Peanove trojke

Čučić, Katarina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Katarina Čučić

PEANOVE TROJKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, veljača 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Najljepša hvala mentoru izv. prof. dr. sc. Zvonku Iljazoviću na pomoći, strpljenju i vremenu koje mi je pružio tokom izrade ovog rada.

Hvala obitelji koja mi je bila velika podrška tokom cijelog školovanja. Veliko hvala roditeljima na svemu što su učinili za mene jer bez njih ne bi bila tu gdje jesam.

Posebno hvala majci Luci na bezuvjetnoj ljubavi i pažnji koju uvijek nesebično pruža.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu se proučavaju Peanove trojke. U prvom poglavlju definiramo pojam funkcije te zatim uvodimo pojam Peanove trojke, potom proučavamo neka njena svojstva, a između ostalog dokazujemo da vrijedi takozvani princip definicije indukcijom. Nadalje, definiramo zbrajanje na Peanovoj trojci te proučavamo razna svojstva te binarne operacije. Definiramo i uređaj na Peanovoj trojci, a na kraju proučavamo izomorfizme Peanovih trojki te dokazujemo da su svake dvije Peanove trojke izomorfne.

Kroz drugo poglavlje proteže se tema o beskonačnim skupovima. Dokazujemo egzistenciju Peanove trojke uz pretpostavku postojanja beskonačnog skupa. Zatim, dokazujemo egzistenciju beskonačnog skupa uz pretpostavku postojanja p-skupova. Proučavamo i ekvipotentnost skupova te koristeći Peanove trojke dajemo karakterizaciju beskonačnih skupova. Na kraju opisujemo neke od činjenica vezanih za konačne skupove.

Poglavlje 1

Peanove trojke

1.1 Funkcije

Definicija 1.1.1. *Za dva objekta x i y definiramo* ***uređeni par*** *od x i y, u oznaci (x, y), kao skup $\{\{x, y\}, \{x\}\}$.*

Pretpostavimo da su x_1, x_2, y_1, y_2 takvi da $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Tada je po prethodnoj definiciji

$$\{\{x_1, y_1\}, \{x_1\}\} = \{\{x_2, y_2\}, \{x_2\}\}. \tag{1.1}$$

Ako je $x_1 \neq y_1$, onda je $\{x_1, y_1\} \neq \{x_1\}$, pa skup na lijevoj strani u (1.1) ima dva elementa te isto vrijedi i za skup na desnoj strani iz čega slijedi da je $x_2 \neq y_2$, a onda lako zaključujemo da je $\{x_1\} = \{x_2\}$, to jest $x_1 = x_2$, pa također zaključujemo da je $y_1 = y_2$.
Ako je $x_1 = y_1$ lako dobivamo da je $x_1 = x_2 = y_2$.
Zaključujemo: Za sve x_1, y_1, x_2, y_2 vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2 \quad \text{i} \quad y_1 = y_2. \tag{1.2}$$

Definicija 1.1.2. *Ako su S i T skupovi onda sa $S \times T$ označavamo skup svih uređenih parova (x, y) takvih da je $x \in S$ i $y \in T$. Za $S \times T$ kažemo da je* ***Kartezijev produkt*** *skupova S i T.*

Definicija 1.1.3. *Neka su S i T skupovi. Za svaki podskup od $S \times T$ kažemo da je* ***relacija*** *između skupova S i T.*

Definicija 1.1.4. *Neka su S i T skupovi te neka je R relacija između S i T koja ima sljedeće svojstvo: za svaki $x \in S$ postoji jedinstveni $y \in T$ takav da je $(x, y) \in R$. Tada za R kažemo da je* ***pravilo pridruživanja*** *između S i T.*

Napomena 1.1.5. *U prethodnoj definiciji rečenica za svaki* $x \in S$ *postoji jedinstveni* $y \in T$ *takav da je* $(x, y) \in R$ *znači sljedeće:*

1. *postoji* $y \in T$ *takav da je* $(x, y) \in R$,
2. *ako su* $y_1, y_2 \in T$ *takvi da vrijedi* $(x, y_1) \in R$ *i* $(x, y_2) \in R$, *onda je* $y_1 = y_2$.

Definicija 1.1.6. *Za tri objekta* x, y *i* z *definiramo **uređenu trojku*** (x, y, z) *sa*

$$(x, y, z) = ((x, y), z).$$

Uočimo sljedeće: ako su x_1, y_1, z_1 i x_2, y_2, z_2 objekti tada je

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2) \iff x_1 = x_2,\ y_1 = y_2 \quad \text{i} \quad z_1 = z_2.$$

Definicija 1.1.7. *Neka su* S *i* T *skupovi te neka je* R *pravilo pridruživanja između* S *i* T. *Tada za uređenu trojku* (S, T, R) *kažemo da je **funkcija** sa* S *u* T. *Ako je* f *funkcija sa* S *u* T, *onda pišemo* $f : S \to T$.

