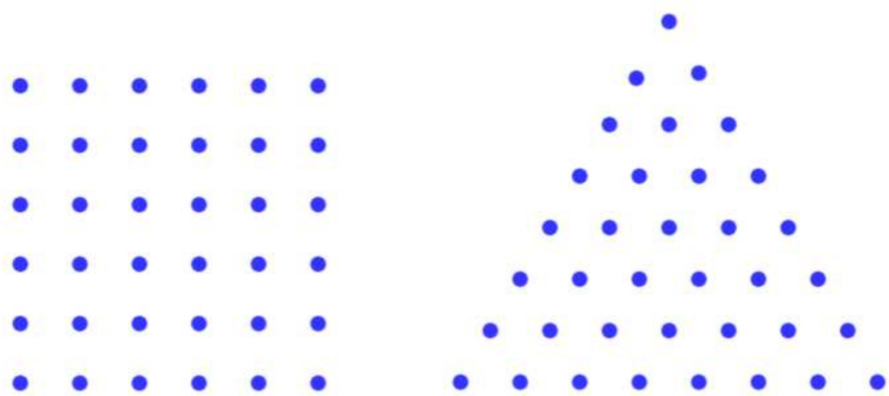
U odsječku 1.1 opisana je veza između balasirajućih brojeva i trokutastih brojeva. Dakle, balasirajući broj n je prirodan broj koji zadovoljava jednadžbu $T_n + T_{n+1} = T_{n+r}$ za neki $r \in \mathbb{N}_0$. Nadalje, n je balasirajući broj ako i samo ako je n^2 trokutasti broj (Teorem 1.1.3), odnosno

$$B_n^2 = T_{n+r},$$

gdje je r pripadni balanser.

Definicija 1.4.1. ***Kvadratno trokutasti broj*** *je broj koji je istovremeno trokutasti broj i kvadratni broj. Oznaka za n-ti kvadratno trokutasti broj je* ST_n.

Očito je $ST_1 = 1$. Najmanji netrivijalan kvadratno trokutasti broj je $ST_2 = 36$.



Slika 1.4: Kvadratno trokutasti broj 36 kao trokut i kvadrat, duljina stranice kvadrata je $n = 6$, duljina stranica trokuta je $n + 2 = 8$

Prema onome što smo pokazali niz kvadrata balansirajućih brojeva (B_n^2) upravo predstavlja niz kvadratno trokutastih brojeva. Dakle, kvadrat svakog balansirajućeg broja je kvadratno trokutasti broj i obratno korijen svakog kvadratno trokutastog broja je balasirajući broj.

Koristeći Teorem 1.2.2 i Teorem 1.3.1, možemo naći rekurzivnu relaciju za kvadratno trokutaste brojeve.

Teorem 1.4.2. *Niz kvadratno trokutastih brojeva* (ST_n) *zadovoljava sljedeću rekurzivnu relaciju*

$$ST_{n+1} = 34ST_n - ST_{n-1} + 2, \; n \geq 3,$$

uz početne uvjete $ST_1 = 1, \; ST_2 = 6.$

Dokaz. Kvadriranjem obje strane rekurzivne relacije (1.10), imamo

$$\begin{aligned} B_{n+1}^2 &= 34B_n^2 - (12B_nB_{n-1} - 2B_n^2 - B_{n-1}^2) \\ &= 34B_n^2 - 2(B_{n+1} + B_{n-1})B_{n-1} + 2B_n^2 + B_{n-1}^2 \\ &= 34B_n^2 + 2(B_n^2 - B_{n+1}B_{n-1}) - B_{n-1}^2 \end{aligned}$$

Kako je, prema Teoremu 1.3.1 $B_{n+1}B_{n-1} = B_n^2 - 1$, dobivamo

$$B_{n+1}^2 = 34B_n^2 - B_{n-1}^2 + 2,$$

što je upravo

$$ST_{n+1} = 34ST_n - ST_{n-1} + 2$$

jer je $ST_n = B_n^2$. □

Poglavlje 2

Funkcije povezane s balansirajućim brojevima

U ovom poglavlju bavimo se funkcijom izvodnicom za niz balansirajućih brojeva te funkcijama koje generiraju balasirajuće brojeve.

2.1 Funkcije izvodnice

Funkcije izvodnice su koristan alat koji se primjenjuje za rješavanje različitih problema iz područja kombinatorike i vjerojatnosti, te za manipulaciju nizovima (posebno rekurzivnim). Ideja je nizu brojeva pridružiti funkciju. Konkretno, nizu brojeva $(a_n)_{n\geq 0}$ pridružujemo tzv. *formalni red potencija*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$$

kojeg nazivamo *funkcija izvodnica*. Pod pojmom *formalni* mislimo da se ne obaziremo na problem konvergencije reda ili možemo razmišljati na način da varijabli x nije dodijeljena nikakva vrijednost. Također, nad ovim redovima možemo izvoditi određene operacije na čisto formalnoj razini. Naravno, funkcija f je definirana za sve x u kojima je red $\sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ konvergentan.

Dajemo nekoliko primjera funkcija izvodnica poznatih nizova:

$$\begin{aligned}
(1, 1, 1\cdots) &\mapsto 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x},\\
(1, -1, 1, -1\cdots) &\mapsto 1 - x + x^2 - x^3\cdots = \frac{1}{1+x},\\
(1, 0, 1, 0, \cdots) &\mapsto 1 + x^2 + x^4\cdots = \frac{1}{1-x^2},\\
\left(\frac{1}{n!}\right) &\mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\cdots = e^x,
\end{aligned}$$

Funkcija izvodnica za poznati Fibonaccijev niz (F_n) zadan rekurzijom $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ glasi

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Operacije s redovima

Neka su

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

dva formalna reda potencija.

