Reprezentacije logaritamskih verteks-algebri i struktura njihovih viših Zhuovih algebri

Čeperić, Ante

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ante Čeperić

REPREZENTACIJE LOGARITAMSKIH VERTEKS-ALGEBRI I STRUKTURA NJIHOVIH VIŠIH ZHUOVIH ALGEBRI

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2021.

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ante Čeperić

REPREZENTACIJE LOGARITAMSKIH VERTEKS-ALGEBRI I STRUKTURA NJIHOVIH VIŠIH ZHUOVIH ALGEBRI

DOKTORSKI RAD

Mentor:

Dražen Adamović

Zagreb, 2021.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Ante Čeperić

REPRESENTATIONS OF LOGARITHMIC VERTEX ALGEBRAS AND STRUCTURE OF THEIR HIGHER ZHU'S ALGEBRAS

DOCTORAL DISSERTATION

Supervisor:

Dražen Adamović

Zagreb, 2021.

ZAHVALA

Zahvaljujem se svom mentoru, profesoru Draženu Adamoviću, na svemu čemu me naučio, kao i svom vremenu koje je uložio u naš rad. Velika zahvala mojoj obitelji na podršci, bez koje se ne bih ni odvažio na ovaj korak. Najviše se zahvaljujem Jeleni, jer bez nje ništa od ovoga ne bi bilo moguće.

Zahvala

Ova disertacija je djelomično izrađena sredstvima ”QuantiXLie - Znanstvenog centra izvrsnosti za kvantne i kompleksne sustave te reprezentacije Liejevih algebri”, projekta sufinanciranog od Vlade Republike Hrvatske i Europske unije, iz Europskog fonda za regionalni razvoj - Operativni program Kompetitivnost i kohezija (KK.01.1.1.01.0004).

SAŽETAK

U disertaciji proučavamo familiju logaritamskih C_2-konačnih algebri verteks operatora $SF(d)^+$, poznatu pod nazivom simplektički fermioni. Te algebre verteks operatora se pojavljuju kao parni dio (ili tzv. $\mathbb{Z}_2$-orbifold) superalgebri verteks operatora $SF(d)$. Naš pristup ovom problemu bazira se na Zhuovima algebrama (koje je uveo Y. Zhu u [69]). T. Abe je u članku [1] (između ostaloga) odredio ireducibilne reprezentacije algebri verteks operatora $SF(d)^+$ i izračunao Zhuovu algebru u slučaju $d = 1$.

U prvom dijelu radnje, računamo Zhuovu algebru od $SF(d)^+$ za preostale prirodne d, te pomoću toga dokazujemo slutnju o dimenziji vektorskog prostora *one-point* funkcija na $SF(d)^+$, koju su postavili Y. Arike i K. Nagatomo u članku [15]. Također, pokazujemo da je dimenzija Zhuove algebre od $SF(d)^+$ jednaka dimenziji tzv. C_2-algebre od $SF(d)^+$ za takve d (slučaj $d = 1$ je riješio T. Abe u članku [1]). Općeniti problem određivanja algebri verteks operatora za koje vrijedi ta jednakost dimenzija su u članku [40] promatrali M. Gaberdiel i T. Gannon.

U drugom dijelu radnje, bavimo se višim Zhuovim algebrama, generalizaciji pojma Zhuove algebre, koju su uveli C. Dong, H. Li i G. Mason u [29]. Računamo prvu Zhuovu algebru za superalgebru verteks operatora $SF(1)$ i algebru verteks operatora $SF(1)^+$. Koliko znamo, ovo je prvi slučaj računanja više Zhuove algebre za neku logaritamsku C_2-konačnu algebru verteks operatora.

SUMMARY

In this thesis, we study a family of logarithmic C_2-cofinite vertex operatoralgebras $SF(d)^+$, known as symplectic fermion VOA (of rank d). Those VOAs are an even part (or, equivalently, $\mathbb{Z}_2$-orbifold) of vertex operator superalgebras $SF(d)$. Our approach is through studying Zhu's algebras (introduced by Y. Zhu in [69]). T. Abe in [1] determined irreducible representations of $SF(d)^+$ and calculated Zhu's algebras in case $d = 1$.

In the first part of this thesis, we calculate Zhu's algebra of $SF(d)^+$ for remaining natural d, and we use this to prove a conjecture on the dimension of vector space of one-point functions on $SF(d)^+$, posed by Y. Arike and K. Nagatomo in [15]. Also, we show that the dimension of Zhu's algebra of $SF(d)^+$ is equal to the dimension of the C_2-algebra of $SF(d)^+$ for those d (the case $d = 1$ was done by T. Abe in [1]). General problem of determining for which VOAs that equality of dimensions holds was introduced M. Gaberdiel and T. Gannon in [40].

The second part of this thesis is concerned with higher Zhu's algebras, a generalization of the concept of Zhu's algebra, introduced by C. Dong, H. Li and G. Mason in [29]. We calculate the first Zhu's algebra for the vertex operator superalgebra $SF(1)$ and vertex operator algebra $SF(1)^+$. As far as we know, this is the first calculation of a higher Zhu's algebra for some logarithmic C_2-cofinite VOA.

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Verteks superalgebre **9**

2.1 Osnovne definicije teorije verteks superalgebri . . . 10

2.2 Moduli . . . 15

2.3 Zakrenuti moduli . . . 17

2.4 Zhuova teorija . . . 19

2.5 C_2-superalgebra i C_2-konačnost . . . 22

2.6 Teorem o generirajućim poljima . . . 25

2.7 Primjeri verteks superalgebri . . . 27

2.7.1 Heisenbergova verteks algebra . . . 27

2.7.2 Verteks superalgebre pridružene rešetci . . . 28

2.7.3 Triplet verteks algebra . . . 30

2.7.4 Cliffordova verteks superalgebra . . . 32

2.7.5 Univerzalna Virasorova algebra verteks operatora . . . 33

3 Simplektički fermioni **35**

3.1 Konstrukcija . . . 35

3.2 Generatori . . . 39

3.3 Automorfizmi i derivacije . . . 40

3.4 Zakrenuti moduli . . . 42

3.5 Logaritamski moduli . . . 45

3.6 Klasifikacija ireducibilnih reprezentacija . . . 47

3.7 Veze s ostalim verteks superalgebrama . . . 48

3.7.1 Ulaganje u Cliffordovu verteks superalgebru . . . 48

3.7.2 Izomorfizam $SF(1)^+$ i $\mathscr{W}(2)$ . . . 50
3.7.3 Invarijantna podalgebra . . . 52

4 Zhuova algebra za $SF(d)^+$ 53
4.1 Uvod . . . 53
4.2 Konstrukcija epimorfizma π_d . . . 55
4.3 Sustav izvodnica za $\mathscr{P}(SF(d)^+)$ . . . 57
4.3.1 Neke relacije u $\mathscr{P}(SF(d)^+)$ . . . 57
4.3.2 Monomi duljine 2 . . . 60
4.3.3 Monomi duljine veće od 2 . . . 62
4.3.4 Dokaz leme 4.3.7 . . . 64
4.4 Posljedice . . . 68
4.4.1 Dimenzija prostora *one-point* funkcija na $SF(d)^+$ . . . 68
4.4.2 Još neka svojstva . . . 71
4.5 Dodatak: djelovanje ρ_M na generatore . . . 76
4.5.1 $SF(d)^+$ . . . 76
4.5.2 $SF(d)^-$ . . . 76
4.5.3 $SF(d)_\theta^+$ . . . 76
4.5.4 $SF(d)_\theta^-$ . . . 77

5 Više Zhuove algebre 78
5.1 Kvocijenti $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduiranih vektorskih prostora . . . 78
5.2 Više Zhuove (super)algebre i $\widehat{C_n}$-(super)algebre . . . 80
5.3 Univerzalna Virasorova VOA . . . 83
5.4 Prva Zhuova algebra za $SF(1)$ . . . 85
5.5 Prva Zhuova algebra za $SF(1)^+$ . . . 92
5.6 Dodatak: Sustav izvodnica za $\pi^+_{\widehat{C_4}}(\mathrm{Vir}.E)$ . . . 98
5.6.1 Relacije . . . 98
5.6.2 Sustav izvodnica . . . 103
5.7 Dodatak: Sustav izvodnica za $\pi^+_{\widehat{C_4}}(\mathrm{Vir}.\mathbf{1})$ . . . 107
5.7.1 Priprema . . . 107
5.7.2 Relacije . . . 108
5.7.3 Sustav izvodnica . . . 115

Zaključak 117

Bibliografija 118

Životopis 126

1. UVOD

Verteks algebre i algebre verteks operatora su algebarske strukture koje se u fizici pojavljuju u konformnoj teoriji polja i teoriji struna (vidi npr. [18]). S matematičke strane, igraju ulogu u teoriji reprezentacija beskonačnodimenzionalnih Liejevih algebri, geometrijskom Langlandsovom programu i teoriji tenzorskih kategorija (vidi npr. [34]). Prve matematičke formulacije teorije verteks algebri su dane u radovima R. Borcherdsa [19] i I. Frenkela, J. Lepowskog i A. Meurmana [37], i pomoću njih je riješena tzv. *monstrous moonshine* slutnja J.H. Conwaya i S.P. Nortona (vidi [20]).

Za matematičku teoriju verteks algebri, vidjeti monografije V. Kac [46], J. Lepowsky, H. Li [56] i E. Frenkel, D. Ben Zvi [35].

U teoriji reprezentacija algebri verteks operatora, najbolje su proučene racionalne algebre verteks operatora (to su one algebre verteks operatora koje imaju konačno mnogo ireducibilnih modula i kategorija modula je poluprosta). U ovoj disertaciji ćemo promatrati logaritamske algebre verteks operatora, to jest, one algebre verteks operatora koje imaju barem jedan nerastavljivi, ali reducibilni modul. Ime dolazi od logaritamskih singularnosti koje se pojavljuju u korelacijskim funkcijama takvih algebri. Grana fizike u kojoj se pojavljuju se zove logaritamska konformna teorija polja (za neke preglede, vidi [11], [22] (matematička perspektiva) i [24] (fizikalna perspektiva)).

Još jedna važna kategorija verteks algebri su C_2-konačne verteks algebre, to jest, verteks algebre V za koje vrijedi

$$\dim(V/C_2(V)) < \infty, C_2(V) = \text{span}\{u_{-2}v : u, v \in V\}.$$

C_2-konačne verteks algebre imaju konačno mnogo ireducibilnih modula.

Dvije glavne familije C_2-konačnih logaritamskih algebri verteks operatora su triplet algebre $\mathscr{W}(p), p \geq 2$ i verteks algebre simplektičkih fermiona $SF(d)^+, d \geq 1$. Te dvije familije su povezane izomorfizmom $\mathscr{W}(2) \simeq SF(1)^+$. U fizikalnoj literaturi se triplet verteks algebra pojavila u radovima H.G. Kauscha u [48] i [50], a verteks algebra simplektičkih fermiona u radovima H.G. Kauscha [49] i [50], te H.G. Kauscha i M. Gaberdiela [41] i [42].

U matematičkoj literaturi, rad na triplet verteks algebri su započeli D. Adamović i A. Milas u radovima [7] i [10], u kojima su (između ostaloga) pokazali C_2-konačnost od $\mathscr{W}(p), p \geq 2$, te klasificirali ireducibilne module i konstruirali nerastavljive reducibilne module za $\mathscr{W}(p), p \geq 2$. Vrijedi spomenuti radove D. Adamovića, A. Milasa i X. Lina vezane uz podalgebre triplet verteks algebre dobivene orbifold konstrukcijom [4], [5], [6] i [12].

Rad na verteks algebri simplektičkih fermiona u matematičkoj literaturi je započeo T. Abe u [1], koji je (između ostaloga) pokazao C_2-konačnost od $SF(d)^+, d \geq 1$, klasificirao ireducibilne module i konstruirao nerastavljive reducibilne module za $SF(d)^+, d \geq 1$. Vrijedi spomenuti rad T. Creutziga i A. Linshawa [23] o podalgebrama verteks algebre simplektičkih fermiona dobivenima orbifold konstrukcijom. Napomenimo da je M. Miyamoto u [63] nedavno dokazao da je svaki ciklički orbifold C_2-konačne algebre verteks operatora ponovno C_2-konačan.

Glavni alat koji je korišten u oba slučaja je bila asocijativna algebra $A(V)$ pridružena algebri verteks operatora V koju zovemo Zhuova algebra prema Y. Zhuu koji ju je uveo u svom radu [69] o modularnosti racionalnih i C_2-konačnih algebri verteks operatora. Vrijedi sljedeće: ako je M slabi modul od V, tada je

$$\Omega(M) = \{m \in M : v_k m = 0, \text{ za sve homogene } v \in V \text{ t.d. } \deg v_k < 0\}$$

reprezentacija asocijativne algebre $A(V)$. Tada Ω možemo promatrati kao funktor iz kategorije slabih modula od V u kategoriju reprezentacija od $A(V)$. Y. Zhu je u [69] pokazao da je u slučaju kada je V C_2-konačna i racionalna Ω ekvivalencija kategorija. I u slučajevima kada V nije takva, Ω još uvijek može dati vrijedne informacije o reprezentacijama algebre verteks operatora V.

Y. Zhu je u [69] pokazao da $\mathscr{P}(V) := V/C_2(V)$ ima prirodnu strukturu Poissonove algebre, te da vrijedi nejednakost

$$\dim A(V) \leq \dim \mathscr{P}(V). \tag{1.0.1}$$

Općeniti problem određivanja algebri verteks operatora V za koje vrijedi jednakost u (1.0.1) su u [40] promatrali M. Gaberdiel i T. Gannon, te dali neke primjere i neke kontraprimjere takvih algebri. To pitanje je razmatrano za neke racionalne algebre verteks operatora u [33] i [32]. U [7] i [10] su D. Adamović i A. Milas u potpunosti odredili Zhuovu algebru za $\mathscr{W}(p), p \geq 2$ i pokazali da jednakost (1.0.1) vrijedi u svakom slučaju. Taj problem je promatran i za neke podalgebre od $\mathscr{W}(p)$ u [4] i [5]. Napomenimo da nije lako naći primjere logaritamskih VOA gdje je $\dim A(V) < \dim \mathscr{P}(V)$. U [10][Remark 4] je napisana slutnja da stroga nejednakost vrijedi slučaju $c = 0$ tripleta (vidi [8]).

T. Abe je u [1] u potpunosti odredio Zhuovu algebru samo za $SF(1)^+$, te pokazao da u tom slučaju vrijedi jednakost u (1.0.1).

C. Dong, H. Li i G. Mason su u [29] uveli više Zhuove algebre $A_n(V), n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ koje generaliziraju Zhuovu konstrukciju (naime, vrijedi $A(V) = A_0(V)$). Vrijedi sljedeće: ako je M slabi modul od V, tada je

$$\Omega_n(M) = \{m \in M : v_k m = 0, \text{ za sve homogene } v \in V \text{ t.d. } \deg v_k < -n\}$$

reprezentacija asocijativne algebre $A_n(V)$. Svoju primjenu su našle u raznim teoretskim radovima (npr. u M. Miyamotovom dokazu modularnosti C_2-konačnih algebri verteks operatora u [62]), no nema puno primjera konkretnih računa. U [16] i [17], K. Barron, N. van der Werf i J. Yang su izračunali prve Zhuove algebre za Heisenbergovu algebru verteks operatora i univerzalnu Virasorovu algebru verteks operatora. Neke daljnje generalizacije viših Zhuovih algebri je dao J. van Ekeren u [30].

Napomenimo da pristup putem (viših) Zhuovih algebri nije jedini pristup logaritamskoj konformnoj teoriji polja pomoću asocijativnih algebri. Postoji tzv. Kazhdan-Lusztigova slutnja o vezi između reprezentacija algebri verteks operatora i reprezentacija kvantnih grupa (vidi [51] i [52]). Vrijedi spomenuti rad B.L. Feigina, A.M. Gainutdinova, A.M. Semikhatova i I.Yu. Tipunina [44], T. Creutziga, A.M. Gainutdinova, I. Runkela [21], K. Nagatoma i A. Tsuchiye [64] o kvantnim grupama povezanim s triplet verteks algebrom, kao i radove I. Runkela [66], A. Davydova i I. Runkela [25], A.M. Gainutdinova i I. Runkela [43] o kvantnim grupama povezanim s verteks algebrom simplektičkih fermiona. Posebno, u [43] autori promatraju vezu između kategorije modula algebre verteks operatora $SF(1)^+$ i kategorije reprezentacija restringirane kvantne grupe $\overline{U}_i\mathfrak{sl}(2)$. Orbifoldi simplektičkih fermiona su nedavno proučavani u radu D. Adamovića i A. Milasa [13] i radu A. Milasa, M. Penna i J. Wauchopea [60].

Glavni rezultati ove disertacije su upravo izračuni (viših) Zhuovih algebri za (super)algebre simplektičkih fermiona. U četvrtom poglavlju računamo nultu Zhuovu algebru $A(SF(d)^+)$ za $d > 1$ (slučaj $d = 1$ je riješio T. Abe u [1]), te promatramo posljedice tog rezultata (između ostalog i dokaz slutnje Y. Arikea i K. Nagatoma iz [15] o dimenziji vektorskog prostora takozvanih *one-point* funkcija na algebri verteks operatora $SF(d)^+$). U petom poglavlju računamo prvu Zhuovu algebru za (super)algebre verteks operatora $SF(1)$ i $SF(1)^+$, što je, koliko znamo, prvi izračun neke više Zhuove algebre za logaritamsku algebru verteks operatora.

Slijedi kratak sadržaj rada s detaljnijim prikazom najvažnijih rezultata.

Poglavlje 2: Verteks superalgebre

U ovom poglavlju navodimo strukturne rezultate potrebne za disertaciju. Ponavljamo definicije verteks superalgebre i superalgebre verteks operatora, te standardne algebarske koncepte vezane uz njih: homomorfizmi, podalgebre, ideali, generatori itd. U točkama 2.2 i 2.3 dajemo definicije modula, odnosno zakrenutih modula, za verteks superalgebre i superalgebre verteks operatora. U točki 2.4 dajemo kratki podsjetnik na Zhuovu teoriju, a u točki 2.5 dajemo definiciju C_2-superalgebre i promatramo njenu vezu sa Zhuovom superalgebrom. U točki 2.6 iskazujemo Teorem o generirajućim poljima, koji nam daje jedan način konstrukcije verteks superalgebri, pa zatim u točki 2.7 dajemo definicije i konstrukcije svih verteks superalgebri koje ćemo susretati u ovoj disertaciji (osim superalgebre simplektičkih fermiona kojom se bavimo u idućem poglavlju).

Poglavlje 3: Simplektički fermioni

U ovom poglavlju skupljamo na jedno mjesto sve činjenice o simplektičkim fermionima koje ćemo trebati u ovoj disertaciji.

U točki 3.1 ponavljamo konstrukciju superalgebre simplektičkih fermiona $SF(d)$ iz simplektičkog prostora $\mathfrak{h}_{2d}, d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ dimenzije $2d$ kakva je dana u [1]. Algebra simplektičkih fermiona $SF(d)^+$ je tada paran dio od $SF(d)$, a neparan dio $SF(d)^-$ je modul za $SF(d)^+$.

U točki 3.2 ponavljamo Abeove rezultate o jakim generatorima od $SF(d)^+$, a u točki 3.3 rezultate o automorfizmima od $SF(d)$, odnosno $SF(d)^+$.

U točki 3.4 ponavljamo konstrukciju zakrenutog modula $SF(d)_\theta$ od $SF(d)$ iz [1]. Taj zakrenuti modul nam daje (nezakrenute) $SF(d)^+$-module $SF(d)_\theta^+$ i $SF(d)_\theta^-$. U točki 3.5 ponavljamo konstrukciju logaritamskog $SF(d)$-modula $\widehat{SF}(d)$ iz kojeg vidimo da su $SF(d)$ i $SF(d)^+$ uistinu logaritamske algebre verteks operatora.

U točki 3.6 navodimo Abeove rezultate o Zhuovoj algebri od $SF(1)^+$ i klasifikaciji ireducibilnih reprezentacija od $SF(d)^+$. Naime, T. Abe je pokazao da za svaki $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ $SF(d)^+$ ima točno 4 neekvivalentna $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduirana modula i da su to upravo $SF(d)^{\pm}, SF(d)_\theta^{\pm}$.

U točki 3.7 navodimo veze simplektičkih fermiona $SF(d)$ s ostalim verteks (super)algebrama: ulaganje u Cliffordovu verteks superalgebru $F(d)$, ulaganje u verteks algebru $V_{\mathbb{Z}^d}$ pridruženu rešetci $\mathbb{Z}^d$, te izomorfizam $SF(1)^+ \simeq \mathscr{W}(2)$. Niti jedan od ovih rezultata nije originalan, već su dobro poznati u literaturi (pa tako i u radovima [1] i [7]), no navodimo dokaze jer nam trebaju u idućim poglavljima.

Poglavlje 4: Zhuova algebra za $SF(d)^+$

Ovo poglavlje je zajednički rad s D. Adamovićem i objavljeno je u časopisu Journal of Algebra [14]. Struktura poglavlja prati strukturu članka, i ovdje navodimo važnije izmjene u odnosu na članak:

- Iskaz teorema 4.1.1 je malo proširen u odnosu na iskaz iz članka da se naglasi da izomorfizam dolazi od slika reprezentacija od $A(SF(d)^+)$ (u članku se to vidi iz dokaza teorema, ali nije eksplicitno naglašeno u iskazu). Dokaz je isti.
- Dokaz leme 4.3.7 je napisan nešto detaljnije nego u članku (ideja dokaza je ista).

Glavni cilj ovog poglavlja je izračunati Zhuove algebre $A(SF(d)^+)$ za sve $d \geq 1$ (slučaj $d = 1$ je riješio T. Abe u [1]). Za $SF(d)^+$-modul M imamo reprezentaciju

$$\rho_M : A(SF(d)^+) \to \mathrm{End}(\Omega(M)).$$

Glavni rezultat ovog poglavlja je sljedeći teorem:

Teorem 4.1.1. Neka je $d \in \mathbb{Z}_{>0}$. Tada je

$$A(SF(d)^+) \simeq \bigoplus_M \mathrm{im}(\rho_M), \text{ gdje je } M = \widehat{SF}(d)^+, SF(d)^-, SF(d)_\theta^+, SF(d)_\theta^-.$$

Imamo izomorfizme asocijativnih algebri:

$$\mathrm{im}(\rho_{\widehat{SF}(d)^+}) \simeq \Lambda(\mathfrak{h}_{2d})^+, \mathrm{im}(\rho_{SF(d)_\theta^+}) \simeq \mathbb{C}, \mathrm{im}(\rho_{SF(d)^-}) \simeq \mathrm{im}(\rho_{SF(d)_\theta^-}) \simeq M_{2d}(\mathbb{C}).$$

Također, imamo jednakost dimenzija

$$\dim \mathscr{P}(SF(d)^+) = \dim A(SF(d)^+) = 2^{2d-1} + 8d^2 + 1.$$

Ovdje $\Lambda(\mathfrak{h}_{2d})^+$ označava parni dio vanjske algebre nad vektorskim prostorom $\mathfrak{h}_{2d}$ dimenzije $2d$).

U točki 4.2 promatranjem modula $M = \widehat{SF}(d)^+, SF(d)^-, SF(d)_\theta^+, SF(d)_\theta^-$ konstruiramo epimorfizam s $A(SF(d)^+)$ na $\bigoplus_M \mathrm{im}(\rho_M)$. Posebno, tada imamo $\dim A(SF(d)^+) \geq 2^{2d-1} + 8d^2 + 1$.

U točki 4.3 eksplicitno konstruiramo sustav izvodnica za $\mathscr{P}(SF(d)^+)$ kardinalnosti $2^{2d-1} + 8d^2 + 1$, te tada iz

$$2^{2d-1} + 8d^2 + 1 \leq \dim A(SF(d)^+) \leq \dim \mathscr{P}(SF(d)^+) \leq 2^{2d-1} + 8d^2 + 1$$

dobivamo teorem.

Točka 4.4.1 je posvećena dokazu slutnje Y. Arikea i K. Nagatoma iz [15]. Autori su u [15] promatrali vektorski prostor *one-point* funkcija na $SF(d)^+$ (oznaka: $\mathscr{C}_1(SF(d)^+)$), te su pokazali da vrijedi

$$\dim \mathscr{C}_1(SF(d)^+) \geq 2^{2d-1} + 3. \tag{1.0.2}$$

Pokazali su i sljedeći teorem:

Teorem 4.4.7 ([15], Theorem 3.3.6)**.** Neka je V C_2-konačna algebra verteks operatora. Pretpostavimo da je svaki prosti modul za V beskonačne dimenzije. Tada vrijedi

$$\dim \mathscr{C}_1(V) \leq \dim S^V.$$

Napomena: S^V je oznaka za vektorski prostor simetričnih funkcionala na $A(V)$. Pomoću tog teorema i Abeovog rezultata o $A(SF(1)^+$ su mogli zaključiti da u slučaju $d = 1$ vrijedi jednakost u (1.0.2). Sada, zbog teorema 4.1.1 možemo zaključiti:

Teorem 4.4.8. Za sve $d \geq 1$, vrijedi

$$\dim \mathscr{C}_1(SF(d)^+) = 2^{2d-1} + 3.$$

U točki 4.4.2 promatramo još neke posljedice teorema 4.1.1:

- Centar od $A(SF(d)^+)$ je izomorfan $\Lambda(\mathfrak{h}_{2d})^+ \oplus \mathbb{C}^{\oplus 3}$ (vidi korolar 4.4.9).
- Minimalni polinom od $[\omega] \in A(SF(d)^+)$ je

  $$m_d(x) = x^{d+1}(x-1)(x+d/8)(x+d/8-1/2)$$

  (vidi korolar 4.4.9).
- Stupanj nilpotentnosti od $\overline{\omega} \in \mathscr{P}(SF(d)^+)$ je

  $$s_d = \begin{cases} 5, & d \leq 4 \\ d+1, & d \geq 5. \end{cases}$$

  (vidi propoziciju 4.4.10).
- Invarijantna podalgebra $A(SF(d)^+)^{Sp(2d)}$ je generirana sa $[\omega]$. Ovo je iznenađujuće jer je po radu S. Kanadea i A. Linshawa [47] invarijantna podalgebra verteks operatora $SF(d)^{Sp(2d)}$ izomorfna $\mathscr{W}$-algebri $\mathscr{W}^{-d-1/2}(\mathfrak{sp}(2d), f_{prin})$ koja je veća od podalgebre verteks operatora generirane s ω.

Poglavlje 5: Više Zhuove algebre

Glavni cilj ovog poglavlja je izračunati prve Zhuove algebre za $SF := SF(1)$ i $SF^+ := SF(1)^+$, koristeći slične metode kao za izračun $A(SF(d)^+)$. Napomenimo ovdje da je po [1] superalgebra verteks operatora SF je jako generirana neparnim vektorima e, f a, algebra verteks operatora $SF(1)^+$ jako generirana vektorima

$$\omega = e_{-1}f,\ E = e_{-2}e,\ H = \frac{1}{2}(e_{-2}f + f_{-2}e),\ F = f_{-2}f.$$

U točki 5.2 za superalgebru verteks operatora V i $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definiramo

$$C_n(V) = \operatorname{span}\{u_{-n}v : u, v \in V\}, \widehat{C_n}(V) = C_n(V) + L(-1)V$$

i pokazujemo da vrijedi

$$\dim A_n(V) \leq \dim \left(V/\widehat{C_{2n+2}}(V)\right) \tag{1.0.3}$$

Ovo je generalizacija nejednakosti (1.0.1) (koja se dobiva u slučaju $n = 0$). Kao i u tom slučaju, dobivamo da $V/\widehat{C_{2n+2}}(V)$ ima strukturu (superkomutativne i asocijativne) superalgebre koju ćemo zvati $\widehat{C_{2n+2}}(V)$-superalgebra.

U točki 5.3 dokazujemo jednu pomoćnu lemu o $\widehat{C_4}$-algebri od univerzalne Virasorove algebre verteks operatora.

U točki 5.4 računamo prvu Zhuovu superalgebru $A_1(SF)$. Promatramo homomorfizam superalgebri

$$\rho_1 : A_1(SF(1)) \to \operatorname{End}(\Omega_1(\widehat{SF})),$$

te podalgebru $\mathscr{A} \subseteq A_1(SF)$ generiranu sa slikama vektora e, f, ω, E, F, H. Glavni rezultat ove točke je:

Teorem 5.4.8.

1. Vrijedi $A_1(SF) = \mathscr{A}$, to jest, $A_1(SF)$ je kao asocijativna superalgebra generirana sa slikama vektora e, f, ω, E, F, H.

2. Imamo izomorfizam

$$A_1(SF) \simeq \operatorname{im}\rho_1 \simeq \Lambda(\mathfrak{h}) \otimes (\mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C}))\,.$$

3. Vrijedi

$$\dim A_1(SF) = \dim_{\mathbb{C}} SF/\widehat{C_4}(SF) = 20.$$

Napomenimo da ovaj rezultat omogućava rekonstrukciju nerastavljivih modula od $SF(1)$ korištenjem rezultata iz [29].

Ideja dokaza je slična kao za teorem 4.1.1. Prvo pokažemo da je $\rho_1(\mathscr{A})$ izomorfan superalgebri $\Lambda(\mathfrak{h}) \otimes (\mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C}))$, te tako dobijemo niz nejednakosti:

$$\dim A_1(SF) \geq \dim \mathscr{A} \geq \dim \rho_1(\mathscr{A}) = 20.$$

U drugom koraku nađemo sustav izvodnica za $\widehat{C_4}$-algebru od SF kardinalnosti 20 i pomoću nejednakosti (1.0.3) ograničimo $\dim A_1(SF)$ odozgo. U tome nam uvelike pomaže rezultat iz [7] u kojem su autori odredili strukturu triplet algebre $\mathscr{W}(2)$ kao $\mathfrak{sl}(2) \times$ Vir-modula (vidi teorem 5.4.4).

U točki 5.5 računamo prvu Zhuovu algebru $A_1(SF^+)$ na sličan način. Promatramo podalgebru $\mathscr{B} \subseteq A_1(SF^+)$ generiranu slikama vektora ω, E, F, H. Promatrajući reprezentacije od SF^+ dobijemo sedam različitih homomorfizama s $A_1(SF)$ (nećemo ih ovdje definirati). Glavni rezultat je:

Teorem 5.5.7.

1. Vrijedi $A_1(SF^+) = \mathscr{B}$, to jest, $A_1(SF^+)$ je kao asocijativna algebra generirana sa slikama vektora ω, E, F, H.

2. Imamo izomorfizam
$$A_1(SF^+) \simeq \bigoplus_M \mathrm{im}(\rho_M),$$
gdje je $M = \widehat{SF}^+_{(0)}, \widehat{SF}^-_{(1)}, \widehat{SF}^-_{(2)}, (SF_\theta)_k,$ za $k = -\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{11}{8}$.

3. Imamo izomorfizam
$$A_1(SF^+) \simeq \mathbb{C}^{\oplus 2} \oplus M_2(\mathbb{C})^{\oplus 3} \oplus \Lambda(\mathfrak{h}_2)^+ \oplus \left(\Lambda(\mathfrak{h}_2)^+ \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C})\right)$$

4. Vrijedi
$$\dim A_1(SF^+) = \dim SF/\widehat{C_4}(SF^+) = 24.$$

Napomenimo, da je prva točka zanimljiva u kontekstu veze simplektičkih fermiona s restringiranom kvantnom grupom $\overline{U}_i\mathfrak{sl}(2)$. Naime, ta kvantna grupa također ima 4 generatora (vidi [43] za više detalja).

2. VERTEKS SUPERALGEBRE

U ovom poglavlju ćemo dati teorijsku podlogu nužnu za razumijevanje ostatka disertacije. Detaljan pregled aksiomatske teorije verteks algebri je dan u monografijama [56], [37], [46] i [35].

Uvedimo neke osnovne definicije i dogovore. Svi vektorski prostori u ovom radu će biti nad skupom kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. **Vektorski superprostor** je $\mathbb{Z}_2$-graduirani vektorski prostor $V = V^{\bar{0}} \oplus V^{\bar{1}}$. Za vektore iz $V^{\bar{i}}$ za $i = 0,1$ ćemo reći da su $\mathbb{Z}_2$ - **homogeni vektori**. Za vektore iz $V^{\bar{0}}$ ćemo reći da su **parni vektori**, a za vektore iz $V^{\bar{1}}$ da su **neparni**. Pisat ćemo $p(v) = \bar{i}, v \in V^{\bar{i}}$. Za potprostor L od V ćemo reći da je $\mathbb{Z}_2$-homogen ako vrijedi

$$L = (L \cap V^{\bar{0}}) \oplus (L \cap V^{\bar{1}}).$$

Tada L ima $\mathbb{Z}_2$-gradaciju s $L^{\bar{i}} = L \cap V^{\bar{i}}$ za $i = 0,1$. Također, za $\mathbb{Z}_2$-homogen potprostor L vrijedi

$$V/L = (V^{\bar{0}}/L) \oplus (V^{\bar{1}}/L),$$

pa imamo $\mathbb{Z}_2$-gradaciju $(V/L)^{\bar{i}} = V^{\bar{i}}/L$ za $i = 0,1$.

Neka su sada V, W vektorski superprostori. Za linearno preslikavanje $\varphi : V \to W$ ćemo reći da **čuva parnost** ako vrijedi

$$\varphi(V^{\bar{i}}) \subseteq W^{\bar{i}}, \bar{i} \in \mathbb{Z}_2,$$

odnosno da **mijenja parnost** ako vrijedi

$$\varphi(V^{\bar{i}}) \subseteq W^{\bar{1}+\bar{i}}, \bar{i} \in \mathbb{Z}_2.$$

Može se pokazati da se svako linearno preslikavanje $V \to W$ može napisati kao zbroj linearnog preslikavanja koje čuva parnost i linearnog preslikavanja koje mijenja parnost. Tada možemo uvesti $\mathbb{Z}_2$-gradaciju na $\mathrm{Hom}(V,W)$ na sljedeći način:

$$\mathrm{Hom}(V,W)^{\bar{0}} = \{\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W) : \varphi \text{ čuva parnost}\}$$
$$\mathrm{Hom}(V,W)^{\bar{1}} = \{\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W) : \varphi \text{ mijenja parnost}\}.$$

Ovime dobivamo i $\mathbb{Z}_2$-gradaciju na $\operatorname{End} V = \operatorname{Hom}(V,V)$. Za $\mathbb{Z}_2$-homogene $A,B \in \operatorname{End} V$ ćemo pisati

$$[A,B] = AB - (-1)^{p(A)p(B)}BA. \tag{2.0.1}$$

Tada $[\cdot,\cdot]$ zovemo superkomutator. Formalna δ funkcija je formalni red definiran kao

$$\delta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n \in \mathbb{C}[[z,z^{-1}]].$$

2.1. OSNOVNE DEFINICIJE TEORIJE VERTEKS SUPERALGEBRI

U ovoj cjelini ćemo definirati strukture verteks superalgebre i superalgebre verteks operatora, te definirati standardne algebarske pojmove za te strukture. U tome ćemo uglavnom pratiti izlaganje iz [56] i [58].

Definicija 2.1.1. Verteks superalgebra je uređena trojka $(V,Y,\mathbf{1})$, gdje je V vektorski superprostor, $\mathbf{1} \in V^{\bar{0}}$ istaknuti vektor kojeg zovemo **vakuum vektor**, a Y linearni operator

$$\begin{aligned} Y(\cdot,z) : V &\to (\operatorname{End} V)[[z,z^{-1}]] \\ v &\mapsto Y(v,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1} \end{aligned}$$

koji zadovoljava sljedeće uvjete:

1. Operator Y čuva parnost, to jest, za $v \in V^{\bar{i}}$ vrijedi $Y(v,z) \in (\operatorname{End} V)^{\bar{i}}[[z,z^{-1}]]$.
2. Za $u,v \in V$ red $Y(u,z)v = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n v z^{-n-1}$ ima konačno mnogo negativnih potencija.
3. (svojstvo vakuuma) Vrijedi $Y(\mathbf{1},z) = \mathrm{id}_V$.
4. (svojstvo kreacije) Za $v \in V$ vrijedi $Y(v,z)\mathbf{1} \in V[[z]], \lim_{z\to 0} Y(v,z)\mathbf{1} = v$.
5. (Jacobijev identitet) Za $\mathbb{Z}_2$-homogene $u,v \in V$ vrijedi:

$$\begin{aligned} &z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)Y(u,z_1)Y(v,z_2) - (-1)^{p(u)p(v)}z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2-z_1}{-z_0}\right)Y(v,z_2)Y(u,z_1) \\ &= z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right)Y(Y(u,z_0)v,z_2). \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Ako je $V = V^{\bar{0}}$, onda kažemo da je $(V,Y,\mathbf{1})$ **verteks algebra** (ponekad ćemu koristiti skraćenicu VOA koja dolazi iz engleskog jezika).

Važno je primijetiti da svojstvo kreacije ima za posljedicu injektivnost operatora Y. Uvjeti (1)-(5) se mogu ekvivalentno napisati i na nešto drugačiji način, preko operatora v_n za $v \in V$:

1. Za $\mathbb{Z}_2$-homogene $u, v \in V$ vrijedi $p(u_n v) = p(u) + p(v)$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$.

2. Za sve $u, v \in V$ imamo $u_n v = 0$ za $n \in \mathbb{Z}$ dovoljno velik.

3. Za $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi $\mathbf{1}_n = \delta_{n,-1}\mathrm{id}_V$.

4. Za sve $v \in V$ vrijedi $v_{-1}\mathbf{1} = 0, v_n\mathbf{1} = 0, n \geq 0$.

5. Za $\mathbb{Z}_2$-homogene $u, v \in V$ i $\ell, m, n \in \mathbb{Z}$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\sum_{i\geq 0}(-1)^i\binom{\ell}{i}&\left(u_{m+\ell-i}v_{n+i} - (-1)^{\ell+p(u)p(v)}v_{n+\ell-i}u_{m+i}\right)\\ &= \sum_{i\geq 0}\binom{m}{i}(u_{\ell+i}v)_{m+n-i}. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Identitet (2.1.2) se zove Borcherdsov identitet po R. Borcherdsu, koji je uveo pojam verteks algebre u [19]. Dobije se iz Jacobijevog identiteta usporedbom koeficijenata pored monoma $z_0^{-\ell-1}z_1^{-m-1}z_2^{-n-1}$. Stavljanjem $\ell = 0$, odnosno $m = 0$, u Borcherdsovom identitetu dobivamo sljedeće relacije za $\mathbb{Z}_2$-homogene $u, v \in V$ i $\ell, m, n \in \mathbb{Z}$:

$$[u_m, v_n] = \sum_{i\geq 0}\binom{m}{i}(u_i v)_{m+n-i} \tag{2.1.3}$$

$$(u_\ell v)_n = \sum_{i\geq 0}(-1)^i\binom{\ell}{i}\left(u_{\ell-i}v_{n+i} - (-1)^{\ell+p(u)p(v)}v_{n+\ell-i}u_i\right). \tag{2.1.4}$$

Formulu (2.1.3) zovemo **superkomutatorska formula**, dok formulu (2.1.4) zovemo **formula za asocijator**.

Propozicija 2.1.2 ([58], Proposition 2.2.4.)**.** Uz uvjete (1)-(4) iz definicije verteks superalgebre, Jacobijev identitet je ekvivalentan sa sljedeća dva uvjeta:

1. (svojstvo derivacije) Postoji operator $D \in \operatorname{End} V$ takav da vrijedi

$$[D, Y(v,z)] = Y(Dv, z) = \partial_z Y(v,z). \tag{2.1.5}$$

2. (lokalnost) Za sve $\mathbb{Z}_2$-homogene $u, v \in V$ postoji prirodan N takav da vrijedi

$$(z_1 - z_2)^N Y(u,z_1)Y(v,z_2) = (-1)^{p(u)p(v)}(z_1 - z_2)^N Y(v,z_2)Y(u,z_1). \tag{2.1.6}$$

Operator D zovemo **operator derivacije** i lako se vidi da iz (2.1.5) i svojstva kreacije slijedi da moramo imati $Dv = v_{-2}\mathbf{1}, v \in V$. Dakle, u definiciji verteks superalgebre se Jacobijev identitet može zamijeniti sa dva uvjeta iz prethodne propozicije. Takav pristup možemo vidjeti u monografijama [46] i [35].

Propozicija 2.1.3 ([56], Proposition 3.1.19)**.** Neka je V verteks superalgebra, i neka su $u, v \in V$ $\mathbb{Z}_2$-homogeni vektori. Tada vrijedi:

$$Y(u,z)v = (-1)^{p(u)p(v)} e^{zD} Y(v,-z)u. \tag{2.1.7}$$

Relaciju (2.1.7) zovemo **kosa simetrija**.

Definicija 2.1.4. Neka je V verteks superalgebra. Za $\omega \in V^{\bar{0}}$ kažemo da je **konformni vektor** ako, uz oznake $Y(\omega,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \omega_n z^{-n-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n) z^{-n-2}$, zadovoljava

$$[L(m), L(n)] = (m-n)L(m+n) + \delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}c, \tag{2.1.8}$$

gdje je $c \in \mathbb{C}$.

Relacije (2.1.8) su komutacijske relacije Virasorove algebre, a skalar c zovemo **centralni naboj**. Dakle, konformni vektor $\omega \in V^{\bar{0}}$ daje V strukturu modula za Virasorovu algebru. Sljedeća propozicija nam daje drugi način za provjeriti je li neki $\omega \in V^{\bar{0}}$ konformni vektor.

Propozicija 2.1.5 ([56])**.** Neka je V verteks superalgebra i $\omega \in V^{\bar{0}}$. Ako vrijedi

$$\omega_0\omega = 2\omega,\ \omega_1\omega = D\omega,\ \omega_2\omega = 0,\ \omega_3\omega = \frac{c}{2}\mathbf{1}, c \in \mathbb{C}$$

i $\omega_n\omega = 0$ za $n \geq 4$, tada je ω konformni vektor centralnog naboja c.

Definicija 2.1.6. **Superalgebra verteks operatora** je uređena četvorka $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$, gdje je $(V, Y, \mathbf{1})$ verteks superalgebra, a $\omega \in V^{\bar{0}}$ konformni vektor koji zadovoljava sljedeće uvjete:

1. Mora vrijediti $L(-1) = D$.
2. Operator $L(0)$ djeluje poluprosto na V s cijelim svojstvenim vrijednostima, to jest, imamo $\mathbb{Z}$-gradaciju
$$V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n,\ L(0)|_{V_n} = n\,\mathrm{id}_V. \tag{2.1.9}$$
3. Za svaki $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi $\dim V_n < \infty$.
4. Postoji $n_0 \in \mathbb{Z}$ takav da za sve $n \in \mathbb{Z}, n < n_0$ vrijedi $V_n = 0$.