Definicija 1.1.8. *Neka su* S *i* T *skupovi te neka je* $f : S \to T$. *Imamo* $f = (S, T, R)$ *gdje je* R *pravilo pridruživanja između* S *i* T. *Za* $x \in S$ *sa* $f(x)$ *označavamo onaj* $y \in T$ *takav da je* $(x, y) \in R$.

Primjer 1.1.9. *Neka su* S *i* T *skupovi te neka je* $y_0 \in T$. *Definirajmo* $R = \{(x, y_0) \mid x \in S\}$. *Očito je* $R \subseteq S \times T$, *dakle* R *je relacija između* S *i* T. *Nadalje,* R *je pravilo pridruživanja između* S *i* T. *Stoga je* (S, T, R) *funkcija sa* S *u* T. *Označimo* $f = (S, T, R)$. *Za svaki* $x \in S$ *vrijedi* $f(x) = y_0$.

Uočimo da iz prethodnog primjera dobivamo sljedeći zaključak:
Ako su S i T skupovi takvi da je T neprazan skup, onda postoji funkcija sa S u T.

Primjer 1.1.10. *Neka je* $S = \emptyset$ *te neka je* T *bilo koji skup. Tada je prazan skup relacija između* S *i* T *i to pravilo pridruživanja između* S *i* T. *Dakle* $(\emptyset, T, \emptyset)$ *je funkcija sa* $\emptyset$ *u* T. *Posebno* $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ *je funkcija sa* $\emptyset$ *u* $\emptyset$.

Primjer 1.1.11. *Neka je* $S \neq \emptyset$. *Pretpostavimo da je* R *pravilo pridruživanja između* S *i* $\emptyset$. *Odaberimo* $x \in S$ *(to možemo jer je* $S \neq \emptyset$*). Tada prema definiciji pravila pridruživanja mora postojati* $y \in \emptyset$ *takav da je* $(x, y) \in R$, *što je očito nemoguće. Prema tome ne postoji pravilo pridruživanja između* S *i* $\emptyset$, *dakle ne postoji funkcija sa* S *u* $\emptyset$.

Primjer 1.1.12. *Neka je* S *skup. Definiramo* $R = \{(x, x) \mid x \in S\}$, *tada je* R *pravilo pridruživanja između* S *i* S. *Neka je* $f = (S, S, R)$. *Dakle* $f : S \to S$ *i za svaki* $x \in S$ *vrijedi* $f(x) = x$.

Propozicija 1.1.13. *Neka su S_1, S_2, T_1 i T_2 skupovi te neka su $f : S_1 \to T_1$ i $g : S_2 \to T_2$ funkcije. Tada je*

$$f = g \Longleftrightarrow S_1 = S_2, T_1 = T_2 \quad i \quad f(x) = g(x), \quad \forall x \in S_1.$$

Dokaz. Imamo $f = (S_1, T_1, R_1)$ te $g = (S_2, T_2, R_2)$ pri čemu su R_1 pravilo pridruživanja između S_1 i T_1, a R_2 pravilo pridruživanja između S_2 i T_2.

Pretpostavimo da je $f = g$. Tada je očito $S_1 = S_2, T_1 = T_2$ i $R_1 = R_2$. Neka je $x \in S_1$. Tada je $(x, f(x)) \in R_1$, pa zbog $R_1 = R_2$ imamo $(x, f(x)) \in R_2$. Ujedno vrijedi $x \in S_2$ i $(x, g(x)) \in R_2$. Iz činjenice da je R_2 pravilo pridruživanja slijedi da je $f(x) = g(x)$.

Obratno, pretpostavljamo da je $S_1 = S_2, T_1 = T_2$ i $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in S_1$. Dokažimo da je $R_1 = R_2$. Neka je $(x, y) \in R_1$. Znamo da je $R_1 \subseteq S_1 \times T_1$ pa slijedi da je $x \in S_1$ i $y \in T_1$. Vrijedi $(x, f(x)) \in R_1$ pa iz $(x, y) \in R_1$ i činjenice da je R_1 pravilo pridruživanja slijedi da je $y = f(x)$. Nadalje, zbog $S_1 = S_2$ vrijedi $x \in S_2$ pa je $(x, g(x)) \in R_2$. Stoga je $(x, y) = (x, f(x)) = (x, g(x)) \in R_2$, to jest $(x, y) \in R_2$. Time smo dokazali da je $R_1 \subseteq R_2$. Analogno dobivamo da je $R_2 \subseteq R_1$. Prema tome $R_1 = R_2$ pa je $(S_1, T_1, R_1) = (S_2, T_2, R_2)$ to jest $f = g$. □