Zbrajanje redova. Za njihovu sumu vrijedi

$$A(x) + B(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n.$$

Množenje reda skalarom. Ako je α bilo koji skalar,

$$\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n)x^n.$$

Množenje redova. Dva se formalna reda $A(x) = \sum a_k x^k$, $B(x) = \sum b_j k^j$ mogu pomnožiti na prirodan način: svaki član prvog reda množi se sa svakim članom drugog reda. Dobiveni se umnošci mogu srediti tako da se zbroje koeficijenti uz istu potenciju x^n. Za svaki n

broj takvih koeficijenata je konačan, pa je taj zbroj uvijek konačan. Zato je rezultat ponovo formalni red koji ćemo označiti s $C(x) = \sum c_n x^n$:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \dots) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

Koeficijent uz član x^n dobit ćemo na ovaj način: ako je iz prve sume odabran član $a_k x^k, k \leq n$, onda se on treba pomnožiti s članom $b_{n-k} x^{n-k}$ druge sume. Prema tome, uz potenciju x^n nalazit će se zbroj koeficijenata $a_k b_{n-k}$, za sve vrijednosti k od 0 do n:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_k b_{n-k} + \dots a_n b_0.$$

Formalni izvod ove formule je

$$A(x)B(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_k b_j x^{k+j}.$$

U dvostrukoj sumi s desne strane grupirat ćemo zajedno članove s istom potencijom $k + j$. Neka je taj zbroj označen s $n = k + j$. Zatim ćemo ih poredati prema rastućoj potenciji n. Tada dobivamo

$$A(x)B(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k+j=n} a_k b_j\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n.$$

2.2 Funkcija izvodnica za balansirajuće brojeve

Teorem 2.2.1. *Funkcija izvodnica niza balansirajućih brojeva (B_n) je*

$$g(x) = \frac{x}{1 - 6x + x^2}.$$

Dokaz. Prema definiciji funkcija izvodnica je dana redom potencija

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n x^n. \tag{2.1}$$

Funkciju ćemo izvesti tako što pomnožimo rekurziju (1.10) za (B_n) s x^n,

$$B_{n+1} x^n = 6B_n x^n + B_{n-1} x^n,$$

a zatim sumiramo po svim $n \in \mathbb{N}$. Dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_{n+1} x^n = 6 \sum_{n=1}^{\infty} B_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1} x^n,$$

odnosno

$$\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} B_{n+1}x^{n+1} = 6\sum_{n=1}^{\infty} B_n x^n - x\sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}x^{n-1}.$$

Prema (2.1) imamo

$$\frac{1}{x}(g(x) - x) = 6g(x) - xg(x),$$

tj.

$$(1 - 6x + x^2)g(x) = x,$$

iz čega slijedi tvrdnja. □

Pomoću funkcije izvodnice pronaći ćemo još jednu eksplicitnu formulu za opći član niza balansirajućih brojeva.

Korolar 2.2.2. *Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$B_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} 6^{n-k}. \tag{2.2}$$

Dokaz. Koristimo Taylorov razvoj u red funkcije

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x}{1-(6x-x^2)} \\ &= x(1 + (6x - x^2) + (6x - x^2)^2 + (6x - x^2)^3 + \cdots) \\ &= x + x^2(6 - x) + x^3(6 - x)^2 + x^4(6 - x)^3 + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}(6 - x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}\left(6^k - \binom{k}{1}6^{k-1}x + \binom{k}{2}6^{k-2}x^2 - \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}6x^{k-1} + (-1)^k\binom{k}{k}6^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(6^k x^{k+1} - \binom{k}{1}6^{k-1}x^{k+2} + \binom{k}{2}6^{k-2}x^{k+3} - \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}6x^{2k} + (-1)^k\binom{k}{k}x^{2k+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}6^{k-i}x^{k+i+1}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sada red dobiven u (2.2) uspoređujemo s redom $\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$, odnosno tražimo koeficijente uz iste potencije od x.

Odredimo najprije koeficijente uz neparne potencije x^{2n+1}. Trebamo naći parove (i, k) za koje je $k + i + 1 = 2n + 1$ i $0 \leq i \leq k$. To su sljedeći parovi

$$(i, k) = (0, 2n), (1, 2n-1), (2, 2n-2), (3, 2n-3), \ldots, (n, n),$$

pa je

$$B_{2n} = \binom{2n}{0} 6^{2n} + \binom{2n-1}{1} 6^{2n-2} + \binom{2n-2}{2} 6^{2n-4} + \cdots + \binom{n}{n} 6^0$$

Sada odredimo koeficijente uz parne potencije x^{2n}. Parovi (i, k) za koje je $k+i+1 = 2n$ i $0 \leq i \leq k$ su

$$(i, k) = (0, 2n-1), (1, 2n-2), (2, 2n-3), (3, 2n-4), \ldots, (n-1, n),$$

te dobivamo

$$B_{2n+1} = \binom{2n-1}{0} 6^{2n-1} + \binom{2n-2}{1} 6^{2n-3} + \binom{2n-3}{2} 6^{2n-5} + \cdots + \binom{n}{n-1} 6^1.$$

Posljednje dvije formule daju (2.2). □

2.3 Funkcije koje generiraju balansirajuće brojeve

Definiramo funkcije

$$\begin{aligned} F(x) &= 2x\sqrt{8x^2+1}, && (2.4) \\ G(x) &= 3x + \sqrt{8x^2+1}, && (2.5) \\ H(x) &= 17x + 6\sqrt{8x^2+1}, && (2.6) \\ K(n) &= 6x\sqrt{8x^2+1} + 16x^2 + 1, && (2.7) \end{aligned}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Pokazat ćemo da navedene funkcije generiraju balansirajuće brojeve.