Ako je $V = V^{\bar{0}}$, onda kažemo da je $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ **algebra verteks operatora**.

Ako za $v \in V$ vrijedi $L(0)v = hv$, reći ćemo da je v vektor **konformne težine** h i pisati $|v| = h$. Tada (pomoću superkomutatorske formule) vrijedi

$$[L(0), v_n] = (h-n-1)v_n, \tag{2.1.10}$$

to jest, ako gledamo gradaciju (2.1.9), operator v_n je operator stupnja $h-n-1$. Pišemo $\deg v_n = h-n-1 = |v|-n-1$.

Definicija 2.1.7. Neka su $(V_1,Y_1,\mathbf{1}_1)$ i $(V_2,Y_2,\mathbf{1}_2)$ verteks superalgebre. **Homomorfizam verteks superalgebri** je linearno preslikavanje $\varphi : V_1 \to V_2$ koje čuva parnost i zadovoljava

$$\varphi(\mathbf{1}_1) = \mathbf{1}_2$$
$$\varphi(u_n v) = \varphi(u)_n \varphi(v), \forall u,v \in V_1, n \in \mathbb{Z}.$$

Homomorfizam superalgebri verteks operatora $(V_1,Y_1,\mathbf{1}_1,\omega_1)$ i $(V_2,Y_2,\mathbf{1}_2,\omega_2)$ je homomorfizam verteks superalgebri $\varphi : V_1 \to V_2$ koji zadovoljava dodatni uvjet $\varphi(\omega_1) = \omega_2$.

Svaka verteks superalgebra V ima automorfizam $\theta : V \to V$ definiran s:

$$\theta(v) = (-1)^{p(v)}v, \text{ za } \mathbb{Z}_2-\text{homogene } v \in V. \tag{2.1.11}$$

Ako je V superalgebra verteks operatora, tada je θ automorfizam superalgebre verteks operatora jer vrijedi $\theta(\omega) = \omega$.

Definicija 2.1.8. **Podalgebra verteks superalgebre** $(V,Y,\mathbf{1})$ je $\mathbb{Z}_2$-homogeni vektorski potprostor U od V koji sadrži vektor $\mathbf{1}$ takav da je $(U,Y,\mathbf{1})$ verteks superalgebra.
Podalgebra superalgebre verteks operatora $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ je $\mathbb{Z}_2$-homogeni vektorski potprostor U od V koji sadrži vektore $\mathbf{1}$ i ω takav da je $(U,Y,\mathbf{1},\omega)$ superalgebra verteks operatora.

Uvjet da je $(U,Y,\mathbf{1})$ verteks superalgebra je ekvivalentan uvjetu da za $u,v \in U$ vrijedi $u_n v \in U$, za sve $n \in \mathbb{Z}$.

Definicija 2.1.9. Neka je $(V,Y,\mathbf{1})$ verteks superalgebra i neka je S podskup od V. **Verteks superalgebra generirana skupom** S (u oznaci $\langle S \rangle$) je najmanja podalgebra od $(V,Y,\mathbf{1})$ koja sadrži S.
Neka je $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ superalgebra verteks operatora i neka je S podskup od V. **Superalgebra verteks operatora generirana skupom** S je najmanja podalgebra od $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ koja sadrži S.

Lako se vidi da je superalgebra verteks operatora generirana skupom S jednaka $\langle S \cup \{\omega\}\rangle$.

Propozicija 2.1.10 ([56], Proposition 3.9.3)**.** Neka je $(V, Y, \mathbf{1})$ verteks superalgebra i neka je S podskup od V. Tada je

$$\langle S\rangle = \mathrm{span}\{u^1_{n_1} \dots u^r_{n_r}\mathbf{1} : r \in \mathbb{N}, u^i \in S, n_i \in \mathbb{Z}\}.$$

U slučaju kada je $\langle S\rangle = V$, reći ćemo da je V **generirana skupom** S, odnosno, da je S **skup generatora** za V.

Definicija 2.1.11. Neka je S skup generatora verteks superalgebre $(V, Y, \mathbf{1})$. Ako vrijedi

$$V = \mathrm{span}\{u^1_{n_1} \dots u^r_{n_r}\mathbf{1} : r \in \mathbb{N}, u^i \in S, n_i \in \mathbb{Z}_{<0}\}$$

kažemo da je V **jako generirana skupom** S.

Sljedeća propozicija će nam pomoći u konstrukciji homomorfizama između verteks superalgebri.

Propozicija 2.1.12 ([56], Proposition 5.7.9)**.** Neka su V_1 i V_2 verteks superalgebre, i neka je $S \subseteq V_1$ skup generatora za V_1. Neka je $\varphi : V_1 \to V_2$ linearno preslikavanje koje čuva parnost takvo da vrijedi $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ i

$$\varphi(a_n v) = \varphi(a)_n \varphi(v),\ \forall a \in S, v \in V, n \in \mathbb{Z}.$$

Tada je φ homomorfizam verteks superalgebri. Dodatno, ako su V_1 i V_2 superalgebre verteks operatora, a φ zadovoljava dodatni uvjet $\varphi(\omega) = \omega$, tada je φ homomorfizam superalgebri verteks operatora.

Definicija 2.1.13. Neka je V verteks superalgebra. **Ideal** od V je $\mathbb{Z}_2$ homogeni potprostor I takav da za sve $u \in I, v \in V, n \in \mathbb{Z}$ vrijedi $u_n v \in I$ i $v_n u \in I$.

Kažemo da je verteks superalgebra V **prosta** ako su joj jedini ideali 0 i V. Ako je I ideal verteks superalgebre V, tada na V/I možemo definirati strukturu verteks superalgebre s $\mathbf{1}_{V/I} = \mathbf{1}_V + I$ i

$$(u+I)_n(v+I) = u_n v + I, u, v \in V, n \in \mathbb{Z}.$$

Ako su $V_1, \dots, V_n$ verteks superalgebre, struktura verteks superalgebre se može na prirodan način definirati na direktnoj sumi $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$, kao i na tenzorskom produktu $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$. Za više detalja vidjeti poglavlje 3.12 u [56].

2.2. MODULI

U ovoj cjelini ćemo dati definicije modula za verteks superalgebre, odnosno modula za superalgebre verteks operatora. U tome pratimo izlaganje iz [58].

Definicija 2.2.1. Neka je $(V,Y,\mathbf{1})$ verteks superalgebra. V-modul je uređeni par (M,Y_M) gdje je M vektorski superprostor, a Y_M linearni operator

$$\begin{aligned} Y_M(\cdot,z) : V &\to (\operatorname{End} M)[[z,z^{-1}]] \\ v &\mapsto Y_M(v,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1} \end{aligned}$$

koji zadovoljava sljedeće uvjete:

1. Operator Y_M čuva parnost, to jest, za $v \in V^{\bar{i}}$ vrijedi $Y_M(v,z) \in (\operatorname{End} M)^{\bar{i}}[[z,z^{-1}]]$.

2. Za $v \in V, m \in M$ red $Y_M(v,z)m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n m z^{-n-1}$ ima konačno mnogo negativnih potencija.

3. Vrijedi $Y_M(\mathbf{1},z) = \mathrm{id}_M$.

4. Za $\mathbb{Z}_2$-homogene $u,v \in V$ vrijedi:

$$\begin{aligned} z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)Y_M(u,z_1)Y_M(v,z_2) - (-1)^{p(u)p(v)}z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2-z_1}{-z_0}\right)Y_M(v,z_2)Y_M(u,z_1) \\ = z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right)Y_M(Y(u,z_0)v,z_2). \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Svaka verteks superalgebra $(V,Y,\mathbf{1})$ ima prirodnu strukturu V-modula. Neka je sada $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ superalgebra verteks operatora. Ako je (M,Y_M) modul za verteks superalgebru $(V,Y,\mathbf{1})$ reći ćemo da je M **slabi modul** za V.

Definicija 2.2.2. Neka je $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ superalgebra verteks operatora, te neka je (M,Y_M) slabi modul. Kažemo da je (M,Y_M) $\mathbb{Z}$**-graduiran modul** za V ako imamo rastav

$$M = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} M(k) \tag{2.2.2}$$

takvu da je za sve homogene $v \in V$

$$v_n M(k) \subseteq M(k+|v|-n-1), n,k \in \mathbb{Z}.$$

Ako u rastavu (2.3.3) vrijedi $M(k) = 0$ za $k < 0$ reći ćemo da je M $\mathbb{Z}_{\geq 0}$**-graduiran modul** za V.

Definicija 2.2.3. Neka je $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ superalgebra verteks operatora, te neka je (M, Y_M) slabi modul. Kažemo da je (M, Y_M) **jaki modul** za V ako imamo rastav

$$M = \bigoplus_{h \in \mathbb{C}} M_h, \tag{2.2.3}$$

gdje je $M_h = \{m \in M : L(0)m = hm\}$ i vrijedi:

1. Za svaki $h \in \mathbb{C}$ je $\dim M_h < \infty$.

2. Za svaki fiksni $h \in \mathbb{C}$ postoji $n_0 \in \mathbb{Z}$ takav da vrijedi $M_{h+n} = 0$ za $n \in \mathbb{Z}, n < n_0$.

Dakle, u slučaju jakih modula, $L(0)$ mora djelovati poluprosto. Taj uvjet možemo oslabiti na sljedeći način.

Definicija 2.2.4. Neka je V superalgebra verteks operatora i neka je M slab modul za V. Reći ćemo da je M **logaritamski modul** za V ako se M se rastavlja na direktnu sumu generaliziranih svojstvenih potprostora za $L(0)$, to jest, ako vrijedi:

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} M_{(\lambda)},\ M_{(\lambda)} = \{v \in M : (L(0) - \lambda)^k = 0 \text{ za neki } k \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$$

Ako je M logaritamski modul, reći ćemo da ima **nilpotentni rang** $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ako vrijedi

$$(L(0) - L(0)_{ss})^m = 0,\ (L(0) - L(0)_{ss})^{m-1} \neq 0,$$

gdje je $L(0)_{ss}$ poluprosti dio od $L(0)$.

Definicija 2.2.5. Za algebru verteks operatora V kažemo da je **racionalna** ako je svaki $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduirani modul potpuno reducibilan.

2.3. ZAKRENUTI MODULI

U ovoj cjelini ćemo dati definicije zakrenutih modula za verteks superalgebre i superalgebre verteks operatora.

Neka je $(V,Y,\mathbf{1})$ verteks superalgebra, i neka je σ njen automorfizam konačnog reda T koji komutira s automorfizmom θ. Tada se V rastavlja u direktnu sumu

$$V=\bigoplus_{r=0}^{T-1}V^r,$$

gdje je $V^r=\{v\in V:\sigma(v)=e^{-\frac{2\pi ir}{T}}v\}$ $\mathbb{Z}_2$-homogeni potprostor od V. Za $u\in V^r, v\in V^s$ tada vrijedi

$$u_nv\in V^{r+s}, \forall n\in\mathbb{Z}.$$

Posebno, V^0 je verteks podalgebra od V i svaki V^r je modul za V^0. U ostatku ove cjeline pretpostavljamo da je σ kao gore.

Definicija 2.3.1. σ-zakrenuti V-modul je uređeni par (M,Y_M) gdje je M vektorski superprostor, a Y_M linearni operator

$$\begin{aligned}Y_M(\cdot,z): V&\to(\operatorname{End}M)[[z^{\frac{1}{T}},z^{-\frac{1}{T}}]]\\ v&\mapsto Y_M(v,z)=\sum_{n\in\frac{1}{T}\mathbb{Z}}v_nz^{-n-1}\end{aligned}$$

koji zadovoljava sljedeće uvjete:

1. Operator Y_M čuva parnost, to jest, za $v\in V^{\bar{i}}$ vrijedi $Y_M(v,z)\in(\operatorname{End}M)^{\bar{i}}[[z^{\frac{1}{T}},z^{-\frac{1}{T}}]]$.

2. Za $v\in V, m\in M$ red $Y_M(v,z)m=\sum_{n\in\frac{1}{T}\mathbb{Z}}v_nmz^{-n-1}$ ima konačno mnogo negativnih potencija.

3. Vrijedi $Y_M(\mathbf{1},z)=\mathrm{id}_M$.

4. Za $v\in V^r$, $v_n=0$ za $n\notin\frac{r}{T}+\mathbb{Z}$.

5. Za $\mathbb{Z}_2$-homogene $u\in V^r, v\in V^s$ imamo

$$\begin{aligned}\sum_{i\geq0}(-1)^i\binom{\ell}{i}&\left(u_{m+\ell-i}v_{n+i}-(-1)^{\ell+p(u)p(v)}v_{n+\ell-i}u_{m+i}\right)\\ &=\sum_{i\geq0}\binom{m}{i}(u_{\ell+i}v)_{m+n-i},\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

   za sve $\ell\in\mathbb{Z}, m\in\frac{r}{T}+\mathbb{Z}, n\in\frac{s}{T}+\mathbb{Z}$.

Identitet (2.3.1) zovemo zakrenuti Borcherdsov identitet. Kao i kod nezakrenutog Borcherdsovog identiteta, stavljanjem $\ell = 0$ dobivamo

$$[u_m, v_n] = \sum_{i \geq 0} \binom{m}{i} (u_i v)_{m+n-i} \tag{2.3.2}$$

za $\mathbb{Z}_2$-homogene $u \in V^r, v \in V^s$ i $m \in \frac{r}{T} + \mathbb{Z}, n \in \frac{s}{T} + \mathbb{Z}$. Ovu formulu zovemo **zakrenuta superkomutatorska formula**.

Bitno je primijetiti da iz gornje definicije slijedi da svaki σ-zakrenuti V-modul (M, Y_M) postaje (nezakrenuti) V^0-modul ako se Y_M restringira na V^0.

Neka je sada $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ superalgebra verteks operatora. Ako je (M, Y_M) σ-zakrenuti modul za verteks superalgebru $(V, Y, \mathbf{1})$ reći ćemo da je M σ-zakrenuti **slabi modul** za V.

Definicija 2.3.2. Neka je $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ superalgebra verteks operatora, te neka je (M, Y_M) σ-zakrenuti slabi modul. Kažemo da je (M, Y_M) $\frac{1}{T}\mathbb{Z}$ **-graduiran σ-zakrenuti modul** za V ako imamo rastav

$$M = \bigoplus_{k \in \frac{1}{T}\mathbb{Z}} M(k) \tag{2.3.3}$$

takvu da je za sve homogene $v \in V$

$$v_n M(k) \subseteq M(k + |v| - n - 1), n \in \mathbb{Z}, k \in \frac{1}{T}\mathbb{Z}$$

Ako u rastavu (2.3.3) vrijedi $M(k) = 0$ za $k < 0$ reći ćemo da je M $\frac{1}{T}\mathbb{Z}_{\geq 0}$**-graduiran σ-zakrenuti modul** za V.

Definicija 2.3.3. Neka je $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ superalgebra verteks operatora, te neka je (M, Y_M) σ-zakrenuti slabi modul. Kažemo da je (M, Y_M) **jaki σ-zakrenuti modul** za V ako imamo rastav

$$M = \bigoplus_{h \in \mathbb{C}} M_h, \tag{2.3.4}$$

gdje je $M_h = \{m \in M : L(0)m = hm\}$ i vrijedi:

1. Za svaki $h \in \mathbb{C}$ je $\dim M_h < \infty$.

2. Za svaki fiksni $h \in \mathbb{C}$ postoji $n_0 \in \frac{1}{T}\mathbb{Z}$ tako da vrijedi $M_{h+n} = 0$ za $n \in \frac{1}{T}\mathbb{Z}, n < n_0$.

Slično kao i u slučaju slabih zakrenutih modula, ako je (M, Y_M) $\frac{1}{T}\mathbb{Z}$-graduiran σ-zakrenuti modul za V, tada restringiranjem (M, Y_M) postaje $\mathbb{Z}$-graduiran modul za V^0. Ako je (M, Y_M) jaki σ-zakrenuti modul za V, tada restringiranjem (M, Y_M) postaje jaki modul za V^0.

2.4. ZHUOVA TEORIJA

U ovoj cjelini ćemo dati definicije Zhuove superalgebre pridružene superalgebri verteks operatora, te u osnovnim crtama dati prikaz Zhuove teorije.

Pojam Zhuove algebre $A(V)$ za algebru verteks operatora V je definirao Y. Zhu u [69], koji je u tom radu i dokazao osnovna svojstva tih algebri. Pojam viših Zhuovih algebri $A_n(V)$ su uveli C. Dong, H. Li i G. Mason u [29], čije izlaganje pratimo u ovoj sekciji (u tim oznakama je originalna Zhuova algebra $A(V) = A_0(V)$.)

Još neki članci koji se bave višim Zhuovim algebrama su [30], [16], [17]. Treba napomenuti da su definicije i rezultati iz [69] i [29] dane za algebre verteks operatora, a ne za superalgebre verteks operatora. Ipak, lako je provjeriti da se (uz potrebne promjene) te definicije i rezultati generaliziraju za superalgebre verteks operatora.

Radi lakšeg praćenja izlaganja dat ćemo prvo definiciju Zhuove algebre $A(V)$, pa tek onda definicije viših Zhuovih algebri. Neka je $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ superalgebra verteks operatora. Definirajmo dva produkta na V za homogeni $u \in V$ i općeniti $v \in V$:

$$u * v = \mathrm{Res}_z \frac{(1+z)^{|u|}}{z} Y(u,z)v \tag{2.4.1}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{|u|}{k} u_{k-1} v$$
$$u \circ v = \mathrm{Res}_z \frac{(1+z)^{|u|}}{z^2} Y(u,z)v \tag{2.4.2}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{|u|}{k} u_{k-2} v$$

Oba produkta možemo proširiti po linearnosti do bilinearnih produkata na V. Stavimo $O(V) = \mathrm{span}\{u \circ v : u, v \in V\}$ i $A(V) = V/O(V)$. Budući da je $O(V)$ $\mathbb{Z}_2$-homogeni potprostor od V, $A(V)$ nasljeđuje $\mathbb{Z}_2$-gradaciju s V. Za $v \in V$ pisat ćemo $[v] = v + O(V) \in A(V)$.

Teorem 2.4.1 ([69], Theorem 2.1.1.)**.** Neka je $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ superalgebra verteks operatora. Vrijedi:

1. Bilinearni produkt $*$ inducira na $A(V)$ strukturu asocijativne superalgebre s jedinicom $[\mathbf{1}]$.

2. $[\omega]$ je centralni element u $A(V)$.

3. Neka su $u, v \in V$ $L(0)$-homogeni i $\mathbb{Z}_2$-homogeni. Tada vrijedi

$$u * v - (-1)^{p(u)p(v)} v * u \equiv \sum_{k \geq 0} \binom{|u|-1}{k} u_k v \mod O(V). \tag{2.4.3}$$

Definirajmo sada više Zhuove algebre. Neka je sada $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ superalgebra verteks operatora i $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Definirajmo dva produkta na V za homogeni $u\in V$ i općeniti $v\in V$:

$$\begin{aligned} u *_n v &= \sum_{j=0} (-1)^j \binom{n+j}{j} \operatorname{Res}_z \frac{(1+z)^{|u|+n}}{z^{n+j+1}} Y(u,z)v \qquad (2.4.4)\\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n+j}{j}\binom{|u|+n}{k} u_{k-n-j-1}v \\ u \circ_n v &= \operatorname{Res}_z \frac{(1+z)^{|u|+n}}{z^{2n+2}} Y(u,z)v \qquad (2.4.5)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{|u|+n}{k} u_{k-2n-2}v \end{aligned}$$

Oba produkta možemo proširiti po linearnosti do bilinearnih produkata na V. Primijetimo sada da produkti $*_0$ i $\circ_0$ odgovaraju produktima $*$ i $\circ$. Definirajmo

$$O_n(V) = \operatorname{span}\{u\circ_n v : u,v\in V\} + \{(L(-1)+L(0))v : v\in V\} \qquad (2.4.6)$$

$$A_n(V) = V/O_n(V). \qquad (2.4.7)$$

Budući da je $O_n(V)$ $\mathbb{Z}_2$-homogeni potprostor od V, $A_n(V)$ nasljeđuje $\mathbb{Z}_2$-gradaciju s V.

Napomena 2.4.2. Na prvu se definicija $O_n(V)$ može učiniti bitno drukčijom od definicije $O(V)$. No, za homogeni $v\in V$ vrijedi:

$$v\circ\mathbf{1} = v_{-2}\mathbf{1} + |v|v_{-1}\mathbf{1} = (L(-1)+L(0))v,$$

pa je tada $(L(-1)+L(0))V\subseteq O(V)$ i vrijedi $O(V)=O_0(V)$.

Teorem 2.4.3 ([29], Theorem 2.3., Proposition 2.4.)**.** Neka je $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ superalgebra verteks operatora. Vrijedi:

1. Bilinearni produkt $*_n$ inducira na $A_n(V)$ strukturu asocijativne superalgebre s jedinicom $\mathbf{1}+O_n(V)$.

2. $\omega+O_n(V)$ je centralni element u $A_n(V)$.

3. Za $n\geq 1$ linearno preslikavanje

$$A_n(V)\to A_{n-1}(V),\ v+O_n(V)\mapsto v+O_{n-1}(V)$$

je epimorfizam asocijativnih superalgebri.

4. Neka su $u, v \in V$ $L(0)$-homogeni i $\mathbb{Z}_2$-homogeni. Tada vrijedi
$$u *_n v - (-1)^{p(u)p(v)} v *_n u \equiv \sum_{k \geq 0} \binom{|u|-1}{k} u_k v \mod O_n(V). \tag{2.4.8}$$

Superalgebru $A_n(V)$ zovemo n-ta Zhuova algebra. Vrijedi spomenuti da je pojam Zhuove algebre funktorijalan, tj. ako je $\varphi : V_1 \to V_2$ homomorfizam superalgebri verteks operatora, tada vrijedi $\varphi(O_n(V_1)) \subseteq O_n(V_2)$, pa dobivamo homomorfizam superalgebri

$$\tilde{\varphi} : A_n(V_1) \to A_n(V_2),\ \tilde{\varphi}(v + O_n(V_1)) = \varphi(v) + O_n(V_2). \tag{2.4.9}$$

Posebno, ako je φ automorfizam superalgebre verteks operatora, tada φ inducira automorfizam asocijativne superalgebre $A_n(V)$.

Neka je sada M slabi modul za V. Definirajmo

$$\Omega_n(M) = \{m \in M : v_k m = 0, \text{ za sve homogene } v \in V \text{ t.d. } \deg v_k < -n\}. \tag{2.4.10}$$

Vidjeli smo u (2.1.10) da za $v \in V_h$ vrijedi $\deg v_k = h - k - 1$, pa je tada uvjet $\deg v_k < -n$ ekvivalentan s $k > h - n - 1$.

Teorem 2.4.4 ([29], Theorem 3.2.)**.** Neka je M slabi modul za V. Tada je linearno preslikavanje dano s

$$A_n(V) \to \mathrm{End}(\Omega_n(M)), v + O_n(V) \mapsto o(v) := v_{|v|-1}, \text{ za } v \text{ homogen},$$

reprezentacija asocijativne superalgebre $A_n(V)$.

Propozicija 2.4.5 ([29], Proposition 3.4)**.** Neka je M $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduiran modul za V takav da $M(0) \neq 0$.

1. Vrijedi $\bigoplus_{i=0}^n M(i) \subseteq \Omega_n(M)$.

2. Ako je M prost, tada je $\Omega_n(M) = \bigoplus_{i=0}^n M(i)$.

3. Ako je M prost, tada su $M(i), i = 0, \ldots, n$ prosti međusobno neekvivalentni moduli za $A_n(V)$.

Neka je M $A_n(V)$-modul koji se ne može faktorizirati kroz A_{n-1}. U poglavlju 4 od [29], autori su konstruirali $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduirani V-modul $L_n(M)$ takav da vrijedi

$$\Omega_n(L_n(M))/\Omega_{n-1}(L_n(M)) \simeq M.$$

Lema 2.4.6 ([29], Lemma 4.8)**.** Neka je M $A_n(V)$-modul koji se ne može faktorizirati kroz A_{n-1}. Ako je M ireducibilan $A_n(V)$-modul, tada je $L_n(M)$ ireducibilan $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduirani V-modul.

2.5. C_2-SUPERALGEBRA I C_2-KONAČNOST

Neka je $(V,Y,\mathbf{1})$ verteks superalgebra. Promatrajmo sljedeći potprostor od V:

$$C_2(V) = \text{span}\{u_{-2}v : u,v \in V\}.$$

Lako se vidi da je $C_2(V)$ $\mathbb{Z}_2$-homogen potprostor od V.

Definicija 2.5.1. Za verteks superalgebru $(V,Y,\mathbf{1})$ ćemo reći da je C_2**-konačna** ako vrijedi $\dim(V/C_2(V)) < \infty$.

Pojam C_2-konačnosti je uveo Y. Zhu u [69]. Pisat ćemo $\overline{v} = v + C_2(V)$. Kao i u prethodnoj sekciji, neki od ovih rezultata su dani za verteks algebre, ali se lako vidi da se mogu proširiti na verteks superalgebre.

Definicija 2.5.2. Poissonova superalgebra je uređena trojka $(\mathscr{A},\cdot,[\cdot,\cdot])$ takva da vrijedi:

- $(\mathscr{A},\cdot)$ je asocijativna superalgebra.
- $(\mathscr{A},[\cdot,\cdot])$ je Liejeva superalgebra.
- Za $\mathbb{Z}_2$-homogene $x,y,z \in \mathscr{A}$ vrijedi:

$$[x,y\cdot z] = [x,y]\cdot z + (-1)^{p(x)p(y)} y\cdot[x,z].$$

Propozicija 2.5.3 ([69]). Neka je $(V,Y,\mathbf{1})$ verteks superalgebra. Tada za sve $a \in V$ vrijedi

$$a_{-1}C_2(V) \subseteq C_2(V),\ a_0C_2(V) \subseteq C_2(V).$$

Tada su operacije

$$\overline{u}\cdot\overline{v} = \overline{u_{-1}v},\ \{\overline{u},\overline{v}\} = \overline{u_0v},\ u,v \in V \tag{2.5.1}$$

dobro definirane na vektorskom prostoru $V/C_2(V)$, koji s tim operacijama ima strukturu Poissonove superalgebre.

Zbog ovog ćemo $\mathscr{P}(V) := V/C_2(V)$ zvati C_2-superalgebra pridružena V. Ta konstrukcija je funktorijalna: ako je $\varphi : V_1 \to V_2$ homomorfizam verteks superalgebri, tada vrijedi $\varphi(C_2(V_1)) \subseteq C_2(V_2)$ i tako dobivamo inducirani homomorfizam Poissonovih superalgebri

$$\overline{\varphi} : \mathscr{P}(V_1) \to \mathscr{P}(V_2),\ \overline{\varphi}(v + C_2(V_1)) = \varphi(v) + C_2(V_2). \tag{2.5.2}$$

Posebno, ako je φ automorfizam verteks superalgebre V, tada on inducira automorfizam Poissonove superalgebre $\mathscr{P}(V)$.

U ovom radu će nam jako bitna biti veza između C_2-superalgebre i Zhuovih superalgebri. U [69] je pokazano da za algebru verteks operatora V Zhuova algebra $A(V)$ ima strukturu filtrirane algebre kada se gleda rastuća filtracija

$$F^k A(V) = \left(\bigoplus_{i=0}^{k} V_i + O(V) \right) / O(V), k \geq 0. \tag{2.5.3}$$

Lako se provjeri da to vrijedi i u slučaju kada je V superalgebra verteks operatora, te da su u tom slučaju potprostori $F^k A(V)$ $\mathbb{Z}_2$-homogeni. Svakoj filtriranoj superalgebri možemo pridružiti takozvanu asociranu graduiranu superalgebru:

$$\mathrm{gr} A(V) = \bigoplus_{k=0} \mathrm{gr}^k A(V), \text{ gdje je } \mathrm{gr}^k A(V) = F^k A(V)/F^{k-1} A(V),$$

gdje stavljamo $F^{-1}A(V) = 0$. Množenje je inducirano množenjem s $A(V)$, za $a \in F^k A(V), b \in F^\ell A(V)$ je

$$(a + F^{k-1}A(V)) \cdot (b + F^{\ell-1}A(V)) = a * b + F^{k+\ell-1}A(V) \in \mathrm{gr}^{k+\ell} A(V)$$

Zbog relacije (2.4.3) slijedi da imamo

$$[F^k A(V), F^\ell A(V)] \subseteq F^{k+\ell-1} A(V),$$

pa je $\mathrm{gr} A(V)$ superkomutativna superalgebra. Možemo joj dati i strukturu Poissonove superalgebre ako za $\mathbb{Z}_2$-homogene $a \in F^k A(V), b \in F^\ell A(V)$ definiramo

$$\{a + F^{k-1}A(V), b + F^{\ell-1}A(V)\} = a * b - (-1)^{p(a)p(b)} b * a + F^{k+\ell-2}A(V) \in \mathrm{gr}^{k+\ell-1} A(V).$$

Možemo promatrati linearno preslikavanje $f : V \to \mathrm{gr} A(V)$ dano s

$$f(v) = (v + O(V)) + F^{k-1}A(V), \text{ za } v \in V_k.$$

Lako se vidi da vrijedi $f(C_2(V)) = 0$, pa imamo inducirano preslikavanje $\tilde{f} : \mathscr{P}(V) \to \mathrm{gr} A(V)$.

Propozicija 2.5.4 ([27], Proposition 2.17. c))**.** Preslikavanje $\tilde{f} : \mathscr{P}(V) \to \mathrm{gr} A(V)$ je epimorfizam Poissonovih superalgebri. Posebno, $\dim A(V) \leq \dim \mathscr{P}(V)$.

Dakle, ako je V C_2-konačna superalgebra verteks operatora, tada je $A(V)$ konačnodimenzionalna superalgebra. Ova tvrdnja se može generalizirati na više Zhuove algebre.

Teorem 2.5.5 ([62], Theorem 2.5.)**.** Ako je V C_2-konačna superalgebra verteks operatora, tada za sve $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ vrijedi $\dim A_n(V) < \infty$.

Bit će nam korisna i sljedeća tvrdnja o generatorima superalgebri $A(V)$ i $\mathscr{P}(V)$.

Propozicija 2.5.6 ([1] Proposition 2.2., Proposition 2.5., [27], Proposition 2.17.)**.** Neka je V verteks superalgebra, a $S \subseteq V$ skup jakih generatora od V. Tada slika od S u $\mathscr{P}(V)$ generira $\mathscr{P}(V)$ kao superalgebru. Štoviše, ako je V superalgebra verteks operatora, tada slika od S u $A(V)$ generira $A(V)$ kao superalgebru.

2.6. TEOREM O GENERIRAJUĆIM POLJIMA

Neka je V vektorski superprostor. Za formalni red

$$a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1} \in (\operatorname{End} V)[[z, z^{-1}]]$$

ćemo reći da je **polje** ako za svaki $v \in V$ vrijedi $a_n v = 0$ za n dovoljno velik.

Teorem o generirajućim poljima daje uvjete pod kojima skup polja generira verteks superalgebru na vektorskom superprostoru V. Prvi su ga dokazali I. Frenkel, V.G. Kac, A. Radul i W. Wang u [36]. Teorem se može naći kao teorem 4.5. u monografiji [46].

Teorem 2.6.1 ([36], Proposition 3.1)**.** Neka je V vektorski superprostor s istaknutim parnim vektorom $\mathbf{1}$ i linearnim operatorom $d \in \operatorname{End} V$ koji čuva parnost takvim da $d\mathbf{1} = 0$. Neka je S $\mathbb{Z}_2$-homogeni podskup od V, a Y_0 operator

$$\begin{aligned} Y_0(\cdot, z) : S &\to (\operatorname{End} V)[[z, z^{-1}]] \\ v &\mapsto Y_0(v, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1} \end{aligned}$$

koji zadovoljava sljedeće uvjete:

1. Operator Y čuva parnost.

2. Za $u \in S, v \in V$ red $Y_0(u, z)v$ ima konačno mnogo negativnih potencija.

3. Za $u \in S$ vrijedi $Y_0(u, z)\mathbf{1} \in V[[z]], \lim_{z\to 0} Y_0(u, z)\mathbf{1} = u$.

4. Za $u \in S$ vrijedi $[d, Y_0(u, z)] = \partial_z Y_0(u, z)$.

5. Za svaki par $u, v \in S$ postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da:

$$(z_1 - z_2)^k Y_0(u, z_1) Y_0(v, z_2) = (-1)^{p(u)p(v)} (z_1 - z_2)^k Y_0(v, z_2) Y_0(u, z_1).$$

6. Vrijedi

$$V = \operatorname{span}\{u^1_{n_1} u^2_{n_2} \dots u^r_{n_r} \mathbf{1} : r \geq 0, u^i \in S, n_i \in \mathbb{Z}\}. \tag{2.6.1}$$

Tada se Y_0 može na jedinstven način proširiti do $Y : V \to (\operatorname{End} V)[[z, z^{-1}]]$ tako da je $(V, Y, \mathbf{1})$ verteks superalgebra, a d odgovara operatoru derivacije iz (2.1.5), tj. vrijedi $dv = v_{-2}\mathbf{1}$ za sve $v \in V$.

Očito je da skup S tada generira verteks superalgebru V. Mi ćemo se u ovom radu sretati sa situacijom gdje u izrazu (2.6.1) imamo dodatni uvjet $n_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ (tada će S jako generirati verteks superalgebru V). Napisat ćemo kako se tada točno operator Y_0 proširuje do operatora Y.

Definicija 2.6.2. **Normalni produkt dva polja** $a(z)$ i $b(z)$ je dan s

$$:a(z)b(z) := a(z)_+ b(z) + (-1)^{p(a)p(b)} b(z)a(z)_-, \tag{2.6.2}$$

gdje su

$$a(z)_+ = \sum_{n<0} a_n z^{-n-1}, a(z)_- = \sum_{n\geq 0} a_n z^{-n-1}.$$

Normalni produkt više od dva polja se definira rekurzivno kao:

$$:a^1(z)a^2(z)\ldots a^r(z) :=: a^1(z)\left(: a^2(z)\ldots a^r(z) :\right) : .$$

Također ćemo staviti $\partial_z^{(n)} a(z) = \frac{1}{n!}\partial_z^n a(z)$.

Propozicija 2.6.3 ([46], Corollary 4.4)**.** Neka je V verteks superalgebra, i $u^1,\ldots,u^r \in V, n_1,\ldots,n_r \in \mathbb{Z}_{>0}$. Tada vrijedi

$$Y(u^1_{-n_1}\ldots u^r_{-n_r}\mathbf{1}) =: \partial_z^{(n_1-1)} Y(u^1,z)\ldots\partial_z^{(n_r-1)} Y(u^r,z) : . \tag{2.6.3}$$

2.7. Primjeri verteks superalgebri

2.7.1. Heisenbergova verteks algebra

U izlaganju slijedimo poglavlje 6.3 u [56] (alternativno, može se gledati i poglavlje 3.5 u [46]). Neka je $\mathfrak{h}$ konačnodimenzionalni (potpuno parni) vektorski prostor s nedegeneriranom simetričnom bilinearnom formom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Promatramo Liejevu algebru

$$\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$$

s komutacijskim relacijama

$$[\alpha \otimes t^m, \beta \otimes t^n] = \langle \alpha, \beta \rangle m \delta_{m+n,0} K, \ [K, \hat{\mathfrak{h}}] = 0. \tag{2.7.1}$$

Neka je sada $\mu \in \mathfrak{h}$. Označimo sa $\mathbb{C}_\mu$ jednodimenzionalni $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t] \oplus \mathbb{C}K$-modul na kojem $\mathfrak{h} \otimes t\mathbb{C}[t]$ djeluje trivijalno, $\mathfrak{h}$ djeluje kao $\langle \alpha, \mu \rangle, \alpha \in \mathfrak{h}$, a K djeluje kao identiteta. Promatramo inducirani $\hat{\mathfrak{h}}$-modul

$$M(1, \mu) = U(\hat{\mathfrak{h}}) \otimes_{\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t] \oplus \mathbb{C}K} C_\mu.$$

Kao vektorski prostor, $M(1, \mu)$ je izomorfan $S(\mathfrak{h} \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}])$ (simetričnoj algebri nad vektorskim prostorom $\mathfrak{h} \otimes t^{-1}C[t^{-1}]$).

Pisat ćemo $\alpha(n)$ za djelovanje $\alpha \otimes t^n, \alpha \in \mathfrak{h}, n \in \mathbb{Z}$ na $M(1, \mu)$. Definiramo polja

$$\alpha(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha(n) z^{-n-1} \tag{2.7.2}$$

za $\alpha \in \mathfrak{h}$. Stavimo i $\mathbf{1} = 1 \otimes 1 \in M(1,0)$. Tada se pomoću teorema o generirajućim poljima 2.6.1 može pokazati da $M(1) = M(1,0)$ ima strukturu verteks algebre generirane poljima (2.7.2) (koju zovemo **Heisenbergova verteks algebra**). Izraz za Y na općenitom vektoru iz $M(1)$ se tada dobiva iz propozicije 5.1.2. Može se pokazati da su tada $M(1, \mu)$ moduli za verteks algebru $M(1,0)$.

Neka je sada $\{\alpha^i\}$ neka baza od $\mathfrak{h}$ i $\{\alpha_i\}$ njoj dualna baza, tj. vrijedi

$$\langle \alpha^i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Neka je sada $\beta \in \mathfrak{h}$. Može se pokazati da je tada

$$\omega_\beta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{h}} \alpha^i_{-1} (\alpha_i)_{-1} \mathbf{1} + \beta_{-2} \mathbf{1} \tag{2.7.3}$$

konformni vektor centralnog naboja $\dim \mathfrak{h} - 12\langle \beta, \beta \rangle$. Tada se može pokazati da $M(1,0)$ uz konformni vektor ω_b postaje algebra verteks operatora.

2.7.2. Verteks superalgebre pridružene rešetci

Pojam verteks algebre pridružene parnoj rešetci je uveden u [37]. U izlaganju ćemo uglavnom pratiti poglavlja 5.4 i 5.5 u [46], no treba spomenuti i poglavlje 6.3 u [56] kao bitan izvor.

Za Abelovu grupu L ćemo reći da je **rešetka** ako je slobodna Abelova grupa konačnog ranga $d \in \mathbb{N}$, tj. ako je $L \simeq \mathbb{Z}^{\oplus d}$.

Za par $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, gdje je L rešetka, a $\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L \to \mathbb{Q}$ nedegenerirana simetrična $\mathbb{Z}$-bilinearna forma, ćemo reći da je **racionalna rešetka**. Za racionalnu rešetku ćemo reći da je **cjelobrojna** ako je

$$\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}, \forall \alpha, \beta \in L,$$

a da je **parna** ako je

$$\langle \alpha, \beta \rangle \in 2\mathbb{Z}, \forall \alpha, \beta \in L.$$

Za racionalnu rešetku ćemo reći da je **pozitivno definitna** ako je forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pozitivno definitna.

Definicija 2.7.1. Neka je L rešetka. Za $\varepsilon : L \times L \to \{\pm 1\}$ kažemo da je **2-kociklus** ako zadovoljava uvjete

$$\varepsilon(\alpha, 0) = \varepsilon(0, \alpha) = 1, \forall \alpha \in L \tag{2.7.4}$$

$$\varepsilon(\beta, \gamma)\varepsilon(\beta + \gamma, \alpha) = \varepsilon(\beta, \alpha + \gamma)\varepsilon(\gamma, \alpha), \forall \alpha, \beta, \gamma \in L. \tag{2.7.5}$$

Ako imamo rešetku L i 2-kociklus ε, možemo definirati **zakrenutu grupovnu algebru** $\mathbb{C}_\varepsilon[L]$ koja ima bazu $\{e^\alpha\}_{\alpha \in L}$ i množenje definirano na bazi kao

$$e^\alpha \cdot e^\beta = \varepsilon(\alpha, \beta) e^{\alpha + \beta}.$$

Tada uvjet (2.7.4) daje da je e^0 jedinica u $\mathbb{C}_\varepsilon[L]$, a uvjet (2.7.5) daje da je množenje asocijativno. Svakom 2-kociklusu ε možemo pridružiti funkciju $B_\varepsilon : L \times L \to \{\pm 1\}$ definiranu s

$$B_\varepsilon(\alpha, \beta) = \varepsilon(\alpha, \beta)\varepsilon(\beta, \alpha), \alpha, \beta \in L.$$

Tada u $\mathbb{C}_\varepsilon[L]$ vrijedi

$$e^\alpha \cdot e^\beta = B_\varepsilon(\alpha, \beta) e^\beta \cdot e^\alpha, \ \alpha, \beta \in L.$$

Ako gornji izraz pomnožimo s $e^\gamma, \gamma \in L$ i iskoristimo asocijativnost, dobivamo da je B_ε bimultiplikativna funkcija, odnosno da vrijedi

$$B_\varepsilon(\alpha + \gamma, \beta) = B_\varepsilon(\alpha, \beta) B_\varepsilon(\gamma, \beta), \ B_\varepsilon(\alpha, \beta + \gamma) = B_\varepsilon(\alpha, \gamma) B_\varepsilon(\beta, \gamma) \tag{2.7.6}$$

za $\alpha, \beta, \gamma \in L$.

Neka je sada L cjelobrojna rešetka sa kociklusom ε. Stavimo $\mathfrak{h} = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ i proširimo formu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sa L na $\mathfrak{h}$ po linearnosti. Kao u podsekciji 2.7.1 označimo s $M(1)$ Heisenbergovu verteks algebru pridruženu $(\mathfrak{h}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Definirajmo vektorski superprostor $V_L = M(1) \otimes \mathbb{C}_\varepsilon[L]$, gdje je parnost dana s $p(h \otimes e^\alpha) = \langle \alpha, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}_2$, za $h \in M(1), \alpha \in L$. Tada je superprostor V_L potpuno paran ako i samo ako je rešetka L parna. Primijetimo da je V_L razapet elementima oblika

$$h^1(-n_1) \dots h^r(-n_r)\mathbf{1} \otimes e^\alpha$$

za $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, h^i \in \mathfrak{h}, n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \alpha \in L$. Definiramo verteks operatore za $h \in \mathfrak{h}, \alpha \in L$:

$$Y(h \otimes e^0, z) = h(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) z^{-n-1}, \tag{2.7.7}$$

$$Y(\mathbf{1} \otimes e^\alpha) = e^\alpha z^\alpha \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(-j) \frac{z^j}{j} \right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(j) \frac{z^{-j}}{-j} \right). \tag{2.7.8}$$

U gornjem izrazu e^α označava operator množenja s $1 \otimes e^\alpha$, a

$$z^\alpha v := z^{\langle \alpha, \beta \rangle} v, \quad \text{za } v \in M(1) \otimes e^\beta, \beta \in L.$$

Stavit ćemo $\mathbf{1}_{V_L} = \mathbf{1}_{M(1)} \otimes e^0$.