Napomena 1.1.14. *Neka su S i T skupovi te neka je R pravilo pridruživanja između S i T. Neka je $f = (S, T, R)$. Tada je očito $R = \{(x, f(x)) \mid x \in S\}$.*

Propozicija 1.1.15. *Neka su S, T i V skupovi te neka su $f : S \to T$ i $g : T \to V$ funkcije. Tada postoji jedinstvena funkcija $h : S \to V$ takva da je $h(x) = g(f(x))$, za svaki $x \in S$.*

Dokaz. Dokažimo prvo jedinstvenost. Pretpostavimo da su $h_1, h_2 : S \to V$ funkcije takve da je $h_1(x) = g(f(x))$, za svaki $x \in S$ i $h_2(x) = g(f(x))$ za svaki $x \in S$. Tada je očito $h_1(x) = h_2(x)$, za svaki $x \in S$ pa iz prethodne propozicije slijedi da je $h_1 = h_2$.

Dokažimo sada da takva funkcija h postoji. Definirajmo $R = \{(x, g(f(x)) \mid x \in S\}$. Za svaki $x \in S$ vrijedi $g(f(x)) \in V$ pa je $R \subseteq S \times V$. Očito je da za svaki $x \in S$ postoji jedinstveni $z \in V$ takav da je $(x, z) \in R$. Stoga je pravilo pridruživanja. Neka je $h = (S, V, R)$. Tada je $h : S \to V$ i za svaki $x \in S$ vrijedi $h(x) = g(f(x))$. □

Definicija 1.1.16. *Za funkciju h iz prethodne propozicije kažemo da je* ***kompozicija funkcija*** *f i g te je označavamo sa $g \circ f$.*

Definicija 1.1.17. *Neka je $f : S \to T$ funkcija. Za funkciju f kažemo da je* ***injekcija*** *ako za sve $x_1, x_2 \in S$ takve da $x_1 \neq x_2$ vrijedi $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Definicija 1.1.18. *Neka je $f : S \to T$ funkcija. Za funkciju f kažemo da je* ***surjekcija*** *ako za svaki $y \in T$ postoji barem jedan $x \in S$ takav da je $f(x) = y$.*

Definicija 1.1.19. *Za funkciju $f : S \to T$ kažemo da je* ***bijekcija*** *ako je i injekcija i surjekcija.*

Definicija 1.1.20. *Ako je $f : S \to T$ funkcija i $A \subseteq S$ definiramo*

$$f(A) = \{y \in T \mid \exists x \in A \ \text{ takav da je } \ f(x) = y\}.$$

*Za $f(A)$ kažemo da je **slika** skupa A pri funkciji f.*

1.2 Definicija Peanove trojke

Definicija 1.2.1. *Neka je A skup, $f : A \to A$ funkcija i $\alpha \in A$. Pretpostavimo da vrijedi sljedeće:*

1. *f je injekcija i $f(A) = A \setminus \{\alpha\}$,*
2. *ako je $B \subseteq A$ takav da je $\alpha \in B$ i takav da je $f(x) \in B, \forall x \in B$ onda je $B = A$.*

*Tada za (A, f, α) kažemo da je **Peanova trojka**.*
Svojstvo 2. obično nazivamo princip indukcije.

Propozicija 1.2.2. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka. Tada za svaki $x \in A$ vrijedi $x \neq f(x)$.*

Dokaz. Definirajmo

$$B = \{x \in A \mid x \neq f(x)\}.$$

Očito je B podskup od A. Iz prvog svojstva definicije slijedi $\alpha \in B$. Pretpostavimo da je $x \in B$. Po definiciji od B vrijedi $x \neq f(x)$. Budući da je f injekcija slijedi da je $f(x) \neq f(f(x))$. Zaključujemo da je $f(x) \in B$. Iz drugog svojstva definicije slijedi da je $B = A$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 1.2.3. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka te neka je S skup. Pretpostavimo da je $g : S \to S$ funkcija te $x_1 \in S$. Nadalje, pretpostavimo da su $h, h' : A \to S$ funkcije takve da vrijedi sljedeće:*

1. *$h(\alpha) = x_1, h(f(a)) = g(h(a)), \forall a \in A$*
2. *$h'(\alpha) = x_1, h'(f(a)) = g(h'(a)), \forall a \in A$.*

Tada je $h = h'$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je $h(a) = h'(a)$ za svaki $a \in A$.
Definirajmo

$$B = \{a \in A \mid h(a) = h'(a)\}.$$

Očito je $B \subseteq A$. Iz pretpostavke propozicije slijedi da je $\alpha \in B$. Pretpostavimo da je $a \in B$. Tada je $h(a) = h'(a)$ pa je $g(h(a)) = g(h'(a))$. Iz pretpostavke propozicije slijedi da je $h(f(a)) = h'(f(a))$. Stoga je $f(a) \in B$. Dakle vrijedi sljedeće: $\alpha \in B$ i $f(a) \in B$ za svaki $a \in B$. Iz definicije Peanove trojke slijedi da je $B = A$. Time smo dokazali da za svaki $a \in A$ vrijedi $h(a) = h'(a)$. Dakle $h = h'$. □