Teorem 2.3.1. *Ako je n balansirajući broj, onda su $F(n)$, $G(n)$, $H(n)$ i $K(n)$ također balansirajući brojevi.*

Dokaz. Pokazali smo da ako je n balansirajući broj, onda je $8n^2+1$ potpun kvadrat (Teorem 1.1.4). Stoga je

$$\frac{8n^2(8n^2+1)}{2} = 4n^2(8n^2+1)$$

trokutasti broj koji je također potpun kvadrat, tj. to je kvadratni trokutasti broj. Korijen kvadratnog trokutastog broja je (parni) balansirajući broj $2n\sqrt{8n^2+1} = F(n)$.

Kako je $8n^2 + 1$ potpun kvadrat, slijedi da je

$$8(G(n))^2 + 1 = \left(8n + 3\sqrt{8n^2+1}\right)^2$$

također potpun kvadrat, stoga $G(n)$ je balansirajući broj (Teorem 1.1.4).

Kako je

$$H(n) = G(G(n)),$$

slijedi da je i $H(n)$ balansirajući broj.

Slično, zbog

$$K(n) = G(F(n)),$$

slijedi da je $K(n)$ balansirajući broj. □

Napomena 2.3.2. *Za svaki balansirajući broj n, $F(n)$ je uvijek paran, a $K(n)$ je uvijek neparan. $G(n)$ je paran kada je n neparan i $G(n)$ je neparan kada je n paran, a $H(n)$ je iste parnosti kao i n.*

Zanima nas postoji li među funkcijama (2.4) - (2.7) neka koja će za dani balasirajući broj B_k generirati sljedeći član niza B_{k+1}. Prema prethodnoj napomeni to ne mogu biti funkcije F, K i H jer su susjedna dva člana balasirajućeg niza različite parnosti. Pokazat ćemo se da opisano svojstvo ima funkcija G.

Teorem 2.3.3. *Ako je n balansirajući broj, onda je $G(n)$ njegov sljedbenik, tj. $G(B_k) = B_{k+1}$.*

Dokaz. Neka je $n = B_k$. Rekurzivna relacija (1.10) daje

$$B_{k+1} = 6B_k - B_{k-1} = 3B_k + (3B_k - B_{k-1}). \tag{2.8}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned}(3B_k - B_{k-1})^2 &= 9B_k + B_{k-1}^2 - 6B_kB_{k-1}\\ &= 9B_k^2 + B_{k-1}^2 - B_{k-1}(B_{k+1} + B_{k-1})\\ &= 9B_k^2 - (B_k^2 - 1)\\ &= 8B_k^2 + 1.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u (2.8) imamo

$$G(B_k) = 3B_k + \sqrt{8B_k^2+1} = 3B_k + 3B_k - B_{k-1} = B_k - B_{k-1} = B_{k+1}.$$

□

Funkcija G je strogo rastuća (na čitavoj domeni $\mathbb{R}$), stoga je ona bijekcija. Lako se može provjeriti da je inverz funkcije G dan s

$$G^{-1}(x) = 3x - \sqrt{8x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

Prema Teoremu (2.3.3) slijedi da je $G^{-1}(B_k) = B_{k-1}$, odnosno da je $G^{-1}(n)$ prethodnik balansirajućeg broja n. Dakle, vrijede sljedeće rekurzivne relacije (prvog reda).

Korolar 2.3.4. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijede relacije*

$$B_{n+1} = 3B_n + \sqrt{8B_n^2 + 1},$$
$$B_{n-1} = 3B_n - \sqrt{8B_n^2 + 1}.$$

Kako je $H = G \circ G$, pomoću funkcije H možemo generirati podniz balansirajućih brojeva s parnim, odnosno neparnim indeksom. Inače, balansirajući brojevi s neparnim indeksom su neparni a s parnim indeksom su parni brojevi.

Korolar 2.3.5. *Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi*

$$B_{n+2} = 17B_n + 6\sqrt{8B_n^2 + 1}.$$

Pokazali smo da su $F(n)$, $G(n)$ i $H(n)$ balansirajući za neki balansirajući broj n. Poopćimo li funkcije F, G, i H možemo se pitati za koje prirodne brojeve p i q je

$$B = pn + q\sqrt{8n^2 + 1}$$

balasirajući broj. To vrijedi ako i samo ako je

$$8B^2 + 1 = \left(8qn + p\sqrt{8n^2 + 1}\right)^2 + 8q^2 - p^2 + 1$$

potpun kvadrat. Ako je $8q^2 - p^2 + 1 = 0$, onda je $8B^2 + 1 = \square$. Primijetimo da je $8q^2 + 1 = p^2$ ako i samo ako je q balansirajući broj. Zato definiramo funkciju

$$f(x, y) = x\sqrt{8y^2 + 1} + y\sqrt{8x^2 + 1}.$$

Teorem 2.3.6. *Ako su m i n balansiraći brojevi brojevi, tada je*

$$f(m, n) = m\sqrt{8n^2 + 1} + n\sqrt{8m^2 + 1} \tag{2.9}$$

također balansirajući broj.

Napomena 2.3.7. *Veza funkcije $f(x, y)$ s funkcijama $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ i $K(x)$:*

(a) $f(x, x) = F(x)$,

(b) $f(x, 1) = G(x)$,

(c) $f(x, 6) = H(x)$,

(d) $f(x, G(x)) = K(x)$.

Kombinirajući prethodno može se pokazati

Napomena 2.3.8. *Ako su x, y i z balansirajući brojevi, tada je*

$$x\sqrt{8y^2+1}\cdot\sqrt{8z^2+1}+y\sqrt{8x^2+1}\cdot\sqrt{8z^2+1}+z\sqrt{8x^2+1}\cdot\sqrt{8x^2+1}+8xyz$$

također balansirajući broj.