Teorem 2.7.2 ([46], Theorem 5.5)**.**

1. Neka je L cjelobrojna rešetka, $\varepsilon : L \times L \to \{\pm 1\}$ 2-kociklus koji zadovoljava uvjet

$$B_\varepsilon(\alpha, \beta) = \varepsilon(\alpha, \beta)\varepsilon(\beta, \alpha) = (-1)^{\langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle}, \alpha, \beta \in L. \tag{2.7.9}$$

   Tada postoji jedinstvena struktura verteks superalgebre $(V_L, Y, \mathbf{1}_{V_L})$ takva da vrijedi (2.7.7) i (2.7.8).

2. Za svaku cjelobrojnu rešetku postoji 2-kociklus ε koji zadovoljava uvjet (2.7.9). Svi takvi 2-kociklusi će dati (do na izomorfizam) istu strukturu verteks superalgebre.

Može se pokazati da za rešetke ranga 1 trivijalni kociklus zadovoljava tražene uvjete. Za općenite rešetke višeg ranga, u napomeni 5.5a u [46] je dan algoritam za konstrukciju 2-kociklusa sa traženim svojstvima. Mi ćemo samo spomenuti jedan slučaj koji ćemo susresti kasnije u radu. Ako je $L = \mathbb{Z}^n$ sa bazom $v_1, \dots, v_n$ i standardnom bilinearnom formom zadanom na bazi kao

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij},$$

možemo zadati 2-kociklus ε na bazi kao:

$$\varepsilon(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } i \leq j \\ -1 & \text{ako je } i > j \end{cases} \tag{2.7.10}$$

te ga potom proširiti na cijelu rešetku po bimultiplikativnosti od B_ε. Može se provjeriti da tako zadan 2-kociklus zadovoljava uvjet 2.7.9, te tada imamo strukturu verteks superalgebre na $V_{\mathbb{Z}^n}$.

Općenito, svaka verteks superalgebra pridružena rešetci V_L ima Heisenbergovu verteks algebru $M(1)$ kao podalgebru. Tada su vektori $\omega_b, b \in \mathfrak{h}$ definirani u (2.7.3) konformni vektori i za verteks superalgebru V_L. Ipak, neće svaki izbor konformnog vektora dati strukturu superalgebre verteks operatora na V_L, jer uvjeti na gradaciju iz definicije superalgebre verteks operatora neće biti općenito zadovoljeni. U [56][Theorem 6.5.1] je pokazano da su uvjeti na gradaciju zadovoljeni u slučaju kada je L pozitivno definitna parna rešetka.

Definiramo Schurove polinome $S_n(\alpha) = S_n(\alpha(-1), \alpha(-2), \dots)$ za $\alpha \in L, n \in \mathbb{Z}$ kao

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(-j)\frac{z^j}{j}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\alpha) z^n.$$

Prvih nekoliko Schurovih polinoma je

$$\begin{aligned} S_0(\alpha) &= 1 \\ S_1(\alpha) &= \alpha(-1) \\ S_2(\alpha) &= \frac{1}{2}\left(\alpha(-1)^2 + \alpha(-2)\right). \end{aligned}$$

Za $n < 0$ ćemo staviti $S_n = 0$. Može se pokazati da u općenitoj verteks superalgebri pridruženoj rešetci V_L vrijedi

$$(e^\alpha)_n e^\beta = \varepsilon(\alpha, \beta) S_{-n-1-\langle \alpha, \beta \rangle}(\alpha) e^{\alpha+\beta} \tag{2.7.11}$$

(vidi npr. [3]).

2.7.3. Triplet verteks algebra

Triplet verteks algebru je uveo H.G. Kausch u [48] i [50]. U izlaganju pratimo radove D. Adamovića i A. Milasa ([7] i [10]). Promatramo verteks algebru V_L pridruženu pozitivno definitnoj parnoj rešetci

$$L = \mathbb{Z}\alpha, \ \langle \alpha, \alpha \rangle = 2p,$$

gdje je $p \in \mathbb{Z}, p \geq 2$. Uz konformni vektor

$$\omega = \frac{1}{4p}\alpha(-1)^2\mathbf{1} + \frac{p-1}{2p}\alpha(-2)\mathbf{1}, \tag{2.7.12}$$

V_L ima strukturu algebre verteks operatora centralnog naboja $c_p = 1 - \frac{6(p-1)^2}{p}$. Operatori

$$Q = (e^{\alpha})_0,\ \tilde{Q} = (e^{-\alpha/p})_0$$

su tzv. *screening operatori*. Oni komutiraju međusobno, a oba komutiraju sa $L(n), n \in \mathbb{Z}$. Možemo definirati **triplet verteks algebru** kao $\mathscr{W}(p) = \ker_{V_L}(\tilde{Q})$.

Propozicija 2.7.3 ([7], Proposition 1.3)**.** Algebra verteks operatora $\mathscr{W}(p)$ je jako generirana s konformnim vektorom ω i primarnim vektorima

$$F = e^{-\alpha}, H = Qe^{-\alpha}, E = Q^2 e^{-\alpha}$$

konformne težine $2p-1$.

Treba spomenuti i **singlet verteks algebru**

$$\overline{M(1)_p} = \ker_{M(1)}(\tilde{Q}) \subseteq \mathscr{W}(p),$$

definiranu i proučavanu u [3], koja je jako generirana samo s ω i H (Theorem 3.2. u [3]).

Algebra verteks operatora V_L je racionalna, a ako stavimo $\gamma_i = \frac{i}{2p}\alpha$ tada je potpuna lista ireducibilnih modula za V_L dana s

$$V_{L+\gamma_i}, i = 0, \ldots, 2p-1.$$

Budući da je $\mathscr{W}(p)$ podalgebra od V_L, svaki modul za V_L je ujedno i modul za $\mathscr{W}(p)$. Tako su u [7] autori definirali $\mathscr{W}(p)$-module

$$\Lambda(i) = \mathscr{W}(p).e^{\gamma_{i-1}} \subseteq V_{L+\gamma_{i-1}},\ \Pi(i) = \mathscr{W}(p).e^{\gamma_{p+i-1}} \subseteq V_{L+\gamma_{p+i-1}}, i = 1, \ldots, p,$$

te pokazali da su ireducibilni, kao i da vrijedi $\Lambda(p) = V_{L+\gamma_{p-1}}, \Pi(p) = V_{L+\gamma_{2p-1}}$. Stavimo za $i \in \mathbb{Z}$

$$h_i = \frac{(p-i)^2 - (p-1)^2}{4p}.$$

Tada je najviša komponenta od modula $\Lambda(i), i = 1, \ldots, p$ jednodimenzionalna i ima konformnu težinu h_i, a najviša komponenta od modula $\Pi(i), i = 1, \ldots, p$ je dvodimenzionalna i ima konformnu težinu h_{3p-i}.

Teorem 2.7.4 ([7], Theorem 3.12)**.** Moduli

$$\Lambda(1), \ldots, \Lambda(p), \Pi(1), \ldots, \Pi(p)$$

su, do na izomorfizam, svi ireducibilni moduli za algebru verteks operatora $\mathscr{W}(p)$.

Autori su u [7] također konstruirali primjere logaritamskih nerastavljivih modula za $\mathcal{W}(p)$, čime su pokazali da je triplet verteks algebra iracionalna. Potpuno su odredili i strukturu Zhuove algebre za $\mathcal{W}(p)$.

Teorem 2.7.5 ([7], Theorem 5.9, [10], Theorem 4.6)**.** Zhuova algebra $\mathcal{W}(p)$ se rastavlja na direktnu sumu ideala

$$A(\mathcal{W}(p)) \simeq M_2(\mathbb{C})^{\oplus p} \oplus \mathbb{C}[x]/(x^2)^{\oplus(p-1)} \oplus \mathbb{C}$$

i vrijedi jednakost dimenzija

$$\dim A(\mathcal{W}(p)) = \dim \mathscr{P}(\mathcal{W}(p)) = 6p-1.$$

Također, u poglavlju 7 od [7] su autori pokazali da postoji jedinstven operator $\phi \in \mathrm{End}(\mathcal{W}(p))$ koji komutira sa djelovanjem Virasorove algebre, takav da operatori $\{Q, \frac{\alpha(0)}{p}, \phi\}$ zadovoljavaju komutacijske relacije Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2)$. Budući da sva tri operatora komutiraju sa djelovanjem Virasorove algebre, algebru verteks operatora $\mathcal{W}(p)$ možemo promatrati kao $\mathfrak{sl}(2) \times$ Vir-modul. U teoremima 1.1 i 1.2 u [7] je dana struktura algebre verteks operatora $\mathcal{W}(p)$ kao $\mathfrak{sl}(2) \times$ Vir-modula, što će nam biti od velike koristi u poglavlju Više Zhuove algebre (vidi teorem 5.4.4).

Za daljnji rad na triplet verteks algebrama vidjeti [9], [4], [5] i [6].

2.7.4. Cliffordova verteks superalgebra

U izlaganju pratimo poglavlje 2.5 iz [46]. Cliffordova algebra $CL(d)$ je kompleksna asocijativna superalgebra s jedinicom generirana s neparnim elementima

$$\psi_i^{\pm}(r), r \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}, 1 \leq i \leq d$$

koji zadovoljavaju antikomutacijske relacije

$$[\psi_i^{\pm}(r), \psi_j^{\mp}(s)] = \delta_{ij}\delta_{r+s,0}1$$
$$[\psi_i^{\pm}(r), \psi_j^{\pm}(s)] = 0.$$

Neka je $CL(d)_{>0}$ podalgebra od $CL(d)$ generirana s elementima

$$\psi_i^{\pm}(r), r > 0, 1 \leq i \leq d.$$

Shvatimo $\mathbb{C}$ kao $CL(d)_{>0}$-modul na način da 1 djeluje kao identiteta, a svi $\psi_i^{\pm}(r)$ djeluju trivijalno. Neka je sada

$$F(d) := CL(d) \otimes_{CL(d)_{>0}} \mathbb{C}$$

Stavimo $\mathbf{1} = 1 \otimes 1$. Tada je $F(d)$ ireducibilni $CL(n)$-modul generiran cikličkim vektorom $\mathbf{1}$. Kao vektorski prostor, $F(d)$ je izomorfan

$$\bigwedge(\text{span}\{\psi_i^{\pm}(r) : r < 0, i = 1, \dots, d\})$$

(vanjskoj algebri nad vektorskim prostorom razapetim s $\psi_i^{\pm}(r)$ za $r < 0, i = 1, \dots, d$).

Definiramo polja na $F(d)$ s:

$$\psi_i^{\pm}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_i^{\pm}(n + \frac{1}{2}) z^{-n-1}. \tag{2.7.13}$$

Tada se pomoću teorema o generirajućim poljima 2.6.1 može pokazati da $F(d)$ ima strukturu verteks superalgebre generirane poljima (2.7.13) koju zovemo **Cliffordova verteks superalgebra** (nekad se koriste i izrazi **nabijeni fermioni** ili **bc-sistem**). Izraz za Y na općenitom vektoru iz $F(d)$ se tada dobiva iz propozicije 5.1.2. Lako se vidi da je $F(d) \simeq F(1)^{\otimes d}$ kao verteks superalgebra.

Pisat ćemo $\psi_i^{\pm} = \psi_i^{\pm}(-\frac{1}{2})\mathbf{1}$. Na $F(1)$ imamo jednoparametarsku familiju konformnih vektora

$$\omega_\mu = (1-\mu)\psi^+(-\frac{3}{2})\psi^- + \mu\psi^-(-\frac{3}{2})\psi^+ \tag{2.7.14}$$

centralnog naboja $c = 12\mu(1-\mu) - 2$.

Teorem 2.7.6 (Bozon-fermion korespondencija)**.** Postoji jedinstven izomorfizam verteks superalgebri $\beta_d : F(d) \to V_{\mathbb{Z}^d}$ takav da:

$$\psi_i^+ \mapsto e^{v_i},\ \psi_i^- \mapsto e^{-v_i},$$

gdje je $v_1, \dots, v_d$ ortonormirana baza rešetke $\mathbb{Z}^d$.

Izbor 2-kociklusa za rešetku $\mathbb{Z}^d$ je dan u (2.7.10). Za dokaz teorema vidjeti teorem 5.2. u [46].

2.7.5. Univerzalna Virasorova algebra verteks operatora

Pratimo izlaganje u poglavlju 6.1 u [56]. Virasorova algebra Vir je Liejeva algebra s bazom $\{L(n) : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\mathbf{c}\}$ i relacijama

$$[L(m), L(n)] = (m-n)L(m+n) + \delta_{m+n,0}\frac{m^3 - m}{12}\mathbf{c},\ [\mathbf{c}, \text{Vir}] = 0.$$

Označimo s $\mathrm{Vir}_{\geq -1}$ podalgebru od Vir razapetu s $\{L(n) : n \geq -1\} \cup \{\mathbf{c}\}$. Neka je $c \in \mathbb{C}$. Označimo s $\mathbb{C}_c$ jednodimenzionalni modul za $\mathrm{Vir}_{\geq -1}$ na kojem $L(n)$ djeluju trivijalno (za $n \geq -1$), a $\mathbf{c}$ djeluje množenjem sa skalarom c. Stavimo

$$\mathrm{Vir}^c = U(\mathrm{Vir}) \otimes_{U(\mathrm{Vir}_{\geq -1})} \mathbb{C}_c.$$

Ako stavimo $\mathbf{1} = 1 \otimes 1$, tada Vir^c ima bazu

$$L(-n_1)\dots L(-n_r)\mathbf{1}, r \geq 0, n_i \geq 2, n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r.$$

Definiramo polje na Vir^c sa:

$$Y(L(-2)\mathbf{1}, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L(n) z^{-n-2}. \tag{2.7.15}$$

Tada se pomoću teorema o generirajućim poljima 2.6.1 može pokazati da Vir^c ima strukturu verteks algebre generirane poljem (2.7.15). Izraz za Y na općenitom vektoru iz Vir^c se tada dobiva iz propozicije 5.1.2. Štoviše, može se pokazati da je $(\mathrm{Vir}^c, Y, \mathbf{1}, L(-2)\mathbf{1})$ algebra verteks operatora, kao i da je jako generirana s konformnim vektorom $L(-2)\mathbf{1}$. Vir^c tada zovemo **univerzalna Virasorova algebra verteks operatora** centralnog naboja c.

Ako je $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ općenita superalgebra verteks operatora centralnog naboja c, tada po propoziciji 2.1.12 imamo homomorfizam superalgebri verteks operatora $\mathrm{Vir}^c \to V$ takav da $L(-2)\mathbf{1} \mapsto \omega \in V$. Slika tog homomorfizma je upravo $\langle \omega \rangle \subseteq V$, podalgebra od V generirana konformnim vektorom.

3. SIMPLEKTIČKI FERMIONI

Simplektički fermioni su se prvo pojavili u fizikalnoj literaturi u člancima H.G. Kauscha [50], H.G. Kauscha i M. Gaberdiela [41], [42], a u matematičkoj literaturi u članku T. Abea [1]. Cilj ovog poglavlja je dati konstrukciju verteks algebre simplektičkih fermiona i njenih modula, te iskazati poznata svojstva tih struktura koja ćemo koristiti u ovom radu.

3.1. KONSTRUKCIJA

U ovoj sekciji ćemo opisati konstrukciju superalgebre verteks operatora $SF(d)$ (zovemo je **superalgebra simplektičkih fermiona**) po [1]. Konstrukcija je slična konstrukciji Heisenbergove verteks algebre (vidi podsekciju 2.7.1) koja kreće od konačnodimenzionalnog vektorskog prostora sa simetričnom nedegeneriranom bilinearnom formom. Razlika je u tome što u ovom slučaju promatramo antisimetričnu nedegeneriranu bilinearnu formu.

Definicija 3.1.1. Bilinearnu formu koja je antisimetrična i nedegenerirana zovemo **simplektička forma**. Uređeni par $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gdje je V vektorski prostor, a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ simplektička forma, zovemo **simplektički vektorski prostor**.

Neka je $(\mathfrak{h}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nenul konačnodimenzionalni simplektički vektorski prostor. Standardni rezultat (vidi npr. poglavlje 15.8 u [55]) kaže da tada moramo imati $\dim\mathfrak{h} = 2d, d \in \mathbb{Z}_{>0}$, te da mora postojati baza $e^1,\ldots,e^d, f^1,\ldots,f^d$ od $\mathfrak{h}$ takva da vrijedi

$$\langle e^i, e^j\rangle = \langle f^i, f^j\rangle = 0,\ \langle e^i, f^j\rangle = -\delta_{ij},$$

za sve $1 \leq i, j \leq d$. Bazu od $\mathfrak{h}$ s ovim svojstvima zvat ćemo **kanonska baza** (u literaturi se još spominju i izrazi **Darbouxova baza** ili **simplektička baza**). Simplektički vektorski prostor dimenzije $2d$ ćemo u daljnjem tekstu označavati sa $\mathfrak{h}_{2d}$.

Iz simplektičkog vektorskog prostora $\mathfrak{h}_{2d}$ možemo konstruirati Liejevu superalgebru $\hat{L}(\mathfrak{h}_{2d}) := \mathfrak{h}_{2d} \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ na sljedeći način:

- $\hat{L}(\mathfrak{h}_{2d})^{\bar{0}} = \mathbb{C}K,\ \hat{L}(\mathfrak{h}_{2d})^{\bar{1}} = \mathfrak{h}_{2d} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$.

- Za $a, b \in \mathfrak{h}_{2d}, m, n \in \mathbb{Z}$ imamo superkomutacijske relacije

$$[a \otimes t^m, b \otimes t^n] = m\langle a, b\rangle \delta_{m+n,0} K. \tag{3.1.1}$$

  Napomena: budući da su elementi $a \otimes t^m, b \otimes t^n$ neparni, u gornjoj relaciji imamo antikomutator.

- K je centralni element, to jest $[K, \hat{L}(\mathfrak{h}_{2d})] = 0$.

Promatrajmo asocijativnu superalgebru

$$\mathscr{A} := U(\hat{L}(\mathfrak{h}_{2d}))/(K-1)$$

(kvocijent po dvostranom idealu generiranom s $K-1$). Budući da je $K-1$ parni element, $\mathbb{Z}_2$-gradacija od $\mathscr{A}$ se nasljeđuje od $U(\hat{L}(\mathfrak{h}_{2d}))$:

$$\mathscr{A}^{\bar{i}} = U(\hat{L}(\mathfrak{h}_{2d}))^{\bar{i}} / \left((K-1) \cap U(\hat{L}(\mathfrak{h}_{2d}))^{\bar{i}}\right),\ i = 0, 1.$$

Označimo s $a(m)$ operator lijevog množenja s $a \otimes t^m + (K-1)$ na $\mathscr{A}$, gdje je $a \in \mathfrak{h}_{2d}, m \in \mathbb{Z}$. Neka je $\mathscr{A}_{\geq 0}$ lijevi ideal od $\mathscr{A}$ generiran s

$$\{a(m)1 : a \in \mathfrak{h}_{2d}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.\}$$

Jedan od glavnih objekata koje ćemo promatrati u ovom radu je lijevi $\mathscr{A}$-modul

$$SF(d) := \mathscr{A}/\mathscr{A}_{\geq 0}.$$

Primijetimo da je lijevi ideal $\mathscr{A}_{\geq 0}$ generiran s neparnim elementima, pa $SF(d)$ nasljeđuje $\mathbb{Z}_2$-gradaciju od $\mathscr{A}$. Preciznije, imamo $SF(d) = SF(d)^{\bar{0}} \oplus SF(d)^{\bar{1}}$, gdje je

$$SF(d)^{\bar{i}} = \mathscr{A}^{\bar{i}} / (\mathscr{A}_{\geq 0} \cap \mathscr{A}^{\bar{i}}), i = 0, 1.$$

Vidimo da operatori $a(m), a \in \mathfrak{h}_{2d}, m \in \mathbb{Z}$ čuvaju $\mathscr{A}_{\geq 0}$, pa induciraju operatore na $SF(d)$ koje ćemo također, radi jednostavnosti, označavati s $a(m)$. Primijetimo da je $SF(d)$ kao supervektorski prostor izomorfan $\Lambda(\mathfrak{h}_{2d} \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}])$. To možemo izreći i na nešto konkretniji ekvivalentan način:

Neka je $B = \{a^1, \ldots, a^{2d}\}$ neka baza od $\mathfrak{h}_{2d}$, tada skup

$$\widetilde{B} = \left\{a^{i_1}(k_1) a^{i_2}(k_2) \ldots a^{i_r}(k_r)\mathbf{1} : r \geq 0, 1 \leq i_j \leq 2d, k_j \in \mathbb{Z}_{<0}\right\} \tag{3.1.2}$$

razapinje $SF(d)$. Za nenul $a = a^{i_1}(k_1)a^{i_2}(k_2)\dots a^{i_r}(k_r)\mathbf{1} \in \widetilde{B}$ ćemo reći da je **monom duljine** r (u elementima iz B).

Sljedeći cilj nam je definirati strukturu superalgebre verteks operatora na $SF(d)$. Stavit ćemo $\mathbf{1} = 1 + \mathscr{A}_{\geq 0}$. Identificirat ćemo $\mathfrak{h}_{2d}$ sa potprostorom od $SF(d)$ preko linearnog ulaganja:

$$a \mapsto a(-1)\mathbf{1}, a \in \mathfrak{h}_{2d}.$$

Definirajmo sada operator

$$Y_0(\cdot,z) : \mathfrak{h}_{2d} \to \mathrm{Hom}(SF(d), SF(d)((z))), a \mapsto Y_0(a,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)z^{-n-1}.$$

Iz komutacijskih relacija (3.1.1) slijedi da za $a,b \in \mathfrak{h}_{2d}$ imamo

$$[Y_0(a,z), Y_0(b,w)] = \langle a,b\rangle \partial_w \left(w^{-1}\delta(z/w)\right) \tag{3.1.3}$$

iz čega slijedi

$$(z-w)^2[Y_0(a,z), Y_0(b,w)] = 0. \tag{3.1.4}$$

Pomoću teorema o generirajućim poljima 2.6.1 se može provjeriti da se Y_0 može na jedinstven način proširiti do operatora

$$Y : SF(d) \to (\mathrm{End}\, SF(d))[[z,z^{-1}]]$$

tako da je $(SF(d), Y, \mathbf{1})$ verteks superalgebra.
Iz propozicije 5.1.2 tada slijedi da za $v = a^{i_1}(-k_1)a^{i_2}(-k_2)\dots a^{i_r}(-k_r)\mathbf{1}$, $a^{i_j} \in \mathfrak{h}_{2d}, k_j \in \mathbb{Z}_{>0}$, imamo

$$Y(v,z) =: \partial^{(k_1-1)}Y(a^{i_1},z)\dots\partial^{(k_r-1)}Y(a^{i_r},z) : . \tag{3.1.5}$$

Napomena 3.1.2. Vrijedi napomenuti da je ova konstrukcija $SF(d)$ poseban slučaj konstrukcije univerzalne afine verteks superalgebre $V^k(\mathfrak{g})$ od (proste ili superkomutativne) Liejeve superalgebre $\mathfrak{g}$ (vidi npr. [46]). Ako promatramo $\mathfrak{h}_{2d}$ kao Liejevu superalgebru uz $\mathfrak{h}_{2d}^{\bar{1}} = \mathfrak{h}_{2d}$ i trivijalni superkomutator, tada je $V^1(\mathfrak{h}_{2d}) \simeq SF(d)$.

Sljedeći korak je definirati konformni vektor u $SF(d)$. Neka je $e^i, f^i, i = 1,\dots,d$ neka kanonska baza od $\mathfrak{h}_{2d}$, i neka je

$$\omega = \sum_{i=1}^{d} e^i_{-1} f^i. \tag{3.1.6}$$

Može se pokazati da ω ne ovisi o izboru kanonske baze. Vrijedi:

$$\omega_0\omega = D\omega,\ \omega_1\omega = 2\omega,\ \omega_2\omega = 0, \omega_3\omega = -d\mathbf{1}$$

i $\omega_n\omega = 0$, za $n \geq 4$. Iz propozicije 2.1.5 slijedi da je ω tada konformni vektor centralnog naboja $-2d$. Označimo $L(n) = \omega_{n+1}$ za $n \in \mathbb{Z}$. Možemo dekomponirati $SF(d)$ u direktnu sumu svojstvenih potprostora za $L(0)$:

$$SF(d) = \bigoplus_{n\geq 0} SF(d)_n$$

(gdje je $SF(d)_n = \{v \in SF(d) : L(0)v = nv\}$). Primijetimo da imamo $SF(d)_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}, SF(d)_1 = \mathfrak{h}_{2d}$. Za $a \in \mathfrak{h}_{2d}$ vrijedi

$$L(0)a = a, L(n)a = 0, n \geq 0$$

Tada su $a \in \mathfrak{h}_{2d}$ primarni vektori konformne težine 1 i vrijedi:

$$[L(m), a_n] = -na_{m+n}.$$

Ako izaberemo neku bazu $B = \{a^1, \dots, a^{2d}\}$ od $\mathfrak{h}_{2d}$, tada skup

$$\widetilde{B}_n = \left\{ a^{i_1}(k_1)a^{i_2}(k_2)\dots a^{i_r}(k_r)\mathbf{1} : \begin{array}{l} r \geq 0, 1 \leq i_j \leq 2d, k_j \in \mathbb{Z}_{<0}, \\ \sum_{j=1}^r k_j = n \end{array} \right\} \tag{3.1.7}$$

razapinje $SF(d)_n$. Iz ovoga se vidi da su vektorski prostori $SF(d)_n$ konačnodimenzionalni. Također, iz dosad navedenog se lako vidi da je $D = L(-1)$. Slijedi da je $(SF(d), Y, \mathbf{1}, \omega)$ superalgebra verteks operatora centralnog naboja $-2d$.

Napomena 3.1.3. U skladu s napomenom 3.1.2, treba napomenuti da je gornja konstrukcija konformnog vektora specijalni slučaj Sugawarine konstrukcije konformnog vektora za univerzalnu afinu verteks superalgebru $V^k(\mathfrak{g})$ (vidi npr. [46]).

Treba spomenuti i jednu lemu koja će nam pomoći kod konstrukcije $SF(d)$-modula.

Lema 3.1.4. Neka je M restringirani $\hat{L}(\mathfrak{h}_{2d})$ modul na kojem K djeluje kao identiteta. Tada M (na prirodan način) ima strukturu $SF(d)$-modula.

Ova lema je standardni rezultat iz teorije lokalnih polja (vidi poglavlje 5 u [56]).

Označavat ćemo

$$SF(d)^+ := SF(d)^{\bar{0}}, SF(d)^- := SF(d)^{\bar{1}}.$$

Tada je $SF(d)^+$ algebra verteks operatora centralnog naboja $-2d$ koju ćemo zvati **algebra simplektičkih fermiona**. Neparni dio $SF(d)^-$ je tada $SF(d)^+$-modul.

Teorem 3.1.5 ([1], Proposition 3.2., Theorem 3.10.)**.** Superalgebra simplektičkih fermiona $SF(d)$ je prosta C_2-konačna VOSA. Algebra simplektičkih fermiona $SF(d)^+$ je prosta C_2-konačna VOA. $SF(d)^-$ je ireducibilan $SF(d)^+$-modul.

3.2. GENERATORI

Neka je $e^1,\dots,e^d,f^1,\dots,f^d$ neka kanonska baza za $\mathfrak{h}_{2d}$. Iz konstrukcije $SF(d)$ je očito da ti vektori (u identifikaciji $\mathfrak{h}_{2d}$ s $SF(d)_1$) čine skup jakih generatora za $SF(d)$. U [1] autor je našao skup jakih generatora za $SF(d)^+$ koji ćemo sada ovdje opisati. Neka su $1 \leq i,j \leq d$, definiramo vektore:

$$
\begin{aligned}
e^{ij} &= e^i_{-1}e^j,\\
f^{ij} &= f^i_{-1}f^j,\\
h^{ij} &= e^i_{-1}f^j,\\
E^{ij} &= \frac{1}{2}\left(e^i_{-2}e^j + e^j_{-2}e^i\right),\\
F^{ij} &= \frac{1}{2}\left(f^i_{-2}f^j + f^j_{-2}f^i\right),\\
H^{ij} &= \frac{1}{2}\left(e^i_{-2}f^j + f^j_{-2}e^i\right).
\end{aligned}
$$

Primijetimo da vrijedi:

$$
\begin{aligned}
e^{ij} &= -e^{ji}, & f^{ij} &= -f^{ji},\\
E^{ij} &= E^{ji}, & F^{ij} &= F^{ji}.
\end{aligned}
$$

Propozicija 3.2.1 ([1], Proposition 3.7, Corollary 3.8)**.** Neka je $e^1,\dots,e^d,f^1,\dots,f^d$ neka kanonska baza za $\mathfrak{h}_{2d}$. Tada je $SF(d)^+$ jako generiran vektorima

$$e^{ij}, f^{ij}, h^{ij}, E^{ij}, F^{ij}, H^{ij}$$

za $1 \leq i,j \leq d$.

Primijetimo da su svi generatori s gornje liste primarni, osim h^{ii} koji su samo kvaziprimarni. Vrijedi $\omega = \sum_{i=1}^d h^{ii}$. Generatore $e^{ij}, f^{ij}, h^{ij} \in SF(d)^+_2$ ćemo zvati **mali generatori**, dok ćemo generatore $E^{ij}, F^{ij}, H^{ij} \in SF(d)^+_3$ zvati **veliki generatori**. Primijetimo da malih generatora ima $2d^2 - d$, a velikih generatora $2d^2 + d$.

Napomena 3.2.2. U slučaju $d = 1$ gornja lista generatora se svodi na $\omega = h^{11}, E = E^{11}, F = F^{11}, H = H^{11}$.

3.3. Automorfizmi i derivacije

Neka je $\mathfrak{h}_{2d}$ simplektički vektorski prostor dimenzije $2d$. Grupu svih operatora u $GL(\mathfrak{h}_{2d})$ koji čuvaju simplektičku formu zovemo **simplektička grupa** i označavamo sa $Sp(2d)$. Familija $Sp(2d)$ je jedna od familija klasičnih Liejevih grupa, i sve te grupe su proste, jednostavno povezane (kompleksne) Liejeve grupe (vidi npr. [65] ili [39] za literaturu iz Liejeve teorije).

U [1] je pokazano da se djelovanje $Sp(2d)$ na $\mathfrak{h}_{2d}$ može na prirodan način proširiti na djelovanje $Sp(2d)$ na $SF(d)$. Konkretno, za $g \in Sp(2d)$, $a^1, \ldots, a^r \in \mathfrak{h}_{2d}, k_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ stavljamo:

$$g(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$$
$$g(a^1_{-k_1} \ldots a^r_{-k_r}\mathbf{1}) = g(a^1)_{-k_1} \ldots g(a^r)_{-k_r}\mathbf{1}.$$

Za $a, b \in \mathfrak{h}_{2d}$ imamo (vidi superkomutacijske relacije (3.1.1))

$$a_0 b = 0, a_1 b = \langle a, b\rangle \mathbf{1}, a_k b = 0, k > 1,$$

pa vrijedi

$$g(a_n b) = g(a)_n g(b), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Također, definicija ω dana u (3.1.6) ne ovisi o izboru kanonske baze, pa je $g(\omega) = \omega$. Budući da $\mathfrak{h}_{2d}$ jako generira $SF(d)$, slijedi da je g automorfizam algebre verteks operatora $SF(d)$. T. Abe je u [1] pokazao da se svi automorfizmi algebre verteks operatora $SF(d)$ mogu dobiti na ovaj način.

Teorem 3.3.1 ([1], Theorem 5.8.)**.** Grupe automorfizama od $SF(d)$ i $SF(d)^+$ su izomorfne $Sp(2d)$, odnosno $Sp(2d)/\{\pm I_{2d}\}$.

Napomena 3.3.2. Podgrupa $\{\pm I_{2d}\}$ je centar od $Sp(2d)$. Element $-I_{2d}$ inducira automorfizam θ koji smo definirali u (2.1.11).

Zbog teorema 3.3.1 možemo identificirati $\mathrm{Aut}\, SF(d)$ s $Sp(2d)$. U daljnjem radu ćemo koristiti tzv. permutacijske automorfizme dane s

$$e^i \mapsto e^{\sigma(i)}, f^i \mapsto f^{\sigma(i)}, \text{ za } \sigma \in S_d$$

(S_d označava permutacijsku grupu na d elemenata) i automorfizme $\tau_i, i = 1, \ldots, d$ dane s

$$\tau_i(e^i) = -f^i, \tau_i(f^i) = e^i, \tau_i(e^j) = e^j, \tau_i(f^j) = f^j,$$

za $j = 1, \ldots, d, j \neq i$.

Kompleksnoj Liejevoj grupi $Sp(2d)$ je pridružena kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{sp}(2d)$ dimenzije $2d^2 + d$. Budući da $Sp(2d)$ djeluje na $SF(d)$ automorfizmima, $\mathfrak{sp}(2d)$ djeluje na $SF(d)$ derivacijama. Ovdje ćemo napisati kako $\mathfrak{sp}(2d)$ djeluje na $\mathfrak{h}_{2d}$. U slučaju $d > 1$ koristit ćemo notaciju iz [39, poglavlje 16]. Neka su $1 \leq i, j \leq d, i \neq j$:

$$
\begin{aligned}
H_i e^k &= \delta_{ik} e^i, & H_i f^k &= -\delta_{ik} f^i \\
X_{ij} e^k &= \delta_{jk} e^i, & X_{ij} f^k &= -\delta_{ik} f^j, \\
Y_{ij} e^k &= 0, & Y_{ij} f^k &= \delta_{jk} e^i + \delta_{ik} e^j, \\
Z_{ij} e^k &= \delta_{jk} f^i + \delta_{ik} f^j, & Z_{ij} f^k &= 0, \\
U_i e^k &= 0, & U_i f^k &= \delta_{ik} e^i, \\
V_i e^k &= \delta_{ik} f^i, & V_i f^k &= 0.
\end{aligned}
$$

U slučaju $d = 1$ vrijedi $SP(2) = SL(2)$ i $\mathfrak{sp}(2) = \mathfrak{sl}(2)$, i pisat ćemo

$$
X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

za standardnu bazu od $\mathfrak{sl}(2)$, koja djeluje na kanonsku bazu od $\mathfrak{h}_2$ kao:

$$
\begin{aligned}
&X.e = 0, X.f = e \\
&T.e = e, T.f = -f \\
&Y.e = f, Y.f = 0.
\end{aligned}
$$

Budući da djelovanje $Sp(2d)$ na $SF(d)$ automorfizmima čuva konformnu težinu, $SF(d)_n$ je $Sp(2d)$-podmodul od $SF(d)$ za sve $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Vektorski prostori $SF(d)_n$ su konačnodimenzionalni, pa slijedi da se svaki od njih rastavlja na direktnu sumu konačnodimenzionalnih ireducibilnih $Sp(2d)$-podmodula. Budući da je $Sp(2d)$ povezana Liejeva grupa, iz Liejeve teorije znamo da je $W \subseteq SF(d)$ $Sp(2d)$-podmodul od $SF(d)$ ako i samo ako je $\mathfrak{sp}(2d)$-podmodul od $SF(d)$. Time smo pokazali sljedeću pomoćnu lemu.

Lema 3.3.3. *$SF(d)$ se kao modul za $Sp(2d)/\mathfrak{sp}(2d)$ rastavlja na direktnu sumu konačnodimenzionalnih ireducibilnih podmodula za $Sp(2d)/\mathfrak{sp}(2d)$.*

3.4. Zakrenuti moduli

U ovoj sekciji ćemo pokazati konstrukciju θ-zakrenutog $SF(d)$-modula iz [1] (konstrukcija je slična konstrukciji zakrenutih verteks operatora u [37]). Taj zakrenuti modul je bitan jer iz njega dobivamo dva ireducibilna modula za $SF(d)^+$.

Neka je $\mathfrak{h}_{2d}$ simplektički vektorski prostor dimenzije $2d$. Iz $\mathfrak{h}_{2d}$ možemo konstruirati Liejevu superalgebru $\hat{L}^\theta(\mathfrak{h}_{2d}) := \mathfrak{h}_{2d} \otimes t^{1/2}\mathbb{C}[t,t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ na sljedeći način:

- $\hat{L}(\mathfrak{h}_{2d})^{\bar{0}} = \mathbb{C}K, \hat{L}(\mathfrak{h}_{2d})^{\bar{1}} = \mathfrak{h}_{2d} \otimes t^{1/2}\mathbb{C}[t,t^{-1}]$.
- Za $a,b \in \mathfrak{h}_{2d}, m,n \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ imamo superkomutacijske relacije
$$[a \otimes t^m, b \otimes t^n] = m\langle a,b\rangle \delta_{m+n,0}K.$$
Napomena: budući da su elementi $a \otimes t^m, b \otimes t^n$ neparni, u gornjoj relaciji imamo antikomutator.
- K je centralni element, to jest $[K, \hat{L}^\theta(\mathfrak{h}_{2d})] = 0$.

Promatrajmo asocijativnu superalgebru

$$\mathscr{A}^\theta := U(\hat{L}^\theta)(\mathfrak{h}_{2d}))/(K-1)$$

(kvocijent po dvostranom idealu generiranom s $K-1$). Budući da je $K-1$ parni element, $\mathbb{Z}_2$-gradacija od $\mathscr{A}^\theta$ se nasljeđuje od $U(\hat{L}^\theta(\mathfrak{h}_{2d}))$. Označimo s $a(m)$ operator lijevog množenja s $a \otimes t^m + (K-1)$ na $\mathscr{A}^\theta$, gdje je $a \in \mathfrak{h}_{2d}, m \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$. Neka je $\mathscr{A}^\theta_{>0}$ lijevi ideal od $\mathscr{A}$ generiran s

$$\{a(m)1 : a \in \mathfrak{h}_{2d}, m \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}.\}$$

Stavimo:

$$SF(d)_\theta := \mathscr{A}^\theta / \mathscr{A}^\theta_{>0}.$$

Primijetimo da imamo izomorfizam vektorskih prostora

$$SF(d)_\theta \simeq \bigwedge(\mathfrak{h}_{2d} \otimes t^{-1/2}\mathbb{C}[t^{-1}]).$$

Budući da je $\mathscr{A}^\theta_{>0}$ generiran s neparnim elementima, $SF(d)_\theta$ nasljeđuje strukturu vektorskog superprostora sa $\mathscr{A}^\theta$, koju ćemo po uzoru na sekciju 3.1 pisati kao:

$$SF(d)_\theta = SF(d)^+_\theta \oplus SF(d)^-_\theta.$$

Preostaje definirati strukturu θ-zakrenutog $SF(d)$-modula na $SF(d)_\theta$. Za $a \in \mathfrak{h}_{2d}$ stavimo:

$$W(a,z) := \sum_{n \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}} a(n) z^{-n-1}.$$

Za $v = a^{i_1}(-k_1)a^{i_2}(-k_2)\dots a^{i_r}(-k_r)\mathbf{1} \in SF(d)$ proširujemo na standardni način:

$$W(v,z) :=: \partial^{(k_1-1)} W(a^1,z)\dots\partial^{(k_r-1)}W(a^k,z). : \tag{3.4.1}$$

Uzmimo sada koeficijente $c_{mn} \in \mathbb{C}, m,n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definirane s

$$\sum_{m,n\geq 0} c_{mn} x^m y^n = -\ln\left(\frac{(1+x)^{1/2}+(1+y)^{1/2}}{2}\right)$$

i promatrajmo operator

$$\Delta(z) = 2\sum_{m,n\geq 0}\sum_{i=1}^{d} c_{mn} e_m^i f_n^i z^{-m-n}$$

na $SF(d)$. Definiramo

$$Y(v,z) := W(e^{\Delta(z)}v,z). \tag{3.4.2}$$

Propozicija 3.4.1 ([1], Proposition 4.1.)**.** Par $(SF(d)_\theta, Y)$ je ireducibilni jaki θ-zakrenuti $SF(d)$-modul. $SF(d)_\theta^+, SF(d)_\theta^-$ su ireducibilni jaki $SF(d)^+$-moduli.

Opišimo djelovanje $SF(d)$ na $SF(d)_\theta$ malo konkretnije. Neka su $a,b \in \mathfrak{h}_{2d}$. Direktnim računom se vidi da vrijedi

$$\begin{aligned}
\Delta(z)a &= 0\\
\Delta(z)a_{-1}b &= 2c_{11}\langle a,b\rangle z^{-2}\\
&= \frac{1}{8}\langle a,b\rangle z^{-2}\\
\Delta(z)a_{-k}b &= 2(c_{1k}+c_{k1})\cdot k\langle a,b\rangle z^{-k-1}.
\end{aligned}$$

Iz ovoga vidimo da na sve generatore od $SF(d)^+$ osim $h^{ii}, i = 1,\dots,d$ operator $\Delta(z)$ djeluje trivijalno. Ako $\Delta(z)$ djeluje trivijalno na $v \in SF(d)$, tada je $Y(v,z) = W(v,z)$. Zbog $\Delta(z)h^{ii} = -\frac{1}{8}z^{-2}$ imamo

$$Y(h^{ii},z) = W(h^{ii},z) - \frac{1}{8}z^{-2}, i = 1,\dots,d.$$

Posebno, tada je

$$Y(\omega,z) = \sum_{i=1}^{d} Y(h^{ii},z) = W(\omega,z) - \frac{d}{8}z^{-2}.$$

Budući da vrijedi

$$[L(m), a(n)] = -na(m+n),\ a \in \mathfrak{h}_{2d}, m \in \mathbb{Z}, n \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z},$$

ako uzmemo $a^1, \dots, a^r \in \mathfrak{h}_{2d}, k_i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ imamo

$$\begin{aligned} L(0)\mathbf{1}_\theta &= -\frac{d}{8}\mathbf{1}_\theta \\ L(0)a^1(-k_1)\dots a^r(-k_r)\mathbf{1}_\theta &= \left(-\frac{d}{8} + \sum_{j=1}^{r} k_j\right) a^1(-k_1)\dots a^r(-k_r)\mathbf{1}_\theta. \end{aligned}$$

Zbog toga imamo sljedeći rastav u svojstvene potprostore za $L(0)$:

$$SF(d)_\theta = \bigoplus_{i=0}^{\infty} (SF(d)_\theta)_{-\frac{d}{8}+\frac{i}{2}}.$$

Također,

$$SF(d)_\theta^+ = \bigoplus_{i=0}^{\infty} (SF(d)_\theta)_{-\frac{d}{8}+i},\ SF(d)_\theta^- = \bigoplus_{i=0}^{\infty} (SF(d)_\theta)_{\frac{-d+4}{8}+i}.$$

3.5. Logaritamski moduli

U ovoj sekciji pratimo T. Abea [1] u konstrukciji reducibilnih nerastavljivih $Z_{\geq 0}$-graduiranih $SF(d)^+$-modula. Postojanje takvog modula je u slučaju $d = 1$ pokazano u [49]. Konstrukcija je slična konstrukciji superalgebre verteks operatora $SF(d)$ kao kvocijenta superalgebre $\mathscr{A}$ i lijevog ideala $\mathscr{A}_{\geq 0}$. Neka je sada $\mathscr{A}_{>0}$ lijevi ideal od $\mathscr{A}$ generiran sa skupom

$$\{a(m)1 : a \in \mathfrak{h}_{2d}, m \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$$

Definirajmo

$$\widehat{SF}(d) := \mathscr{A}/\mathscr{A}_{>0}.$$

Lako se vidi da je $\widehat{SF}(d)$ restringirani $\hat{L}(\mathfrak{h}_{2d})$-modul. Iz leme 3.1.4 tada slijedi da $\widehat{SF}(d)$ ima strukturu $SF(d)$-modula.