1.3 Princip definicije indukcijom

Lema 1.3.1. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka. Neka je S skup te $g : S \to S$ funkcija. Neka je $a \in A$ te $h : A \to S$ funkcija, $h = (A, S, R)$. Tada je $h(f(a)) = g(h(a))$, ako i samo ako za svaki $s \in S$ vrijedi sljedeće:*

$$(a, s) \in R \Rightarrow (f(a), g(s)) \in R. \tag{1.3}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $h(f(a)) = g(h(a))$. Neka je $s \in S$ takav da je $(a, s) \in R$. Tada je $s = h(a)$. Iz pretpostavke slijedi $h(f(a)) = g(s)$, što znači da je $(f(a), g(s)) \in R$. Prema tome vrijedi (1.3).

Pretpostavimo sada da za svaki $s \in S$ vrijedi (1.3). Znamo da je $(a, h(a)) \in R$ pa iz (1.3) slijedi da je $(f(a), g(h(a)) \in R$. Dakle $h(f(a)) = g(h(a))$. □

Teorem 1.3.2. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka, neka je S skup te $g : S \to S$ funkcija. Neka je $x_1 \in S$. Neka je $\mathcal{R}$ skup svih relacija R između A i S takvih da vrijedi sljedeće:*

1. $(\alpha, x_1) \in R$
2. *za svaki $a \in A$ i svaki $s \in S$ vrijedi $(a, s) \in R \Rightarrow (f(a), g(s)) \in R$.*

Neka je

$$R_0 = \{(a, s) \in A \times S \mid (a, s) \in R, \forall R \in \mathcal{R}\}.$$

Tada je $R_0 \in \mathcal{R}$ te je R_0 pravilo pridruživanja između A i S.

Dokaz. Iz definicije od R_0 je jasno da je $R_0 \subseteq A \times S$, dakle R_0 je relacija između A i S. Za svaki $R \in \mathcal{R}$ vrijedi $(\alpha, x_1) \in R$ (prema definiciji od $\mathcal{R}$). Stoga je $(\alpha, x_1) \in R_0$.

Dokažimo sada da R_0 zadovoljava svojstvo 2.. Pretpostavimo da su $a \in A$ i $s \in S$ takvi da vrijedi $(a, s) \in R_0$. Neka je $R \in \mathcal{R}$ proizvoljan. Tada je $(a, s) \in R$. Budući da je $R \in \mathcal{R}$ vrijedi implikacija 2. pa zaključujemo da je $(f(a), g(s)) \in R$. Dakle $(f(a), g(s)) \in R$ vrijedi za svaki $R \in \mathcal{R}$. Stoga je $(f(a), g(s)) \in R_0$. Time smo dokazali da 2. vrijedi za R_0. Prema tome $R_0 \in \mathcal{R}$.

Dokažimo sada da je R_0 pravilo pridruživanja između A i S, to jest da za svaki $a \in A$ postoji jedinstveni $s \in S$ takav da je $(a, s) \in R_0$.

Neka je

$$B = \{a \in A \mid \exists! s \in S \text{takav da je } (a, s) \in R_0\}.$$

Da bismo dokazali da vrijedi da za svaki $a \in A$ postoji jedinstveni $s \in S$ takav da je $(a, s) \in R_0$, dovoljno je dokazati $B = A$. U tu svrhu dovoljno je, prema definiciji Peanove trojke, dokazati da vrijedi:

(i) $\alpha \in B$

(ii) $a_0 \in B \Rightarrow f(a_0) \in B$.

Za (i) je potrebno dokazati da postoji jedinstveni $s \in S$ takav da je $(\alpha, s) \in R_0$. Znamo da je $(\alpha, x_1) \in R_0$, preostaje dokazati sljedeće: ako je $s \in S$ takav da je $(\alpha, s) \in R_0$, onda je $s = x_1$. Definirajmo

$$R = \{(\alpha, x_1)\} \cup \{(a, s) \mid a \in A, a \neq \alpha, s \in S\}.$$

Očito je R relacija između A i S. Očito je $(\alpha, x_1) \in R$. Pretpostavimo da su $a \in A$ i $s \in S$ takvi da je $(a, s) \in R$. Prema definiciji Peanove trojke vrijedi $f(A) = A \backslash \{\alpha\}$. Stoga $f(a) \neq \alpha$ pa je $(f(a), g(s)) \in R$. Time smo dokazali da za R vrijedi 2.. Zaključujemo da je $R \in \mathcal{R}$. Pretpostavimo sada da je $s \in S$ takav da je $(\alpha, s) \in R_0$. Zbog $R \in \mathcal{R}$ vrijedi $(\alpha, s) \in R$. Iz definicije od R slijedi $s = x_1$. Time smo dokazali da je $\alpha \in B$.