2.4 Lucas-balansirajući brojevi

Definicija 2.4.1. *Za n-ti balasirajući broj B_n, definiramo njemu pripadni n-**ti Lucas balasirajući broj***

$$C_n = \sqrt{8B_n^2+1}.$$

Zanimljivo je da niz Lucas balansirajućih brojeva (C_n) zadovoljava istu rekurzivnu relaciju kao i niz balansirajućih brojeva.

Teorem 2.4.2. *Vrijedi*

$$C_{n+1} = 6C_n - C_{n-1},\ n \in \mathbb{N},$$

uz početne uvjete $C_0 = 1,\ C_1 = 3$.

Dokaz. Prema definiciji Lucas balansirajućeg broja i Korolaru 2.3.4 vrijedi

$$\begin{aligned} C_{n+1}^2 &= 8B_{n+1}^2+1 = 8\left(3B_n+\sqrt{8B_n^2+1}\right)^2+1 \\ &= \left(3\sqrt{8B_n^2+1}+8B_n\right)^2 = (3C_n+8B_n)^2. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$C_{n+1} = 3C_n + 8B_n. \tag{2.10}$$

Slično,

$$\begin{aligned} C_{n-1}^2 &= 8B_{n-1}^2 + 1 = 8\left(3B_n - \sqrt{8B_n^2+1}\right)^2 + 1 \\ &= \left(3\sqrt{8B_n^2+1} - 8B_n\right)^2 = (3C_n - 8B_n)^2 . \end{aligned}$$

Kako je $3C_n - 8B_n > 0$, vrijedi

$$C_{n-1} = 3C_n - 8B_n. \tag{2.11}$$

Zbrajanjem (2.10) i (2.11), slijedi

$$C_{n+1} + C_{n-1} = 6C_n. \tag{2.12}$$

□

Prvih nekoliko Lucas-balansirajućih brojeva je

$$1, 3, 17, 99, 577, 3363, 19601, 114243, 665857, \ldots$$

Teorem 2.4.3. *Vrijedi*

$$C_n = \frac{1}{2}\left(\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n + \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n\right),\ n \geq 0.$$

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati tako da ćemo riješiti rekurzivnu relaciju (2.12) uz početne uvjete $C_0 = 1$ i $C_1 = 3$.

Uvrštavanjem $C_n = x^n$ u (2.12) dobivamo karakterističnu jednadžbu

$$x^{n+1} + x^{n-1} = 6x^n$$

tj.

$$x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Izračunajmo korijene: $3 + 2\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}$, pa je opće rješenje te rekurzije dano s

$$C_n = \alpha \cdot (3 + 2\sqrt{2})^n + \beta \cdot (3 - 2\sqrt{2})^n.$$

gdje su α i β konstante koje određujemo iz početnih uvjeta, odnosno $C_0 = 1, C_1 = 3$. Dakle

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 1, \\ \alpha \cdot (3 + 2\sqrt{2}) + \beta \cdot (3 - 2\sqrt{2}) &= 3. \end{aligned}$$

Rješenje prethodnog sustava je

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Stoga je

$$C_n = \frac{1}{2}\left(\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n\right).$$

□

Korolar 2.4.4. *Vrijedi*

$$C_n \pm 1 = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{2} + 1\right)^n \pm \left(\sqrt{2} - 1\right)^n\right)^2, \ n \geq 0$$

Dokaz. Očito je $\left(\sqrt{2} \pm 1\right)^2 = \left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)$. □

Napomena 2.4.5. *Uočimo da je za neparan n, $n = 2k + 1$, $C_n + 1$ jednako potpunom kvadratu*

$$C_{2k+1} + 1 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{k} 2\binom{2k+1}{2i+1}(\sqrt{2})^{2i+1}\right)^2 = 4\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{2k+1}{2i+1}2^i\right)^2.$$

Stoga je $\sqrt{C_{2k+1} + 1}$ *paran prirodan broj za svaki* $k \in \mathbb{N}_0$.

Slično,

$$C_{2k+1} - 1 = 2\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{2k+1}{2i+1}2^i\right)^2$$

pa je $\sqrt{(C_{2k+1} - 1)/2}$ *neparan prirodan broj za svaki* $k \in \mathbb{N}_0$.

Poglavlje 3

Balansirajući brojevi i Pitagorina jednadžba

3.1 Pitagorine trojke

Definicija 3.1.1. *Uređenu trojku prirodnih brojeva* (x, y, z) *zovemo* ***Pitagorina trojka*** *ako su* x, y *katete, a* z *hipotenuza nekog pravokutnog trokuta, tj. ako vrijedi*

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{3.1}$$

Ako su $x,\ y,\ z$ *relativno prosti, onda kažemo da je* (x, y, z) ***primitivna Pitagorina trojka.***

Diofantska jednadžba (3.1) *naziva se* ***Pitagorina jednadžba***.

Uočimo da u svakoj primitivnoj Pitagorinoj trojki točno jedan od brojeva x, y je paran. Bez smanjenja općenitosti, uzmimo da je y paran.

Teorem 3.1.2. *Sve primitivne Pitagorine trojke* (x, y, z) *u kojima je* y *paran, dane su formulama*

$$x = m^2 - n^2,\ y = 2mn,\ z = m^2 + n^2,$$

gdje su m, n *relativno prosti prirodni brojevi različite parnosti i* $m > n$.