Primijetimo da je $\widehat{SF}(d)$ kao vektorski superprostor izomorfan $\bigwedge(\mathfrak{h}_{2d} \otimes C[t^{-1}])$. Stavimo $\hat{\mathbf{1}} = 1 + \mathscr{A}_{>0}$. Tada je $\widehat{SF}(d)$ razapet vektorima oblika $a^1_{n_1} \dots a^r_{n_r}\hat{\mathbf{1}}, a^i \in \mathfrak{h}_{2d}, n_i \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Uočimo da na $\widehat{SF}(d)$ operatori $a_0, a \in \mathfrak{h}_{2d}$ ne djeluju trivijalno (kao što djeluju na $SF(d)$). Posljedica toga je da $L(0)$ ne djeluje poluprosto na $\widehat{SF}(d)$, prema poglavlju 5.1. iz [1] imamo:

$$L(0)_{ss} = \sum_{i=0}^{d} \sum_{n \in \mathbb{Z}/\{0\}} :e^i_{-n} f^i_n: \; L(0)_{nil} = \sum_{i=0}^{d} e^i_0 f^i_0$$

Direktnim računom se vidi da vrijedi

$$(L(0)_{nil})^d = d!\, e^1_0 f^1_0 \dots e^d_0 f^d_0,\; (L(0)_{nil})^{d+1} = 0,$$

to jest, stupanj nilpotentnosti od $L(0)_{nil}$ je jednak $d+1$.

Možemo dekomponirati $\widehat{SF}(d)$ na sumu generaliziranih vektorskih potprostora od $L(0)$:

$$\widehat{SF}(d) = \bigoplus_{n \geq 0} \widehat{SF}(d)_{(n)},$$

gdje je $\widehat{SF}(d)_{(n)} = \{v \in \widehat{SF}(d) : (L(0) - nI)^N v = 0 \text{ za N dovoljno velik}\}$. Tada je $\widehat{SF}(d)$ logaritamski modul od $SF(d)$ nilpotentnog ranga $d+1$.

Vidimo da je $\widehat{SF}(d)_{(0)}$ razapet s vektorima oblika

$$a^1_0 \dots a^r_0 \hat{\mathbf{1}}, a^i \in \mathfrak{h}_{2d}, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

pa ga možemo identificirati s $\Lambda(h)$. Označimo

$${}^r\Lambda(\mathfrak{h}_{2d}) = \mathrm{span}\{a^1_0 \dots a^s_0 \hat{\mathbf{1}} : a^i \in \mathfrak{h}_{2d}, s \geq r\}$$

i stavimo $\widehat{SF}(d)[r]$ za $SF(d)$-podmodul od $\widehat{SF}(d)$ generiran s ${}^r\Lambda(h)$. Zgodno je primijetiti da tada imamo izomorfizam vektorskih prostora

$$\widehat{SF}(d) \simeq \Lambda(\mathfrak{h}_{2d}) \otimes SF(d), \; \widehat{SF}(d)[r] \simeq {}^r\Lambda(\mathfrak{h}_{2d}) \otimes SF(d).$$

Imamo niz $SF(d)$-podmodula

$$0 = \widehat{SF}(d)[2d+1] \subset \widehat{SF}(d)[2d] \subset \ldots \subset \widehat{SF}(d)[0] = \widehat{SF}(d).$$

U [1] je pokazano da vrijedi

$$\widehat{SF}(d)[r]/\widehat{SF}(d)[r+1] \simeq SF(d)^{\oplus \binom{2d}{r}}$$

(kao $SF(d)$-moduli). Posebno, $\widehat{SF}(d)[2d] \simeq SF(d)$.

Ako promatramo $\widehat{SF}(d)$ kao $SF(d)^+$ modul, vidimo da imamo dekompoziciju na direktnu sumu podmodula $\widehat{SF}(d) = \widehat{SF}(d)^+ \oplus \widehat{SF}(d)^-$.

Propozicija 3.5.1 ([1], poglavlje 5)**.**

1. Sokl $SF(d)^+$-modula $\widehat{SF}(d)$ je $SF(d)[2d] \simeq SF(d)^+ \oplus SF(d)^-$.

2. $SF(d)^+$-moduli $\widehat{SF}(d)^{\pm}$ su reducibilni i nerastavljivi.

3. Algebra verteks operatora $SF(d)^+$ nije racionalna.

4. Ako promatramo $\widehat{SF}(d)$ kao $SF(d)^+$-modul, tada vrijedi

$$\Omega(\widehat{SF}(d)) = \widehat{SF}(d)_{(0)} \oplus \widehat{SF}(d)[2d]_{(1)}.$$

3.6. KLASIFIKACIJA IREDUCIBILNIH REPREZENTACIJA

U ovoj kratkoj cjelini dajemo rezultate T. Abea o Zhuovoj algebri od $SF(1)^+$, te klasifikaciji ireducibilnih reprezentacija od $SF(d)^+$ za $d \geq 1$.

Propozicija 3.6.1 ([1], Proposition 4.6.)**.** Vrijedi

$$A(SF(1)^+) \simeq M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}[x]/(x^2) \oplus \mathbb{C}$$

i imamo jednakost dimenzija

$$\dim \mathscr{P}(SF(1)^+) = \dim A(SF(1)^+) = 11.$$

Teorem 3.6.2 ([1], Theorem 4.2.)**.** Neka je $d \geq 1$. Svaki ireducibilni $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduirani $SF(d)^+$-modul je izomorfan jednom od

$$SF(d)^{\pm}, SF(d)_{\theta}^{\pm}.$$

3.7. Veze s ostalim verteks superalgebrama

U ovoj sekciji ćemo proučiti veze (super)algebre simplektičkih fermiona sa ostalim verteks superalgebrama. Prvo ćemo pokazati da se $SF(d)$ ulaže u Cliffordovu verteks superalgebru $F(d)$, a onda ćemo pomoću tog ulaganja pokazati da su algebre verteks operatora $SF(1)^+$ i $\mathscr{W}(2)$ međusobno izomorfne. Oba rezultata su dobro poznata u literaturi (vidi [49], [7], [1]), a navodimo dokaze jer će nam trebati za kasniji rad.

U podsekciji 3.7.3 ćemo navesti rezultat T. Creutziga i A. Linshawa iz [23] o strukturi $Sp(2d)$-invarijantne podalgebre od $SF(d)$.

3.7.1. Ulaganje u Cliffordovu verteks superalgebru

U ovoj cjelini ćemo pokazati da postoji ulaganje verteks superalgebre simplektičkih fermiona $SF(d)$ u Cliffordovu verteks superalgebru $F(d)$. Iz definicije polja (2.7.13) imamo da vrijedi

$$(\psi_i^{\pm})_n = \psi_i^{\pm}(n+\frac{1}{2}).$$

Propozicija 3.7.1. Postoji monomorfizam verteks superalgebri $\iota_d : SF(d) \to F(d)$ takav da vrijedi:

$$\iota_d(e^i) = \psi_i^+(-\frac{3}{2})\mathbf{1} = D\psi_i^+,\ \iota_d(f^i) = \psi_i^-, i = 1, \dots, d. \tag{3.7.1}$$

Također, vrijedi

$$\mathrm{im}(\iota_d) = \bigcap_{i=1}^{d} \ker_{F(d)}\left(\psi_i^-(\frac{1}{2})\right),$$
$$\iota_d(SF(d)^+) = \bigcap_{i=1}^{d} \ker_{F(d)^+}\left(\psi_i^-(\frac{1}{2})\right).$$

Dokaz. Možemo definirati linearno preslikavanje $\iota_d : \mathfrak{h}_{2d} \to F(d)$ prema (3.7.1). Budući da vektori $e^i, f^i, i = 1, \dots, d$ jako generiraju verteks superalgebru $SF(d)$, slijedi da ι_d možemo proširiti do linearnog preslikavanja $SF(d) \to F(d)$ na sljedeći način:

$$\iota_d(a^1_{-k_1} \dots a^r_{-k_r}\mathbf{1}) = \iota_d(a^1)_{-k_1} \dots \iota_d(a^r)_{-k_r}\mathbf{1},$$

gdje je $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k_i \in \mathbb{Z}_{>0}, a^i \in \mathfrak{h}_{2d}$. Da bi pokazali da je ovako definiran ι_d homomorfizam verteks superalgebri, dosta je provjeriti da vrijedi

$$\iota_d(a_n b) = \iota_d(a)_n \iota(b)$$

za sve $n \geq 0, a, b \in \{e^1, \dots, e^d, f^1, \dots, f^d\}$, jer će tada pomoću superkomutatorske formule (2.1.3) biti ispunjeni uvjeti propozicije 2.1.12. Za $n \geq 0$ vrijedi

$$e^i_n f^j = -\delta_{n1}\delta_{ij}\mathbf{1},\ e^i_n e^j = f^i_n f^j = 0.$$

Imamo

$$\iota_d(e^i) = \psi_i^+(-\frac{3}{2})\mathbf{1} = (\psi_i^+)_{-2}\mathbf{1} = D\psi_i^+,\ \iota_d(f^i) = \psi_i^-(-\frac{1}{2})\mathbf{1} = \psi_i^-.$$

Tada možemo računati za $n \geq 0$:

$$\iota_d(e^i)_n\iota_d(f^j) = (D\psi_i^+)_n\psi_j^- = -n\psi_i^+(n-\frac{1}{2})\psi_j^-(-\frac{1}{2})\mathbf{1} = -n\delta_{n1}\delta_{ij}\mathbf{1} = -\delta_{n1}\delta_{ij}\mathbf{1}.$$

Na sličan način se provjeri da je $\iota_d(e^i)_n\iota_d(e^j) = \iota_d(f^i)_n\iota_d(f^j) = 0$. Slijedi da je ι_d homomorfizam verteks superalgebri. Za $n > 0$ i $v \in SF(d)$ imamo:

$$\iota_d(e^i_{-n}v) = n\psi_i^+(-n-\frac{1}{2})\iota_d(v),\ \iota_d(f^i_{-n}v) = \psi_i^-(-n+\frac{1}{2})\iota_d(v). \tag{3.7.2}$$

Iz ovog izraza se vidi ι_d šalje monome u e^i_{-m} i f^j_{-n} u monome u $\psi_i^+(-m-\frac{1}{2})$ i $\psi_j^-(-n+\frac{1}{2})$, za $m,n > 0$. Budući da šalje različite monome u različite monome, slijedi da je ι_d monomorfizam. Također, tada slijedi da je $\mathrm{im}(\iota_d)$ razapet upravo onim monomima u $\psi_i^\pm(r), r < 0$ u kojima se ne pojavljuju elementi $\psi_i^+(-\frac{1}{2}), i = 1, \dots, d$. Tada je

$$\mathrm{im}(\iota_d) = \bigcap_{i=1}^d \ker_{F(d)}\left(\psi_i^-(\frac{1}{2})\right) = \bigcap_{i=1}^d \ker_{F(d)}\left((\psi_i^-)_0\right).$$

■

Slijedi da je

$$\iota_d(\omega) = \sum_{i=1}^d \iota_d(e^i)_{-1}\iota_d(f^i) = \sum_{i=1}^d \psi_i^+(-\frac{3}{2})\psi^-,$$

što odgovara sumi konformnih vektora $\omega_0 \in F(1)$ (vidi formulu (2.7.14)). Tada ako promatramo $F(d)$ kao superalgebru verteks operatora s takvim izborom konformnog vektora, slijedi da je ι_d homomorfizam superalgebri verteks operatora.

Zbog bozon-fermion korespondencije $\beta_d : F(d) \to V_{\mathbb{Z}^d}$ (vidi 2.7.6) slijedi da se $SF(d)$ ulaže i u verteks superalgebru $V_{\mathbb{Z}^d}$. Označimo $\Phi_d = \beta_d \circ \iota_d : SF(d) \to V_{\mathbb{Z}^d}$ Neka je $v_1, \dots, v_d$ ortonormirana baza za rešetku $\mathbb{Z}^d$. Tada imamo da je

$$\Phi_d(e^i) = De^{v_i} = v_i(-1)e^{v_i},\ \Phi_d(f^i) = e^{-v_i}.$$

Korolar 3.7.2. Vrijedi

$$\operatorname{im}(\Phi_d) = \bigcap_{i=1}^{d} \ker_{V_{\mathbb{Z}^d}} \left((e^{-v_i})_0\right),$$

$$(\Phi_d)(SF(d)^+) = \bigcap_{i=1}^{d} \ker_{V^+_{\mathbb{Z}^d}} \left((e^{-v_i})_0\right).$$

Parna verteks podalgebra $V^+_{\mathbb{Z}^d}$ od $V_{\mathbb{Z}^d}$ se može zapisati kao V_L, gdje je L parna podrešetka od $\mathbb{Z}^d$ definirana na sljedeći način

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^{d} n_i v_i \in \mathbb{Z}^d : \sum_{i=1}^{d} n_i \in 2\mathbb{Z} \right\}.$$

Napomena 3.7.3. Nešto drugačije ulaganje (s dokazom) je opisano u trećem poglavlju od [26].

3.7.2. Izomorfizam $SF(1)^+$ i $\mathscr{W}(2)$

U ovoj cjelini ćemo pokazati kako se konstruira izomorfizam algebri verteks operatora $SF(1)^+$ i $\mathscr{W}(2)$. Iskoristit ćemo ulaganje $SF(1)$ u verteks superalgebru $V_{\mathbb{Z}}$. Prvo, prisjetimo se definicije algebre verteks operatora $\mathscr{W}(2)$ iz podsekcije 2.7.3.

Algebra verteks operatora $\mathscr{W}(2)$ je definirana kao podalgebra algebre verteks operatora $V_{\mathbb{Z}\alpha}$, gdje je $\langle \alpha, \alpha \rangle = 4$. Dakle, možemo identificirati $V_{\mathbb{Z}\alpha}$ s parnom podalgebrom $V^+_{\mathbb{Z}} = V_{2\mathbb{Z}} \subseteq V_{\mathbb{Z}}$ tako da stavimo $\alpha = 2v$, gdje je v generator rešetke $\mathbb{Z}$ s $\langle v, v \rangle = 1$. Tada je konformni vektor iz (2.7.12) dan kao

$$\omega_{\mathscr{W}(2)} = \left(\frac{1}{8}\alpha(-1)^2 + \frac{1}{4}\alpha(-2)\right)\mathbf{1} = \left(\frac{1}{2}v(-1)^2 + \frac{1}{2}v(-2)\right)\mathbf{1}$$

i ima centralni naboj $c_2 = -2$. *Screening operatori* su tada dani s

$$Q = e^{\alpha}_0, \ \widetilde{Q} = e^{-v}_0,$$

a triplet algebra kao $\mathscr{W}(2) = \ker_{V_{2\mathbb{Z}}}(\widetilde{Q})$. Po korolaru 3.7.2, u slučaju $d = 1$, imamo upravo

$$\Phi_1(SF(1)^+) = \ker_{V_{2\mathbb{Z}}}(e^{-v}_0) = \ker_{V_{2\mathbb{Z}}}(\widetilde{Q}) = \mathscr{W}(2).$$

Slijedi da su $SF(1)^+$ i $\mathscr{W}(2)$ izomorfni kao verteks algebre. Ostaje provjeriti odgovaraju li konformni vektori pod tim izomorfizmom. Računamo (uz pomoć relacije (2.7.11)):

$$\begin{aligned}\Phi_1(\omega_{SF(1)}) &= \Phi_1(e_{-1}f)\\ &= (De^{\nu})_{-1}e^{-\nu}\\ &= (e^{\nu})_{-2}e^{-\nu}\\ &= S_2(\nu)\mathbf{1}\\ &= \left(\frac{1}{2}\nu(-1)^2+\frac{1}{2}\nu(-2)\right)\mathbf{1}\\ &= \omega_{\mathscr{W}(2)}.\end{aligned}$$

Ovime je dokazana sljedeća propozicija:

Propozicija 3.7.4. Algebre verteks operatora $SF(1)^+$ i $\mathscr{W}(2)$ su izomorfne.

Treba napomenuti da iz druge jednakosti korolara 3.7.2 imamo da je $SF(1)$ izomorfna superalgebri verteks operatora $\ker_{V_{\mathbb{Z}}}(\widetilde{Q})$. Također, pod tim izomorfizmom $SF(1)^-$ završi u $\mathscr{W}(2)$-modulu $\Pi(1) = \mathscr{W}(2).e^{\nu}$. Uspoređivanjem konformnih težina se vidi da $SF(1)^+$-moduli $SF(1)^+_\theta$ i $SF(1)^-_\theta$ odgovaraju $\mathscr{W}(2)$-modulima $\Lambda(2)$ i $\Pi(2)$.

Napomena 3.7.5. Vrijedi:

$$Q\Phi_1(e) = e_0^{2\nu}De^{\nu} = De_0^{2\nu}e^{\nu} = 0 \tag{3.7.3}$$

$$Q\Phi_1(f) = e_0^{2\nu}e^{-\nu} = S_1(2\nu)e^{\nu} = 2De^{\nu} = 2\Phi_1(e) \tag{3.7.4}$$

Tada se direktnim računom može provjeriti da vrijedi

$$\Phi_1(F_{SF(1)}) = F_{\mathscr{W}(2)},\ \Phi_1(H_{SF(1)}) = \frac{1}{4}H_{\mathscr{W}(2)},\ \Phi_1(E_{SF(1)}) = \frac{1}{8}E_{\mathscr{W}(2)}.$$

U podsekciji o triplet algebri 2.7.3 smo vidjeli da su D. Adamović i A. Milas u [7] pokazali da operatori

$$Q, \frac{\alpha(0)}{2}, \phi \in \mathrm{End}(\mathscr{W}(2)$$

daju triplet algebri strukturu $\mathfrak{sl}(2)$-modula. U podsekciji 3.3 smo vidjeli kako je T. Abe u [1] definirao $\mathfrak{sl}(2)$ djelovanje na simplektičke fermione. Prirodno se zapitati je li Φ_1 ujedno i izomorfizam $\mathfrak{sl}(2)$-modula. Iz računa 3.7.4 vidimo da vrijedi $Q\circ\Phi_1 = \Phi_1\circ(2X)$, a lako se vidi da vrijedi i

$$\frac{\alpha(0)}{2}\circ\Phi_1 = \Phi_1\circ T,\ \phi\circ\Phi_1 = \Phi_1\circ\left(\frac{1}{2}Y\right).$$

Dakle, Φ_1 nije homomorfizam $\mathfrak{sl}(2)$-modula (na način na koji su ta djelovanja definirana u [7] i [1]), ali možemo reći da je homomorfizam "do na skaliranje".

3.7.3. Invarijantna podalgebra

Ako je V superalgebra verteks operatora, tada je

$$V^{\mathrm{Aut}\,V} := \{v \in V : g(v) = v, \forall g \in \mathrm{Aut}\,V\}$$

njena podalgebra verteks operatora. Zbog teorema 3.3.1 ćemo pisati $SF(d)^{Sp(2d)} := SF(d)^{\mathrm{Aut}\,SF(d)}$. Zbog automorfizma θ (definiran u 2.1.11) imamo da je $SF(d)^{Sp(2d)} \subseteq SF(d)^{+}$.

Stavimo za $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$J^{2m} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}(e^{i}_{-2m+1}f^{i} - f^{i}_{-2m+1}e^{i}) \in SF(d)^{+}. \tag{3.7.5}$$

Može se provjeriti da ti vektori leže u $SF(d)^{Sp(2d)}$. Primijetimo da je $J^2 = \omega$.

Teorem 3.7.6 ([23], Theorem 3.9.)**.** Skup $\{J^2, \ldots, J^{2d}\}$ je minimalni skup jakih generatora od $SF(d)^{\mathfrak{sp}(2d)}$.

Posebno, u slučaju $d = 1$ je invarijantna podalgebra generirana s ω.

4. ZHUOVA ALGEBRA ZA $SF(d)^+$

Ovo poglavlje je zajednički rad s D. Adamovićem i objavljeno je u časopisu Journal of Algebra [14].

4.1. UVOD

Neka je M $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduirani $SF(d)^+$-modul. Tada je po teoremu 2.4.4 $\Omega(M)$ reprezentacija od $A(SF(d)^+)$ i označit ćemo je s

$$\rho_M : A(SF(d)^+) \to \mathrm{End}(\Omega(M)),\ \rho_M([v]) = o(v).$$

Glavni cilj ovog poglavlja je dokazati sljedeći teorem:

Teorem 4.1.1. Neka je $d \in \mathbb{Z}_{>0}$. Tada je

$$A(SF(d)^+) \simeq \bigoplus_M \mathrm{im}(\rho_M),\ \text{gdje je } M = \widehat{SF}(d)^+, SF(d)^-, SF(d)^+_\theta, SF(d)^-_\theta.$$

Imamo izomorfizme asocijativnih algebri:

$$\mathrm{im}(\rho_{\widehat{SF}(d)^+}) \simeq \Lambda(\mathfrak{h}_{2d})^+, \mathrm{im}(\rho_{SF(d)^+_\theta}) \simeq \mathbb{C}, \mathrm{im}(\rho_{SF(d)^-}) \simeq \mathrm{im}(\rho_{SF(d)^-_\theta}) \simeq M_{2d}(\mathbb{C}).$$

Također, imamo jednakost dimenzija

$$\dim \mathscr{P}(SF(d)^+) = \dim A(SF(d)^+) = 2^{2d-1} + 8d^2 + 1.$$

Primijetimo da se u slučaju $d = 1$ ovaj teorem podudara s tvrdnjama iz propozicije 3.6.1 (koji je dokazao T. Abe u [1]) jer tada imamo izomorfizam asocijativnih algebri dan s:

$$\Lambda(\mathfrak{h}_2)^+ \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}[x]/(x^2)$$
$$e \wedge f \mapsto x + (x^2).$$

Dokaz teorema 4.1.1 ćemo provesti u više koraka. Prvo ćemo u sekciji 4.2 pokazati postojanje epimorfizma asocijativnih algebri

$$\pi_d : A(SF(d)^+) \to \bigoplus_M \mathrm{im}(\rho_M), \text{ za } M = \widehat{SF}(d)^+, SF(d)^-, SF(d)_\theta^+, SF(d)_\theta^-,$$

te vidjeti kako izgledaju $\mathrm{im}(\rho_M)$ za te module. Potom ćemo u sekciji 4.3 naći sustav izvodnica od $\mathscr{P}(SF(d)^+)$ kardinalnosti $2^{2d-1} + 8d^2 + 1$, što će nam dati nejednakost

$$\dim \mathscr{P}(SF(d)^+) \leq 2^{2d-1} + 8d^2 + 1 = \dim\left(\bigoplus_M \mathrm{im}(\rho_M)\right), \tag{4.1.1}$$

za module M kao gore. Tada će zbog općenite nejednakosti $\dim A(V) \leq \dim \mathscr{P}(V)$ za algebre verteks operatora V slijediti da je π_d zapravo izomorfizam, te da imamo jednakost dimenzija

$$\dim \mathscr{P}(SF(d)^+) = \dim A(SF(d)^+) = 2^{2d-1} + 8d^2 + 1.$$

Potom ćemo u sekciji 4.4 vidjeti neke rezultate koji slijede iz teorema 4.1.1. Radi potpunosti, u dodatku 4.5 ćemo navesti djelovanje ρ_M (za ireducibilne M) na generatore od $SF(d)^+$ iz [1].

4.2. Konstrukcija epimorfizma π_d

Prije konstruiranja epimorfizma π_d, dokazat ćemo pomoćnu lemu.

Lema 4.2.1. Imamo izomorfizme asocijativnih algebri:

$$\mathrm{im}(\rho_{\widehat{SF}(d)^+}) \simeq \Lambda(\mathfrak{h}_{2d})^+, \mathrm{im}(\rho_{SF(d)^+_\theta}) \simeq \mathbb{C}, \mathrm{im}(\rho_{SF(d)^-}) \simeq \mathrm{im}(\rho_{SF(d)^-_\theta}) \simeq M_{2d}(\mathbb{C}).$$

Dokaz. Prema propoziciji 2.4.5, ako je M ireducibilan $SF(d)^+$-modul, tada je $\Omega(M)$ ireducibilan $A(SF(d)^+)$-modul i $\Omega(M)$ mora biti najviša komponenta od M. Tada imamo

$$\begin{aligned}
\Omega(SF(d)^-) &= SF(d)_1 = \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbb{C}e^i \oplus \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbb{C}f^i \\
\Omega(SF(d)^+_\theta) &= (SF(d)_\theta)_{-\frac{d}{8}} = \mathbb{C}\mathbf{1}_\theta \\
\Omega(SF(d)^-_\theta) &= (SF(d)_\theta)_{-\frac{d}{8}+\frac{1}{2}} = \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbb{C}e^i_{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_\theta \oplus \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbb{C}f^i_{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_\theta.
\end{aligned}$$

Po teoremu o gustoći, homomorfizmi ρ_M za ireducibilne M su zapravo epimorfizmi, pa imamo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{im}(\rho_{SF(d)^-}) &= \mathrm{End}(\Omega(SF(d)^-)) \simeq M_{2d}(\mathbb{C}) \\
\mathrm{im}(\rho_{SF(d)^+_\theta}) &= \mathrm{End}(\Omega(SF(d)^+_\theta)) \simeq \mathbb{C} \\
\mathrm{im}(\rho_{SF(d)^-_\theta}) &= \mathrm{End}(\Omega(SF(d)^-_\theta)) \simeq M_{2d}(\mathbb{C}).
\end{aligned}$$

Preostaje vidjeti da tvrdnja vrijedi za $M = \widehat{SF}(d)^+$. Iz propozicije 3.5.1 znamo da je $\Omega(\widehat{SF}(d)^+) = \widehat{SF}(d)^+_{(0)}$ (parni dio od $\widehat{SF}(d)_{(0)}$). Prisjetimo se sekcije 3.5, gdje smo vidjeli da je $\widehat{SF}(d)_{(0)}$ razapet s vektorima oblika

$$a^1_0 \dots a^r_0 \hat{\mathbf{1}},\ a^i \in \mathfrak{h}_{2d}, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

te da ga možemo identificirati s $\Lambda(\mathfrak{h}_{2d})$. Na isti način možemo identificirati $\widehat{SF}(d)^+_{(0)}$ s $\Lambda(\mathfrak{h}_{2d})^+$. Direktnim računom se može vidjeti da vrijedi:

$$\rho_{\widehat{SF}(d)^+}([e^{ij}]) = e^i_0 e^j_0,\ \rho_{\widehat{SF}(d)^+}([h^{ij}]) = e^i_0 f^j_0,\ \rho_{\widehat{SF}(d)^+}([f^{ij}]) = f^i_0 f^j_0, \tag{4.2.1}$$

kao i da $\rho_{\widehat{SF}(d)^+}$ šalje velike generatore u 0. Budući da je po propoziciji 2.5.6 Zhuova algebra $A(SF(d)^+)$ generirana slikama jakih generatora od $SF(d)^+$, slijedi da je

$$\mathrm{im}(\rho_{\widehat{SF}(d)^+} \simeq \Lambda(\mathfrak{h}_{2d})^+.$$

$\blacksquare$

Da bi pokazali da pomoću homomorfizama ρ_M možemo konstruirati epimorfizam $\pi_d : A(SF(d)^+) \to \bigoplus_M \mathrm{im}(\rho_M)$ koristit ćemo standardni algebarski rezultat, tzv. Kineski teorem o ostacima za prstene (vidi npr. [45]):

Teorem 4.2.2. Neka je R prsten s jedinicom, i neka su $I_1, I_2, \ldots, I_k$ dvostrani ideali u R. Ako su ti ideali u parovima relativno prosti, tada postoji epimorfizam prstena s jedinicom:

$$\begin{aligned} \pi : R &\to R/I_1 \oplus R/I_2 \oplus \ldots \oplus R/I_k \\ x &\mapsto (x + I_1, x + I_2, \ldots, x + I_k) \end{aligned}$$

te je $\ker \pi = I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_k$.

Sada je sve spremno za konstrukciju epimorfizma π_d.

Propozicija 4.2.3. Postoji epimorfizam asocijativnih algebri

$$\pi_d : A(SF(d)^+) \to \bigoplus_M \mathrm{im}(\rho_M) \text{ gdje je } M = \widehat{SF}(d)^+, SF(d)^-, SF(d)^+_\theta, SF(d)^-_\theta.$$

Dokaz. Da bi iskoristili Kineski teorem, dovoljno je pokazati da su dvostrani ideali $\ker(\rho_M)$ međusobno relativno prosti. Za to, dosta je primijetiti da imamo

$$\rho_{\widehat{SF}(d)^+}([\omega]) = \sum_{i=0}^{d} e_0^i f_0^i \implies [\omega]^{d+1} \in \ker(\rho_{\widehat{SF}(d)^+}) \tag{4.2.2}$$

$$\rho_{SF(d)^-}([\omega]) = I \implies [\omega] - 1 \in \ker(\rho_{SF(d)^-}) \tag{4.2.3}$$

$$\rho_{SF(d)^+_\theta}([\omega]) = \left(\frac{-d}{8}\right) I \implies [\omega] + \frac{d}{8} 1 \in \ker(\rho_{SF(d)^+_\theta}) \tag{4.2.4}$$

$$\rho_{SF(d)^-_\theta}([\omega]) = \left(\frac{-d+4}{8}\right) I \implies [\omega] + \frac{d-4}{8} 1 \in \ker(\rho_{SF(d)^-_\theta}), \tag{4.2.5}$$

te da su svi ti polinomi u $[\omega]$ međusobno relativno prosti. ∎

4.3. SUSTAV IZVODNICA ZA $\mathscr{P}(SF(d)^+)$

Glavni rezultat ovog poglavlja je postojanje sustava izvodnica za $\mathscr{P}(SF(d)^+)$ kardinalnosti $n_d = 2^{2d-1} + 8d^2 + 1$. Opišimo taj sustav izvodnica preciznije. Radi lakšeg zapisa, označit ćemo: $x^i := e^i, x^{i+d} := f^i$, za $1 \le i \le d$. Stavimo

$$B_d^1 := \{x_{-1}^{i_1} \dots x_{-1}^{i_{2k}} \mathbf{1} : 0 \le k \le d,\ 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_{2k} \le 2d\} \subset SF(d)^+,$$

i neka je B_d^2 skup koji sačinjavaju sljedeći vektori iz $SF(d)^+$:

$$\begin{aligned}
&x_{-2}^i x^j, 1 \le i \le j \le 2d\\
&x_{-3}^i x^j, 1 \le i < j \le 2d\\
&x_{-4}^i x^j, 1 \le i \le j \le 2d\\
&x_{-5}^i x^j, 1 \le i < j \le 2d\\
&e_{-7}^1 f^1.
\end{aligned}$$

Lako se vidi da vrijedi $|B_d^1| = 2^{2d-1}$ i $|B_d^2| = 8d^2 + 1$. Teorem koji dokazujemo u ovoj sekciji je:

Teorem 4.3.1. Slika od $B_d := B_d^1 \cup B_d^2$ u $\mathscr{P}(SF(d)^+)$ je sustav izvodnica za $\mathscr{P}(SF(d)^+)$.

Radi jednostavnosti, pisat ćemo $C_2 := C_2(SF(d)^+)$.

4.3.1. Neke relacije u $\mathscr{P}(SF(d)^+)$

U ovoj podsekciji ćemo pokazati neke relacije u $\mathscr{P}(SF(d)^+)$ koje će nam trebati za dokaz teorema 4.3.1. Prvo će nam trebati neki pojmovi iz [1]:

$$B_{m,n}(a,b) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} a_{-m} b_{-n} \mathbf{1}, \tag{4.3.1}$$

za $a, b \in \mathfrak{h}$. U $\mathscr{P}(SF(d)^+)$ vrijede sljedeće relacije:

$$\overline{B_{m,n}(a,b)} = (-1)^{n-1} \overline{B_{m+n-1,1}(a,b)} \tag{4.3.2}$$

$$\overline{B_{m,n}(a,b)} = (-1)^{m+n-1} \overline{B_{m,n}(b,a)}. \tag{4.3.3}$$

Te relacije nam pokazuju da se svaki monom duljine 2 u $SF(d)^+$ može napisati (modulo C_2) kao linearna kombinacija vektora:

$$x_{-n}^i x^j, \text{ gdje je } n \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ neparan i } 1 \le i < j \le 2d,$$

$$x_{-n}^i x^j, \text{ gdje je } n \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ paran i } 1 \le i \le j \le 2d.$$

Trebat će nam neke relacije iz dokaza propozicije 3.12 iz [1]:

$$(\overline{e^i_{-m}f^i}) \cdot (\overline{e^i_{-k}f^i}) = mk\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{k+1}\right)\binom{m+k}{k}\overline{e^i_{-m-k-1}f^i} \tag{4.3.4}$$

$$\overline{e^i_{-6}e^i} = \overline{0} \tag{4.3.5}$$

$$\overline{e^i_{-9}f^i} = \overline{0} \tag{4.3.6}$$

Sada smo spremni za dokaz jedne važne leme.

Lema 4.3.2. U $\mathscr{P}(SF(d)^+)$ imamo

$$(\overline{h^{ii} - h^{jj}})^3 = \overline{0} \tag{4.3.7}$$

$$(\overline{h^{ii} + h^{jj}})^3 = 12(\overline{h^{ii} + h^{jj}}) \cdot \overline{h^{ii}} \cdot \overline{h^{jj}}. \tag{4.3.8}$$

za $1 \leq i < j \leq d$.

Dokaz. Zbog permutacijskih automorfizama dovoljno je dokazati za slučaj $i = 1, j = 2$. Relacija (4.3.7) će slijediti iz:

$$(\overline{h^{11} - h^{22}}) \cdot \overline{h^{12}} = \overline{0} \tag{4.3.9}$$

$$\overline{h^{12}} \cdot \overline{h^{21}} = \frac{1}{2}(\overline{h^{11} - h^{22}}) \tag{4.3.10}$$

Računamo:

$$\begin{aligned} h^{11}_{-1}h^{12} &= e^1_{-3}f^1_1 e^1_{-1}f^2 \\ &= e^1_{-3}f^2 \\ h^{22}_{-1}h^{12} &= -f^2_{-3}e^2_1 e^1_{-1}f^2 \\ &= -f^2_{-3}e^1 \\ &\overset{(4.3.3)}{=} e^1_{-3}f^2 \quad \mod C_2. \end{aligned}$$

Druga relacija slijedi iz:

$$(\overline{h^{ii}})^2 \overset{(4.3.4)}{=} 2\overline{e^i_{-3}f^i}.$$

Za dokaz relacije (4.3.8) označimo

$$Z := (h^{11})_{-1}h^{22} = e^1_{-1}f^1_{-1}e^2_{-1}f^2.$$

Trebamo pokazati:

$$\overline{\varpi}^3 = 12\overline{\varpi} \cdot \overline{Z}.$$

Provjerimo:

$$L(-2)Z = (e^1_{-3}f^1_{-1}e^2_{-1}f^2_{-1} + e^1_{-1}f^1_{-3}e^2_{-1}f^2_{-1} + e^1_{-1}f^1_{-1}e^2_{-3}f^2_{-1} + e^1_{-1}f^1_{-1}e^2_{-1}f^2_{-3})\mathbf{1}$$

i nastavljamo s računom:

$$\begin{aligned}
h^{11}_{-3}h^{22} + h^{22}_{-3}h^{11} &= L(-2)Z + e^1_{-2}f^1_{-2}e^2_{-1}f^2_{-1}\mathbf{1} + e^1_{-1}f^1_{-1}e^2_{-2}f^2_{-2}\mathbf{1} \\
e^{12}_{-3}f^{12} + f^{12}_{-3}e^{12} &= -L(-2)Z - e^1_{-2}f^1_{-1}e^2_{-2}f^2_{-1}\mathbf{1} - e^1_{-1}f^1_{-2}e^2_{-1}f^2_{-2}\mathbf{1} \\
&\quad + \sum_{i=1,2}(e^i_{-5}f^i - f^i_{-5}e^i) \\
h^{12}_{-3}h^{21} + h^{21}_{-3}h^{12} &= -L(-2)Z - e^1_{-2}f^1_{-1}e^2_{-1}f^2_{-2}\mathbf{1} - e^1_{-1}f^1_{-2}e^2_{-2}f^2_{-1}\mathbf{1} \\
&\quad + \sum_{i=1,2}(e^i_{-5}f^i - f^i_{-5}e^i).
\end{aligned}$$

Ako oduzmemo drugu i treću jednadžbu od prve vidimo:

$$3\overline{\varpi}\cdot\overline{Z} + \sum_{\text{sym}}\overline{e^1_{-2}e^2_{-2}f^1_{-1}f^2_{-1}\mathbf{1}} = 2\sum(\overline{e^i_{-5}f^i - f^i_{-5}e^i}),$$

gdje je

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{sym}} e^1_{-2}e^2_{-2}f^1_{-1}f^2_{-1}\mathbf{1} := {}& e^1_{-2}e^2_{-2}f^1_{-1}f^2_{-1}\mathbf{1} + e^1_{-2}e^2_{-1}f^1_{-2}f^2_{-1}\mathbf{1} + e^1_{-2}e^2_{-1}f^1_{-1}f^2_{-2}\mathbf{1} \\
&+ e^1_{-1}e^2_{-2}f^1_{-2}f^2_{-1}\mathbf{1} + e^1_{-1}e^2_{-2}f^1_{-1}f^2_{-2}\mathbf{1} + e^1_{-1}e^2_{-1}f^1_{-2}f^2_{-2}\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Zbog

$$L(-1)^2Z = 2L(-2)Z + 2\sum_{\text{sym}} e^1_{-2}e^2_{-2}f^1_{-1}f^2_{-1}\mathbf{1},$$

možemo pojednostaviti:

$$\overline{\varpi}\cdot\overline{Z} = \sum(\overline{e^i_{-5}f^i - f^i_{-5}e^i}) \overset{(4.3.3)}{=} 2\sum(\overline{e^i_{-5}f^i}).$$

Sada, koristeći relaciju (4.3.4) dobivamo:

$$\overline{\varpi}\cdot\overline{Z} = \frac{1}{9}(\overline{h^{11}}^3 + \overline{h^{22}}^3).$$

Konačno, imamo:

$$\begin{aligned}
\overline{\varpi}^3 &= \overline{h^{11}}^3 + 3\overline{h^{11}}^2\cdot\overline{h^{22}} + 3\overline{h^{11}}\cdot\overline{h^{22}}^2 + \overline{h^{22}}^3 \\
&= \overline{h^{11}}^3 + 3\overline{\varpi}\cdot\overline{Z} + \overline{h^{22}}^3 \\
&= 12\overline{\varpi}\cdot\overline{Z}.
\end{aligned}$$

■

Korolar 4.3.3. U $\mathscr{P}(SF(d)^+)$ za $1 \le i, j \le d$ imamo

$$(\overline{h^{ii}})^4 = (\overline{h^{jj}})^4,$$

što je ekvivalentno s

$$\overline{e^i_{-7} f^i} = \overline{e^j_{-7} f^j}.$$

Dokaz. Ekvivalencija slijedi iz formule (4.3.4) koja kaže da

$$(\overline{h^{ii}})^4 = C \cdot e^i_{-7} f^i,$$

gdje je C neka racionalna konstanta (koja ne ovisi o i). Ako stavimo $z_i := \overline{h^{ii}}$, prethodne dvije leme kažu:

$$\begin{aligned} p(z_i, z_j) &:= (z_i - z_j)^3 = \overline{0} \\ q(z_i, z_j) &:= (z_i + z_j)^3 - 12(z_i + z_j) z_i z_j = \overline{0}. \end{aligned}$$

Tada vrijedi i

$$z_i^4 - z_j^4 = \frac{1}{4}\left(5(z_i + z_j) p(z_i, z_j) + (z_j - z_i) q(z_i, z_j)\right).$$

■

4.3.2. Monomi duljine 2

Cilj ove sekcije je dokazati sljedeću propoziciju.

Propozicija 4.3.4. Svi monomi duljine dva u $SF(d)^+$ se mogu prikazati (modulo C_2) kao linearna kombinacija vektora iz skupa B_d:

$$\begin{aligned} & x^i_{-1} x^j, 1 \le i < j \le 2d \\ & x^i_{-2} x^j, 1 \le i \le j \le 2d \\ & x^i_{-3} x^j, 1 \le i < j \le 2d \\ & x^i_{-4} x^j, 1 \le i \le j \le 2d \\ & x^i_{-5} x^j, 1 \le i < j \le 2d \\ & e^1_{-7} f^1 \end{aligned}$$

Primijetimo da je prvi red u B^1_d, dok ostali redovi leže u B^2_d. Kao što smo već primijetili u podsekciji 4.3.1, zbog relacija (4.3.2) i (4.3.3), svaki se monom duljine dva u $SF(d)^+$ može zapisati (modulo C_2) kao linearna kombinacija vektora:

$$x^i_{-n}x^j,\ n \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ neparan}, 1 \le i < j \le 2d,$$
$$x^i_{-n}x^j,\ n \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ paran}, 1 \le i \le j \le 2d.$$

Sljedeći korak je eliminirati monome s te liste.