Pretpostavimo da je $a_0 \in B$. Dakle, postoji jedinstveni $s_0 \in S$ takav da je $(a_0, s_0) \in R_0$. Želimo dokazati da je $f(a_0) \in B$, to jest da postoji jedinstveni $t \in S$ takav da je $(f(a_0), t) \in R_0$. Iz $(a_0, s_0) \in R_0$ i činjenice da je $R_0 \in \mathcal{R}$ (dakle R_0 zadovoljava 2.) slijedi $(f(a_0), g(s_0)) \in R_0$. Dakle postoji $t \in S$ takav da je $(f(a_0), t) \in R_0$. Preostaje dokazati da je takav t jedinstven. U tu svrhu definirajmo

$$R = \{(f(a_0), g(s_0))\} \cup \{(a, s) \mid a \in A, a \neq f(a_0), s \in S\}) \cap R_0.$$

Tvrdimo da je $R \in \mathcal{R}$. Očito da je R presjek dva podskupa od $A \times S$ stoga je i $R \subseteq A \times S$. Dakle R je relacija između A i S. Znamo da je $(\alpha, x_1) \in R_0$. Nadalje vrijedi $\alpha \neq f(a_0)$ (prema definiciji Peanove trojke), stoga je

$$(\alpha, x_1) \in \{(a, s) \mid a \in A, a \neq f(a_0), s \in S\}.$$

Stoga je $(\alpha, x_1) \in R$. Pretpostavimo da je $(a', s') \in R$. Očito je tada $(a', s') \in R_0$. Želimo dokazati da je $(f(a'), g(s')) \in R$. Iz $(a', s') \in R_0$ slijedi $(f(a'), g(s')) \in R_0$.

Dokažimo još da je

$$(f(a'), g(s')) \in \{(f(a_0), g(s_0))\} \cup \{(a, s) \mid a \in A, a \neq f(a_0), s \in S\} \tag{1.4}$$

1. slučaj

$a' = a_0$

Imamo $(a', s') \in R_0$ to jest $(a_0, s') \in R_0$ pa iz "jedinstvenosti" od s_0 slijedi $s' = s_0$. Dakle $a' = a_0$ i $s' = s_0$ pa je

$$(f(a'), g(s')) = (f(a_0), g(s_0)).$$

Stoga (1.4) vrijedi.

2. slučaj
$a' \neq a_0$
Prema definiciji Peanove trojke funkcija f je injektivna pa slijedi da je $f(a') \neq f(a_0)$. Stoga je
$$(f(a'), g(s')) \in \{(a, s) \mid a \in A, a \neq f(a_0), s \in S\}.$$
Prema tome (1.4) vrijedi.

Dakle (1.4) vrijedi u oba slučaja pa smo time dokazali da je $(f(a'), g(s')) \in R$.

Zaključak: Ako je $(a', s') \in R$ onda je $(f(a'), g(s')) \in R$. Prema tome $R \in \mathcal{R}$.

Pretpostavimo da je $t \in S$ takav da je $(f(a_0), t) \in R_0$. Slijedi, prema definiciji od R_0, da je $(f(a_0), t) \in R$. Posebno
$$(f(a_0), t) \in \{(f(a_0), g(s_0))\} \cup \{(a, s) \mid a \in A, a \neq f(a_0), s \in S\}.$$
Očito
$$(f(a_0), t) \notin \{(a, s) \mid a \in A, a \neq f(a_0), s \in S\}$$
pa slijedi da je
$$(f(a_0), t) = (f(a_0), g(s_0)).$$
Stoga je $t = g(s_0)$. Time smo dokazali da postoji jedinstveni $t \in S$ takav da je $(f(a_0), t) \in R_0$. Prema tome $f(a_0) \in B$.