Korolar 3.1.3. *Sva rješenja u skupu prirodnih brojeva Pitagorine jednadžbe* (3.1) *su*

$$(x, y, z) = (k(m^2 - n^2), 2kmn, k(m^2 + n^2))$$

gdje su k, m, n *prirodni brojevi i* $m > n$.

3.2 Specijalna Pitagorina jednadžba

U ovom odsječku promatramo Pitagorinu jednadžbu kojoj se katete razlikuju za 1, odnosno jednadžbu

$$x^2 + (x+1)^2 = y^2. \tag{3.2}$$

Uočimo da *egipatski trokut* $(3, 4, 5)$ zadovoljava prethodnu jednadžbu, odnosno $(3, 5)$ je jedno rješenje od (3.2). Naći ćemo vezu između rješenja jednadžbe (3.2) i balansirajućih brojeva.

Pretpostavimo da je (x, y) neko rješenje jednadžbe (3.2) u $\mathbb{N}$. Tada je

$$2x^2 + 2x + 1 = y^2,$$

pa množenjem prethodne relacije s 2 dobivamo

$$2y^2 - 1 = (2x+1)^2.$$

Množenjem s y^2 slijedi

$$\frac{(2y^2-1)2y^2}{2} = y^2(2x+1)^2 = \square.$$

Dakle, $y^2(2y^2 - 1)$ je kvadratno trokutasti broj. Kako su y^2 i $2y^2 - 1$ neparni, $y^2(2y^2 - 1)$ je neparan kvadratno trokutasti broj. U odsječku 1.4 ustanovili smo da je svaki kvadratno trokutasti broj jednak kvadratu nekog balansirajućeg broja. Budući da je $y^2(2y^2-1)$ neparan (jer je y neparan), slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}_0$ takav da je

$$B_{2k+1}^2 = y^2(2y^2 - 1).$$

Stoga je

$$y^2 = \frac{1 + \sqrt{8B_{2k+1}^2 + 1}}{4},$$

odnosno

$$y = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{8B_{2k+1}^2 + 1}}}{2}.$$

Iz

$$2x^2 + 2x + 1 = \frac{1 + \sqrt{8B_{2k+1}^2 + 1}}{4},$$

dobivamo da je

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{8B_{2k+1}^2 + 1} - 1}{2}} - 1\right).$$

Možemo pojednostaviti izraze za x i y tako da upotrijebimo Lucas-balansirajući broj

$$C_{2k+1} = \sqrt{8B_{2k+1}^2 + 1}.$$

Prema tome, pokazali smo ako je $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ jednadžbe (3.2), onda postoji $k \in \mathbb{N}_0$ takav da je

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{C_{2k+1} - 1}{2}} - 1\right),$$
$$y = \frac{1}{2}\sqrt{C_{2k+1} + 1}.$$

Teorem 3.2.1. *Sva rješenja jednadžbe* (3.2) *dana su s*

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(C-1)} - 1}{2}, \frac{\sqrt{1+C}}{2}\right), \tag{3.3}$$

gdje $C = \sqrt{8B^2 + 1}$ *je Lucasov balansirajući broj koji odgovara neparnom balansirajućem broju* B*.*

Dokaz. Pokazali smo da ako je (x, y) neko rješenje jednadžbe (3.2), onda postoji $k \in \mathbb{N}_0$ takav da za $C = \sqrt{8B_{2k+1}^2 + 1}$ vrijedi (3.3).

Još se treba uvjeriti da je (3.3) rješenje za $C = \sqrt{8B_{2k+1}^2 + 1}$ i svaki $k \in \mathbb{N}_0$. Očito je

$$2x^2 + 2x + 1 = \frac{C+1}{4} + 1 = y^2.$$

Prema Napomeni 2.4.5 slijedi da su formulama u (3.3) dobro definirani prirodni brojevi. $\square$

Prvih nekoliko rješenja Pitagorine jednadžbe (3.2) su

$$(x, y) = (0, 1), (3, 5), (20, 29), (119, 169), (696, 985), \ldots$$

Zanimljivo je da su rješenja jednadžbe (3.2) u y upravo Pellovi brojevi s neparnim indeksom. *Pellovi brojevi* su $P_1 = 1$, $P_2 = 2$ a ostali se dobivaju rekurzijom

$$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}, \ n \geq 1.$$

Poglavlje 4

Kobalansirajući brojevi

4.1 Definicija

U Poglavlju 1 smo razmotrili da prirodan broj n je balansirajući broj ako zadovoljava diofantsku jednadžbu

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) = (n + 1) + (n + 1) + \cdots + (n + r) \tag{4.1}$$

za neki $r \in \mathbb{N}_0$, gdje je r balanser pridružen balansirajućem broju n. Modificiramo li relaciju (4.1), dolazimo do sljedeće relacije

$$1 + 2 + \cdots + n = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r), \tag{4.2}$$

na koju, ponovo, gledamo kao na *diofantsku jednadžbu* u nepoznanicama n i r.

Definicija 4.1.1. *Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $r \in \mathbb{N}_0$ brojevi koji zadovoljavaju jednadžbu* (4.3). *Tada se n naziva **kobalansirajući broj**, a r njemu pridružen **kobalanser.** Oznaka za k-ti kobalansirajući broj je b_k.*

Prva tri kobalansirajuća broja su $b_1 = 2, b_2 = 14$ i $b_3 = 84$ s kobalanserima $1, 6$ i 35, redom.

Jednadžbu (4.1) možemo zapisati kao

$$n(n + 1) = \frac{(n + r)(n + r + 1)}{2}. \tag{4.3}$$

Uočimo da je desna strana u (4.3) jednaka $n + r$-tom trokutastom broju pa stoga vrijedi sljedeća karakterizacija kobalansirajućeg broja.