Lema 4.3.5. Za $1 \le i \le d$ imamo:

$$e^i_{-k}e^i \equiv 0 \mod C_2,\ \text{za } k \ge 6$$
$$e^i_{-k}f^i \equiv 0 \mod C_2,\ \text{za } k = 6 \text{ i } k \ge 8.$$

Dokaz. Ako koristimo relaciju (4.3.2) imamo:

$$\begin{aligned} h^{ii}_{-1}(e^i_{-k}e^i) &= ke^i_{-k-2}e^i + e^i_{-k}e^i_{-3}\mathbf{1} \\ &\equiv \left(k + \binom{k+1}{2}\right) e^i_{-k-2}e^i \mod C_2 \\ h^{ii}_{-1}(e^i_{-k}f^i) &= ke^i_{-k-2}f^i + e^i_{-k}f^i_{-3}\mathbf{1} \\ &\equiv \left(k + \binom{k+1}{2}\right) e^i_{-k-2}f^i \mod C_2 \end{aligned}$$

Zbog toga vrijedi

$$e^i_{-k}e^i \in C_2 \implies e^i_{-k-2}e^i \in C_2 \tag{4.3.11}$$
$$e^i_{-k}f^i \in C_2 \implies e^i_{-k-2}f^i \in C_2 \tag{4.3.12}$$

Iz relacija (4.3.3) i (4.3.5) vidimo da vrijedi $e^i_{-6}e^i, e^i_{-7}e^i \in C_2$, pa slijedi da je $e^i_{-k}e^i \in C_2$ za $k \ge 6$. Ako koristimo derivaciju $V_i \in \mathfrak{sp}(2d)$ imamo

$$\begin{aligned} C_2 \ni V_i(e^i_{-6}e^i) &= f^i_{-6}e^i + e^i_{-6}f^i \\ &\overset{(4.3.3)}{\equiv} 2e^i_{-6}f^i \mod C_2, \end{aligned}$$

a relacija (4.3.6) kaže da je $e^i_{-9}f^i \in C_2$. Sada zbog (4.3.12) imamo da je $e^i_{-k}f^i \in C_2$ za $k = 6$ i $k \ge 8$. ■

Ako djelujemo s operatorima iz $\mathfrak{sp}(2d)$ na relacije iz prethodne leme, dobivamo da je

$$x^i_{-k}x^j \equiv 0 \mod C_2,\ 1 \le i \le j \le 2d, k = 6 \text{ or } k \ge 8.$$

Za $k = 7$, korolar 4.3.3 kaže da vrijedi

$$e^i_{-7}f^i \equiv e^1_{-7}f^1 \mod C_2,\ 1 \le i \le d.$$

Na sličan način možemo dobiti i:

$$e^i_{-7}e^j \equiv f^i_{-7}f^j \equiv 0 \mod C_2,\ 1 \leq i < j \leq d$$
$$e^i_{-7}f^j \equiv 0 \mod C_2,\ 1 \leq i, j \leq d, i \neq j.$$

Ovime je propozicija 4.3.4 dokazana.

4.3.3. Monomi duljine veće od 2

Neka je $\mathscr{L}^r SF(d)$ vektorski potprostor od $SF(d)$ razapet monomima duljine manje ili jednake r. Radi lakšeg zapisa, stavit ćemo $\mathscr{L}^{r+} := \mathscr{L}^r SF(d) \cap SF(d)^+$. Možemo generalizirati Abeovu definiciju (4.3.1) na

$$B_{m_1,\dots,m_k}(a^1,\dots,a^k) := \frac{(m_1-1)!(m_2-1)!\dots(m_k-1)!}{(\sum m_i - 1)!} a^1_{-m_1}a^2_{-m_2}\dots a^k_{-m_k}\mathbf{1}. \tag{4.3.13}$$

Slično kao u $k=2$ slučaju, imamo

$$L(-1)B_{m_1,\dots,m_k}(a_1,\dots,a_k) = (\sum_{i=1}^k m_i)\cdot \sum_{i=1}^k B_{m_1,\dots,m_i+1,\dots,m_k}(a_1,\dots,a_k) \in C_2. \tag{4.3.14}$$

Pomoću te relacije se možemo ograničiti na monome posebnog oblika.

Lema 4.3.6. Svaki element od $SF^+(d)$ se može zapisati (modulo C_2) kao linearna kombinacija monoma oblika:

$$x^{i_1}_{-n}x^{i_2}_{-1}\dots x^{i_{2k}}_{-1}\mathbf{1}, k \geq 0, n > 0, 1 \leq i_j \leq 2d. \tag{4.3.15}$$

Dokaz. Indukcijom po duljini monoma $2k$. Za $k=0$ je tvrdnja očita, a za $k=1$ tvrdnja slijedi iz propozicije 4.3.4. Neka je sada $k \geq 2$:

Iteriranjem relacije (4.3.14) vidimo da možemo promatrati monome oblika

$$a = x^{i_1}_{-n_1}\dots x^{i_{2k-1}}_{-n_{2k-1}}x^{i_{2k}}.$$

Računamo pomoću asocijatorske formule (vidi [56]):

$$\begin{aligned}
&(x^{i_{2k-1}}_{-n_{2k-1}}x^{i_{2k}})_{-1}(x^{i_1}_{-n_1}\dots x^{i_{2k-2}}_{-n_{2k-2}}\mathbf{1}) \\
&= \sum_{j\geq 0}(-1)^j\binom{-n_{2k-1}}{j}\left(x^{i_{2k-1}}_{-n_{2k-1}-j}x^{i_{2k}}_{-1+j} + (-1)^{-n_{2k-1}}x^{i_{2k}}_{-n_{2k-1}-1-j}x^{i_{2k-1}}_j\right)(x^{i_1}_{-n_1}\dots x^{i_{2k-2}}_{-n_{2k-2}}\mathbf{1}) \\
&= x^{i_{2k-1}}_{-n_{2k-1}}x^{i_{2k}}_{-1}x^{i_1}_{-n_1}\dots x^{i_{2k-2}}_{-n_{2k-2}}\mathbf{1} + u, u \in \mathscr{L}^{(2k-2)+} \\
&= a + u, u \in \mathscr{L}^{(2k-2)+}.
\end{aligned}$$

Koristimo induktivnu hipotezu na $(x^{i_1}_{-n_1}\dots x^{i_{2k-2}}_{-n_{2k-2}}\mathbf{1})$ (kao i činjenicu da (-1)-množenje čuva C_2 prostor) da bi zaključili da možemo gledati samo monome oblika

$$b = x^{i_1}_{-n_1}x^{i_2}_{-n_2}x^{i_3}_{-1}x^{i_4}_{-1}\dots x^{i_{2k-1}}_{-1}x^{i_{2k}}.$$

Napišemo

$$b = (x^{i_{2k-1}}_{-1}x^{i_{2k}})_{-1}(x^{i_1}_{-n_1}x^{i_2}_{-n_2}x^{i_3}_{-1}\dots x^{i_{2k-2}}) + u, u \in \mathscr{L}^{(2k-2)+}$$

i iskoristimo pretpostavku indukcije na $(x^{i_1}_{-n_1}x^{i_2}_{-n_2}x^{i_3}_{-1}\dots x^{i_{2k-2}})$. Time je tvrdnja dokazana. ■

Sada želimo pokazati da monomi oblika (4.3.15) leže u $\operatorname{span}_{\mathbb{C}} B_d + C_2$. Prvo ćemo pokazati to za monome duljine 4.

Lema 4.3.7. Monomi duljine 4 leže u $\operatorname{span}_{\mathbb{C}} B_d + C_2$.

Dokaz. Dokaz je u sekciji 4.3.4. ■

Sada možemo pokazati posljednji korak u dokazu teorema 4.3.1:

Propozicija 4.3.8. Svi monomi iz $SF(d)^+$ duljine veće ili jednake 4 leže u potprostoru

$$\operatorname{span}_{\mathbb{C}} B_d + C_2.$$

Dokaz. Indukcijom po duljini monoma. Baza indukcije (monomi duljine 4) je tvrdnja prethodne leme. Pretpostavimo da su svi monomi duljine manje od $2k$ unutar potprostora $\operatorname{span}_{\mathbb{C}} B_d + C_2$. Zbog leme 4.3.6 se možemo ograničiti na monome oblika

$$x^{i_1}_{-n}x^{i_2}_{-1}\dots x^{i_{2k}}_{-1}\mathbf{1}, n > 0, 1 \le i_j \le 2d.$$

Pišemo

$$x^{i_1}_{-n}x^{i_2}_{-1}\dots x^{i_{2k}}_{-1}\mathbf{1} = (x^{i_{2k-1}}_{-1}x^{i_{2k}})_{-1}(x^{i_1}_{-n}x^{i_2}_{-1}\dots x^{i_{2k-2}}_{-1}\mathbf{1}) + u, u \in \mathscr{L}^{(2k-2)+}.$$

Po pretpostavci indukcije:

$$x = x^{i_1}_{-n}x^{i_2}_{-1}\dots x^{i_{2k-2}}_{-1}\mathbf{1} \in \operatorname{span}_{\mathbb{C}} B_d + C_2.$$

Znači, monom x možemo zapisati (modulo C_2) kao linearnu kombinaciju monoma iz B_d duljine manje od $2k$. Neka je $m_1 \in B^1_d$ duljine $< 2k$. Tada će $(x^{i_{2k-1}}_{-1}x^{i_{2k}})_{-1}m_1$ biti linearna kombinacija jednog monoma iz B^1_d duljine $2k$ i nekih monoma duljine $< 2k$.

Neka je $m_2 \in B^2_d$. Tada će $(x^{i_{2k-1}}_{-1}x^{i_{2k}})_{-1}m_2$ biti linearna kombinacija monoma duljine ≤ 4, a taj slučaj smo već pokazali. ■

Ovime je teorem 4.3.1 dokazan.

4.3.4. Dokaz leme 4.3.7

Cilj ovog dijela je dokazati lemu 4.3.7, to jest, pokazati da svi monomi duljine 4 leže u $\operatorname{span} B_d + C_2$. U dokazu će nam pomoći sljedeća lema:

Lema 4.3.9. Vektorski potprostor $\operatorname{span} B_d + C_2$ je zatvoren na djelovanje $Sp(2d)$ automorfizmima (pa onda i na djelovanje $\mathfrak{sp}(2d)$ derivacijama).

Dokaz. Lako se vidi da je $\operatorname{span} B_d^1$ zatvoren na djelovanje $Sp(2d)$, pa onda i $\operatorname{span} B_d^1 + C_2$ mora biti zatvoren. Iako $\operatorname{span} B_d^2$ nije zatvoren na djelovanje $Sp(2d)$, iz propozicije 4.3.4 se vidi da vrijedi

$$\left(Sp(2d).\operatorname{span} B_d^2\right) + C_2 \subseteq \operatorname{span} B_d + C_2.$$

■

Lema 4.3.6 nam kaže da se možemo ograničiti na promatranje samo monoma oblika

$$x_{-n}^{i_1} x_{-1}^{i_2} x_{-1}^{i_3} x^{i_4},\ n > 0, 1 \leq i_j \leq 2d.$$

Uz pomoć leme 4.3.9 i automorfizama definiranih u sekciji 3.3, možemo se dodatno ograničiti na promatranje samo monoma oblika

$$e_{-n}^1 x_{-1}^{i_1} x_{-1}^{i_2} x^{i_3}, n > 0, 1 \leq i_j \leq 2d.$$

Razdvojit ćemo ovaj problem na više slučaja, ovisno o tome koliko je i_1, i_2, i_3 jednako 1. Odmah vidimo da u slučaju $i_1 = i_2 = i_3 = 1$ ne možemo imati nenul monom.

Slučaj 1: Točno dva od i_1, i_2, i_3 su jednaka 1

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je monom oblika $e_{-n}^1 e_{-1}^1 f_{-1}^1 x^{i_3}$, gdje je $n > 1$ i $i_3 \neq 1$. Korištenjem automorfizama, vidimo da je dovoljno promatrati monome oblika $e_{-n}^1 e_{-1}^1 f_{-1}^1 e^2$, gdje je $n > 1$. Indukcijom ćemo pokazati da se svaki takav monom nalazi u $\mathscr{L}^{2+} + C_2$, što je po propoziciji 4.3.4 podskup od $\operatorname{span} B_d + C_2$. Bazni slučaj se vidi iz

$$C_2 \ni e_{-2}^{12} h^{11} = e_{-2}^1 e_{-1}^2 e_{-1}^1 f^1 + u, u \in \mathscr{L}^{2+}.$$

Neka je sada $n > 2$ i pretpostavimo da je $e_{-k}^1 e_{-1}^1 f_{-1}^1 e^2 \in \mathscr{L}^{2+} + C_2$ za sve $1 < k < n$. Vrijedi sljedeća općenita relacija:

$$h_0^{22} e_{-\ell}^1 e_{-m}^2 e_{-1}^1 f^1 = m e_{-\ell}^1 e_{-m-1}^2 e_{-1}^1 f^1, \ell, m \geq 0. \tag{4.3.16}$$

Primijetimo i da h_0^{22} čuva potprostore $\mathscr{L}^{2+}$ i C_2. Sada možemo napisati

$$C_2 \ni e^{12}_{-n}h^{11} = (e^1_{-n}e^2_{-1} + e^1_{-n+1}e^2_{-2} + \ldots + e^1_{-1}e^2_{-n})e^1_{-1}f^1 + v, v \in \mathscr{L}^{2+}$$

i primijetiti da se pomoću pretpostavke indukcije i relacije (4.3.16) vidi da su svi sumandi osim $e^1_{-n}e^2_{-1}e^1_{-1}f^1$ već u $\mathscr{L}^{2+} + C_2$. Onda slijedi da je i $e^1_{-n}e^2_{-1}e^1_{-1}f^1 \in \mathscr{L}^{2+} + C_2$.

Slučaj 2: točno jedan od i_1, i_2, i_3 **je jednak** 1

Bez smanjenja općenitosti, možemo promatrati monome oblika $e^1_{-n}e^1_{-1}x^{i_2}_{-1}x^{i_3}$ i $e^1_{-n}f^1_{-1}x^{i_2}_{-1}x^{i_3}$ gdje je $n > 1$ i $i_2, i_3 \neq 1$. Također, razlikovat ćemo podslučajeve gdje je $i_2 = i_3$ i one gdje je $i_2 \neq i_3$. Pomoću automorfizama, možemo reducirati na sljedeća četiri podslučaja:

Podslučaj 2.1: $e^1_{-n}e^1_{-1}e^2_{-1}e^3$

Pokazat ćemo indukcijom da vrijedi $e^1_{-n}e^1_{-1}e^2_{-1}e^3$ za $n > 1$. Argument je sličan kao u slučaju 1. Bazni slučaj je pokriven s:

$$e^{13}_{-2}e^{12} = e^1_{-2}e^3_{-1}e^1_{-1}e^2 \in C_2.$$

Pretpostavimo sada da je $n > 2$ i da je $e^1_{-k}e^1_{-1}e^2_{-1}e^3 \in C_2$ za sve $1 < k < n$. Ako upotrijebimo h_0^{33} na tim elementima, slijedi da je $e^1_{-k}e^1_{-1}e^2_{-1}e^3_{-\ell}\mathbf{1} \in C_2$ za sve $\ell > 1$. Zbog toga, ako napišemo:

$$e^{13}_{-n}e^{12} = (e^1_{-n}e^3_{-1} + \ldots + e^1_{-1}e^3_{-n})e^1_{-1}e^2 \in C_2,$$

slijedi da je $e^1_{-n}e^3_{-1}e^1_{-1}e^2 \in C_2$.

Podslučaj 2.2: $e^1_{-n}e^1_{-1}e^2_{-1}e^3$

Ako izračunamo $e^{23}_{-2}(e^1_{-1}f^1), e^{12}_{-2}(e^3_{-1}f^1), e^{13}_{-2}(e^2_{-1}f^1)$ možemo zaključiti da vrijedi

$$e^1_{-2}f^1_{-1}e^2_{-1}e^3, e^1_{-1}f^1_{-1}e^2_{-2}e^3 \in \mathscr{L}^{2+} + C_2. \tag{4.3.17}$$

Sada, ako napišemo

$$C_2 \ni e^{12}_{-3}(e^3_{-1}f^1) = (e^1_{-1}e^2_{-3} + e^1_{-2}e^2_{-2} + e^1_{-3}e^2_{-1})e^3_{-1}f^1 + u, u \in \mathscr{L}^{2+},$$

upotrebom operatora h_0^{22} na relaciji (4.3.17) dobivamo da prva dva sumanda leže u $\mathscr{L}^{2+} + C_2$. Tada slijedi da je $e^1_{-3}f^1_{-1}e^2_{-1}e^3 \in \mathscr{L}^{2+} + C_2$. Možemo nastaviti indukcijom za više n.

Podslučaj 2.3.: $e^1_{-n}e^1_{-1}e^2_{-1}f^2$

Iz dokaza propozicije 4.3.4 znamo da vrijedi $e^1_{-n}e^1 \in C_2$ za sve $n \in \mathbb{N}$ osim $n = 2,4$. Za $n \neq 2,4$ imamo:

$$h^{22}_{-1}(e^1_{-n}e^1) = e^2_{-1}f^2_{-1}e^1_{-n}e^1 = e^1_{-n}e^1_{-1}e^2_{-1}f^2 \in C_2.$$

Za $n = 2$ računamo:

$$e^{12}_{-2}(e^1_{-1}f^2) = e^1_{-2}e^2_{-1}e^1_{-1}f^2 + u, u \in \mathscr{L}^{2+}.$$

Za $n = 4$ rezultat slijedi iz relacija:

$$H^{11}_0(e^1_{-2}e^1_{-1}e^2_{-1}f^2) = 3e^1_{-4}e^1_{-1}e^2_{-1}f^2 + 2e^1_{-2}e^1_{-3}e^2_{-1}f^2$$
$$h^{11}_0(e^1_{-3}e^1_{-1}e^2_{-1}f^2) = 3e^1_{-4}e^1_{-1}e^2_{-1}f^2 + e^1_{-3}e^1_{-2}e^2_{-1}f^2.$$

Podslučaj 2.4: $e^1_{-n}f^1_{-1}e^2_{-1}f^2$

Iz dokaza propozicije 4.3.4 znamo da vrijedi $e^1_{-n}f^1 \in C_2$ za sve $n \in \mathbb{N}$ osim $n = 1,2,3,4,5,7$. Za takve n možemo napisati:

$$h^{22}_{-1}(e^1_{-n}f^1) = e^2_{-1}f^2_{-1}e^1_{-n}f^1 = e^1_{-n}f^1_{-1}e^2_{-1}f^2 \in C_2.$$

Za slučajeve $n = 2,4$ možemo koristiti podslučaj 2.3., skupa s derivacijom $V_1 \in \mathfrak{sp}(2d)$ (za definiciju vidi sekciju 3.3):

$$V_1(e^1_{-n}e^1_{-1}e^2_{-1}f^2) = f^1_{-n}e^1_{-1}e^2_{-1}f^2 + e^1_{-n}f^1_{-1}e^2_{-1}f^2 \overset{(4.3.3)}{\equiv} 2e^1_{-n}f^1_{-1}e^2_{-1}f^2 \mod C_2.$$

Za slučajeve $n = 3,5,7$ možemo iskoristiti relaciju (4.3.4) da pokažemo da u $\mathscr{P}(A(SF(d)^+))$ za neparne n vrijedi:

$$(\overline{h^{11}})^{\frac{n+1}{2}} \cdot \overline{h^{22}} = c_n e^1_{-n}f^1_{-1}e^2_{-1}f^2, c_n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$

Sada možemo iskoristiti relacije (4.3.7) i (4.3.8) (slično kao u dokazu korolara 4.3.3) da bi pokazali da za takve n vrijedi $e^1_{-n}f^1_{-1}e^2_{-1}f^2 \in \mathscr{L}^{2+} + C_2$.

Slučaj 3: Niti jedan od i_1, i_2, i_3 **nije jednak** 1

U slučaju kada su svi i_1, i_2, i_3 različiti, korištenjem automorfizama vidimo da je dovoljno promatrati monome oblika $e^1_{-n}e^2_{-1}e^3_{-1}e^4$ za $n > 1$. Ako promotrimo $e^{ij}_{-2}e^{kl}$, za različite izbore $i, j, k, l \in \{1,2,3,4\}$, dobivamo da je $e^1_{-2}e^2_{-1}e^3_{-1}e^4 \in C_2$. Nastavljamo koristeći relaciju:

$$h^{11}_0(e^1_{-n}e^2_{-1}e^3_{-1}e^4) = ne^1_{-n-1}e^2_{-1}e^3_{-1}e^4.$$

U slučaju kada su neki od i_1, i_2, i_3 jednaki, imamo monome oblika $e^1_{-n}e^i_{-1}f^i_{-1}e^j$ ili $e^1_{-n}e^i_{-1}f^i_{-1}f^j$ za $i \neq j$ i $n > 1$. Sada možemo koristiti permutacijski automorfizam koji odgovara involuciji $1 \leftrightarrow i$, i tako se naći u jednom od prethodno obrađenih slučaja.

4.4. POSLJEDICE

4.4.1. Dimenzija prostora *one-point* funkcija na $SF(d)^+$

U ovoj podsekciji ćemo iskoristiti teorem 4.1.1 da bi dokazali slutnju Y. Arike i K. Nagatoma o dimenziji prostora *one-point* funkcija na $SF(d)^+$ (slutnja 6.3.5. iz [15]). Pojam prostora *one-point* funkcija $\mathscr{C}_1(V)$ pridruženih algebri verteks operatora V uveo je Y. Zhu u [69]. Prvo ćemo kratko podsjetiti na definicije i neke rezultate vezane uz taj pojam, u čemu uglavnom pratimo [62].

Teorem 4.4.1 ([69], Theorem 4.2.1)**.** Neka je $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ algebra verteks operatora centralnog naboja $c \in \mathbb{C}$. Možemo definirati verteks operator $Y[v,z] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_{[n]}z^{-n-1}$ za homogene $v \in V$:

$$Y[v,z] = Y(v, e^z - 1)e^{|v|z} \in \mathrm{End}(V)[[z,z^{-1}]].$$

Tada taj verteks operator definira novu strukturu algebre verteks operatora na V, uz isti vakuum vektor $\mathbf{1}$ i novi konformni element $\tilde{\omega} = \omega - \frac{c}{24}\mathbf{1}$.

Stavit ćemo $L[n] = \tilde{\omega}_{[n+1]}$ i $V_{[n]} = \{v \in V : L[0]v = nv\}$.

Sa $\mathbb{H}$ ćemo označavati gornju kompleksnu poluravninu. Grupa $SL_2(\mathbb{Z})$ djeluje na $\mathbb{H}$ na sljedeći način:

$$\gamma(\tau) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d},\ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), \tau \in \mathbb{H}.$$

Definicija 4.4.2. Za prirodan broj $k > 1$, **Eisensteinove redove** definiramo kao

$$G_2(\tau) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau+n)^2}$$

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z} \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(m\tau+n)^{2k}},\ \text{za } k \geq 2.$$

Također, stavimo

$$E_{2k}(\tau) = \frac{1}{(2\pi i)^{2k}} G_{2k}(\tau).$$

Za G_{2k} ćemo reći da je **Eisensteinov red težine** $2k$ a za E_{2k} da je **normalizirani Eisensteinov red težine** $2k$.

Može se pokazati da su ti redovi konvergentni i definiraju holomorfne funkcije na $\mathbb{H}$. Također, za $k \geq 2$ vrijedi

$$G_{2k}(\gamma(\tau)) = (c\tau + d)^{2k} G_{2k}(\tau), \ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), \tau \in \mathbb{H},$$

što čini Eisensteinove redove G_{2k} za $k \geq 2$ primjerima tzv. modularnih formi. Za dokaze ovih činjenica pogledati neke od monografija o teoriji modularnih formi, npr [28] ili [61].

Teorem 4.4.3 ([28], Theorem 3.5.2). Neka je $k \geq 2$. Tada se Eisensteinov red E_{2k} može zapisati kao polinom (s racionalnim koeficijentima) u E_4 i E_6.

Posebno, tada prsten $\mathbb{C}[E_4, E_6]$ sadrži E_{2k} za svaki $k \geq 2$. Stavit ćemo $V[E_4, E_6] = C[E_4, E_6] \otimes V$. Neka je $O_q(V)$ $\mathbb{C}[E_4, E_6]$-podmodul od $V[E_4, E_6]$ generiran s elementima:

$$\begin{aligned} &1 \otimes u_{[0]} v, \\ &u_{[-2]} v + \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1) E_{2k}(\tau) \otimes u_{[2k-2]} v, \ u, v \in V. \end{aligned}$$

Definicija 4.4.4 ([62], Definition 5.1.). Neka je $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ algebra verteks operatora. Definiramo vektorski prostor $\mathscr{C}_1(V)$ *one-point* funkcija na V kao vektorski prostor funkcija

$$S : V[E_4, E_6] \times \mathbb{H} \to \mathbb{C}$$

koje zadovoljavaju sljedeća svojstva:

1. Za bilo koji $a \in V[E_4, E_6]$, funkcija $S(a, \tau)$ je holomorfna u $\tau \in \mathbb{H}$.

2. Za $f_i \in \mathbb{C}[E_4, E_6], v_i \in V, i = 1, \ldots, k$ imamo:
$$S(\sum_{i=1}^{k} f_i(\tau) \otimes v_i, \tau) = \sum_{i=1}^{k} f_i(\tau) S(v_i, \tau).$$

3. Za $a \in O_q(V)$ vrijedi $S(a, \tau) = 0$.

4. Za $v \in V$ vrijedi
$$S(L[-2]v, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\tau} S(v, \tau) + \sum_{k=1}^{\infty} E_{2k}(\tau) S(L[2k-2]v, \tau).$$

Y. Zhu je u [69][teorem 5.1.1.] pokazao da imamo djelovanje grupe $SL_2(\mathbb{Z})$ na $\mathscr{C}_1(V)$ zadano s

$$\gamma(S)(v, \tau) = \frac{1}{(c\tau + d)^h} S(v, \gamma(\tau)), \ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), v \in V_{[h]}.$$

Jedan od primjera *one-point* funkcija su takozvane funkcije traga. Ako je M jaki modul za algebru verteks operatora V, funkcija traga je zadana s:

$$S^M(v,\tau) = \mathrm{tr}_M\, o(v) q^{L(0)-\frac{c}{24}}.$$

Teorem 4.4.5 ([69], Theorem 5.3.1)**.** Neka je $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ racionalna C_2-konačna algebra verteks operatora, i neka je $M_1,\ldots,M_k$ potpuna lista ireducibilnih jakih modula za V. Tada je prostor *one-point* funkcija $\mathscr{C}_1(V)$ razapet s funkcijama traga $S^{M_i}, i = 1,\ldots,k$.

M. Miyamoto je generalizirao taj teorem za C_2-konačne algebre verteks operatora koje nisu nužno racionalne. Uveo je pojam funkcija pseudotraga i pokazao da je i u tom slučaju prostor one-point funkcija $\mathscr{C}_1(V)$ konačne dimenzije, razapet sa funkcijama pseudotraga (teorem 5.5. u [62]). Za definiciju funkcija pseudotraga vidi poglavlje 3 u [62].

U [15] Y. Arike i K. Nagatomo su proučavali prostor *one-point* funkcija $\mathscr{C}_1(SF(d)^+)$. Konstruirali su $2^{2d-1}+3$ linearno nezavisnih funkcija pseudotraga za $SF(d)^+$ i tako pokazali da vrijedi

$$\dim \mathscr{C}_1(SF(d)^+) \geq 2^{2d-1}+3 \tag{4.4.1}$$

(vidi teorem 6.3.2 u [15]).

Autori su također pokazali da se za C_2-konačne algebre verteks operatora V dimenzija $\mathscr{C}_1(V)$ može odozgora ograničiti pomoću Zhuove algebre $A(V)$. Da bi objasnili njihov rezultat, moramo podsjetiti na pojam simetričnih linearnih funkcionala na algebri.

Definicija 4.4.6. Neka je A asocijativna $\mathbb{C}$-algebra. Za linearni funkcional $\varphi : A \to \mathbb{C}$ kažemo da je **simetrični linearni funkcional** na A ako vrijedi

$$\varphi(ab) = \varphi(ba), \forall a,b \in A.$$

Vektorski prostor simetričnih linearnih funkcionala na A ćemo označavati s S^A.

Kao u [15], za prostor simetričnih funkcionala na Zhuovoj algebri $A(V)$ stavit ćemo $S^V := S^{A(V)}$.

Teorem 4.4.7 ([15], Theorem 3.3.6)**.** Neka je V C_2-konačna algebra verteks operatora. Pretpostavimo da je svaki prosti modul za V beskonačne dimenzije. Tada vrijedi

$$\dim \mathscr{C}_1(V) \leq \dim S^V.$$

U [15], autori su iskoristili taj teorem i to što je Zhuova algebra $A(SF(1)^+)$ bila poznata iz [1], da pokažu da u (4.4.1) vrijedi jednakost dimenzija za $d = 1$, to jest, da je $\dim \mathscr{C}_1(SF(1)^+) = 5$. Sada mi možemo iskoristiti tu metodu, skupa s izrazom za $A(SF(d)^+$ iz teorema 4.1.1, da bi pokazali da u (4.4.1) vrijedi jednakost dimenzija za općeniti d.

Teorem 4.4.8. Za sve $d \geq 1$, vrijedi

$$\dim \mathscr{C}_1(SF(d)^+) = 2^{2d-1} + 3.$$

Dokaz. Zbog teorema 4.4.7 i nejednakosti (4.4.1) je dovoljno pokazati da je $\dim S^{SF(d)^+} = 2^{2d-1} + 3$. Po teoremu 4.1.1,

$$A(SF(d)^+) \simeq \Lambda(\mathfrak{h}_{2d})^+ \oplus M_{2d}(\mathbb{C}) \oplus M_{2d}(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C},$$

pa je tada

$$S^{SF(d)^+} = S^{\Lambda(\mathfrak{h}_{2d})^+} \oplus S^{M_{2d}(\mathbb{C})} \oplus S^{M_{2d}(\mathbb{C})} \oplus S^{\mathbb{C}}.$$

∎

Budući da je $\Lambda(\mathfrak{h}_{2d}^+)$ komutativna algebra, svaki linearni funkcional na njoj je simetričan, pa je

$$\dim S^{\Lambda(\mathfrak{h}_{2d})^+} = \dim \Lambda(\mathfrak{h}_{2d})^+ = 2^{2d-1}.$$

Kod matričnih algebri, svaka simetrična linearna funkcija je proporcionalna tragu, pa je $\dim S^{M_n(\mathbb{C})} = 1$ za svaki $n \geq 1$. Rezultat slijedi.

4.4.2. Još neka svojstva

Prvo, nekoliko jednostavnih posljedica teorema 4.1.1.

Korolar 4.4.9.

1. Slika od B_d u $\mathscr{P}(SF(d)^+)$ je baza za $\mathscr{P}(SF(d)^+)$.

2. Vrijedi $\operatorname{gr} A(SF(d)^+) \simeq \mathscr{P}(SF(d)^+)$.

3. Minimalni polinom od $[\omega] \in A(SF(d)^+)$ je

$$m_d(x) = x^{d+1}(x-1)\left(x + \frac{d}{8}\right)\left(x + \frac{d}{8} - \frac{1}{2}\right).$$

4. Centar algebre $A(SF(d)^+)$ je izomorfan

$$\Lambda(\mathfrak{h}_{2d})^+ \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi iz teorema 4.3.1 i jednakosti dimenzija $A(SF(d)^+)$ i $\mathscr{P}(SF(d)^+)$. Zbog te jednakosti dimenzija, vidimo da je epimorfizam algebri

$$\mathscr{P}(SF(d)^+) \to \mathrm{gr}A(SF(d)^+)$$

iz propozicije 2.5.4 zapravo izomorfizam, što nam daje drugu tvrdnju. Minimalni polinom m_d iz treće tvrdnje se dobije kao najmanji zajednički višekratnik minimalnih polinoma od $\rho_M([\omega])$, za

$M = \widehat{SF}(d)^+, SF(d)^-, SF(d)^+_\theta, SF(d)^-_\theta$ (vidi sekciju 4.2). Četvrta tvrdnja se vidi direktno iz teorema 4.1.1. ∎

Neka je s_d stupanj nilpotentnosti od $\overline{\omega} \in \mathscr{P}(SF(d)^+)$. Iz druge i treće tvrdnje korolara imamo da mora biti $s_d \leq \deg m_d = d+4$. Možemo dobiti zatvorenu formulu za s_d.

Propozicija 4.4.10. Vrijedi

$$s_d = \begin{cases} 5, & d \leq 4 \\ d+1, & d \geq 5. \end{cases}$$

Dokaz. Primijetimo da je $e^1_{-7}f^1$ element maksimalne konformne težine u B_d u slučaju kada je $d \leq 4$, a $e^1_{-1}f^1_{-1}e^2_{-1}f^2_{-1}\dots e^d_{-1}f^d$ u slučaju kada je $d \geq 5$. Ta maksimalna konformna težina je $2(s_d - 1)$, pa mora biti

$$(\overline{\omega})^{s_d} = \overline{0}$$

u $\mathscr{P}(SF(d)^+)$. Sada trebamo pokazati da je $(\overline{\omega})^{s_d-1}$ nenul u $\mathscr{P}(SF(d)^+)$. Za $d \leq 4$, koristeći relacije iz podsekcije 4.3.1 možemo izračunati:

$$\begin{aligned}
(\overline{\omega})^4 &= (\overline{h^{11}})^4 \text{ u } \mathscr{P}(SF(1)^+) \\
(\overline{\omega})^4 &= \frac{16}{5}(\overline{h^{11}})^4 \text{ u } \mathscr{P}(SF(2)^+) \\
(\overline{\omega})^4 &= \frac{37}{5}(\overline{h^{11}})^4 \text{ u } \mathscr{P}(SF(3)^+) \\
(\overline{\omega})^4 &= \frac{72}{5}(\overline{h^{11}})^4 + 24\overline{e^1_{-1}f^1_{-1}\dots e^4_{-1}f^4_{-1}} \text{ u } \mathscr{P}(SF(4)^+).
\end{aligned}$$

Iz relacije (4.3.4) slijedi da je

$$(\overline{h^{11}})^4 = 360\overline{e^1_{-7}f^1}.$$

Sada vidimo da u ovim slučajevima možemo pisati $(\overline{\omega})^4$ kao nenul linearnu kombinaciju baznih elemenata (vidi prvu tvrdnju u korolaru 4.4.9).

Za $d \geq 5$, moramo pokazati da je $(\overline{\omega})^d$ nenul u $\mathscr{P}(SF(d)^+)$. Možemo napisati

$$(\overline{\omega})^d = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=d} \frac{d!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} \prod_{i=1}^{m} (\overline{h^{ii}})^{k_i},$$

i iskoristiti relacije iz leme 4.3.2 da bi dobili:

$$\prod_{i=1}^{m} (\overline{h^{ii}})^{k_i} = \overline{0}$$

za sve moguće izbore k_i osim $k_1 = k_2 = \ldots = k_d = 1$. Tada slijedi

$$(\overline{\omega})^d = d!\overline{e^1_{-1} f^1_{-1} \ldots e^d_{-1} f^d} \in \mathscr{P}(SF(d)^+).$$

■

Primijetimo da imamo $s_1 = \deg m_1$, no za $d > 1$ vrijedi $s_d < \deg m_d$. Pogledajmo pobliže slučaj $d = 2$. Uzmimo $Sp(4)$-invarijantni element konformne težine 4 (definiran u (3.7.5)):

$$J^4 = \frac{1}{2}\left((e^1_{-3} f^1 - f^1_{-3} e^1) + (e^2_{-3} f^2 - f^2_{-3} e^2)\right) \in SF(2)^+.$$

Direktnim računom se može provjeriti da u $A(SF(2)^+)$ vrijedi:

$$[J^4] = -\frac{72}{5}[\omega]^5 + 12[\omega]^4 + \frac{29}{10}[\omega]^3. \tag{4.4.2}$$

Znači da možemo zapisati $[\omega]^5$ kao linearnu kombinaciju elemenata nižeg stupnja, pa nam druga tvrdnja u korolaru 4.4.9 kaže da moramo imati $(\overline{\omega})^5 = \overline{0}$.

Budući da su vektori ω i J^4 po teoremu 3.7.6 jaki generatori od $SF(2)^{Sp(4)}$, relaciju (4.4.2) možemo promatrati iz malo drukčije perspektive. Tada su po propoziciji 2.5.6 $[\omega]$ i $[J^4]$ generatori Zhuove algebre $A(SF(2)^{Sp(4)})$, i iz relacije (4.4.2) slijedi da je slika homomorfizma algebri (induciranog ulaganjem $SF(2)^{Sp(4)}$ u $SF(2)^+$)

$$g_2 : A(SF(2)^{Sp(4)}) \to A(SF(2)^+)$$

upravo podalgebra od $A(SF(2)^+)$ generirana s $[\omega]$. Možemo pokazati da se ovo dogodi i za više d.

Propozicija 4.4.11. Slika homomorfizma

$$g_d : A(SF(d)^{Sp(2d)}) \to A(SF(d)^+)$$

je $A(SF(d)^+)^{Sp(2d)}$, $Sp(2d)$-invarijantna podalgebra od $A(SF(d)^+)$. Podalgebra $A(SF(d)^+)^{Sp(2d)}$ je generirana s $[\omega]$, pa je izomorfna $\mathbb{C}[x]/(m_d(x))$.

Dokaz. Direktno se vidi da je

$$\operatorname{im} g_d = \{[v] \in A(SF(d)^+) : v \in SF(d)^{Sp(2d)}.\}$$

Iz leme 3.3.3 slijedi da se $SF(d)^+$ kao modul za $Sp(2d)$ rastavlja na direktnu sumu konačnodimenzionalnih ireducibilnih podmodula. Budući da je $A(SF(d)^+)$ kao modul za $Sp(2d)$ kvocijent od $SF(d)$, slijedi da je

$$A(SF(d)^+)^{Sp(2d)} = \{[v] \in A(SF(d)^+) : v \in SF(d)^{Sp(2d)}\} = \operatorname{im} g_d.$$

Budući da je $Sp(2d)$ povezana Liejeva algebra, iz Liejeve teorije znamo da je $A(SF(d)^+)^{Sp(2d)} = A(SF(d)^+)^{\mathfrak{sp}(2d)}$, pa ćemo nastaviti raditi s Liejevom algebrom $\mathfrak{sp}(2d)$. Označimo sa W podalgebru od $A(SF(d)^+)$ generiranu s $[\omega]$. Konformni vektor ω je invarijantan na djelovanje $\mathfrak{sp}(2d)$, pa W mora biti sadržana u $A(SF(d)^+)^{\mathfrak{sp}(2d)}$. Zbog treće tvrdnje u 4.4.9, imamo

$$W \simeq \mathbb{C}[x]/(m_d(x)),\ \dim W = d+4.$$

Pokazat ćemo da vrijedi $\dim A(SF(d)^+)^{\mathfrak{sp}(2d)} = d+4$. Napišimo

$$A(SF(d)^+) = A_{-\frac{d}{8}} \oplus A_0 \oplus A_{-\frac{d}{8}+\frac{1}{2}} \oplus A_1,$$

gdje je

$$A_\lambda := \{x \in A(SF(d)^+) : ([\omega] - \lambda[\mathbf{1}])^N x = 0,\ \text{for N large enough }\}.$$

Teorem 4.1.1 kaže da imamo

$$A_{-\frac{d}{8}} \simeq \mathbb{C},\ A_0 \simeq \Lambda^{\text{even}}(V_{2d}),\ A_{-\frac{d}{8}+\frac{1}{2}} \simeq A_1 \simeq M_{2d}(\mathbb{C}).$$

Želimo pokazati da su ideali A_λ ujedno i $\mathfrak{sp}(2d)$-podmoduli. Iz opće teorije asocijativnih algebri (vidi npr. [54]), znamo da postoje centralni idempotentni elementi $e_\lambda \in A(SF(d)^+)$ takvi da

$$A_\lambda = A(SF(d)^+)e_\lambda.$$

Iz dekompozicije

$$\mathbb{C}[x]/(m_d(x)) \simeq \mathbb{C}[x]/(x^{d+1}) \oplus \mathbb{C}[x]/(x-1) \oplus \mathbb{C}[x]/(x+d/8) \oplus \mathbb{C}[x]/(x+d/8-1/2),$$

se vidi da e_λ moraju biti polinomi u $[\omega]$. Slijedi da je svaki A_λ ujedno i $\mathfrak{sp}(2d)$-podmodul.

Očito je da je $A_{-\frac{d}{8}}$ trivijalan $\mathfrak{sp}(2d)$-modul. Ako pogledamo najniže nivoe $SF(d)^-$ i $SF(d)^-_\theta$ možemo vidjeti da i A_1 i $A_{-d/8+1/2}$ imaju bazu oblika

$$e_\lambda * [x],\ \lambda = 1, -d/8+1/2$$

gdje x trči po jakim generatorima od $SF(d)^+$. Lako je provjeriti da je vektorski prostor razapet velikim generatorima od $SF(d)^+$ $\mathfrak{sp}(2d)$-podmodul izomorfan $\mathrm{Sym}^2(V_{2d})$, kao i da je linearan prostor razapet malim generatorima $\mathfrak{sp}(2d)$-podmodul izomorfan $\Lambda^2(V_{2d})$. Sada, po [39] imamo da je $\mathrm{Sym}^2(V_{2d})$ ireducibilni $\mathfrak{sp}(2d)$-modul, te da se $\Lambda^2(V_{2d})$ rastavlja kao

$$\Lambda^2(V_{2d}) \simeq U \oplus \mathbb{C},$$

gdje je U ireducibilni $\mathfrak{sp}(2d)$-modul (trivijalni dio odgovara $\mathbb{C}\omega$). Imamo

$$\dim A_1^{\mathfrak{sp}(2d)} = \dim A_{-d/8+1/2}^{\mathfrak{sp}(2d)} = 1.$$

Za A_0, lako se vidi da ima bazu oblika

$$e_0 * [x], x \in B_d^1,$$

te da vrijedi

$$A_0 \simeq \bigoplus_{k=0}^{d} \Lambda^{2k}(V_{2d}).$$

Koristimo teorem iz poglavlja 11.6.7 u [65] koji kaže da za $0 \leq 2k \leq d$ imamo rastav

$$\Lambda^{2k}(V_{2d}) \simeq \bigoplus_{i=0}^{k} V_{2d}^{(i)}$$

(gdje je $V_{2d}^{(0)}$ trivijalna reprezentacija, a $V_{2d}^{(i)}$ i-ta fundamentalna reprezentacija). Dobro je poznata činjenica da za $d < 2k \leq 2d$ imamo

$$\Lambda^{2k} V_d \simeq \Lambda^{2d-2k} V_d.$$

Zaključno, za $0 \leq 2k \leq 2d$ imamo

$$\dim(\Lambda^{2k} V_d^{\mathfrak{sp}(2d)}) = 1,$$

što povlači

$$\dim(A_0^{\mathfrak{sp}(2d)}) = d + 1.$$

Kad prosumiramo po svim A_λ, dobivamo

$$\dim((A(SF(d)^+)^{\mathfrak{sp}(2d)}) = d + 4.$$

■

Primijetimo da je za $d > 1$ invarijantna podalgebra $(A(SF(d)^+)^{\mathfrak{sp}(2d)}$ prava podalgebra centra od $A(SF(d)^+)$. To je razlika u odnosu na triplet verteks algebru $\mathscr{W}(p)$, gdje vrijedi $\mathrm{Aut}\,\mathscr{W}(p) = SL(2)$, a invarijantna podalgebra $A(\mathscr{W}(p))^{\mathfrak{sl}(2)}$ je upravo jednaka centru od $A(\mathscr{W}(p))$ (vidi [7], [10]).