Zaključak: Vrijedi (*ii*). Stoga je $B = A$. Dakle R_0 je pravilo pridruživanja između A i S. □

Teorem 1.3.3. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka, neka je S skup, $g : S \to S$ i $x_1 \in S$. Tada postoji jedinstvena funkcija $h : A \to S$ takva da je $h(\alpha) = x_1$ i $h(f(a)) = g(h(a))$ za $\forall a \in A$.*

Dokaz. Prema prethodnom teoremu postoji pravilo pridruživanja R_0 između A i S takvo da je:

1. $(\alpha, x_1) \in R_0$
2. $\forall a \in A, \forall s \in S$ vrijedi $(a, s) \in R_0 \Rightarrow (f(a), g(s)) \in R_0$

Neka je $h = (A, S, R_0)$. Dakle $h : A \to S$ te iz 1. slijedi da je $h(\alpha) = x_1$. Neka je $a \in A$. Tada za svaki $s \in S$ vrijedi
$$(a, s) \in R_0 \Rightarrow (f(a), g(s)) \in R_0$$
pa iz leme 1.3.1 slijedi da je
$$h(f(a)) = g(h(a)).$$
Prema tome postoji funkcija s traženim svojstvima. Da je ta funkcija jedinstvena slijedi iz propozicije 1.2.3. □

1.4 Zbrajanje na Peanovoj trojci

Definicija 1.4.1. *Neka je S skup. Za funkciju sa $S \times S$ u S kažemo da je* ***binarna operacija*** *na skupu S.*

Ako je $*$ binarna operacija na skupu S (dakle $* : S \times S \to S$) onda za $x, y \in S$ umjesto $*(x, y)$ pišemo $x * y$.

Za binarnu operaciju $*$ na skupu S kažemo da je ***asocijativna*** *ako za sve $x, y, z \in S$ vrijedi*

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

Za binarnu operaciju $*$ na skupu S kažemo da je ***komutativna*** *ako za sve $x, y \in S$ vrijedi*

$$x * y = y * x.$$

Teorem 1.4.2. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka. Tada postoji jedinstvena binarna operacija $+$ na A takva da je*

(i) $x + \alpha = f(x)$

(ii) $x + f(y) = f(x + y)$

Za sve $x, y \in A$.

Dokaz. Neka je $x \in A$. Tada prema prethodnom teoremu postoji jedinstvena funkcija $h_x : A \to A$ takva da je $h_x(\alpha) = f(x)$ i $h_x(f(y)) = f(h_x(y))$ za svaki $y \in A$ (za $S = A$, $g = f$ i $x_1 = f(x)$).

Definirajmo binarnu operaciju $+$ na A sa

$$+(x, y) = h_x(y).$$

Dakle

$$x + y = h_x(y), \forall x, y \in A.$$

Provjerimo da za binarnu operaciju $+$ vrijede svojstva (i) i (ii).
Neka je $x \in A$. Imamo

$$x + \alpha = h_x(\alpha) = f(x),$$

dakle (i) vrijedi.
Neka su $x, y \in A$. Tada je

$$x + f(y) = h_x(f(y)) = f(h_x(y)) = f(x + y),$$

dakle (ii) vrijedi.

Dokažimo sada da je binarna operacija $+$ sa svojstvima (i) i (ii) jedinstvena.
Pretpostavimo da je $+'$ binarna operacija na A takva da za sve $x, y \in A$ vrijedi

(i') $x +' \alpha = f(x)$

(ii') $x +' f(y) = f(x +' y)$

Neka je $x \in A$. Dokažimo da za svaki $y \in A$ vrijedi $x + y = x +' y$. Neka je

$$S = \{y \in A \mid x + y = x +' y\}.$$

Vrijedi

$$x + \alpha = f(x) = x +' \alpha.$$

Stoga je $\alpha \in S$.
Pretpostavimo da je $y \in S$. Tada je

$$x + y = x +' y$$

pa je

$$f(x + y) = f(x +' y).$$

Iz (i) i (ii') slijedi

$$x + f(y) = x +' f(y)$$

pa je $f(y) \in S$. Dakle za svaki $y \in S$ vrijedi $f(y) \in S$. Iz definicije Peanove trojke slijedi da je $S = A$. Stoga za svaki $y \in A$ vrijedi $y \in S$, to jest

$$x + y = x +' y.$$

Zaključak: Za sve $x, y \in A$ vrijedi $x + y = x +' y$. Time smo dokazali da je $+ = +'$, pa je tvrdnja teorema dokazana. □

Za binarnu operaciju $+$ na A koja ima svojstva iz prethodnog teorema kažemo da je zbrajanje na Peanovoj trojci (A, f, α).

Propozicija 1.4.3. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka te neka je $+$ zbrajanje na toj Peanovoj trojci. Tada je $+$ asocijativna binarna operacija.*

Dokaz. Neka su $x, y \in A$. Definirajmo

$$S = \{z \in A \mid (x + y) + z = x + (y + z)\}.$$

Dokažimo da je $S = A$.
Vrijedi sljedeće:

$$(x + y) + \alpha = f(x + y) = x + f(y) = x + (y + \alpha).$$

Dakle
$$(x + y) + \alpha = x + (y + \alpha)$$
pa je $\alpha \in S$.
Pretpostavimo da je $z \in S$. Tada je
$$(x + y) + z = x + (y + z).$$
Imamo
$$(x + y) + f(z) = f((x + y) + z) = f(x + (y + z)) = x + f(y + z) = x + (y + f(z)).$$
Dakle
$$(x + y) + f(z) = x + (y + f(z)),$$
pa zaključujemo da je $f(z) \in S$.
Iz definicije Peanove trojke slijedi da je $S = A$, što znači da za svaki $z \in A$ vrijedi
$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Lema 1.4.4. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka te neka je $+$ zbrajanje na toj Peanovoj trojci. Tada za svaki $x \in A$ vrijedi $x + \alpha = \alpha + x$.*