Propozicija 4.1.2. *Prirodan broj n je kobalansirajući ako i samo ako je $n(n + 1)$ trokutasti broj.*

Prema prethodnoj propoziciji slijedi da se traženje kobalansirajućih brojeva svodi na traženje trokutastih brojeva koji su jednaki umnošku dvaju uzastopnih prirodnih brojeva. Ako je trokutasti broj T jednak umnošku $n(n+1)$, onda je $\lfloor \sqrt{T} \rfloor$ kobalansirajući broj, gdje je $\lfloor x \rfloor$ najveće cijelo broja x. Zaista, vrijedi $n < \sqrt{n(n+1)} < n+1$. Na primjer, $T = 6$ je trokutasti broj koji je umnožak dva uzastopna broja i stoga je $\lfloor \sqrt{6} \rfloor = 2$ kobalansirajući broj.

Jednadžbu (4.3) možemo shvatiti i kao kvadratnu jednadžbu u r:

$$r^2 + (2n+1)r - n^2 - n = 0.$$

Jasno je da je n kobalansirajući broj ako i samo ako postoji nenegativno cjelobrojno rješenje prethodne jednadžbe, tj. ako i samo ako je

$$r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2 + 8n + 1}}{2} \tag{4.4}$$

nenegativan broj. Dakle vrijedi sljedeća karakterizacija kobalansirajućeg broja.

Teorem 4.1.3. *Prirodan broj n je kobalansirajući ako i samo ako je $8n^2 + 8n + 1$ potpuni kvadrat.*

Kako je $8 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 + 1 = 1$ potpuni kvadrat, niz kobalansirajućih brojeva (b_n) proširujemo s $b_0 = 0$. (Prema definiciji, kobalansirajući brojevi su prirodni brojevi.)

Zanimljivo je da niz kobalansirajućih brojeva predstavlja niz balansera balansirajućih brojeva, i obratno niz balansirajućih brojeva predstavlja niz kobalansera kobalansirajućih brojeva. Ako u (4.4) umjesto n uvrstimo balaser r_B balansirajućeg broja B za kojeg prema (1.7) vrijedi

$$r_B = \frac{-2B - 1 + \sqrt{8B^2 + 1}}{2},$$

dobivamo

$$\begin{aligned} r &= B - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8B^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 24B^2 - 8B\sqrt{1 + 8B^2}} \\ &= B - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8B^2} + \frac{1}{2}\sqrt{(4B - \sqrt{1 + 8B^2})^2} \\ &= B - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8B^2} + 2B - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8B^2} \\ &= 3B - \sqrt{1 + 8B^2}. \end{aligned}$$

Prema Korolaru 2.3.4 je $3B - \sqrt{1 + 8B^2}$ balansirajući broj, i to upravo prethodnik od B.

4.2 Funkcije povezane s kobalansirajućim brojevima

Definiramo funkcije:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 3x + \sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1, \\
G(x) &= 17x + 6\sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 8, \\
H(x) &= 8x^2 + 8x + 1 + (2x + 1)\sqrt{8x^2 + 8x + 1},
\end{aligned}
$$

za $x, y \geq 0$. Pokazat ćemo da navedene funkcije uvijek generiraju kobalansirajuće brojeve.

Funkcija $F(x) : [0, \infty\rangle \to [2, \infty\rangle$, je strogo rastuća jer

$$F'(x) = 3 + \frac{4(3 + 1)}{\sqrt{8x^2 + 8x + 1}} > 0.$$

Dakle, F je bijekcija i njena inverzna funkcija F^{-1} je dana s

$$F^{-1}(x) = 3x - \sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1$$

Također se može provjeriti da je $x < F(x)$ za sve $x \geq 0$.

Teorem 4.2.1. *Neka su n i m kobalansirajući brojevi, onda su $F(n)$, $G(n)$, $H(n)$ i $f(n, m)$ također kobalansirajući brojevi.*

Dokaz. Koristimo se karakterizacijom kobalansirajućeg broja iz Teorema 4.1.3, n je kobalansirajući pa je $8n^2 + 8n + 1$ jednak potpunom kvadratu i stoga je $F(n) = k$ prirodan broj. Iz činjenjenice da je

$$F^{-1}(k) = k - \sqrt{8k^2 + 8k + 1} + 1,$$

prirodan broj dobivamo da je $8k^2 + 8k + 1$ potpuni kvadrat, što povlači da je $k = F(n)$ kobalansirajući broj.

Budući da je $F(F(n)) = G(n)$, slijedi da je i $G(n)$ kobalansirajući broj.

Direktnom provjerom može se potvrditi da je $8H(n)^2 + 8H(n) + 1$ potpun kvadrat. Zaista,

$$8H(n)^2 + 8H(n) + 1 = \left((8n + 4)\sqrt{8n^2 + 8n + 1} + 16n^2 + 16n + 3\right)^2.$$

□

U sljedećem teoremu ćemo dokazati da $F(n)$ nije bilo koji kobalansirajući broj, već sljedeći kobalansirajući broj broju n.

Teorem 4.2.2. *Za svaki kobalansirajući broj n, $F(n)$ njegov sljedbenik, a $F^{-1}(n)$ njegov prethodnik u nizu kobalasirajućih brojeva.*

Dokaz. Već smo pokazali da je $F(n)$ kobalansirajući broj ako je n kobalansirajući. Analogno kao u dokazu Teorema 4.2.1 zaključujemo da je i $F^{-1}(n)$ kobalansirajući.

Dalje dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Baza: Direktnom provjerom za $b_0 = 0$ i $b_1 = 2$ vidimo da vrijedi $F(b_0) = b_1$.