4.5. Dodatak: djelovanje ρ_M na generatore

Namjera ovog dodatka je opisati homomorfizme

$$\rho_M : A(SF(d)^+) \to \mathrm{End}(\Omega(M)),\ \rho_M([v]) = o(v),$$

u slučaju kada je M ireducibilni modul od $SF(d)^+$. U tom slučaju $\Omega(M)$ odgovara najvišoj komponenti od M. Po propoziciji 2.5.6 Zhuova algebra $A(SF(d)^+)$ je generirana slikama od jakih generatora od $SF(d)^+$ koje smo opisali u sekciji 3.2. Zbog toga je dovoljno vidjeti kako ρ_M djeluje na njih.

4.5.1. $SF(d)^+$

Najviša komponenta od $SF(d)^+$ je jednodimenzionalna, razapeta vakuum vektorom $\mathbf{1}$ konformne težine 0. Svi jaki generatori djeluju trivijalno.

4.5.2. $SF(d)^-$

Najviša komponenta od $SF(d)^-$ je dimenzije $2d$, razapeta s vektorima $e^k, f^k, 1 \le k \le d$ konformne težine 1. Za $1 \le i, j \le d$, mali generatori djeluju kao:

$$\begin{aligned}
o(e^{ij})e^k &= 0, & o(e^{ij})f^k &= \delta_{ik}e^j - \delta_{jk}e^i \\
o(f^{ij})e^k &= \delta_{jk}f^i - \delta_{ik}f^j, & o(f^{ij})f^k &= 0 \\
o(h^{ij})e^k &= \delta_{jk}e^i, & o(h^{ij})f^k &= \delta_{ik}f^j.
\end{aligned}$$

a veliki generatori kao:

$$\begin{aligned}
o(E^{ij})e^k &= 0, & o(E^{ij})f^k &= -\delta_{ik}e^j - \delta_{jk}e^i \\
o(F^{ij})e^k &= \delta_{jk}f^i + \delta_{ik}f^j, & o(F^{ij})f^k &= 0 \\
o(H^{ij})e^k &= \delta_{jk}e^i, & o(H^{ij})f^k &= -\delta_{ik}f^j.
\end{aligned}$$

4.5.3. $SF(d)^+_\theta$

Najviša komponenta od $SF(d)^+_\theta$ je jednodimenzionalna i razapeta vakuum vektorom $\mathbf{1}_\theta$ konformne težine $-d/8$. Za $1 \le i \le d$ vrijedi

$$o(h^{ii})\mathbf{1}_\theta = -\frac{1}{8}\mathbf{1}_\theta,$$

dok svi ostali jaki generatori djeluju trivijalno.

4.5.4. $SF(d)_\theta^-$

Najviša komponenta od $SF(d)_\theta^-$ je dimenzije $2d$, razapeta s vektorima $e^k_{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_\theta, f^k_{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_\theta$, za $1 \leq k \leq d$, konformne težine $-d/8+1/2$. Radi jednostavnosti, pisat ćemo

$$e^k = e^k_{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_\theta, f^k = f^k_{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_\theta.$$

Za $1 \leq i, j \leq d, i \neq j$, mali generatori djeluju kao:

$$\begin{aligned}
o(e^{ij})e^k &= 0, & o(e^{ij})f^k &= \frac{1}{2}(\delta_{ik}e^j - \delta_{jk}e^i) \\
o(f^{ij})e^k &= \frac{1}{2}(\delta_{jk}f^i - \delta_{i,k}f^j), & o(f^{ij})f^k &= 0 \\
o(h^{ij})e^k &= \frac{1}{2}\delta_{jk}e^i, & o(h^{ij})f^k &= \frac{1}{2}\delta_{ik}f^j, \ (i \neq j) \\
o(h^{ii})e^k &= \frac{1}{2}\delta_{ik}e^i - \frac{1}{8}e^k, & o(h^{i,i})f^k &= \frac{1}{2}\delta_{ik}f^i - \frac{1}{8}f^k.
\end{aligned}$$

Za $1 \leq i, j \leq d$ veliki generatori djeluju kao:

$$\begin{aligned}
o(E^{ij})e^k &= 0, & o(E^{ij})f^k &= -\frac{1}{4}(\delta_{ik}e^j + \delta_{jk}e^i) \\
o(F^{ij})e^k &= \frac{1}{4}(\delta_{jk}f^i + \delta_{ik}f^j), & o(F^{ij})f^k &= 0 \\
o(H^{ij})e^k &= \frac{1}{4}\delta_{jk}e^i, & o(H^{ij})f^k &= -\frac{1}{4}\delta_{ik}f^j.
\end{aligned}$$

.

5. VIŠE ZHUOVE ALGEBRE

U ovom poglavlju ćemo izračunati prvu Zhuovu algebru za superalgebru verteks operatora $SF(1)$, te za njenu podalgebru $SF(1)^+$. Prvo ćemo za općenitu superalgebru verteks operatora V definirati potprostore $\widehat{C_n}(V)$ i pokazati da imaju svojstvo

$$\dim A_n(V) \leq \dim\left(V/\widehat{C_{2n+2}}(V)\right). \tag{5.0.1}$$

Nastavit ćemo na sličan način kao u prethodnom poglavlju. Promatrajući reprezentacije od $SF(1)$, odnosno $SF(1)^+$, ćemo dobiti donju ogradu na dimenziju prve Zhuove algebre. Konkretno ćemo izračunati sustave izvodnica za $V/\widehat{C_{2n+2}}(V)$ i tako iz nejednakosti (5.0.1) dobiti gornju ogradu na dimenziju prve Zhuove algebre. Iskoristit ćemo te ograde da u potpunosti odredimo prvu Zhuovu algebru za $SF(1)$ i $SF(1)^+$.

5.1. KVOCIJENTI $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-GRADUIRANIH VEKTORSKIH PROSTORA

Neka je V $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduirani vektorski prostor: $V = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} V_n$. Svaki nenul element $v \in V$ možemo napisati kao:

$$v = v_n + v_{n-1} + \ldots + v_0,\ v_i \in V_i,\ v_n \neq 0,$$

za neki $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Tada ćemo označiti $\mathrm{top}(v) = v_n$ (za nul-vektor stavljamo $\mathrm{top}(0) = 0$). Neka je sada W (ne nužno graduiran) potprostor od V i označimo s $\pi_W : V \to V/W$ kanonski epimorfizam. Tada kvocijentni potprostor V/W neće nužno biti graduiran, ali će imati (rastuću) filtraciju:

$$\begin{aligned} F^{-1}(V/W) &= 0 \\ F^n(V/W) &= \pi_W\left(\bigoplus_{k=0}^{n} V_k\right). \end{aligned}$$

Možemo promatrati asocirani graduirani vektorski prostor

$$\mathrm{gr}\,(V/W) = \bigoplus_{n\geq 0} F^n(V/W)/F^{n-1}(V/W).$$

Primijetimo da imamo $\bigcup_{n=0}^{\infty} F^n(V/W) = V/W$, iz čega slijedi jednakost dimenzija: $\dim \mathrm{gr}\,(V/W) = \dim V/W$. Označimo

$$\mathrm{top}(W) := \mathrm{span}\{\mathrm{top}(w) : w \in W\}.$$

Možemo definirati linearno preslikavanje $p : V \to \mathrm{gr}(V/W)$ kao direktnu sumu preslikavanja

$$V_n \to F^n(V/W)/F^{n-1}(V/W),\; v \mapsto (v+W) + F^{n-1}(V/W)$$

za $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Očito je p epimorfizam.

Lema 5.1.1. Vrijedi $\mathrm{top}(W) \subseteq \ker p$.

Dokaz. Neka je $v_n \in V_n \cap \mathrm{top}(W)$ nenul. Tada prema definiciji $\mathrm{top}(W)$ postoje $v_i \in V_i,\ 0 \leq i < n$ takvi da je $\sum_{i=0}^{n} v_i \in W$. Tada možemo napisati

$$v_n \equiv -v_{n-1} - \ldots - v_0 \mod W,$$

pa je $v_n \in F^{n-1}(V/W)$. ■

Slijedi da imamo epimorfizam:

$$\bar{p} : V/\mathrm{top}(W) \to \mathrm{gr}(V/W)$$

induciran s p. Pokazali smo:

Propozicija 5.1.2. Uz pretpostavke iz ove sekcije, imamo

$$\dim\,(V/\mathrm{top}(W)) \geq \dim\,(V/W)\,.$$

Također, ako $\{a_i + \mathrm{top}(W) : i \in I\}$ razapinje $V/\mathrm{top}(W)$, tada $\{a_i + W : i \in I\}$ razapinje V/W.

5.2. Više Zhuove (super)algebre i $\widehat{C_n}$-(super)algebre

Neka je $V = \bigoplus_{k=0}^{+\infty} V_k$ superalgebra verteks operatora. Podsjetimo na definiciju n-te Zhuove algebre $A_n(V)$ dane u sekciji 2.4. Vektorski prostor $A_n(V)$ je definiran kao $V/O_n(V)$, gdje je

$$O_n(V) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left(\{a \circ_n b : a, b \in V\}\right) + (L(-1) + L(0))\, V,$$

a za homogeni $a \in V$ i općeniti $b \in V$ je

$$a \circ_n b = \sum_{j \geq 0} \binom{|a|}{j} a_{-2n-2+j} b.$$

Stavimo

$$C_n(V) := \mathrm{span}\{a_{-n} b : a, b \in V\}$$
$$\widehat{C_n}(V) := C_n(V) + L(-1)V.$$

Primijetimo da zbog $L(-1)v = v_{-2}\mathbf{1}, v \in V$ imamo da je $C_2(V) = \widehat{C_2}(V)$.

Vidimo da je u oznakama prethodne sekcije $\widehat{C_{2n+2}}(V) = \mathrm{top}(O_n(V))$. Naime, $O_n(V)$ je po definiciji razapet elementima oblika

$$a \circ_1 b = \sum_{j \geq 0} \binom{|a|}{j} a_{-4+j} b = a_{-4} b + \ldots, a, b \in V, a \text{ homogen.}$$

i

$$(L(-1) + L(0))a = L(-1)a + |a|a, a \in V, a \text{ homogen.}$$

Tada nam propozicija 5.1.2 kaže:

Korolar 5.2.1. Vrijedi

$$\dim V/\widehat{C_{2n+2}}(V) \geq \dim A_n(V).$$

Također, ako $\{a_i + \widehat{C_{2n+2}}(V) : i \in I\}$ razapinje $V/\widehat{C_{2n+2}}(V)$, tada $\{a_i + O_n(V) : i \in I\}$ razapinje $A_n(V)$.

Zanimaju nas neka svojstva tih prostora.

Propozicija 5.2.2. Za sve $x \in V$:

$$x_0 C_n(V) \subset C_n(V), \tag{5.2.1}$$

$$x_0 \widehat{C_n}(V) \subset \widehat{C_n}(V), \tag{5.2.2}$$

$$x_{-k} C_n(V) \subset C_n(V),\ k = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{5.2.3}$$

$$x_{-n+1} \widehat{C_n}(V) \subset \widehat{C_n}(V) \tag{5.2.4}$$

Dokaz. Za (5.2.1) i (5.2.2) koristimo to što se x_0 ponaša kao derivacija. Neka su x, a, b $\mathbb{Z}_2$-homogeni elementi od V.

$$x_0(a_{-n}b) = (x_0 a)_{-n} b + (-1)^{p(x)p(a)} a_{-n} x_0 b,\ a, b \in V.$$

Neka je sada $k = 1, 2, \ldots, n-1$, a x, y, z $\mathbb{Z}_2$-homogeni elementi od V.

$$\begin{aligned} x_{-k} y_{-n} z &= (-1)^{p(x)p(y)} y_{-n} x_{-k} z + [x_{-k}, y_{-n}] z \\ &= (-1)^{p(x)p(y)} y_{-n} x_{-k} z + \sum_{i \geq 0} \binom{-k}{i} (x_i y)_{-n-k-i} z \\ x_{-k} L_{-1} z &= L_{-1}(x_{-k} z) - [L_{-1}, x_{-k}] z \\ &= L_{-1}(x_{-k} z) + k x_{-k-1} z. \end{aligned}$$

Iz ovog računa slijede preostale dvije relacije. ∎

Iz ove propozicije vidimo da će nam biti lakše raditi s $C_n(V)$, nego s $\widehat{C_n}(V)$.

Propozicija 5.2.3. Vrijedi "asocijativnost":

$$(x_{-n+1} y)_{-n+1} z \equiv x_{-n+1} y_{-n+1} z \mod C_n(V),$$

i "komutativnost":

$$x_{-k} y \equiv (-1)^{k+1} (-1)^{p(x)p(y)} y_{-k} x \mod \widehat{C_n}(V), \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Dokaz. Uzmimo $\mathbb{Z}_2$-homogene $x, y, z \in V$. Za asocijativnost:

$$\begin{aligned} (x_{-n+1} y)_{-n+1} z &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{-n+1}{i} (x_{-n+1-i} y_{-n+1+i} z \pm y_{-2n+2-i} x_i z) \\ &\equiv x_{-n+1} y_{-n+1} z \mod C_n(V). \end{aligned}$$

Za komutativnost, kosa simetrija nam kaže:

$$\begin{aligned} x_{-k} y &= (-1)^{k+1} (-1)^{p(x)p(y)} \sum_{i \geq 0} (-1)^i \frac{L_{-1}^i}{i!} (y_{-k+i} x) \\ &\equiv (-1)^{k+1} (-1)^{p(x)p(y)} y_{-k} x \mod \widehat{C_n}(V). \end{aligned}$$

∎

Dakle, situacija je slična kao za C_2-superalgebre, no nemamo ekvivalent toga što je **1** jedinica, budući da za $n > 1$ imamo $x_{-n}\mathbf{1} \in L(-1)V$. Iz dosad navedenog slijedi:

Propozicija 5.2.4. Neka je V VOSA, neka je $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. $V/\widehat{C_{2n+2}}(V)$ ima strukturu komutativne superalgebre bez jedinice sa množenjem:

$$(a + \widehat{C_{2n+2}}(V)) \cdot (b + \widehat{C_{2n+2}}(V)) = a_{-2n-1}b + \widehat{C_{2n+2}}(V).$$

Konstrukcija je funktorijalna - ako imamo homomorfizam VOSA $f : V \to W$ on na prirodan način inducira homomorfizam superalgebri $\tilde{f} : V/\widehat{C_{2n+2}}(V) \to W/\widehat{C_{2n+2}}(W)$. Bitno je primijetiti i da su $C_n(V)$ i $\widehat{C_n}(V)$ zatvoreni na djelovanje $\mathrm{Aut}V$ i $\mathrm{Der}V$. Prirodno je pitati se kada znamo da su $\widehat{C_n}(V)$-superalgebre konačnodimenzionalne.

Propozicija 5.2.5 ([59], Proposition 4.4.)**.** Neka je V C_2-konačna verteks algebra. Tada je $\dim V/C_n(V) < \infty$ za sve $n \geq 2$.

Budući da je $C_n(V)$ potprostor od $\widehat{C_n}(V)$, slijedi da je u tom slučaju i $\dim V/\widehat{C_n}(V) < \infty$ za sve $n \geq 2$.

5.3. Univerzalna Virasorova VOA

U ovoj sekciji ćemo naći jedan sustav izvodnica za $\widehat{C_4}$-algebru za univerzalnu Virasorovu algebru verteks operatora Vir^c. Ovaj rezultat će nam trebati u sekciji 5.7.

Lema 5.3.1. Skup

$$\{L(-2)^n\mathbf{1}+\widehat{C_4} : n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}\cup\{L(-3)^2L(-2)^n\mathbf{1}+\widehat{C_4} : n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

razapinje $\widehat{C_4}$-algebru za univerzalnu Virasorovu VOAu Vir^c (neovisno o centralnom naboju c).

Dokaz. Treba primijetiti da komutatori od $L(-2), L(-3), L(-4)$ leže u $\bigoplus_{n\leq -5}\mathbb{C}L_n$, pa ti operatori komutiraju modulo $\widehat{C_4}$. Iz definicije $\widehat{C_4}$-algebre je jasno da je razapinju monomi u $L(-4)$, $L(-3), L(-2)$. Deriviranjem monoma $L(-3)^{m+1}L(-2)^n\mathbf{1}$ sa $L(-1)$ se dobiva relacija

$$L(-4)L(-3)^mL(-2)^n\mathbf{1}\equiv -\frac{n}{2(m+1)}L(-3)^{m+2}L(-2)^{n-1}\mathbf{1}\mod \widehat{C_4}. \tag{5.3.1}$$

Ako djelujemo na ovu relaciju s $L(-4)$, zbog relacije (5.2.4), dobijemo da $\widehat{C_4}$-algebru razapinju monomi u $L(-3)$ i $L(-2)$. Vrijedi:

$$L(-3)L(-2)^n\mathbf{1}\equiv\frac{1}{n+1}L(-1)L(-2)^{n+1}\mathbf{1}\equiv 0\mod \widehat{C_4}, \tag{5.3.2}$$

a daljnjim množenjem ove relacije s $L(-4)$, uz pomoć relacije (5.3.1) se vidi da za $m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ vrijedi

$$L(-3)^{2m+1}L(-2)^n\mathbf{1}\equiv 0\mod \widehat{C_4}. \tag{5.3.3}$$

Sada računamo:

$$\begin{aligned} L(-4)L(-2)\mathbf{1} &\overset{(5.3.1)}{\equiv} -\frac{1}{2}L(-3)^2\mathbf{1}\mod \widehat{C_4}\\ L(-4)^2L(-2)\mathbf{1} &\overset{(5.2.4)}{\equiv} -\frac{1}{2}L(-4)L(-3)^2\mathbf{1}\overset{(5.3.1)}{\equiv} 0\mod \widehat{C_4}. \end{aligned}$$

Slijedi da je za $n\geq 2$ $L(-4)^nL(-2)\mathbf{1}\in\widehat{C_4}$. Tada zbog relacije (5.3.1) imamo da vrijedi

$$L(-3)^{m+6}L(-2)^n\mathbf{1}\in\widehat{C_4}, m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{5.3.4}$$

Sada imamo da je $\widehat{C_4}$-algebra razapeta slikama monoma

$$L(-2)^n, L(-3)^2L(-2)^n, L(-3)^4L(-2)^n, n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Preostaje nam eliminirati monome oblika $L(-3)^4L(-2)^n, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. To ćemo učiniti uspoređivanjem umnožaka $(L(-2)\omega)\cdot\omega\cdot L(-2)^n\mathbf{1}$ i $\omega\cdot(L(-2)\omega)\cdot L(-2)^n\mathbf{1}$. Za $n \geq 1$ računamo, uz korištenje relacija (5.2.4) i (5.3.1):

$$\begin{aligned}
(L(-2)\omega)_{-3}L(-4)L(-2)^n\mathbf{1} &\equiv (L(-2)\omega)_{-3}\left(-\frac{n}{2}L(-3)^2L(-2)^{n-1}\right) \mod \widehat{C_4}\\
&\equiv -\frac{n}{2}L(-3)^4L(-2)^{n-1}\mathbf{1} - nL(-4)L(-3)^2L(-2)^n\mathbf{1} \mod \widehat{C_4}\\
&\equiv \left(\frac{n^2}{10}-\frac{n}{2}\right)L(-3)^4L(-2)^{n-1}\mathbf{1} \mod \widehat{C_4}\\
L(-4)(L(-2)\omega)_{-3}L(-2)^n\mathbf{1} &\equiv L(-4)\left(L(-3)^2L(-2)^n + 2L(-4)L(-2)^{n+1}\right)\mathbf{1} \mod \widehat{C_4}\\
&\equiv L(-4)\left(-nL(-3)^2L(-2)^n\right)\mathbf{1} \mod \widehat{C_4}\\
&\equiv \frac{n^2}{6}L(-3)^4L(-2)^{n-1}\mathbf{1} \mod \widehat{C_4}.
\end{aligned}$$

Zbog toga što je množenje u $\widehat{C_4}$-algebri komutativno, slijedi da za $n \geq 1$ moramo imati:

$$\left(\frac{n^2}{10}-\frac{n}{2}\right)L(-3)^4L(-2)^{n-1}\mathbf{1} \equiv \frac{n^2}{6}L(-3)^4L(-2)^{n-1}\mathbf{1} \mod \widehat{C_4}.$$

Tada za $n \geq 1$ vrijedi $L(-3)^4L(-2)^{n-1}\mathbf{1} \in \widehat{C_4}$, čime je dokaz završen. ∎

5.4. Prva Zhuova algebra za $SF(1)$

Glavni cilj ove sekcije je izračunati prvu Zhuovu superalgebru za superalgebru verteks operatora $SF(1)$. Strategija nam je slična kao za računanje Zhuovih algebri za $SF(d)^+$: prvo ćemo promotriti reprezentacije od $SF(1)$, a onda ćemo naći skup izvodnica za $\widehat{C_4}$-algebru od $SF(1)$. Radi lakšeg zapisa, u ovoj cjelini ćemo pisati $SF := SF(1)$, te analogno za ostale vezane oznake.

Napomena 5.4.1. Komentirajmo nultu Zhuovu algebru $A(SF)$. Kad pogledamo $\widehat{SF}$, vidimo da imamo homomorfizam superalgebri

$$\rho_0 : A(SF) \to \mathrm{End}(\widehat{SF}_{(0)}),\ v + O(SF) \mapsto o(v).$$

Lako se provjeri da je njegova slika izomorfna vanjskoj algebri $\Lambda(\mathfrak{h}_2)$ dimenzije 4. S druge strane, C_2-superalgebra je očito razapeta slikama vektora $\mathbf{1}, e, f, \omega = e_{-1}f$, pa slijedi da je $\dim A(SF) \leq 4$. Tada imamo $A(SF) \simeq \Lambda(\mathfrak{h}_2)$.

Navest ćemo jednu lemu koja će nam pomoći u računu.

Lema 5.4.2. U SF i SF_θ vrijede sljedeće komutacijske formule za $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{Z}$, odnosno $n \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
&[E_m, e_n] = 0, && [E_m, f_n] = -n(m+2n-2)e_{m+n-2}\\
&[F_m, e_n] = n(m+2n-2)f_{m+n-2}, && [F_m, f_n] = 0\\
&[H_m, e_n] = \frac{1}{2}n(m+2n-2)e_{m+n-2}, && [H_m, f_n] = -\frac{1}{2}n(m+2n-2)f_{m+n-2}.
\end{aligned}$$

Dokaz. Računamo prvi red pomoću superkomutatorske formule 2.1.3 u slučaju SF. Imamo:

$$[E_m, e_n] = -[e_n, E_m] = -\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} (e_k E)_{n+m-k} = 0$$

jer je $e_k E = 0$ za sve $k \geq 0$. Vrijedi

$$f_0 E = 0,\ f_1 E = -e_{-2}\mathbf{1} = -L(-1)e,\ f_2 E = 2e,\ f_k E = 0, k \geq 3.$$

Tada imamo:

$$\begin{aligned}[E_m, f_n] &= -[f_n, E_m] \\ &= -\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}(f_k E)_{n+m-k} \\ &= n(L(-1)e)_{n+m-1} - 2\binom{n}{2}e_{n+m-2} \\ &= (-n(n+m-1)-n(n-1))\, e_{n+m-2} \\ &= -n(m+2n-2)e_{m+n-2}.\end{aligned}$$

U slučaju SF_θ račun je analogan, uz korištenje zakrenute superkomutatorske formule (2.3.2).

Za ostale redove prolazi sličan račun. ∎

Treba napomenuti da su neki rezultati iz ove leme već otprije poznati u literaturi (vidi npr. korolar 5.1 u [68] gdje se daju komutacijske formule za H), ali je nismo uspjeli naći u potrebnoj općenitosti, pa je zato ovdje dokazujemo.

Po teoremu 2.4.4, $\Omega_1(\widehat{SF})$ je $A_1(SF)$-modul, pa imamo homomorfizam superalgebri

$$\rho_1 : A_1(SF) \to \mathrm{End}(\Omega_1(\widehat{SF})),\ v + O_1(SF) \mapsto o(v).$$

U cjelini 3.5 smo vidjeli da imamo izomorfizam vektorskih prostora

$$\widehat{SF} \simeq \Lambda(\mathfrak{h}_2) \otimes SF_1.$$

Direktnim računom se provjeri da vrijedi $\Omega_1(\widehat{SF}) = \widehat{SF}_{(0)} \oplus \widehat{SF}$, a po propoziciji 2.4.5 su $\widehat{SF}_{(k)}, k = 0,1$ podmoduli od $\Omega_1(\widehat{SF})$.

Označimo sada sa $\mathscr{A}$ podalgebru od $A_1(SF)$ generiranu sa slikama vektora e, f, ω, E, F, H.

Lema 5.4.3. Vrijedi

$$\rho_1(\mathscr{A}) \simeq \Lambda(\mathfrak{h}_2) \oplus (\Lambda(\mathfrak{h}_2 \otimes M_2(\mathbb{C}))$$

(i pritom je ovo direktna suma dvostranih ideala). Posebno,

$$\dim A_1(SF) \geq \dim \mathscr{A} \geq \dim \rho_1(\mathscr{A}) = 20.$$

Dokaz. Primijetimo prvo da se iz leme 5.4.2 vidi da operatori $o(e), o(f)$ komutiraju s $o(E), o(F), o(H)$. Također, operatori $o(e)$ i $o(f)$ generiraju podalgebru izomorfnu $\Lambda(\mathfrak{h}_2)$. Vrijedi:

$$o(\omega)|_{\widehat{SF}_{(0)}} = e_0 f_0,\ o(\omega)|_{\widehat{SF}} = I + e_0 f_0.$$

Tada operator $o(\omega)$ ima minimalni polinom $x^2(x-1)^2$, te je

$$\ker\left(o(\omega)^2\right) = \widehat{SF}_{(0)},\ \ker\left(\left(o(\omega)-I\right)^2\right) = \widehat{SF}.$$

Ako definiramo polinome

$$p_0(x) = (2x+1)(x-1)^2,\ p_1(x) = (-2x+3)x^2,$$

direktnim računom se pokaže da za $i,j = 0,1$ vrijedi

$$p_i(o(\omega))|_{\widehat{SF}_{(j)}} = \delta_{ij} I,$$

to jest, da su operatori $p_i(o(\omega))$ projekcije na potprostor $\widehat{SF}_{(i)}$. Tada su elementi $p_0(o(\omega)), p_1(o(\omega))$ centralni idempotentni elementi u $\rho_1(\mathscr{A})$ i zbog toga se $\rho_1(\mathscr{A})$ rastavlja na direktnu sumu dvostranih ideala generiranih tim elementima:

$$\rho_1(\mathscr{A}) = \langle p_0(o(\omega))\rangle \oplus \langle p_1(o(\omega))\rangle.$$

Iz leme 5.4.2se odmah vidi da operatori $o(E), o(H), o(F)$ djeluju trivijalno na $\widehat{SF}_{(0)}$, pa slijedi da je $\langle p_0(o(\omega))\rangle \simeq \Lambda(\mathfrak{h}_2)$. Također zbog leme 5.4.2 se djelovanje tih operatora na vektore $e_{-1}\widehat{\mathbf{1}}, f_{-1}\widehat{\mathbf{1}}$ se može matrično zapisati kao

$$o(E) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ o(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ o(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Te matrice generiraju matričnu algebru $M_2(\mathbb{C})$. Budući da $o(E), o(H), o(F)$ komutiraju s $o(e), o(f)$, slijedi da je $\langle p_1(o(\omega))\rangle \simeq \Lambda(\mathfrak{h}_2) \otimes M_2(\mathbb{C})$. ■

Sljedeći korak je dobiti gornju ogradu na dimenziju $\widehat{C_4}$-superalgebru od SF. U tom računu će veliku ulogu imati automorfizmi od SF.

Iz teorema 3.3.1 znamo da je $\mathrm{Aut}\, SF = Sp(2) = SL(2)$, pa specijalna Liejeva algebra $\mathfrak{sl}(2)$ djeluje na SF derivacijama. Kao u sekciji 3.3, pisat ćemo

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

za standardna baza za $\mathfrak{sl}(2)$. Budući da $\mathfrak{sl}(2)$ djeluje na SF derivacijama, dosta je napisati djelovanje na jake generatore e, f od SF:

$$X.e = 0, X.f = e$$

$$T.e = e, T.f = -f$$

$$Y.e = f, Y.f = 0.$$

Budući da to djelovanje $\mathfrak{sl}(2)$ komutira s djelovanjem Virasorove algebre Vir, možemo promatrati SF kao modul za Liejevu algebru $\mathfrak{sl}(2)\times \mathrm{Vir}$. Označit ćemo sa $V^{(n)}$ ireducibilni $\mathfrak{sl}(2)$-modul najveće težine n i dimenzije $n+1$. Sa $L(c,h)$ ćemo označavati ireducibilni Vir-modul centralnog naboja c i konformne težine h.

U teoremima 1.1. i 1.2. iz [7], D. Adamović i A. Milas su opisali strukturu triplet algebri $\mathscr{W}(p)$, te modula za $\mathscr{W}(p)$, kao modula za Liejevu algebru $\mathfrak{sl}(2)\times \mathrm{Vir}$. Mi ćemo iskoristiti specijalni slučaj $p=2$ tih teorema da dobijemo strukturu SF kao modula za Liejevu algebru $\mathfrak{sl}(2)\times \mathrm{Vir}$.

Teorem 5.4.4 ([7], Theorem 1.1., Theorem 1.2)**.** Vektori $Q^k e^{-k\nu}\in V_{\mathbb{Z}}, k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ su istovremeno vektori najveće težine k za djelovanje $\mathfrak{sl}(2)$ i primarni vektori konformne težine $\frac{k(k+1)}{2}$ za djelovanje Virasorove algebre. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}\mathscr{W}(2) &= \bigoplus_{k=0}^{\infty} U(\mathfrak{sl}(2)\times \mathrm{Vir}).(Q^{2k}e^{-2k\nu}) \simeq \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{(2k)}\otimes L(-2,k(2k+1))\\ \Pi &= \bigoplus_{k=0}^{\infty} U(\mathfrak{sl}(2)\times \mathrm{Vir}).(Q^{2k+1}e^{-(2k+1)\nu}) \simeq \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{(2k+1)}\otimes L(-2,(k+1)(2k+1)).\end{aligned}$$

U podsekciji 3.7.2 smo vidjeli da pri ulaganju $\Phi_1 : SF\to V_{\mathbb{Z}}$ imamo

$$\Phi_1(SF^+) = \mathscr{W}(2),\ \Phi_1(SF^-) = \mathscr{W}(2).e^{\nu} = \Pi.$$

Definirajmo:

$$\varepsilon_0 = \mathbf{1}, \varepsilon_k = e_{-k}e_{-k+1}\dots e_{-1}\mathbf{1}, k\in\mathbb{Z}_{>0}.$$

Vidimo da je $p(\varepsilon_k)=\overline{k}\in\mathbb{Z}_2$. Lako se provjeri da su vektori ε_k istovremeno vektori najveće težine k za djelovanje $\mathfrak{sl}(2)$ i primarni vektori konformne težine $\frac{k(k+1)}{2}$ za djelovanje Vir.

Lema 5.4.5. Za $k\geq 0$ vrijedi $\Phi_1(\varepsilon_k)=\frac{1}{2^k k!}Q^k e^{-k\nu}$.

Dokaz. Pokažimo indukcijom da je $\Phi_1(f_{-k}f_{-k+1}\dots f_{-1}\mathbf{1}) = e^{-k\nu}$ za $k\geq 1$. Slučaj $k=1$ se vidi direktno iz definicije od Φ. Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za k i računamo:

$$\begin{aligned}\Phi_1(f_{-k-1}f_{-k}\dots f_{-1}\mathbf{1}) &= \Phi_1(f)_{-k-1}\Phi_1(f_{-k}\dots f_{-1}\mathbf{1})\\ &= e^{-\nu}_{-k-1}e^{-k\nu}\\ &= S_0(-\nu)e^{-(k+1)\nu}\\ &= e^{-(k+1)\nu},\end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili relaciju (2.7.11). U napomeni 3.7.5 smo vidjeli da vrijedi $Q \circ \Phi_1 = \Phi_1 \circ (2X)$, a lako se vidi da vrijedi

$$X^k(f_{-k} \dots f_{-1}\mathbf{1}) = k! e_{-k} \dots e_{-1}\mathbf{1} = k! \varepsilon_k.$$

$\blacksquare$

U napomeni 3.7.5 smo vidjeli da je Φ_1 komutira sa djelovanjima $\mathfrak{sl}(2)$ na $\mathscr{W}(2)$ i SF do na množenje skalarom, pa tada vrijedi:

Korolar 5.4.6. Superalgebra verteks operatora SF se kao $\mathfrak{sl}(2) \times \mathrm{Vir}$-modul rastavlja kao:

$$SF = \bigoplus_{k=0}^{\infty} U(\mathfrak{sl}(2) \times \mathrm{Vir}).\varepsilon_k \simeq \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{(k)} \otimes L(-2, \frac{k(k+1)}{2}).$$

Također, imamo:

$$SF^+ = \bigoplus_{k=0}^{\infty} U(\mathfrak{sl}(2) \times \mathrm{Vir}).\varepsilon_{2k} \simeq \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{(2k)} \otimes L(-2, k(2k+1))$$
$$SF^- = \bigoplus_{k=0}^{\infty} U(\mathfrak{sl}(2) \times \mathrm{Vir}).\varepsilon_{2k+1} \simeq \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{(2k+1)} \otimes L(-2, (k+1)(2k+1)).$$

Označimo kanonsku projekciju sa $\pi_{\widehat{C_4}} : SF \to SF/\widehat{C_4}(SF)$. Očito za $k \geq 4$ vrijedi $\varepsilon_k \in C_4$, pa je tada i $U(\mathfrak{sl}(2) \times \mathrm{Vir}).\varepsilon_k \subseteq C_4 \subseteq \widehat{C_4}$. Slijedi da je

$$SF/\widehat{C_4}(SF) = \bigoplus_{i=0}^{3} U(\mathfrak{sl}(2)).\pi_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).\varepsilon_i)) \simeq \bigoplus_{i=0}^{3} V^{(i)} \otimes \pi_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).\varepsilon_i) \tag{5.4.1}$$

Računamo dimenziju $\pi_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).\varepsilon_i)$ za $i = 0, 1, 2, 3$.

Lema 5.4.7. Vrijedi:

$$\dim \pi_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).\varepsilon_0) \leq 4$$
$$\dim \pi_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).\varepsilon_1) \leq 3$$
$$\dim \pi_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).\varepsilon_2) \leq 2$$
$$\dim \pi_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).\varepsilon_3) \leq 1$$

Dokaz. Krećemo odozdo prema gore:

Vektor ε_3: Jasno je da je $L(-n)\varepsilon_3 = L(-n)e_{-3}e_{-2}e \in C_4$ za $n = 2, 3, 4$.

Vektor ε_2: Za $\varepsilon_2 = E$ imamo:

$$\begin{aligned}
L(-2)E &= 2e_{-4}e - e_{-2}e_{-3} \in \widehat{C_4} \\
L(-3)E &= 2e_{-5}e - e_{-2}e_{-4} \in C_4 \\
L(-2)^2E &\equiv L(-4)E \equiv e_{-3}e_{-2}\omega \mod C_4 \\
L(-2)^3E &\equiv L(-6)e_{-2}e_{-1} \equiv 0 \mod C_4 \\
L(-4)^2E &\equiv 0 \mod C_4
\end{aligned}$$

iz čega se pomoću relacije 5.2.3 vidi da je $\pi_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).\varepsilon_2)$ razapet slikama od $E, e_{-3}e_{-2}\omega$.

Vektor ε_1: Za $\varepsilon_1 = e$ imamo:

$$\begin{aligned}
L(-2)e &= e_{-3}\mathbf{1} \in \widehat{C_4} \\
L(-3)e &\equiv -e_{-2}\omega \mod C_4 \\
L(-4)e &\equiv -L(-1)e_{-2}\omega \mod C_4 \\
L(-2)^2e &\equiv e_{-3}\omega \mod C_4 \\
L(-3)^2e &\equiv 0 \mod C_4 \\
L(-2)^3e &\equiv e_{-3}ef_{-3} \equiv -L(-6)e \equiv 0 \mod C_4
\end{aligned}$$

iz čega pomoću relacija 5.2.3 i 5.2.4 slijedi da je $\pi_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).\varepsilon_1)$ razapet sa slikama od $e, e_{-2}\omega, e_{-3}\omega$.

Vektor ε_0: Pokazat ćemo da je $\pi_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).\varepsilon_0)$ razapet sa slikama od $\mathbf{1}, \omega, L(-2)\omega, L(-3)^2\mathbf{1}$. Taj prostor je slika homomorfizma

$$\mathrm{Vir}^{-2}/\widehat{C_4}(\mathrm{Vir}^{-2}) \to SF/\widehat{C_4}(SF),$$

pa iz leme 5.3.1 slijedi da je razapet sa slikama od

$$L(-2)^n\mathbf{1}, L(-3)^2L(-2)^n, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Imamo:

$$\begin{aligned}
L(-2)^2\mathbf{1} &= e_{-3}f - f_{-3}e \\
L(-2)^3\mathbf{1} &\equiv 2e_{-3}f_{-3}\mathbf{1} \equiv 2L(-6)\mathbf{1} \equiv 0 \mod C_4.
\end{aligned}$$

Tada iz relacije 5.2.3 slijedi da je $L(-2)^n\mathbf{1} \in C_4$ za $n \geq 3$. Koristimo formulu 5.3.1:

$$C_4 \ni L(-4)L(-2)^n\mathbf{1} \equiv -\frac{n}{2}L(-3)^2L(-2)^{n-1}\mathbf{1} \mod \widehat{C_4}, n \geq 3.$$

Treba još eliminirati sljedeći vektor:

$$\begin{aligned} L(-3)^2L(-2)\mathbf{1} &\equiv -2e_{-2}f_{-2}e_{-3}f - 2e_{-2}f_{-2}e_{-1}f_{-3} \mod C_4 \\ &\equiv 2L(-5)e_{-2}f - 2L(-5)f_{-2}e \mod C_4 \\ &\equiv 0 \mod C_4, \end{aligned}$$

čime je dokaz završen. ■

Teorem 5.4.8.

1. Vrijedi $A_1(SF) = \mathscr{A}$, to jest, $A_1(SF)$ je kao asocijativna superalgebra generirana sa slikama vektora e, f, ω, E, F, H.

2. Imamo izomorfizam

$$A_1(SF) \simeq \operatorname{im}\rho_1 \simeq \Lambda(\mathfrak{h}) \otimes (\mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C}))\,.$$

3. Vrijedi

$$\dim A_1(SF) = \dim_{\mathbb{C}} SF/\widehat{C_4}(SF) = 20.$$

Dokaz. Kada promatramo djelovanje $\mathfrak{sl}(2)$ prema rastavu 5.4.1 i iskoristimo nejednakosti iz leme 5.4.7

$$\begin{aligned} \dim\left(SF/\widehat{C_4}(SF)\right) &= \sum_{i=0}^{3} \dim_{\mathbb{C}} V^{(i)} \cdot \dim_{\mathbb{C}} \pi_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).\varepsilon_0) \\ &\leq 1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1 = 20. \end{aligned}$$

Ova nejednakost, uz lemu 5.4.3, daje:

$$20 \leq \dim\rho_1(\mathscr{A}) \leq \dim\mathscr{A} \leq \dim A_1(SF) \leq \dim\left(SF/\widehat{C_4}(SF)\right) \leq 20.$$

Jednakost dimenzija ovih algebri daje sve potrebne rezultate. ■

5.5. Prva Zhuova algebra za $SF(1)^+$

Glavni cilj ove sekcije je izračunati prvu Zhuovu algebru za algebru verteks operatora $SF(1)^+$. Postupak će biti sličan postupku u prethodnom poglavlju, pa ćemo uz izračun $A_1(SF(1)^+)$ naći i generatore te algebre, te pokazati da su dimenzije te algebre i $\widehat{C_4}$-algebre jednake. Kao i u prethodnom poglavlju, pisat ćemo $SF = SF(1)$.

Označimo sa $\mathscr{B}$ podalgebru od $A_1(SF^+)$ generiranu slikama vektora ω, E, H, F. Promotrit ćemo kako ta podalgebra djeluje na reprezentacije od $A_1(SF^+)$. Započet ćemo s reprezentacijama koje dolaze od zakrenutog modula SF_θ.