Dokaz. Neka je
$$S = \{x \in A \mid x + \alpha = \alpha + x\}.$$
Očito je $\alpha \in S$. Pretpostavimo da je $x \in S$. Tada je
$$x + \alpha = \alpha + x.$$
Koristeći ovo i asocijativnost od $+$ dobivamo
$$f(x) + \alpha = (x + \alpha) + \alpha = (\alpha + x) + \alpha = \alpha + (x + \alpha) = \alpha + f(x).$$
Dakle
$$f(x) + \alpha = \alpha + f(x),$$
pa je $f(x) \in S$.
Prema definiciji Peanove trojke vrijedi $S = A$. Time je tvrdnja leme dokazana. □

Propozicija 1.4.5. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka te neka je $+$ zbrajanje na toj Peanovoj trojci. Tada je $+$ komutativna binarna operacija.*

Dokaz. Neka je $x \in A$. Definirajmo

$$S = \{y \in A \mid x + y = y + x\}.$$

Tvrdimo da je $S = A$. Vrijedi $\alpha \in S$ prema prethodnoj lemi. Pretpostavimo da je $y \in S$. Tada je

$$x + y = y + x,$$

pa koristeći asocijativnost binarne operacije + dobivamo

$$x+f(y) = f(x+y) = f(y+x) = y+f(x) = y+(x+\alpha) = y+(\alpha+x) = (y+\alpha)+x = f(y)+x.$$

Dakle

$$x + f(y) = f(y) + x,$$

pa je $f(y) \in S$.
Zaključujemo da je $S = A$ (prema definiciji Peanove trojke), što znači da za svaki $y \in A$ vrijedi $x + y = y + x$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

1.5 Uređaj na Peanovoj trojci

Definicija 1.5.1. *Neka je ρ binarna operacija na skupu S.*
Kažemo da je ρ ***refleksivna binarna relacija*** *na S ako svaki $x \in S$ vrijedi*

$$x\rho x.$$

Kažemo da je ρ ***irefleksivna binarna relacija*** *na S ako svaki $x \in S$ vrijedi*

$$(x, x) \notin \rho.$$

Kažemo da je ρ ***simetrična binarna relacija*** *na S ako za sve $x, y \in S$ vrijedi*

$$x\rho y \Longrightarrow y\rho x.$$

Kažemo da je ρ ***antisimetrična binarna relacija*** *na S ako za sve $x, y \in S$ vrijedi*

$$x\rho y \quad i \quad y\rho x \Longrightarrow x = y.$$

Kažemo da je ρ ***tranzitivna binarna relacija*** *na S ako za sve $x, y, z \in S$ vrijedi*

$$x\rho y \quad i \quad y\rho z \Longrightarrow x\rho z.$$

Definicija 1.5.2. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka. Neka je $<$ binarna relacija na A definirana sa $x < y$ ako postoji $z \in A$ takav da je $y = x + z$.*
(Pri tome podrazumjevamo da je + zbrajanje na Peanovoj trojci (A, f, α).)

Uočimo sljedeće: za svaki $x \in A$ vrijedi $x < f(x)$. Naime ako je $x \in A$, onda je $f(x) = x + \alpha$.

Propozicija 1.5.3. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka. Tada je $<$ irefleksivna i tranzitivna binarna relacija na A.*

Dokaz. Neka je $z \in A$. Tvrdimo da za $\forall x \in A$ vrijedi $x \neq x + z$. Definirajmo

$$S = \{x \in A \mid x \neq x + z\}.$$

Želimo dokazati da je $S = A$. Dokažimo prvo da je $\alpha \in S$.
Imamo

$$\alpha + z = z + \alpha = f(z) \in f(A),$$

a prema definiciji Peanove trojke vrijedi da $\alpha \notin f(A)$ pa zaključujemo da je

$$\alpha \neq \alpha + z.$$

Stoga je $\alpha \in S$.