Pretpostavka: Neka je $k \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo je $F(b_{k-1}) = b_k$

Korak: Trebamo pokazati da je $F(b_k) = b_{k+1}$. Pretpostavimo suprotno, tj. $F(b_k) > b_{k+1}$. (Drugih "suprotnih" pretpostavki nema jer je $F(b_k)$ kobalansirajući broj i F strogo rastuća funkcija). Tada je

$$b_k < b_{k+1} < F(b_k),$$

te budući da je funkcija F rastuća vrijedi

$$F^{-1}(b_k) < F^{-1}(b_{k+1}) < b_k.$$

Prema pretpostavci indukcije je $F^{-1}(b_k) = b_{k-1}$ i stoga je

$$b_{k-1} < F^{-1}(b_{k+1}) < b_k.$$

Kako je $F^{-1}(b_{k+1})$ kobalansirajući broj, prethodna nejednakost nije moguća jer su b_{k-1} i b_k dva uzastopna kobalansirajuća broja. Dakle, $F(b_k) = b_{k+1}$.

Očito je $F^{-1}(n)$ prethodnik kobalansirajućeg broja n. □

Rekurzivna formula

Prema Teoremu 4.2.2 vrijedi $F(b_n) = b_{n+1}$, $F^{-1}(b_n) = b_{n-1}$, za sve $n \in \mathbb{N}$, odnosno malo drugačije zapisano pokazali smo da vrijedi sljedeća tvrdnja.

Korolar 4.2.3. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijede relacije*

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 3b_n + \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1} + 1, \\ b_{n-1} &= 3b_n - \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1} + 1. \end{aligned}$$

Zbrajanjem prethodnih dviju relacija dolazimo do rekurzivne linearne relacije drugog reda za niz kobalansirajućih brojeva.

Teorem 4.2.4. *Vrijedi*

$$b_{k+1} = 6b_k - b_{k-1} + 2, \tag{4.5}$$

za $k \in \mathbb{N}$, uz početne uvjete $b_0 = 0, b_1 = 2$.

Prvih nekoliko članova niza kobalansirajućeg niza brojeva je

$$0, 2, 14, 84, 492, 2870, 16730, 97512, \ldots$$

Direktna posljedica Teorema 4.2.4 je

Teorem 4.2.5. *Svaki kobalansirajući broj je paran.*

Dokaz. Dokaz se provodi matematičkom indukcijom.
Baza: Prva dva kobalansirajuća broja $b_0 = 0$ i $b_1 = 2$ su parna.
Pretpostavka: Pretpostavimo da je b_n paran za sve $n \leq k$.
Korak: Prema relaciji (4.5) lako se vidi da je i b_{k+1} također paran broj. □

Lucas-kobalansirajući brojevi

Definicija 4.2.6. *Za svaki n-ti kobalansirajući broj b_n definiramo njemu pripadni n-ti **Lucas-kobalansirajući broj***

$$c_n = \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}$$

U odsječku 2.4 vidjeli smo da niz Lucas-balansirajućih brojeva zadovoljava istu rekurzivnu relaciju kao i niz balansirajućih brojeva. Prema tome, očekujemo da niz Lucas-kobalansirajućih brojeva zadovoljava istu rekurzivnu relaciju kao i niz kobalansirajućih brojeva. No, to nije istina. Niz Lucas-kobalansirajućih brojeva zadovoljava istu rekurzivnu relaciju kao niz balansirajućih brojeva.

Teorem 4.2.7. *Vrijedi*

$$c_{n+1} = 6c_n - c_{n-1}, n \in \mathbb{N},$$

uz početne uvjete $c_0 = 1, c_1 = 7$.

Dokaz. Prema definiciji Lucas-kobalansirajućeg broja i Korolaru 4.2.3 slijedi

$$\begin{aligned}
c_{n+1}^2 &= 8b_n^2 + 8b_n + 1 \\
&= 8\left(3b_n + \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1} + 1\right)^2 + 8b_{n+1} + 1 \\
&= \left(3\sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1} + 8b_n + 4\right)^2 \\
&= (3c_n + 8b_n + 4)^2.
\end{aligned}$$

Prema tome

$$c_{n+1} = 3c_n + 8b_n + 4. \tag{4.6}$$

Koristeći

$$c_{n-1}^2 = 8b_{n-1}^2 + 8b_{n-1} + 1$$

na sličan način, može se pokazati da vrijedi

$$c_{n-1}3c_n - 8b_n - 4. \tag{4.7}$$

Zbrajanjem (4.6) i (4.7), slijedi
$$c_{n+1} + c_{n-1} = 6c_n.$$
□

Navodimo prvih nekoliko članova Lucas-kobalansirajućeg niza brojeva:

$$1, 7, 41, 239, 1393, 8119, 47321, 275807, \ldots$$

Eksplicitna formula

Izvest ćemo eksplicitnu formulu za kobalansirajući broj b_n tako da ćemo riješiti rekurziju (4.5). Linearna rekurzija koju zadovoljava niz kobalansirajućih brojeva

$$b_{k+1} - 6b_n + b_{n-1} - 2 = 0 \tag{4.8}$$

nije homogena i zato ju najprije trebamo homogenizirati. Definiramo niz

$$d_n = b_n + \frac{1}{2},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

pa supstitucijom u (4.8) dobivamo

$$d_{k+1} - \frac{1}{2} - 6\left(d_n - \frac{1}{2}\right) + d_{n-1} - \frac{1}{2} - 2 = 0,$$

odnosno homogenu linearnu rekurziju

$$d_{k+1} - 6d_n + d_{n-1} = 0. \tag{4.9}$$

Njena karakteristična jednadžba glasi

$$\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0. \tag{4.10}$$

Korijeni $\lambda_1 = 3 + \sqrt{8}$ i $\lambda_2 = 3 - \sqrt{8}$ jednadžbe (4.10) su realni i različiti pa prema tome n-ti član niza (d_n) zadan rekurzijom (4.9) ima oblik

$$d_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n, \tag{4.11}$$

gdje su α i β konstante koje određujemo iz početnih uvjeta, odnosno iz $d_0 = \frac{1}{2}$, $d_1 = \frac{5}{2}$. Dakle,