Prema propoziciji 2.4.5 imamo reprezentacije $\rho_{(SF_\theta)_k} : A_1(SF^+) \to (SF_\theta)_k$ za $k = -\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{11}{8}$. Napišimo baze od $(SF_\theta)_k$:

	SF_θ^+	SF_θ^-
težina $-1/8$:	$\mathbf{1}_\theta$	-
težina $3/8$:	-	$e_{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_\theta, f_{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_\theta$
težina $7/8$:	$e_{-\frac{1}{2}}f_{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_\theta$	-
težina $11/8$:	-	$e_{-\frac{3}{2}}\mathbf{1}_\theta, f_{-\frac{3}{2}}\mathbf{1}_\theta$

Lema 5.5.1. Imamo izomorfizam asocijativnih algebri

$$\rho_{(SF_\theta)_k}(\mathscr{B}) \simeq \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{za } k = -\frac{1}{8}, \frac{7}{8} \\ M_2(\mathbb{C}) & \text{za } k = \frac{3}{8}, \frac{11}{8}. \end{cases}$$

Dokaz. Operator $o(\omega)$ djeluje na $(SF_\theta)_k$ kao skalar k. Da bi vidjeli kako operatori $o(E), o(H)$, $o(F)$ djeluju na $(SF_\theta)_k$, koristimo komutacijske formule iz leme 5.4.2. U slučajevima $k = -\frac{1}{8}, \frac{7}{8}$ se vidi da ti operatori na $(SF_\theta)_k$ za djeluju trivijalno. U slučajevima $k = \frac{3}{8}, \frac{11}{8}$ se vidi da matrice tih operatora (u bazama navedenim u prethodnoj tablici) generiraju matričnu algebru $M_2(\mathbb{C})$ (slično kao u dokazu leme 5.4.3). ■

Prijeđimo sada na reprezentacije koje dolaze od $\widehat{SF}$. Zapišimo baze prvih nekoliko nivoa:

	$\widehat{SF}^+$	$\widehat{SF}^-$
nivo 0:	$\widehat{\mathbf{1}}, e_0f_0\widehat{\mathbf{1}}$	$e_0\widehat{\mathbf{1}}, f_0\widehat{\mathbf{1}}$
nivo 1:	$e_0e_{-1}\widehat{\mathbf{1}}, e_0f_{-1}\widehat{\mathbf{1}}, f_0e_{-1}\widehat{\mathbf{1}}, f_0f_{-1}\widehat{\mathbf{1}}$	$e_{-1}\widehat{\mathbf{1}}, f_{-1}\widehat{\mathbf{1}}, e_0f_0e_{-1}\widehat{\mathbf{1}}, e_0f_0f_{-1}\widehat{\mathbf{1}}$
nivo 2:	$\omega, e_0f_0\omega$ $e_0e_{-2}\widehat{\mathbf{1}}, e_0f_{-2}\widehat{\mathbf{1}}, f_0e_{-2}\widehat{\mathbf{1}}, f_0f_{-2}\widehat{\mathbf{1}}$	$e_0\omega, f_0\omega$ $e_{-2}\widehat{\mathbf{1}}, f_{-2}\widehat{\mathbf{1}}, e_0f_0e_{-2}\widehat{\mathbf{1}}, e_0f_0f_{-2}\widehat{\mathbf{1}}$

Po propoziciji 2.4.5 znamo da su $\widehat{SF}^{\pm}_{(k)} \subseteq \Omega_1(\widehat{SF}^{\pm})$, no pokazat ćemo da jednakost ne vrijedi.

Lema 5.5.2. Vektori $e_0f_0e_{-2}\widehat{\mathbf{1}}, e_0f_0f_{-2}\widehat{\mathbf{1}}$ leže u $\Omega_1(\widehat{SF}^-)$. Štoviše, vrijedi

$$\Omega_1(\widehat{SF}^-) \cap \widehat{SF}^-_{(2)} = \operatorname{span}\{e_0f_0e_{-2}\widehat{\mathbf{1}}, e_0f_0f_{-2}\widehat{\mathbf{1}}\}.$$

Dokaz. Iz definicije (2.4.10) vidimo da je $x \in \Omega_1(\widehat{SF}^-)$ ako i samo ako vrijedi $\varepsilon_k x = 0$ za sve $v \in SF^+$ i sve $k \in \mathbb{Z}$ takve da je $\deg \varepsilon_k < -1$. U slučaju kada je $\deg \varepsilon_k < -2$ se odmah vidi da je $\varepsilon_k x = 0$ za sve $x \in \widehat{SF}^-_{(2)}$.

Izaberimo sad proizvoljne $v \in SF^+, k \in \mathbb{Z}$ takve da je $\deg \varepsilon_k = -2$. Primijetimo da vrijedi $e_0f_0e_{-2}\widehat{\mathbf{1}}, e_0f_0f_{-2}\widehat{\mathbf{1}} \in \widehat{SF}[2] \cap \widehat{SF}^-_{(2)}$, te da je $\widehat{SF}[2] \cap \widehat{SF}^-_{(0)} = 0$. Budući da je $\widehat{SF}[2]$ podmodul od $\widehat{SF}$, slijedi da je

$$\varepsilon_k\left(e_0f_0e_{-2}\widehat{\mathbf{1}}\right) = \varepsilon_k\left(e_0f_0f_{-2}\widehat{\mathbf{1}}\right) = 0.$$

Ovime smo pokazali da je $e_0f_0e_{-2}\widehat{\mathbf{1}}, e_0f_0f_{-2}\widehat{\mathbf{1}} \in \Omega_1(\widehat{SF}^-)$. Za jednakost

$$\Omega_1(\widehat{SF}^-) \cap \widehat{SF}^-_{(2)} = \operatorname{span}\{e_0f_0e_{-2}\widehat{\mathbf{1}}, e_0f_0f_{-2}\widehat{\mathbf{1}}\},$$

dovoljno je pogledati kako operatori $L(2), E_4, H_4, F_4$ djeluju na ostale elemente baze od $\widehat{SF}^-_{(2)}$. ∎

Označimo sada

$$\rho^+_{\widehat{SF}^+_{(0)}} : A_1(SF^+) \to \operatorname{End}(\widehat{SF}^+_{(0)})$$

$$\rho_{\widehat{SF}^-_{(1)}} : A_1(SF^+) \to \operatorname{End}(\widehat{SF}^-_{(1)})$$

$$\rho_{\widehat{SF}^-_{(2)}} : A_1(SF^+) \to \operatorname{End}\left(\widehat{SF}^-_{(2)} \cap \Omega_1(\widehat{SF}^-)\right).$$

Lema 5.5.3. Vrijedi:

$$\rho_{\widehat{SF}^+_{(0)}}(\mathscr{B}) \simeq \Lambda(\mathfrak{h}_2)^+$$

$$\rho_{\widehat{SF}^-_{(1)}}(\mathscr{B}) \simeq \Lambda(\mathfrak{h}_2)^+ \otimes M_2(\mathbb{C})$$

$$\rho_{\widehat{SF}^-_{(2)}}(\mathscr{B}) \simeq M_2(\mathbb{C}).$$

Dokaz. Dokazat ćemo sad redom ove tvrdnje.

Nivo 0: Operatori $o(E), o(H), o(F)$ djeluju trivijalno na $\widehat{SF}^+_{(0)}$, dok $o(\omega)|_{\widehat{SF}^+_{(0)}} = e_0 f_0$.

Nivo 1: Vrijedi $o(\omega)|_{\widehat{SF}^+_{(0)}} = I + e_0 f_0$. Operatori $o(E), o(H), o(F)$ komutiraju s $e_0 f_0$, pa slijedi da čuvaju potprostore

$$\operatorname{span}\{e_{-1}\widehat{\mathbf{1}}, f_{-1}\widehat{\mathbf{1}}\}, \operatorname{span}\{e_0 f_0 e_{-1}\widehat{\mathbf{1}}, e_0 f_0 f_{-1}\widehat{\mathbf{1}}\}.$$

Iz komutacijskih formula iz leme 5.4.2 se vidi da matrice operatora $o(E), o(H), o(F)$ u bazi $e_{-1}\widehat{\mathbf{1}}, f_{-1}\widehat{\mathbf{1}}$ generiraju cijeli $M_2(\mathbb{C})$. Zaključak proizlazi slično kao u dokazu leme 5.4.3.

Nivo 2: Vidimo da $o(\omega)$ na $\widehat{SF}^-_{(2)} \cap \Omega_1(\widehat{SF}^-)$ djeluje kao množenje skalarom 2. Iz komutacijskih formula iz leme 5.4.2 se vidi da matrice od operatora $o(E), o(H), o(F)$ generiraju cijeli $M_2(\mathbb{C})$. ■

Lema 5.5.4. Postoji epimorfizam asocijativnih algebri

$$\rho : \mathscr{B} \to \mathbb{C}^{\oplus 2} \oplus M_2(\mathbb{C})^{\oplus 3} \oplus \Lambda(\mathfrak{h}_2)^+ \oplus \left(\Lambda(\mathfrak{h}_2)^+ \otimes M_2(\mathbb{C})\right).$$

Posebno,

$$\dim A_1(SF^+) \geq \dim \mathscr{B} \geq 24.$$

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu propozicije 4.2.3. Epimorfizam ρ ćemu konstruirati pomoću homomorfizama iz lema 5.5.1 i 5.5.4, korištenjem Kineskog teorema o ostacima 4.2.2. Da bi mogli iskoristiti Kineski teorem o ostacima, moramo pokazati da su dvostrani ideali $\ker(\rho_M)$ od $\mathscr{B}$ međusobno relativno prosti, za $M = \widehat{SF}^+_{(0)}, \widehat{SF}^-_{(1)}, \widehat{SF}^-_{(2)}, (SF_\theta)_k$, za $k = -\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{11}{8}$. To slijedi iz činjenice da operatori $\rho_M([\omega]) \in \operatorname{End}(M)$ imaju međusobno relativno proste minimalne polinome, što smo vidjeli na prethodnim stranicama. ■

Sada možemo prijeći na promatranje $\widehat{C_4}$-algebre od SF^+. Pisat ćemo

$$\pi^+_{C_4} : SF^+ \to SF^+/C_4(SF^+)$$
$$\pi^+_{\widehat{C_4}} : SF^+ \to SF^+/\widehat{C_4}(SF^+)$$

za kanonske epimorfizme. Radi jednostavnosti, odsad stavljamo $C_4 = C_4(SF^+), \widehat{C_4} = \widehat{C_4}(SF^+)$. U prošloj cjelini smo vidjeli da imamo rastav:

$$SF^+ = \bigoplus_{n\geq 0} U(\mathfrak{sl}_2) \otimes U(\mathrm{Vir}).\varepsilon_{2n} \simeq \bigoplus_{n\geq 0} V^{(2n)} \otimes L(-2, 2n^2+n),$$

Lema 5.5.5. Za $n \geq 2$ vrijedi $\varepsilon_{2n} \in C_4$.

Dokaz. Vrijedi:

$$\varepsilon_4 = e_{-4}e_{-3}e_{-2}e_{-1}\mathbf{1} = -\frac{1}{2}E_{-4}e_{-3}e_{-1}\mathbf{1} \in C_4.$$

Slično možemo napraviti i za ostale $n > 2$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2n} &= e_{-2n}e_{-2n+1}\dots e_{-4}e_{-3}e_{-2}e_{-1}\mathbf{1}\\ &= -\frac{1}{2}E_{-4}(e_{-2n}e_{-2n+1}\dots e_{-5}e_{-3}e_{-1}\mathbf{1})\end{aligned}$$

■

Tada imamo sljedeći rastav:

$$SF^+/\widehat{C_4}(SF^+) = U(\mathfrak{sl}_2).\pi^+_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).\mathbf{1}) \oplus U(\mathfrak{sl}_2).\pi^+_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).E) \tag{5.5.1}$$

$$\simeq V^{(0)} \otimes \pi^+_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).\mathbf{1}) \oplus V^{(2)} \otimes \pi^+_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).E) \tag{5.5.2}$$

Sada, slično kao i u prošloj cjelini ostaje vidjeti koje su dimenzije od $\pi^+_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).\mathbf{1})$ i $\pi^+_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).E)$.

Propozicija 5.5.6. Vrijedi:

$$\dim \pi^+_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).E) \leq 5,$$
$$\dim \pi^+_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).\mathbf{1}) \leq 9.$$

Dokaz. U dodacima 5.6 i 5.7 su opisani sustavi izvodnica za vektorske prostore $\pi^+_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).E)$, odnosno $\pi^+_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).\mathbf{1})$, iz čega proizlaze ocjene na dimenzije. ■

Sada smo spremni za dokaz teorema.

Teorem 5.5.7.

1. Vrijedi $A_1(SF^+) = \mathscr{B}$, to jest, $A_1(SF^+)$ je kao asocijativna algebra generirana sa slikama vektora ω, E, F, H.

2. Imamo izomorfizam
$$A_1(SF^+) \simeq \bigoplus_M \mathrm{im}(\rho_M),$$
gdje je $M = \widehat{SF}^+_{(0)}, \widehat{SF}^-_{(1)}, \widehat{SF}^-_{(2)}, (SF_\theta)_k$, za $k = -\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{11}{8}$.

3. Imamo izomorfizam
$$A_1(SF^+) \simeq \mathbb{C}^{\oplus 2} \oplus M_2(\mathbb{C})^{\oplus 3} \oplus \Lambda(\mathfrak{h}_2)^+ \oplus \big(\Lambda(\mathfrak{h}_2)^+ \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C})\big)$$

4. Vrijedi
$$\dim A_1(SF^+) = \dim SF/\widehat{C_4}(SF^+) = 24.$$

Dokaz. Kada promatramo rastav (5.5.2) i iskoristimo nejednakosti iz propozicije 5.5.6
$$\begin{aligned}\dim\Big(SF^+/\widehat{C_4}(SF^+)\Big) &= \dim_{\mathbb{C}} V^{(0)} \cdot \dim_{\mathbb{C}} \pi_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).\mathbf{1}) + \dim_{\mathbb{C}} V^{(2)} \cdot \dim_{\mathbb{C}} \pi_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).E)\\ &\leq 9 + 3 \cdot 5 = 24.\end{aligned}$$
Ova nejednakost, uz lemu 5.5.4, daje:
$$24 \leq \dim \rho(\mathscr{B}) \leq \dim \mathscr{B} \leq \dim A_1(SF^+) \leq \dim \Big(SF^+/\widehat{C_4}(SF^+)\Big) \leq 24.$$
Jednakost dimenzija ovih algebri daje sve potrebne rezultate.

∎

Zanimljivo je primijetiti da prema prvoj točki prethodnog teorema, algebra $A_1(SF^+)$ ima 4 generatora, isto kao i restringirana kvantna grupa $\overline{U}_i\mathfrak{sl}(2)$ promatrana u članku [43] A.M. Gainutdinova i I. Runkela, gdje su autori promatrali vezu kategorije modula od SF^+ i kategorije reprezentacija od $\overline{U}_i\mathfrak{sl}(2)$.

Možemo saznati još neke informacije o $A_1(SF^+)$ ako promotrimo njene reprezentacije iz druge točke prethodnog teorema.

Korolar 5.5.8. Definirajmo polinome
$$\begin{aligned}p(x) &= x^2(x-1)^2(x-2)(x+\frac{1}{8})(x-\frac{3}{8})(x-\frac{7}{8})(x-\frac{11}{8}),\\ q(x) &= (x-\frac{3}{8})(x-\frac{11}{8})(x-1)^2(x-2).\end{aligned}$$
Tada vrijedi:

1. Polinom p je minimalni polinom od $[\omega] \in A_1(SF^+)$.

2. Za $X = E, H, F$ vrijedi
$$q([\omega]) *_1 [X] = 0$$
u $A_1(SF^+)$.

3. Elementi
$$[\mathbf{1}], [\omega], \ldots, [\omega]^8, [X], [\omega] *_1 [X], \ldots, [\omega]^4 *_1 X$$
za $X = E, H, F$ čine bazu od $A_1(SF^+)$.

5.6. Dodatak: Sustav izvodnica za $\pi^+_{\widehat{C_4}}(\mathrm{Vir}.E)$

Cilj ove podsekcije je računom pokazati da je $\pi^+_{\widehat{C_4}}(\mathrm{Vir}.E)$ razapet sa slikama od

$$E, L(-2)E, L(-2)^2E, L(-4)E, L(-2)^3E. \tag{5.6.1}$$

Prvo ćemo u podsekciji Relacije dobiti niz relacija koje vrijede modulo C_4, odnosno modulo $\widehat{C_4}$ (dijelimo po nivoima).

U podsekciji Sustav izvodnica koristimo te relacije da pokažemo da se svi izrazi oblika $L(-4)^aL(-3)^bL(-2)^cE$ mogu modulo $\widehat{C_4}$ prikazati preko elemenata iz 5.6.1.

U računu ćemo koristiti propoziciju 5.2.2, te sljedeće relacije, koje lako slijede iz asocijativne formule:

$$E_{-2n} = \sum_{k\geq 0}(2+2k)e_{-2-n-k}e_{-n+k} \tag{5.6.2}$$

$$E_{-2n-1} = \sum_{k\geq 0}(2k+1)e_{-2-n-k}e_{-n-1+k}. \tag{5.6.3}$$

Koristit ćemo i operator H_0 koji po propoziciji 5.2.2 čuva C_4 i $\widehat{C_4}$. Iz leme 5.4.2 znamo da vrijedi:

$$[H_0, e_{-n}] = n(n+1)e_{-n-2}, [H_0, f_{-n}] = -n(n+1)f_{-n-2}. \tag{5.6.4}$$

5.6.1. Relacije

Nivo 6

$$E_{-4}\mathbf{1} = 4e_{-5}e + 2e_{-4}e_{-2} \tag{5.6.5}$$

Nivo 7

$$E_{-5}\mathbf{1} = 5e_{-6}e + 3e_{-5}e_{-2} + e_{-4}e_{-3} \tag{5.6.6}$$

Nivo 8

$$\begin{aligned}
E_{-6}\mathbf{1} &= 2e_{-5}e_{-3} + 4e_{-6}e_{-2} + 6e_{-7}e \\
H_0E_{-4}\mathbf{1} &= 8e_{-5}e_{-3} + 40e_{-6}e_{-2} + 120e_{-7}e \\
L(-2)E_{-4}\mathbf{1} &= 4e_{-5}e_{-3} + 8e_{-6}e_{-2} + 20e_{-7}e + 2e_{-4}e_{-2}e_{-1}f \\
L(-5)E &= 2e_{-7}e - e_{-6}e_{-2} + e_{-2}e_{-1}e_{-4}f + e_{-2}e_{-1}e_{-3}f_{-2}
\end{aligned}$$

Iz ovih relacija slijedi

$$e_{-5}e_{-3} \equiv 5e_{-7}e \mod C_4 \tag{5.6.7}$$

$$e_{-6}e_{-2} \equiv -4e_{-7}e \mod C_4 \tag{5.6.8}$$

$$e_{-4}e_{-2}e_{-1}f \equiv -4e_{-7}e \mod C_4 \tag{5.6.9}$$

$$e_{-3}e_{-2}e_{-1}f_{-2} \equiv -2e_{-7}e \mod C_4 \tag{5.6.10}$$

Primijetimo da imamo:

$$L(-1)e_{-6}e = 6e_{-7}e + e_{-6}e_{-2} \implies e_{-6}e_{-2} \equiv -6e_{-7}e \mod \widehat{C_4}.$$

Kombinirajući to s prethodnim relacijama, odmah se vidi da su svi elementi iz 5.6.7-5.6.10 u $\widehat{C_4}$.

Nivo 9

Promatramo elemente:

$$\begin{aligned}
E_{-7}\mathbf{1} &= 7e_{-8}e + 5e_{-7}e_{-2} + 3e_{-6}e_{-3} + e_{-5}e_{-4} \\
\frac{1}{2}H_0(E_{-5}\mathbf{1}) &= 105e_{-8}e + 45e_{-7}e_{-2} + 15e_{-6}e_{-3} + 3e_{-5}e_{-4} \\
E_{-4}e_{-2}f &= 4e_{-5}e_{-1}e_{-2}f + 8e_{-7}e_{-2} \\
E_{-4}f_{-2}e &= 2e_{-4}e_{-2}f_{-2}e - 20e_{-8}e.
\end{aligned}$$

Slijede relacije:

$$e_{-6}e_{-3} \equiv -14e_{-8}e - 5e_{-7}e_{-2} \mod C_4 \tag{5.6.11}$$

$$e_{-5}e_{-4} \equiv 35e_{-8}e + 10e_{-7}e_{-2} \mod C_4 \tag{5.6.12}$$

$$e_{-5}e_{-2}e_{-1}f \equiv 2e_{-7}e_{-2} \mod C_4 \tag{5.6.13}$$

$$e_{-4}e_{-2}f_{-2}e \equiv 10e_{-8}e \mod C_4. \tag{5.6.14}$$

Možemo i dalje računati:

$$\begin{aligned}
L(-6)E &= 2e_{-8}e - e_{-7}e_{-2} + e_{-5}e_{-2}e_{-1}f - e_{-4}e_{-2}f_{-2}e + e_{-3}e_{-2}e_{-1}f_{-3} \\
&\overset{5.6.13,5.6.14}{\equiv} -8e_{-8}e + e_{-7}e_{-2} + e_{-3}e_{-2}e_{-1}f_{-3} \mod C_4 \\
E_{-5}\omega &= 9e_{-8}e + 3e_{-5}e_{-2}e_{-1}f + e_{-4}e_{-3}e_{-1}f \\
&\overset{5.6.13}{\equiv} 9e_{-8}e + 6e_{-7}e_{-2} + e_{-4}e_{-3}e_{-1}f \mod C_4.
\end{aligned}$$

To nam daje sljedeće dvije relacije:

$$e_{-3}e_{-2}e_{-1}f_{-3} \equiv 8e_{-8}e - e_{-7}e_{-2} \mod C_4 \tag{5.6.15}$$

$$e_{-4}e_{-3}e_{-1}f \equiv -9e_{-8}e - 6e_{-7}e_{-2} \mod C_4. \tag{5.6.16}$$

Nivo 10

Promatramo elemente:

$$\begin{aligned}
E_{-8}\mathbf{1} &= 2e_{-6}e_{-4} + 4e_{-7}e_{-3} + 6e_{-8}e_{-2} + 8e_{-9}e \\
\frac{1}{2}H_0(E_{-6}\mathbf{1}) &= 12e_{-6}e_{-4} + 36e_{-7}e_{-3} + 84e_{-8}e_{-2} + 168e_{-9}e \\
\frac{1}{4}H_0^2(E_{-4}\mathbf{1}) &= 60e_{-6}e_{-4} + 120e_{-7}e_{-3} + 420e_{-8}e_{-2} + 1680e_{-9}e.
\end{aligned}$$

Iz ovoga dobivamo relacije za elemente duljine 2:

$$e_{-6}e_{-4} \equiv -14e_{-9}e \mod C_4 \tag{5.6.17}$$

$$e_{-7}e_{-3} \equiv 14e_{-9}e \mod C_4 \tag{5.6.18}$$

$$e_{-8}e_{-2} \equiv -6e_{-9}e \mod C_4 \tag{5.6.19}$$

Sada djelujemo sa $L(-2)$ na relacije 5.6.7-5.6.9:

$$5e_{-7}e_{-3} + e_{-5}e_{-3}\omega \equiv 105e_{-9}e \mod C_4$$

$$\Longrightarrow e_{-5}e_{-3}\omega \equiv 35e_{-9_e} \mod C_4 \tag{5.6.20}$$

$$6e_{-8}e_{-2} + 2e_{-6}e_{-4} + e_{-6}e_{-2}\omega \equiv -84e_{-9}e \mod C_4$$

$$\Longrightarrow e_{-6}e_{-2}\omega \equiv -20e_{-9_e} \mod C_4 \tag{5.6.21}$$

$$4e_{-6}e_{-2}\omega + e_{-4}e_{-2}(e_{-3}f + e_{-1}f_{-3}) \equiv -84e_{-9}e \mod C_4$$

$$\Longrightarrow e_{-4}e_{-2}(e_{-3}f + e_{-1}f_{-3}) \equiv -4e_{-9}e \mod C_4. \tag{5.6.22}$$

Ako djelujemo sa $L(-1)$ na 5.6.13 dobijemo:

$$5e_{-6}e_{-2}\omega + 2e_{-5}e_{-3}\omega + e_{-5}e_{-2}ef_{-2} \equiv 14e_{-8}e_{-2} + 4e_{-7}e_{-3} \mod C_4$$

$$\Longrightarrow e_{-5}e_{-2}ef_{-2} \equiv 2e_{-9}e \mod C_4.$$

Možemo računati i na drugi način:

$$\begin{aligned}
E_{-4}e_{-2}f_{-2} &= (4e_{-5}e_{-1}+10e_{-8}e_2)e_{-2}f_{-2} \\
&= -4e_{-5}e_{-2}ef_{-2}+20e_{-8}e_{-2} \\
&\equiv -4e_{-5}e_{-2}ef_{-2}-120e_{-9}e \mod C_4 \\
&\implies e_{-5}e_{-2}ef_{-2} \equiv -30e_{-9}e \mod C_4.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je $e_{-9}e \in C_4$, a onda s njim i svi ostali elementi koje smo sveli na $e_{-9}e$ modulo C_4.

Nivo 11

Djelujemo s $L(-1)$ na elemente duljine 2 sa nivoa 10 (za koje smo pokazali da su u C_4:

$$e_{-6}e_{-5} \equiv 126e_{-10}e \mod C_4 \tag{5.6.23}$$

$$e_{-7}e_{-4} \equiv -84e_{-10}e \mod C_4 \tag{5.6.24}$$

$$e_{-8}e_{-3} \equiv 36e_{-10}e \mod C_4 \tag{5.6.25}$$

$$e_{-9}e_{-2} \equiv -9e_{-10}e \mod C_4 \tag{5.6.26}$$

Ako na relacije 5.6.13 i 5.6.14 djelujemo s $L(-2)$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
e_{-6}e_{-3}\omega &\equiv -55e_{-10}e-5e_{-7}e_{-2}\omega \mod C_4 \\
e_{-5}e_{-4}\omega &\equiv 154e_{-10}e+10e_{-7}e_{-2}\omega \mod C_4.
\end{aligned}$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
E_{-4}(e_{-4}f) &= 4e_{-5}e_{-1}e_{-4}f+8e_{-7}e_{-4} \\
&\equiv -4e_{-5}e_{-4}\omega-8\cdot 84e_{-10}e \mod C_4 \\
&\implies e_{-5}e_{-4}\omega \equiv -168e_{-10}e \mod C_4.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u prethodne relacije imamo:

$$e_{-7}e_{-2}\omega \equiv -\frac{161}{5}e_{-10}e \mod C_4 \tag{5.6.27}$$

$$e_{-6}e_{-3}\omega \equiv 106e_{-10}e \mod C_4 \tag{5.6.28}$$

$$e_{-5}e_{-4}\omega \equiv -168e_{-10}e \mod C_4 \tag{5.6.29}$$

Na relaciju 5.6.13 djelujemo redom s $L(-2)$ i $\frac{1}{2}H_0$:

$$3e_{-7}e_{-2}\omega + 2e_{-5}e_{-4}\omega + e_{-5}e_{-2}(e_{-3}f + ef_{-3}) \equiv -462e_{-10}e \mod C_4$$

$$15e_{-7}e_{-2}\omega + 3e_{-5}e_{-4}\omega + e_{-5}e_{-2}(e_{-3}f - ef_{-3}) \equiv -1008e_{-10}e \mod C_4$$

iz čega slijedi

$$e_{-5}e_{-2}e_{-3}f \equiv -\frac{126}{5}e_{-10}e \mod C_4 \tag{5.6.30}$$

$$e_{-5}e_{-2}f_{-3}e \equiv \frac{21}{5}e_{-10}e \mod C_4. \tag{5.6.31}$$

Sada možemo gledati

$$\begin{aligned} E_{-6}(e_{-2}f) &= 2e_{-5}e_{-3}e_{-2}f - 6e_{-7}e_{-2}\omega + 10e_{-9}e_{-2} \\ &\equiv (2\cdot\frac{126}{5} + 6\cdot\frac{161}{5} - 90)e_{-10}e \mod C_4 \\ &\equiv \frac{768}{5}e_{-10}e \mod C_4 \\ &\implies e_{-10}e \in C_4. \end{aligned}$$

Slijedi da su elementi iz relacija 5.6.23-5.6.31 također u C_4.

Nivo 12

Djelovanjem $L(-1)$ na elemente duljine 2 sa nivoa 11 dobivamo

$$e_{-11}e, e_{-10}e_{-2}, e_{-9}e_{-3}, e_{-8}e_{-4}, e_{-7}e_{-5} \in C_4. \tag{5.6.32}$$

Djelujemo s $L(-2)$ na $e_{-8}e_{-2}, e_{-7}e_{-3} \in C_4$, eliminiramo elemente duljine 2 i dobivamo

$$e_{-8}e_{-2}\omega, e_{-7}e_{-3}\omega \in C_4. \tag{5.6.33}$$

S prethodnog nivoa znamo da je $e_{-7}e_{-2}\omega \in C_4$, pa iz relacije

$$L(-1)e_{-7}e_{-2}\omega = 7e_{-8}e_{-2}\omega + 2e_{-7}e_{-e}\omega + e_{-7}e_{-2}e_{-1}f_{-2}$$

slijedi da je

$$e_{-7}e_{-2}e_{-1}f_{-2} \in C_4. \tag{5.6.34}$$

5.6.2. Sustav izvodnica

Cilj ove podsekcije je pokazati da se

$$L^{a,b,c} := L(-4)^a L(-3)^b L(-2)^c E, \text{ za } a,b,c \geq 0$$

mogu modulo $\widehat{C_4}$ napisati kao linearna kombinacija

$$E, L(-4)E, L(-2)E, L(-2)^2E, L(-2)^3E.$$

Prvo ćemo gledati slučajeve gdje je samo jedan od a,b,c nenul. Tako ćemo pokazati da su svi osim konačno mnogo $L^{a,b,c}$ unutar C_4, a onda ćemo preostale slučajeve riješiti pojedinačno.

Lema 5.6.1. Neka vrijedi barem jedno od sljedećeg: $a \geq 2$, $b \geq 3$, $c \geq 4$. Tada imamo:

$$L(-4)^a L(-3)^b L(-2)^c E \in C_4$$

Dokaz. Promatramo elemente oblika $L(-2)^c E, c \geq 0$.

$$\begin{aligned}
E &= e_{-2}e \\
L(-2)E &= 2e_{-4}e - e_{-3}e_{-2} \\
L(-2)^2E &= 8e_{-6}e - 3e_{-5}e_{-2} + 4e_{-4}e_{-3} - e_{-3}e_{-2}e_{-1}f \\
&\overset{5.6.6}{\equiv} 12e_{-6}e - 15e_{-5}e_{-2} - e_{-3}e_{-2}\omega \mod C_4 \\
L(-2)^3E &\equiv -72e_{-8}e - 75e_{-7}e_{-2} - 12e_{-6}e_{-3} - 30e_{-5}e_{-4} - 18e_{-5}e_{-2}\omega + 2e_{-4}e_{-3}\omega - e_{-3}e_{-2}ef_{-3} \mod C \\
&\equiv -980e_{-8}e - 362e_{-7}e_{-2} \mod C_4,
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem koraku koristili ranije pokazane relacije s nivoa 9. Budući da je $L(-1)e_{-7}e = 7e_{-8}e - e_{-7}e_{-2}$ slijedi da je

$$L(-2)^3E \equiv 1554e_{-8}e \mod \widehat{C_4}. \tag{5.6.35}$$

Sada možemo iz:

$$\begin{aligned}
L(-2)e_{-8}e &= 8e_{-10}e + e_{-8}e_{-3} \in C_4 \\
L(-2)e_{-7}e_{-2} &= 7e_{-9}e_{-2} + 2e_{-7}e_{-4} + e_{-7}e_{-2}\omega \in C_4
\end{aligned}$$

zaključiti da je $L(-2)^4 \in C_4$. Slijedi da je

$$L^{a,b,c} \in C_4, \text{ za } a,b \geq 0 \text{ i } c \geq 4.$$

Promatramo elemente oblika $L(-3)^b E, b \geq 0$. Iz

$$L(-3)E = 2e_{-5}e - e_{-4}e_{-2} \overset{5.6.5}{\equiv} 4e_{-5}e \mod C_4$$

slijedi da je $L(-3)E \in \widehat{C_4}$. Nastavljamo dalje:

$$\begin{aligned} L(-3)^2E &= 20e_{-8}e + 4e_{-5}e_{-4} + 4e_{-5}e_{-1}e_{-2}\omega \\ &\equiv 160e_{-8}e + 32e_{-7}e_{-2} \mod C_4 \\ &\equiv -64e_{-8}e \mod \widehat{C_4} \\ &\equiv -\frac{777}{32}L(-2)^3E \mod \widehat{C_4}, \end{aligned}$$

gdje zadnji korak slijedi iz relacije (5.6.35). Računamo dalje:

$$\begin{aligned} L(-3)e_{-8}e &= 8e_{-11}e + e_{-8}e_{-4} - e_{-8}e_{-2}\omega \\ L(-3)e_{-7}e_{-2} &= 7e_{-10}e_{-2} + 2e_{-7}e_{-5} + e_{-7}e_{-2}e_{-1}f_{-2}. \end{aligned}$$

Sada iz relacija 5.6.32 i 5.6.33 vidimo da su svi elementi s desne strane u C_4, pa je onda i $L(-3)^3E \in C_4$. Slijedi

$$L^{a,b,c} \in C_4, \text{ za } a, c \geq 0 \text{ i } b \geq 3.$$

Promatramo elemente oblika $L(-4)^a E, a \geq 0$. Prvo računamo:

$$L(-4)E = 2e_{-6}e - e_{-5}e_{-2} + e_{-3}e_{-2}e_{-1}f$$

Gledamo djelovanje $L(-4)$ na svaki od elemenata u sumi:

$$\begin{aligned} L(-4)e_{-6}e &\equiv -e_{-6}e_{-3}\omega - e_{-6}e_{-2}e_{-1}f_{-2} \mod C_4 \\ L(-4)e_{-5}e_{-2} &\equiv e_{-5}e_{-2}e_{-3}f + e_{-5}e_{-2}e_{-1}f_{-3} \mod C_4 \\ L(-4)e_{-3}e_{-2}e_{-1}f &\equiv 3e_{-7}e_{-2}\omega - 2e_{-6}e_{-3}\omega + e_{-5}e_{-3}e_{-2}f + e_{-3}e_{-2}e_{-1}f_{-5} \mod C_4. \end{aligned}$$

U gornjem računu ignoriramo elemente duljine dva jer smo pokazali da se oni nalaze u C_4. To smo pokazali i za sve elemente duljine 4 koji se pojavljuju, osim $e_{-6}e_{-2}ef_{-2}$ i $e_{-3}e_{-2}e_{-1}f_{-5}$. Za prvi gledamo:

$$C_4 \ni L(-1)e_{-6}e_{-2}\omega = 6e_{-7}e_{-2}\omega + 2e_{-6}e_{-3}\omega + e_{-6}e_{-2}e_{-1}f_{-2}.$$

Prva dva sumanda su u C_4 po relacijama 5.6.27 i 5.6.28, pa slijedi da je i $e_{-6}e_{-2}ef_{-2} \in C_4$.

Za $e_{-3}e_{-2}e_{-1}f_{-5}$ će nam trebati nešto više koraka: pokažimo prvo da je $e_{-3}e_{-2}e_{-1}f_{-4} \in C_4$ (opet ignoriramo elemente duljine dva):

$$\begin{aligned} L(-5)e_{-3}e_{-2} &\equiv e_{-3}e_{-2}e_{-4}f + e_{-3}e_{-2}e_{-1}f_{-4} \mod C_4 \\ E_{-4}e_{-3}f &\equiv 4e_{-5}e_{-3}\omega + 2e_{-4}e_{-2}e_{-3}f \end{aligned}$$

Iz relacije 5.6.20 znamo da je $4e_{-5}e_{-3}\omega \in C_4$, pa slijedi da je i $e_{-3}e_{-2}e_{-1}f_{-4} \in C_4$. Sada promatramo:

$$L(-1)e_{-3}e_{-2}e_{-1}f_{-4} = 3e_{-4}e_{-2}e_{-1}f_{-4} + 4e_{-3}e_{-2}e_{-1}f_{-5},$$

pa je dosta pokazati da je $e_{-4}e_{-2}e_{-1}f_{-4} \in C_4$. To slijedi iz

$$E_{-4}e_{-1}f_{-4} \equiv 2e_{-4}e_{-2}e_{-1}f_{-4} \mod C_4$$

Dakle, imamo $L(-4)^2E \in C_4$, pa tada i

$$L^{a,b,c} \in C_4, \text{ za } a \geq 2 \text{ i } b,c \geq 0.$$

■

Preostale slučajeve dijelimo ovisno o tome je li $a = 0$ ili $a = 1$.

Slučaj $a = 0$: Vidjeli smo da je

$$\begin{aligned} L(-3)E &\in \widehat{C_4} \\ L(-3)^2E &\equiv -\frac{777}{32}L(-2)^3E \mod \widehat{C_4}. \end{aligned}$$

Lako se vidi da je $L(-3)L(-2)E \equiv c \cdot e_{-7}e \mod C_4$ za neki $c \in \mathbb{Q}$ a vrijedi $e_{-7}e \in \widehat{C_4}$. Iz relacija s nivoa 10 se vidi:

$$\begin{aligned} L(-2)e_{-7}e &= 7e_{-9}e + e_{-7}e_{-3} \in C_4 \\ L(-3)e_{-7}e &= 7e_{-10}e + e_{-7}e_{-4} - e_{-7}e_{-2}\omega \in C_4. \end{aligned}$$

pa slijedi da je

$$L(-3)^bL(-2)^cE \in C_4$$

u slučajevima $b \geq 1, c \geq 2$ i $b \geq 2, c \geq 1$. Tako smo pokrili sve slučajeve s $a = 0$.

Slučaj $a = 1$**:** Skoro sve slučajeve možemo dobiti djelujući sa $L(-4)$ na prethodni slučaj. Ono što ne možemo dobiti su elementi $L(-4)L(-2)^n E,$ za $n = 1,2,3$. Računamo:

$$\begin{aligned}
L(-4)L(-2)E &= 12e_{-8}e + 2e_{-6}e_{-3} - 5e_{-7}e_{-2} - 2e_{-5}e_{-4} + 2e_{-5}e_{-2}\omega - e_{-4}e_{-3}\omega + e_{-3}e_{-2}e_{-1}f_{-3} \\
&\equiv -69e_{-8}e - 26e_{-7}e_{-2} \mod C_4 \\
&\equiv 113e_{-8}e \mod \widehat{C_4} \\
&\equiv \frac{113}{1554}L(-2)^3E \mod \widehat{C_4}.
\end{aligned}$$

Sada možemo nastaviti s istim argumentima koje smo koristili u dokazu prethodne leme za slučaj $L(-2)^c E, c \geq 0$.

5.7. Dodatak: Sustav izvodnica za $\pi^{\pm}_{\widehat{C_4}}(\mathrm{Vir}\,.\mathbf{1})$

Cilj ovog dodatka je pokazati da je $\pi^{\pm}_{\widehat{C_4}}(\mathrm{Vir}\,.\mathbf{1})$ razapet sa slikama od

$$\mathbf{1}, L(-2)\mathbf{1}, \ldots, L(-2)^6\mathbf{1}, L(-3)^2\mathbf{1}, L(-3)^2L(-2)\mathbf{1}.$$

U podsekciji Priprema ćemo vidjeti neke načine dobivanja relacija modulo C_4, te ih primijeniti u sekciji Relacije (do nivoa 14). U podsekciji Sustav izvodnica ćemo pokazati da gorenavedeni vektori razapinju $\pi^{\pm}_{\widehat{C_4}}(\mathrm{Vir}\,.\mathbf{1})$.

5.7.1. Priprema

Oznake

Označit ćemo operatore:

$$x_{i,j} := (e_{-i}f_{-j} - f_{-i}e_{-j})$$
$$\widetilde{x_{i,j}} := (e_{-i}f_{-j} + f_{-i}e_{-j}).$$

Primijetimo da vrijedi

$$x_{i,j} = x_{j,i},\ \widetilde{x_{i,j}} = -\widetilde{x_{j,i}}.$$

Također, za $n > 0$ imamo:

$$L(-2n)\mathbf{1} = e_{-n}f_{-n}\mathbf{1} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{2n-i,i}\mathbf{1}$$
$$L(-2n-1)\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{n} x_{2n+1-i,i}\mathbf{1}.$$

Napomena: po gornjoj definiciji, imamo $x_{i,i} = 2e_{-i}f_{-i}$. Svejedno, preferirat ćemo koristiti $e_{-i}f_{-i}$ umjesto $\frac{1}{2}x_{i,i}$, kad možemo.

Vidimo da na nivoima $2n$ i $2n+1$ imamo n različitih vektora oblika $x_{i,j}\mathbf{1}$. Također, lako se vidi da na neparnim nivoima imamo $x_{i,j}\mathbf{1} \in L(-1)V \subset \widehat{C_4}$. Slično, na parnom nivou $2n$ možemo sve $x_{i,j}\mathbf{1}$ napisati preko $x_{2n-1,1}\mathbf{1}$ modulo $\widehat{C_4}$.

Također, bit će nam korisno primijetiti:

$$x_{i,j}x_{j,k} = \widetilde{x_{i,j}}\widetilde{x_{j,k}} = -x_{i,k}e_{-j}f_{-j}. \tag{5.7.1}$$

Prenošenje s $\mathrm{Vir}.E$

Moći ćemo iskoristiti i neke relacije iz računa za $\mathrm{Vir}.E$. Koristimo (5.6.4) i dobivamo:

$$\frac{1}{2}[H_0, x_{i,j}] = \binom{i+1}{2}\widetilde{x_{i+2,j}} - \binom{j+1}{2}\widetilde{x_{i,j+2}}$$
$$\frac{1}{2}[H_0, \widetilde{x_{i,j}}] = \binom{i+1}{2}x_{i+2,j} - \binom{j+1}{2}x_{i,j+2}.$$

Ako uzmemo derivaciju $Y \in \mathfrak{sl}_2$, tada vrijedi

$$Y(e_{-i}e_{-j}\mathbf{1}) = \widetilde{x_{i,j}}\mathbf{1}.$$

Ovo nam daje mogućnost da relacije prenosimo sa $\mathrm{Vir}.E$ u $\mathrm{Vir}.\mathbf{1}$ pomoću $H_0 \circ Y$.

Operator A_0

Stavit ćemo i $A := \frac{1}{6}L(-2)\omega$. Upotrebom komutacijske formule za VOA:

$$[A_0, e_{-n}] = \binom{n+2}{3}e_{-n-3},\ [A_0, f_{-n}] = \binom{n+2}{3}f_{-n-3}.$$

Zbog toga imamo:

$$[A_0, x_{i,j}] = \binom{i+2}{3}x_{i+3,j} + \binom{j+2}{3}x_{i,j+3}.$$

5.7.2. Relacije

Nivo 5

$$L(-5)\mathbf{1} = (x_{4,1} + x_{3,2})\mathbf{1} \tag{5.7.2}$$

Nivo 6

$$L(-6)\mathbf{1} = (x_{5,1} + x_{4,2} + e_{-3}f_{-3})\mathbf{1} \tag{5.7.3}$$

Nivo 7

$$L(-7)\mathbf{1} = (x_{6,1} + x_{5,2} + x_{4,3})\mathbf{1} \tag{5.7.4}$$

$$L(-5)\omega = x_{6,1}\mathbf{1} + x_{3,2}\omega \tag{5.7.5}$$

Nivo 8

$$\begin{aligned}
L(-8)\mathbf{1} &= (x_{7,1}+x_{6,2}+x_{5,3}+e_{-4}f_{-4})\mathbf{1}\\
A_0L(-5)\mathbf{1} &= (20x_{7,1}+10x_{6,2}+4x_{5,3}+2e_{-4}f_{-4})\mathbf{1}\\
L(-6)\omega &= x_{7,1}+e_{-3}f_{-3}\omega+x_{4,2}\omega\\
L(-1)L(-5)\omega &= 6x_{7,1}+x_{6,2}+4e_{-3}f_{-3}\omega+3x_{4,2}\omega-x_{3,1}e_{-2}f_{-2}
\end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi:

$$e_{-4}f_{-4}\mathbf{1} \equiv (8x_{7,1}+3x_{6,2})\mathbf{1} \mod C_4 \tag{5.7.6}$$

$$x_{5,3}\mathbf{1} \equiv (-9x_{7,1}-4x_{6,2})\mathbf{1} \mod C_4 \tag{5.7.7}$$

$$x_{4,2}\omega \equiv -x_{7,1}\mathbf{1}-e_{-3}f_{-3}\omega \mod C_4 \tag{5.7.8}$$

$$x_{3,1}e_{-2}f_{-2} \equiv (3x_{7,1}+x_{6,2})\mathbf{1}+e_{-3}f_{-3}\omega \mod C_4 \tag{5.7.9}$$

Nivo 9

Djelovanjem $L(-1)$ na relacije duljine 2 s nivoa 8:

$$x_{5,4}\mathbf{1} \equiv (5x_{8,1}+2x_{7,2})\mathbf{1} \mod C_4 \tag{5.7.10}$$

$$x_{6,3}\mathbf{1} \equiv (-6x_{8,1}-3x_{7,2})\mathbf{1} \mod C_4. \tag{5.7.11}$$

Izračunajmo $H_{-4}H \in C_4$ (iz [Ad] znamo da $H_{-4}H$ leži u Vir). Iz (5.6.2) imamo:

$$E_{-4} = \sum_{k\geq 0}(2+2k)e_{-4-k}e_{-2+k},$$

pa ako iskomutiramo sa Y dobivamo

$$H_{-4} = \sum_{k\geq 0}(k+1)(e_{-4-k}f_{-2+k}+f_{-4-k}e_{-2-k}).$$

Sada računamo:

$$\begin{aligned}
H_{-4}H &= H_{-4}\left(\frac{1}{2}\widetilde{x_{2,1}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\widetilde{x_{4,2}}\widetilde{x_{2,1}}\mathbf{1}+\widetilde{x_{5,1}}\widetilde{x_{2,1}}\mathbf{1}+2(e_{-7}f_1+f_{-7}e_1)\widetilde{x_{2,1}}+\frac{5}{2}(e_{-8}f_2+f_{-8}e_2)\widetilde{x_{2,1}}\\
&= -\frac{1}{2}x_{4,1}e_{-2}f_{-2}\mathbf{1}+x_{5,2}\omega+(-2x_{7,2}+5x_{8,1})\mathbf{1},
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem koraku iskoristili formulu (5.7.1). Primijetimo da vrijedi $L(-5)e_{-2}f_{-2}\mathbf{1} = x_{4,1}e_{-2}f_{-2}\mathbf{1} + 2x_{7,2}\mathbf{1}$ pa imamo:

$$x_{4,1}e_{-2}f_{-2}\mathbf{1} \equiv -2x_{7,2}\mathbf{1} \mod C_4 \tag{5.7.12}$$

$$x_{5,2}\omega \equiv (-5x_{8,1} + x_{7,2})\mathbf{1}. \mod C_4 \tag{5.7.13}$$

Djelovanjem $L(-2)$ na (5.7.4) i (5.7.5) dobivamo:

$$x_{4,3}\omega \equiv (4x_{8,1} - x_{7,2})\mathbf{1} \mod C_4 \tag{5.7.14}$$

$$x_{2,1}e_{-3}f_{-3}\mathbf{1} \equiv (-7x_{8,1} - 2x_{7,2})\mathbf{1} \mod C_4. \tag{5.7.15}$$

Nivo 10

Promotrimo vektore:

$$L(-10)\mathbf{1} = (x_{9,1} + x_{8,2} + x_{7,3} + x_{6,4} + e_{-5}f_{-5})\mathbf{1}$$
$$A_0L(-7)\mathbf{1} = (56x_{9,1} + 35x_{8,2} + 20x_{7,3} + 11x_{6,4} + 8e_{-5}f_{-5})\mathbf{1}.$$

Da bi dobili još jednu relaciju duljine dva, djelujemo s derivacijom Y na relaciju (5.6.8) i imamo:

$$\widetilde{x_{6,2}}\mathbf{1} \equiv -4\widetilde{x_{7,1}}\mathbf{1} \mod C_4$$

Djelovanje sa $\frac{1}{2}H_0$ na tu relaciju daje:

$$(112x_{9,1} + 21x_{8,2} - 4x_{7,3} - 3x_{6,4})\mathbf{1} \equiv 0 \mod C_4.$$

Sve skupa, imamo:

$$e_{-5}f_{-5}\mathbf{1} \equiv (-45x_{9,1} - 10x_{8,2})\mathbf{1} \mod C_4 \tag{5.7.16}$$

$$x_{6,4}\mathbf{1} \equiv (64x_{9,1} + 15x_{8,2})\mathbf{1} \mod C_4 \tag{5.7.17}$$

$$x_{7,3}\mathbf{1} \equiv (-20x_{9,1} - 6x_{8,2})\mathbf{1} \mod C_4. \tag{5.7.18}$$

Djelujemo s $L(-2)$ na (5.7.6) i (5.7.7) dobivamo:

$$e_{-4}f_{-4}\omega \equiv 24x_{9,1}\mathbf{1} + 3x_{6,2}\omega \mod C_4 \tag{5.7.19}$$

$$x_{5,3}\omega \equiv -25x_{9,1}\mathbf{1} - 4x_{6,2}\omega. \mod C_4 \tag{5.7.20}$$

Djelujemo s $L(-1)$ na relacije (5.7.12)-(5.7.15) s nivoa 9, što daje:

$$x_{5,1}e_{-2}f_{-2} \equiv (30x_{9,1}+10x_{8,2})\mathbf{1} - 3x_{6,2}\omega \mod C_4 \tag{5.7.21}$$

$$x_{4,1}x_{3,2} \equiv (-20x_{9,1}-15x_{8,2})\mathbf{1} + 6x_{6,2}\omega \mod C_4 \tag{5.7.22}$$

$$x_{4,3}x_{2,1} \equiv (28x_{9,1}+9x_{8,2})\mathbf{1} - 2x_{6,2}\omega \mod C_4 \tag{5.7.23}$$

$$e_{-3}f_{-3}e_{-2}f_{-2} \equiv (-30x_{9,1}-12x_{8,2})\mathbf{1} + 3x_{6,2}\omega \mod C_4. \tag{5.7.24}$$

Djelovanjem na relaciju (5.7.8) sa $L(-2)$ dobivamo

$$x_{4,2}x_{3,1} \equiv (-8x_{9,1}+6x_{8,2})\mathbf{1} - 4x_{6,2}\omega \mod C_4. \tag{5.7.25}$$

Da bi izrazili $x_{6,2}\omega$ preko elemenata duljine 2, napisat ćemo $\widetilde{x_{4,2}}\widetilde{x_{3,1}}\mathbf{1}$ na dva načina. Prvo, iz $H_{-4}\widetilde{x_{3,1}}\mathbf{1}$ dobivamo

$$\widetilde{x_{4,2}}\widetilde{x_{3,1}}\mathbf{1} \equiv (-48x_{9,1}-24x_{8,2})\mathbf{1} + 8x_{6,2}\omega \mod C_4. \tag{5.7.26}$$

S druge strane, direktnim računom se vidi da možemo napisati:

$$\widetilde{x_{4,2}}\widetilde{x_{3,1}}\mathbf{1} = \frac{2}{3}x_{4,3}x_{2,1}\mathbf{1} + \frac{1}{3}x_{4,2}x_{3,1}\mathbf{1} - \frac{1}{3}(Y^2.e_{-4}e_{-3}e_{-2}e_{-1}\mathbf{1}).$$

Zbog $E_{-5}E = e_{-4}e_{-3}e_{-2}e_{-1} \in C_4$ imamo:

$$\begin{aligned}\widetilde{x_{4,2}}\widetilde{x_{3,1}}\mathbf{1} &\equiv \frac{2}{3}x_{4,3}x_{2,1}\mathbf{1} + \frac{1}{3}x_{4,2}x_{3,1}\mathbf{1} \mod C_4\\ &\equiv (16x_{9,1}+8x_{8,2})\mathbf{1} - \frac{8}{3}x_{6,2}\omega \mod C_4\end{aligned}$$

Uspoređivanjem te dvije relacije dobivamo:

$$x_{6,2}\omega \equiv 6x_{9,1}\mathbf{1} + 3x_{8,2}\mathbf{1} \mod C_4. \tag{5.7.27}$$

Sad možemo uvrstiti ovaj izraz za $x_{6,2}\omega$ u prethodne relacije. No radi jednostavnosti, nećemo napisati sve relacije, već samo one koje ćemo koristiti na višim nivoima:

$$e_{-4}f_{-4}\omega \equiv (42x_{9,1}+9x_{8,2})\mathbf{1} \mod C_4 \tag{5.7.28}$$

$$x_{5,3}\omega \equiv (-49x_{9,1}-12x_{8,2})\mathbf{1} \tag{5.7.29}$$

Nivo 12

Na nivou 10 u $\mathrm{Vir}.E$ imamo $e_{-9+i}e_{-1-i}\mathbf{1} \in C_4, i = 0,1,2,3,$ što povlači $\widetilde{x_{9-i,1+i}} \in C_4, i = 0,1,2,3$. Kad djelujemo s $\frac{1}{2}H_0$ na te vektore dobivamo relacije

$$\left(\binom{10}{2}x_{11,1} - \binom{2}{2}x_{9,3}\right)\mathbf{1} \equiv 0 \mod C_4$$
$$\left(\binom{9}{2}x_{10,2} - \binom{3}{2}x_{8,4}\right)\mathbf{1} \equiv 0 \mod C_4$$
$$\left(\binom{8}{2}x_{9,3} - \binom{4}{2}x_{7,5}\right)\mathbf{1} \equiv 0 \mod C_4$$
$$\left(\binom{7}{2}x_{8,4} - \binom{5}{2}x_{6,6}\right)\mathbf{1} \equiv 0 \mod C_4.$$

Kad tim relacijama dodamo

$$L(-12)\mathbf{1} = (x_{11,1} + x_{10,2} + x_{9,3} + x_{8,4} + x_{7,5} + e_{-6}f_{-6})\mathbf{1} \in C_4,$$

dobivamo

$$e_{-6}f_{-6}\mathbf{1} \equiv -126x_{11,1}\mathbf{1} \mod C_4 \tag{5.7.30}$$
$$x_{7,5}\mathbf{1} \equiv 210x_{11,1}\mathbf{1} \mod C_4 \tag{5.7.31}$$
$$x_{8,4}\mathbf{1} \equiv -120x_{11,1}\mathbf{1} \mod C_4 \tag{5.7.32}$$
$$x_{9,3}\mathbf{1} \equiv 45x_{11,1}\mathbf{1} \mod C_4 \tag{5.7.33}$$
$$x_{10,2}\mathbf{1} \equiv -10x_{11,1}\mathbf{1} \mod C_4. \tag{5.7.34}$$

Djelujemo s $L(-2)$ na (5.7.16)-(5.7.18) dobivamo:

$$e_{-5}f_{-5}\omega \equiv -280x_{11,1}\mathbf{1} - 10x_{8,2}\omega \mod C_4 \tag{5.7.35}$$
$$x_{6,4}\omega \equiv 384x_{11,1}\mathbf{1} + 15x_{8,2}\omega \mod C_4 \tag{5.7.36}$$
$$x_{7,3}\omega \equiv -105x_{11,1}\mathbf{1} - 6x_{8,2}\omega \mod C_4 \tag{5.7.37}$$

Sljedeći cilj nam je prikazati $x_{8,2}\omega$ pomoću $x_{11,1}\mathbf{1}$. Ako djelujemo s A_0 na (5.7.14) dobivamo

$$\binom{6}{3}x_{7,3}\omega + \binom{5}{3}x_{6,4}\omega + x_{4,3}x_{4,1}\mathbf{1} \equiv 0 \mod C_4.$$

Kad iskoristimo relacije (5.7.36) i (5.7.38) dobivamo:

$$x_{3,1}e_{-4}f_{-4}\mathbf{1} \equiv 1740x_{11,1}\mathbf{1} + 30x_{8,2}\omega \mod C_4. \tag{5.7.38}$$

S druge strane, ako iskoristimo $L(-2)$ na relaciju (5.7.28), dobit ćemo

$$x_{3,1}e_{-4}f_{-4}\mathbf{1} \equiv -2148x_{11,1}\mathbf{1} - 51x_{8,2}\omega \mod C_4. \tag{5.7.39}$$

Ako usporedimo ovo s prethodnim izrazom za $x_{3,1}e_{-4}f_{-4}\mathbf{1}$ dobivamo

$$x_{8,2}\omega \equiv -48x_{11,1} \mod C_4. \tag{5.7.40}$$

Kad to uvrstimo u (5.7.38) dobivamo:

$$x_{7,3}\omega \equiv 183x_{11,1} \mod C_4. \tag{5.7.41}$$

Jasno, to bi mogli napraviti i za ostale relacije u kojima se pojavljuje $x_{8,2}\omega$, ali samo ova će nam trebati na višim nivoima.

Nivo 14

Prenošenjem iz Vir $.E$ zaključimo da je

$$x_{12,2} \equiv -12x_{13,1} \mod C_4 \tag{5.7.42}$$

$$x_{11,3} \equiv 66x_{13,1} \mod C_4 \tag{5.7.43}$$

$$x_{10,4} \equiv -220x_{13,1} \mod C_4 \tag{5.7.44}$$

$$x_{9,5} \equiv 495x_{13,1} \mod C_4 \tag{5.7.45}$$

$$x_{8,6} \equiv -792x_{13,1} \mod C_4 \tag{5.7.46}$$

$$e_{-7}f_{-7} \equiv 462x_{13,1} \mod C_4. \tag{5.7.47}$$

Napadanjem s $L(-2)$ na (5.7.30)-(5.7.34) dobivamo:

$$x_{10,2}\omega \equiv -210x_{13,1} \mod C_4 \tag{5.7.48}$$

$$x_{9,3}\omega \equiv 1386x_{13,1} \mod C_4 \tag{5.7.49}$$

$$x_{8,4}\omega \equiv -4312x_{13,1} \mod C_4 \tag{5.7.50}$$

$$x_{7,5}\omega \equiv 8085x_{13,1} \mod C_4 \tag{5.7.51}$$

$$e_{-6}f_{-6}\omega \equiv -4950x_{13,1} \mod C_4. \tag{5.7.52}$$

Sa nivoa 12 u Vir $.E$ znamo da je $e_{-7}e_{-3}\omega \in C_4$. Djelovanjem sa $\frac{1}{2}H_0 \circ Y$ dobivamo:

$$\binom{8}{2}x_{9,3}\omega - \binom{4}{2}x_{7,5}\omega - x_{7,1}e_{-3}f_{-3}\mathbf{1} \equiv 0 \mod C_4.$$

Korištenjem relacija (5.7.49) i (5.7.51) dobit ćemo

$$x_{7,1}e_{-3}f_{-3}\mathbf{1} \equiv -9702x_{13,1}\mathbf{1} \mod C_4. \tag{5.7.53}$$

Kada djelujemo s $L(-2)$ na (5.7.41) dobit ćemo:

$$7x_{9,3}\omega + 3x_{7,5}\omega - x_{7,1}e_{-3}f_{-3}\mathbf{1} \equiv 183(11x_{13,1} + x_{11,3})\mathbf{1} \mod C_4.$$

Kad pojednostavimo ovu relaciju, dobivamo

$$x_{7,1}e_{-3}f_{-3}\mathbf{1} \equiv 19866x_{13,1}\mathbf{1} \mod C_4 \tag{5.7.54}$$

Ako usporedimo s relacijom (5.7.53), zaključujemo da vrijedi $x_{13,1}\mathbf{1} \in C_4$, pa onda i svi vektori koje smo prikazali preko tog vektora.

5.7.3. Sustav izvodnica

Prema lemi 5.3.1, $\pi^{\pm}_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).\mathbf{1})$ je razapet sa slikama vektora

$$L(-2)^n\mathbf{1},\ L(-3)^2L(-2)^n,\ n \geq 0.$$

Eliminirat ćemo sve osim konačno mnogo vektora. Računajmo:

$$\begin{aligned}
L(-2)\mathbf{1} &= e_{-1}f \\
L(-2)^2\mathbf{1} &= x_{3,1}\mathbf{1} \\
L(-2)^3\mathbf{1} &= (3x_{5,1} + 2e_{-3}f_{-3})\mathbf{1} \\
L(-2)^4\mathbf{1} &= (15x_{7,1} + 9x_{5,3})\mathbf{1} + 2e_{-3}f_{-3}\omega \\
&\equiv (-66x_{7,1} - 36x_{6,2})\mathbf{1} + 2e_{-3}f_{-3}\omega \mod C_4 \\
L(-2)^5\mathbf{1} &\equiv (-462x_{9,1} - 216x_{8,2} - 66x_{7,3} - 72x_{6,4})\mathbf{1} - 36x_{6,2}\omega + 6x_{5,3}\omega \mod C_4 \\
&\equiv (-4260x_{9,1} - 1080x_{8,2})\mathbf{1} \mod C_4
\end{aligned}$$

Zbog $L(-1)x_{8,1}\mathbf{1} = 8x_{9,1}\mathbf{1} + x_{8,2}\mathbf{1}$ slijedi da je

$$L(-2)^5\mathbf{1} \equiv 4380x_{9,1} \mod \widehat{C_4}.$$

Iz relacija na nivou 12 se vidi da je

$$L(-2)^6\mathbf{1} \equiv 167400x_{11,1}\mathbf{1} \mod C_4,$$

pa je zbog toga:

$$L(-2)^7\mathbf{1} \equiv 167400(11x_{13,1} + x_{11,3}) \equiv 167400 \cdot 77x_{13,1} \equiv 0 \mod C_4.$$

Tada je:

$$L(-2)^{7+n}\mathbf{1} \in C_4, n \geq 0.$$

Računamo dalje:

$$\begin{aligned}
L(-3)^2\mathbf{1} &= (2x_{5,1} + x_{4,2})\mathbf{1} - 2e_{-2}f_{-2}\omega \\
L(-2)L(-3)^2\mathbf{1} &= (10x_{7,1} + 4x_{6,2} + 2x_{5,3} + 4e_{-4}f_{-4})\mathbf{1} - 3x_{4,2}\omega - 2x_{3,1}e_{-2}f_{-2} \\
&\equiv 21x_{7,1} + 7x_{6,2} + 2e_{-3}f_{-3}\omega \mod C_4 \\
L(-2)^2L(-3)^2\mathbf{1} &\equiv 21(x_{9,1} + x_{7,3})\mathbf{1} + 7(6x_{8,2} + 2x_{6,4})\mathbf{1} + 7x_{6,2}\omega + 6x_{5,3}\omega \\
v &\equiv (371x_{9,1} + 75x_{8,2})\mathbf{1} \mod C_4 \\
&\equiv -229x_{9,1}\mathbf{1} \mod \widehat{C_4}
\end{aligned}$$

Dakle, $L(-2)^2L(-3)^2\mathbf{1}$ i $L(-2)^5\mathbf{1}$ su linearno zavisni modulo $\widehat{C_4}$ (oba se mogu zapisati preko $x_{9,1}\mathbf{1}$). Vidi se da su $L(-2)^3L(-3)^2\mathbf{1}$ i $L(-2)^6\mathbf{1}$ linearno zavisni modulo C_4 (oba se mogu zapisati preko $x_{11,1}\mathbf{1}$), te da vrijedi

$$L(-2)^{4+n}L(-3)^2 \in C_4,\ n \geq 0.$$

Konačno, slijedi da je $\pi^{\pm}_{\widehat{C_4}}(U(\mathrm{Vir}).\mathbf{1})$ razapet sa slikama vektora

$$\mathbf{1}, L(-2)\mathbf{1}\ldots, L(-2)^6\mathbf{1}, L(-3)^2\mathbf{1}, L(-2)L(-3)^2\mathbf{1},$$

čime je račun gotov.

ZAKLJUČAK

U ovoj radnji, u potpunosti smo odredili Zhuovu algebru $A(SF(d)^+)$ od algebre verteks operatora $SF(d)^+$:

$$A(SF(d)^+) \simeq M_{2d}(\mathbb{C}) \oplus M_{2d}(\mathbb{C}) \oplus \Lambda(\mathfrak{h}_{2d})^+ \oplus \mathbb{C},$$

te smo pokazali da vrijedi jednakost dimenzija Zhuove algebre i C_2-algebre pridružene $SF(d)^+$, konkretno, da imamo $\dim A(SF(d)^+) = \dim \mathscr{P}(SF(d)^+) = 2^{2d-1} + 8d^2 + 1$.

Pokazali smo još neke činjenice o algebri verteks operatora simplektičkih fermiona:

- Dimenzija vektorskog prostora *one-point* funkcija na $SF(d)^+$ je jednaka $2^{2d-1} + 3$.
- Minimalni polinom od $[\omega] \in A(SF(d)^+)$ je

$$m_d(x) = x^{d+1}(x-1)(x+d/8)(x+d/8-1/2).$$

- Stupanj nilpotentnosti od $\overline{\omega} \in \mathscr{P}(SF(d)^+)$ je

$$s_d = \begin{cases} 5, & d \leq 4 \\ d+1, & d \geq 5. \end{cases}$$

- Invarijantna podalgebra $A(SF(d)^+)^{Sp(2d)}$ je generirana sa $[\omega]$.

Također, izračunali smo prvu Zhuovu algebru za superalgebru verteks operatora $SF(1)$ i algebru verteks operatora $SF(1)^+$. Konkretno, pokazali smo da vrijedi

$$A_1(SF(1)) \simeq \Lambda(\mathfrak{h}) \otimes (\mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C}))$$
$$A_1(SF(1)^+) \simeq \mathbb{C}^{\oplus 2} \oplus M_2(\mathbb{C})^{\oplus 3} \oplus \Lambda(\mathfrak{h}_2)^+ \oplus \left(\Lambda(\mathfrak{h}_2)^+ \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C})\right).$$

Odredili smo i generatore tih algebri.

BIBLIOGRAFIJA

[1] Toshiyuki Abe: *A $\mathbb{Z}_2$-orbifold model of the symplectic fermionic vertex operator superalgebra.* Math. Z., 255(4):755–792, 2007, ISSN 0025-5874; 1432-1823/E. https://doi.org/10.1007/s00209-006-0048-5. ↑ iii, iv, 2, 3, 4, 5, 7, 24, 35, 38, 39, 40, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 51, 53, 54, 57, 58, 71.

[2] Toshiyuki Abe, Geoffrey Buhl i Chongying Dong: *Rationality, regularity, and C_2-cofiniteness.* Trans. Amer. Math. Soc., 356(8):3391–3402, 2004, ISSN 0002-9947. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-03-03413-5.

[3] Dražen Adamović: *Classification of irreducible modules of certain subalgebras of free boson vertex algebra.* J. Algebra, 270(1):115–132, 2003, ISSN 0021-8693. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2003.07.011. ↑ 30, 31.

[4] Dražen Adamović, Xianzu Lin i Antun Milas: *ADE subalgebras of the triplet vertex algebra $\mathscr{W}(p)$: A-series.* Commun. Contemp. Math., 15(6):1350028, 30, 2013, ISSN 0219-1997. https://doi.org/10.1142/S0219199713500284. ↑ 2, 32.

[5] Dražen Adamović, Xianzu Lin i Antun Milas: *ADE subalgebras of the triplet vertex algebra $\mathscr{W}(p)$: D-series.* Internat. J. Math., 25(1):1450001, 34, 2014, ISSN 0129-167X. https://doi.org/10.1142/S0129167X14500013. ↑ 2, 32.

[6] Dražen Adamović, Xianzu Lin i Antun Milas: *Vertex algebras $\mathscr{W}(p)^{A_m}$ and $\mathscr{W}(p)^{D_m}$ and constant term identities.* SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl., 11:Paper 019, 16, 2015. https://doi.org/10.3842/SIGMA.2015.019. ↑ 2, 32.

[7] Dražen Adamović i Antun Milas: *On the triplet vertex algebra $\mathscr{W}(p)$.* Adv. Math., 217(6):2664–2699, 2008, ISSN 0001-8708. https://doi.org/10.1016/j.aim.2007.11.012. ↑ 2, 4, 8, 30, 31, 32, 48, 51, 75, 88.

[8] Dražen Adamović i Antun Milas: *On $\mathscr{W}$-algebras associated to $(2,p)$ minimal models and their representations*. Int. Math. Res. Not. IMRN, 2010(20):3896–3934, 2010, ISSN 1073-7928. https://doi.org/10.1093/imrn/rnq016. ↑ 3.

[9] Dražen Adamović i Antun Milas: *On $\mathscr{W}$-algebra extensions of $(2,p)$ minimal models: $p>3$*. J. Algebra, 344:313–332, 2011, ISSN 0021-8693. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2011.07.006. ↑ 32.

[10] Dražen Adamović i Antun Milas: *The structure of Zhu's algebras for certain $\mathscr{W}$-algebras*. Adv. Math., 227(6):2425–2456, 2011, ISSN 0001-8708. https://doi.org/10.1016/j.aim.2011.05.007. ↑ 2, 3, 30, 32, 75.

[11] Dražen Adamović i Antun Milas: *C_2-cofinite $\mathscr{W}$-algebras and their logarithmic representations*. U *Conformal field theories and tensor categories*, Math. Lect. Peking Univ., stranice 249–270. Springer, Heidelberg, 2014. https://doi.org/10.1007/978-3-642-39383-9_6. ↑ 1.

[12] Dražen Adamović i Antun Milas: *Some applications and constructions of intertwining operators in logarithmic conformal field theory*. U *Lie algebras, vertex operator algebras, and related topics*, svezak 695 iz *Contemp. Math.*, stranice 15–27. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017. https://doi.org/10.1090/conm/695/13992. ↑ 2.

[13] Dražen Adamović i Antun Milas: *On some vertex algebras related to $V_{-1}(\mathfrak{sl}(n))$ and their characters*. Transformation Groups, 2020. https://doi.org/10.1007/s00031-020-09617-w. ↑ 3.

[14] Dražen Adamović i Ante Čeperić: *On Zhu's algebra and C_2-algebra for symplectic fermion vertex algebra $SF(d)^+$*. J. Algebra, 563:376–403, 2020, ISSN 0021-8693. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2020.07.019. ↑ 5, 53.

[15] Yusuke Arike i Kiyokazu Nagatomo: *Some remarks on pseudo-trace functions for orbifold models associated with symplectic fermions*. Internat. J. Math., 24(2):1350008, 29, 2013, ISSN 0129-167X. https://doi.org/10.1142/S0129167X13500080. ↑ iii, iv, 3, 6, 68, 70, 71.

[16] Katrina Barron, Nathan Vander Werf i Jinwei Yang: *Higher level Zhu algebras and modules for vertex operator algebras*. J. Pure Appl. Algebra, 223(8):3295–3317, 2019, ISSN 0022-4049. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2018.11.002. ↑ 3, 19.

[17] Katrina Barron, Nathan Vander Werf i Jinwei Yang: *The level one Zhu algebra for the Virasoro vertex operator algebra*. U *Vertex operator algebras, number theory and related topics*, svezak 753 iz *Contemp. Math.*, stranice 17–43. Amer. Math. Soc., Providence, RI, [2020] ©2020. https://doi.org/10.1090/conm/753/15162. ↑ 3, 19.

[18] A. A. Belavin, A. M. Polyakov i A. B. Zamolodchikov: *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*. Nucl. Phys., B, 241(2):333–380, 1984, ISSN 0550-3213. https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90052-X. ↑ 1.

[19] Richard E. Borcherds: *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 83(10):3068–3071, 1986, ISSN 0027-8424. https://doi.org/10.1073/pnas.83.10.3068. ↑ 1, 11.

[20] J. H. Conway i S. P. Norton: *Monstrous moonshine*. Bull. London Math. Soc., 11(3):308–339, 1979, ISSN 0024-6093. https://doi.org/10.1112/blms/11.3.308. ↑ 1.

[21] Thomas Creutzig, Azat M. Gainutdinov i Ingo Runkel: *A quasi-Hopf algebra for the triplet vertex operator algebra*. Commun. Contemp. Math., 22(3):1950024, 71, 2020, ISSN 0219-1997. https://doi.org/10.1142/S021919971950024X. ↑ 3.

[22] Thomas Creutzig i Terry Gannon: *Logarithmic conformal field theory, log-modular tensor categories and modular forms*. J. Phys. A, 50(40):404004, 37, 2017, ISSN 1751-8113. https://doi.org/10.1088/1751-8121/aa8538. ↑ 1.

[23] Thomas Creutzig i Andrew R. Linshaw: *Orbifolds of symplectic fermion algebras*. Trans. Amer. Math. Soc., 369(1):467–494, 2017, ISSN 0002-9947. https://doi.org/10.1090/tran6664. ↑ 2, 48, 52.

[24] Thomas Creutzig i David Ridout: *Logarithmic conformal field theory: beyond an introduction*. J. Phys. A, 46(49):494006, 72, 2013, ISSN 1751-8113. https://doi.org/10.1088/1751-8113/46/49/494006. ↑ 1.

[25] A. Davydov i I. Runkel: *A braided monoidal category for symplectic fermions*. U *Symmetries and groups in contemporary physics*, svezak 11 iz *Nankai Ser. Pure Appl. Math.*

Theoret. Phys., stranice 399–404. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2013. https://doi.org/10.1142/9789814518550_0054. ↑ 3.

[26] Alexei Davydov i Ingo Runkel: *Holomorphic symplectic fermions*. Math. Z., 285(3-4):967–1006, 2017, ISSN 0025-5874. https://doi.org/10.1007/s00209-016-1734-6. ↑ 50.

[27] Alberto De Sole i Victor G. Kac: *Finite vs affine W-algebras*. Jpn. J. Math., 1(1):137–261, 2006, ISSN 0289-2316. https://doi.org/10.1007/s11537-006-0505-2. ↑ 23, 24.

[28] Fred Diamond i Jerry Shurman: *A first course in modular forms*, svezak 228 iz *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2005, ISBN 0-387-23229-X. ↑ 69.

[29] Chongying Dong, Haisheng Li i Geoffrey Mason: *Vertex operator algebras and associative algebras*. J. Algebra, 206(1):67–96, 1998, ISSN 0021-8693. https://doi.org/10.1006/jabr.1998.7425. ↑ iii, iv, 3, 8, 19, 20, 21.

[30] Jethro van Ekeren: *Higher level twisted Zhu algebras*. J. Math. Phys., 52(5):052302, 36, 2011, ISSN 0022-2488. https://doi.org/10.1063/1.3589214. ↑ 3, 19.

[31] B. L. Feigin i I. Yu. Tipunin: *Logarithmic CFTs connected with simple Lie algebras*, 2010. https://arxiv.org/abs/1002.5047.

[32] Boris Feigin, Evgeny Feigin i Peter Littelmann: *Zhu's algebras, C_2-algebras and abelian radicals*. J. Algebra, 329:130–146, 2011, ISSN 0021-8693. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2010.03.005. ↑ 2.

[33] Evgeny Feigin i Peter Littelmann: *Zhu's algebra and the C_2-algebra in the symplectic and the orthogonal cases*. J. Phys. A, 43(13):135206, 18, 2010, ISSN 1751-8113. https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/13/135206. ↑ 2.

[34] Edward Frenkel: *Lectures on the Langlands program and conformal field theory*. U *Frontiers in number theory, physics, and geometry. II*, stranice 387–533. Springer, Berlin, 2007. https://doi.org/10.1007/978-3-540-30308-4_11. ↑ 1.

[35] Edward Frenkel i David Ben-Zvi: *Vertex algebras and algebraic curves*, svezak 88 iz *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence,

RI, drugo izdanje, 2004, ISBN 0-8218-3674-9. https://doi.org/10.1090/surv/088. ↑ 1, 9, 12.

[36] Edward Frenkel, Victor Kac, Andrey Radul i Weiqiang Wang: *$\mathscr{W}_{1+\infty}$ and $\mathscr{W}(\mathfrak{gl}_N)$ with central charge N*. Comm. Math. Phys., 170(2):337–357, 1995, ISSN 0010-3616. http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104273124. ↑ 25.

[37] Igor Frenkel, James Lepowsky i Arne Meurman: *Vertex operator algebras and the Monster*, svezak 134 iz *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988, ISBN 0-12-267065-5. https://doi.org/10.1016/s0079-8169(08)x6136-7. ↑ 1, 9, 28, 42.

[38] Igor B. Frenkel i Yongchang Zhu: *Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras*. Duke Math. J., 66(1):123–168, 1992, ISSN 0012-7094. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-92-06604-X.

[39] William Fulton i Joe Harris: *Representation theory*, svezak 129 iz *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991, ISBN 0-387-97527-6; 0-387-97495-4. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0979-9, A first course, Readings in Mathematics. ↑ 40, 41, 75.

[40] Matthias R. Gaberdiel i Terry Gannon: *Zhu's algebra, the C_2 algebra, and twisted modules*. U *Vertex operator algebras and related areas*, svezak 497 iz *Contemp. Math.*, stranice 65–78. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009. https://doi.org/10.1090/conm/497/09769. ↑ iii, iv, 2.

[41] Matthias R. Gaberdiel i Horst G. Kausch: *A rational logarithmic conformal field theory*. Phys. Lett. B, 386(1-4):131–137, 1996, ISSN 0370-2693. https://doi.org/10.1016/0370-2693(96)00949-5. ↑ 2, 35.

[42] Matthias R. Gaberdiel i Horst G. Kausch: *A local logarithmic conformal field theory*. Nuclear Phys. B, 538(3):631–658, 1999, ISSN 0550-3213. https://doi.org/10.1016/S0550-3213(98)00701-9. ↑ 2, 35.

[43] A. M. Gainutdinov i I. Runkel: *Symplectic fermions and a quasi-Hopf algebra structure on $\overline{U}_{\mathrm{i}}s\ell(2)$*. J. Algebra, 476:415–458, 2017, ISSN 0021-8693. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2016.11.026. ↑ 3, 8, 96.

[44] A. M. Gaĭnutdinov, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin i B. L. Feĭgin: *The Kazhdan-Lusztig correspondence for the representation category of the triplet W-algebra in logarithmic conformal field theories*. Teoret. Mat. Fiz., 148(3):398–427, 2006, ISSN 0564-6162. https://doi.org/10.1007/s11232-006-0113-6. ↑ 3.

[45] Kenneth Ireland i Michael Rosen: *A classical introduction to modern number theory*, svezak 84 iz *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, drugo izdanje, 1990, ISBN 0-387-97329-X. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2103-4. ↑ 56.

[46] Victor Kac: *Vertex algebras for beginners*, svezak 10 iz *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, drugo izdanje, 1998, ISBN 0-8218-1396-X. https://doi.org/10.1090/ulect/010. ↑ 1, 9, 12, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 33, 37, 38.

[47] Shashank Kanade i Andrew R. Linshaw: *Universal two-parameter even spin $\mathscr{W}_\infty$-algebra*. Adv. Math., 355:106774, 58, 2019, ISSN 0001-8708. https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.106774. ↑ 6.

[48] H. G. Kausch: *Extended conformal algebras generated by a multiplet of primary fields*. Phys. Lett. B, 259(4):448–455, 1991, ISSN 0370-2693. https://doi.org/10.1016/0370-2693(91)91655-F. ↑ 2, 30.

[49] Horst G. Kausch: *Curiosities at c=-2*, 1995. https://arxiv.org/abs/hep-th/9510149. ↑ 2, 45, 48.

[50] Horst G. Kausch: *Symplectic fermions*. Nuclear Phys. B, 583(3):513–541, 2000, ISSN 0550-3213. https://doi.org/10.1016/S0550-3213(00)00295-9. ↑ 2, 30, 35.

[51] D. Kazhdan i G. Lusztig: *Tensor structures arising from affine Lie algebras. I, II*. J. Amer. Math. Soc., 6(4):905–947, 949–1011, 1993, ISSN 0894-0347. https://doi.org/10.2307/2152745. ↑ 3.

[52] D. Kazhdan i G. Lusztig: *Tensor structures arising from affine Lie algebras. III*. J. Amer. Math. Soc., 7(2):335–381, 1994, ISSN 0894-0347. https://doi.org/10.2307/2152762. ↑ 3.

[53] D. Kazhdan i G. Lusztig: *Tensor structures arising from affine Lie algebras. IV*. J. Amer. Math. Soc., 7(2):383–453, 1994, ISSN 0894-0347. https://doi.org/10.2307/2152763.

[54] T. Y. Lam: *A first course in noncommutative rings*, svezak 131 iz *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, drugo izdanje, 2001, ISBN 0-387-95183-0. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8616-0. ↑ 74.

[55] Serge Lang: *Algebra*, svezak 211 iz *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, treće izdanje, 2002, ISBN 0-387-95385-X. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0041-0. ↑ 35.

[56] James Lepowsky i Haisheng Li: *Introduction to vertex operator algebras and their representations*, svezak 227 iz *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004, ISBN 0-8176-3408-8. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8186-9. ↑ 1, 9, 10, 12, 14, 27, 28, 30, 33, 38, 62.

[57] Hai Sheng Li: *Local systems of twisted vertex operators, vertex operator superalgebras and twisted modules*. U *Moonshine, the Monster, and related topics (South Hadley, MA, 1994)*, svezak 193 iz *Contemp. Math.*, stranice 203–236. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996. https://doi.org/10.1090/conm/193/02373.

[58] Hai Sheng Li: *Local systems of vertex operators, vertex superalgebras and modules*. J. Pure Appl. Algebra, 109(2):143–195, 1996, ISSN 0022-4049. https://doi.org/10.1016/0022-4049(95)00079-8. ↑ 10, 11, 15.

[59] Hai Sheng Li: *Abelianizing vertex algebras*. Comm. Math. Phys., 259(2):391–411, 2005, ISSN 0010-3616. https://doi.org/10.1007/s00220-005-1348-z. ↑ 82.

[60] Antun Milas, Michael Penn i Josh Wauchope: *Permutation orbifolds of rank three fermionic vertex superalgebras*. U *Affine, vertex and W-algebras. Based on the INdAM workshop, Rome, Italy, December 11–15, 2017*, stranice 183–202. Cham: Springer, 2019, ISBN 978-3-030-32905-1/HBK; 978-3-030-32906-8/EBOOK. https://doi.org/10.1007/978-3-030-32906-8_8. ↑ 3.

[61] Toshitsune Miyake: *Modular forms*. Springer-Verlag, Berlin, 1989, ISBN 3-540-50268-8. https://doi.org/10.1007/3-540-29593-3, Translated from the Japanese by Yoshitaka Maeda. ↑ 69.

[62] Masahiko Miyamoto: *Modular invariance of vertex operator algebras satisfying C_2-cofiniteness*. Duke Math. J., 122(1):51–91, 2004, ISSN 0012-7094. `https://doi.org/10.1215/S0012-7094-04-12212-2`. ↑ 3, 24, 68, 69, 70.

[63] Masahiko Miyamoto: *C_2-cofiniteness of cyclic-orbifold models*. Commun. Math. Phys., 335(3):1279–1286, 2015, ISSN 0010-3616; 1432-0916/E. `https://doi.org/10.1007/s00220-014-2252-1`. ↑ 2.

[64] Kiyokazu Nagatomo i Akihiro Tsuchiya: *The triplet vertex operator algebra $W(p)$ and the restricted quantum group $\overline{U}_q(sl_2)$ at $q = e^{\frac{\pi i}{p}}$*. U *Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics*, svezak 61 iz *Adv. Stud. Pure Math.*, stranice 1–49. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2011. `https://doi.org/10.2969/aspm/06110001`. ↑ 3.

[65] Claudio Procesi: *Lie groups*. Universitext. Springer, New York, 2007, ISBN 978-0-387-26040-2; 0-387-26040-4. An approach through invariants and representations. ↑ 40, 75.

[66] Ingo Runkel: *A braided monoidal category for free super-bosons*. J. Math. Phys., 55(4):041702, 59, 2014, ISSN 0022-2488. `https://doi.org/10.1063/1.4868467`. ↑ 3.

[67] Shoma Sugimoto: *On the Feigin-Tipunin conjecture*, 2020. `https://arxiv.org/abs/2004.05769`.

[68] Weiqiang Wang: *$W_{1+\infty}$ algebra, W_3 algebra, and Friedan-Martinec-Shenker bosonization*. Comm. Math. Phys., 195(1):95–111, 1998, ISSN 0010-3616. `https://doi.org/10.1007/s002200050381`. ↑ 86.

[69] Yongchang Zhu: *Modular invariance of characters of vertex operator algebras*. J. Amer. Math. Soc., 9(1):237–302, 1996, ISSN 0894-0347. `https://doi.org/10.1090/S0894-0347-96-00182-8`. ↑ iii, iv, 2, 19, 22, 23, 68, 69, 70.

Životopis

Ante Čeperić je rođen 18. svibnja 1992. u Rijeci. Osnovnu i srednju školu je završio u Senju. Preddiplomski studij matematike je upisao 2010. godine na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno matematičkog fakulteta u Zagrebu. Diplomirao je 2015. godine, pod vodstvom prof. dr. sc. Dražena Adamovića. Iste godine upisao je poslijediplomski studij matematike, te počeo sudjelovati u radu Seminara za algebru. U travnju 2016. zaposlen je kao asistent na Matematičkom odsjeku, gdje radi i danas.

Sudjelovao je na konferencijama: "The 37th Winter School in Geometry and Physics", Srni, 2017.; "Representation theory XV", Dubrovnik, 2017.; "Affine, vertex and W-algebras", Rim, 2017.; "Vertex algebras and related topics", Zagreb, 2018.; "Vertex algebras and infinite-dimensional Lie algebras", Split, 2018.; "The Mathematical Foundations of Conformal Field Theory and Related Topics", Tianjin, 2019.; "Representation Theory XVI", Dubrovnik, 2019.

Koautor je jednog članka:

- D. Adamović, A. Čeperić. *On Zhu's algebra and C_2-algebra for symplectic fermion vertex algebra $SF(d)^+$*, Journal of Algebra, 2020.

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja, *Ante Čeperić*, asistent i doktorand na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu,

prebivalište: [redacted]

JMBAG: [redacted],

matični broj doktoranda: [redacted],

matični broj znanstvenika: *352942*,

ovim putem izjavljujem pod materijalnom i kaznenom odgovornošću da je moj *doktorski rad* pod naslovom: *Reprezentacije logaritamskih verteks-algebri i struktura njihovih viših Zhuovih algebri* (na engleskom: *Representations of logarithmic vertex algebras and structure of their higher Zhu's algebras*), isključivo moje autorsko djelo, koje je u potpunosti samostalno napisano uz naznaku izvora drugih autora i dokumenata korištenih u radu.

U Zagrebu, *24. veljače 2021.*

Ante Čeperić