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2},\ \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = \frac{5}{2}. \tag{4.12}$$

Rješenje prethodnog sustava je

$$(\alpha, \beta) = \left(-\frac{\lambda_2 - 5}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}, \frac{\lambda_1 - 5}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}\right),$$

odnosno

$$(\alpha, \beta) = (\frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{2} + 1), \frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{2} - 1)).$$

Stoga je

$$d_n = \frac{\sqrt{2}}{8}\left((\sqrt{2} + 1)(3 + \sqrt{8})^n + (\sqrt{2} - 1)(3 - \sqrt{8})^n\right),$$

ili

$$d_n = \frac{\sqrt{2}}{8}\left((\sqrt{2} + 1)^{2n+1} + (\sqrt{2} - 1)^{2n+1}\right),$$

Ovaj rezultat dokazuje sljedeći teorem.

Teorem 4.2.8. *Vrijedi*

$$b_n = \frac{\sqrt{2}}{8}\left((\sqrt{2} + 1)^{2n+1} + (\sqrt{2} - 1)^{2n+1}\right) + \frac{1}{2}, \tag{4.13}$$

za $n \in \mathbb{N}_0$.

Relacija (4.13) se ponekad naziva *Binetova formula za kobalansirajuće brojeve.*

Funkcija izvodnica

Neka je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n. \tag{4.14}$$

Teorem 4.2.9. *Funkcija izvodnica niza kobalansirajućih brojeva* (b_n) *je*

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1 - x)(1 - 6x + x^2)}.$$

Dokaz. Rekurzija (4.5) može se zapisati kao

$$b_{n+2} - 6b_{n+1} + b_n = 2.$$

Pomnožimo li obje strane rekurzije s x^{n+2}, dobivamo

$$b_{n+2}x^{n+2} - 6b_{n+1}x^{n+2} + b_n x^{n+2} = 2x^{n+2}.$$

Sumiranjem po $n \in \mathbb{N}$ slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+2}x^{n+2} - 6\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1}x^{n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2},$$

odnosno

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+2}x^{n+2} - 6x\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1}x^{n+1} + x^2\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n} = 2x^2\sum_{n=1}^{\infty} x^{n}.$$

Prema (4.14) je

$$(f(x) - 2x^2) - 6xf(x) + x^2 f(x) = \frac{2x^3}{1-x}.$$

tj.

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1-x)(1-6x+x^2)}$$

iz čega slijedi tvrdnja. $\square$

Bibliografija

[1] A. Behera and G. K. Panda, *On the square roots of triangular numbers*, Fib. Quart., 37 (1999), 98–105.

[2] A. Dujella, *Teorija brojeva*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.

[3] G. K. Panda, *Sequence balancing and cobalancing numbers*, Fibonacci Quar- terly, 45 (2007), 265–271.

[4] G. K. Panda, *Some fascinating properties of balancing numbers*, Proceedings of the Eleventh International Conference on Fibonacci Numbers and their Applications, Cong. Numer. 194 (2009), 185–189.

[5] M. Penn, *Balancing Numbers*, video predavanje, `https://www.youtube.com/watch?v=jMfZ9jRsHSI`

[6] P. K. Ray, *Balancing and cobalancing numbers*, dissertation, Department of mathematics, National Institute of Technology Rourkela, India, 2009.

[7] *Funkcije izvodnice*, `https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/diskont1-04.pdf`

Sažetak

U ovom radu definiramo *balansirajući* broj $n \in \mathbb{N}$ kao rješenje diofantske jednadžbe

$$1 + 2 + \cdots + (n + 1) = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r),$$

gdje je $r \in \mathbb{N}_0$ *balanser* pridružen broju n. Na primjer, $1, 6, 35$ i 204 su balansirajući brojevi s balanserima $0, 2, 14$ and 84, redom. Zanimljivo je da balansirajući brojevi zadovoljavaju linearnu rekurzivnu relaciju

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Pokazat ćemo neka svojstva balansirajućih brojeva i ustanoviti povezanost s nekim klasičnim diofanstskim jednadžbama. Također, definirat ćemo *kobalansirajuće* brojeve malo modificirajući jednadžbu za balansirajuće brojeve i promatrat ćemo njihova svojstva.

Summary

In this thesis we define *balancing* numbers $n \in \mathbb{N}$ as a solution of the Diophantine equation

$$1 + 2 + \cdots + (n + 1) = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r),$$

calling $r \in \mathbb{N}_0$ the *balancer* corresponding to n. For example, $1, 6, 35$ and 204 are balancing numbers with balancers $0, 2, 14$ and 84, respectively. It is interesting that the balancing numbers satisfy linear recurrence relation

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1},\ n \in \mathbb{N}.$$

We show properties of balancing numbers and establish relation to some classic Diophantine equation. Also, we define the *cobalancing* numbers by slightly modifying equation for balancing numbers and observe their properties.

Životopis

Rođena sam 16. prosinca 1995. godine u Varaždinu. Završila sam OŠ Podrute, PŠ Završje u Završju Podbelskom, a zatim sam upisala prirodoslovno-matematički smjer Prve gimnazije Varaždin. Nakon srednje škole upisala sam Prorodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu gdje sam završila preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički. Upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički, tijekom kojeg radim kao kreator matematičkog sadržaja u Photomath-u.