Pretpostavimo da je $x \in S$. Tada je

$$x \neq x + z$$

pa budući da je f injekcija imamo

$$f(x) \neq f(x + z).$$

Vrijedi

$$f(x + z) = f(z + x) = z + f(x) = f(x) + z.$$

Dakle

$$f(x) \neq f(x) + z$$

pa je $f(x) \in S$. Prema tome za svaki $x \in S$ vrijedi $f(x) \in S$ pa zaključujemo da je $S = A$. Ovo znači da za sve $x, z \in A$ vrijedi

$$x \neq x + z.$$

Pretpostavimo da je $x \in A$ takav da je $x < x$. Tada postoji $z \in A$ takav da je

$$x = x + z,$$

što je prema dokazanom nemoguće. Prema tome ne postoji $x \in A$ takav da je $x < x$.
Dakle, $<$ je irefleksivna binarna relacija na A.

Pretpostavimo da su $x, y, z \in A$ takvi da je $x < y$ i $y < z$. Tada postoje $a, b \in A$ takvi da

$$y = x + a \text{ i } z = y + b.$$

Vrijedi

$$z = y + b = (x + a) + b = x + (a + b),$$

pa zaključujemo da je $x < z$.
Prema tome $<$ je tranzitivna binarna relacija na A. □

Lema 1.5.4. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka. Tada za svaki $x \in A$ vrijedi $\alpha = x$ ili $\alpha < x$.*

Dokaz. Definirajmo

$$S = \{x \in A \mid \alpha = x \quad \text{ili} \quad \alpha < x\}.$$

Očito je $\alpha \in S$. Pretpostavimo da je $x \in S$, tada je $\alpha = x$ ili $\alpha < x$. Znamo da je $x < f(x)$, to u prvom slučaju znači da je $\alpha < f(x)$, a u drugom slučaju iz tranzitivnost relacije $<$ slijedi $\alpha < f(x)$. U svakom slučaju je $\alpha < f(x)$ pa je $f(x) \in S$. Dakle za svaki $x \in S$ vrijedi $f(x) \in S$ pa zaključujemo da je $S = A$. Time je tvrdnja leme dokazana. □

Lema 1.5.5. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka. Neka su $x, y \in A$ takvi da je $x < y$. Tada vrijedi $f(x) < f(y)$.*

Dokaz. Iz $x < y$ slijedi da postoji $z \in A$ takav da je $y = z + x$. Tada je

$$f(y) = f(z + x) = z + f(x).$$

Dakle

$$f(y) = z + f(x),$$

pa je

$$f(x) < f(y).$$

□

Teorem 1.5.6. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka. Tada za sve $x, y \in A$ takve da je $x \neq y$ vrijedi $x < y$ ili $y < x$.*

Dokaz. Neka je

$$S = \{y \in A \mid \forall x \in A \quad \text{takav da je} \quad x \neq y \quad \text{vrijedi} \quad x < y \quad \text{ili} \quad y < x\}.$$

Dovoljno je dokazati da je $S = A$.
Pretpostavimo da je $x \in A$ takav da je $x \neq \alpha$. Iz prethodne leme slijedi $\alpha < x$. Prema tome

$\alpha \in S$. Pretpostavimo da je $y \in S$. Želimo dokazati da je $f(y) \in S$. Neka je $x \in A$ takav da je $x \neq f(y)$. Tvrdimo da je

$$x < f(y) \quad \text{ili} \quad f(y) < x \tag{1.5}$$

Ako je $x = \alpha$ onda (1.5) vrijedi prema lemi 1.5.4. Pretpostavimo da je $x \neq \alpha$. Prema definiciji Peanove trojke vrijedi $f(A) = A \setminus \{\alpha\}$ pa zaključujemo da je $x \in f(A)$. Stoga postoji $z \in A$ takav da je $x = f(z)$. Iz $x \neq f(y)$ slijedi $f(z) \neq f(y)$ pa je $z \neq y$. Iz ovoga i činjenice da je $y \in S$ slijedi $z < y$ ili $y < z$. Sada prethodna lema povlači da je $f(z) < f(y)$ ili $f(y) < f(z)$, to jest $x < f(y)$ ili $f(y) < x$. Zaključujemo da je $f(y) \in S$. Iz definicije Peanove trojke slijedi da je $S = A$. Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Definicija 1.5.7. *Neka je S skup te φ binarna relacija na S. Pretpostavimo da je φ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija na S. Nadalje, pretpostavimo da za $\forall x, y \in S$ vrijedi $x\varphi y$ ili $y\varphi x$. Tada za φ kažemo da je **uređaj** na skupu S.*

Definicija 1.5.8. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka. Neka je $\leq$ binarna relacija na A definirana sa $x \leq y$ ako je $x < y$ ili $x = y$.*

Propozicija 1.5.9. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka. Tada je $\leq$ uređaj na A.*

Dokaz. Očito je $\leq$ refleksivna relacija na A. Neka su $x, y \in A$ takvi da $x \leq y$ i $y \leq x$. Pretpostavimo da je $x \neq y$. Tada je $x < y$ i $y < x$ pa tranzitivnost relacije $<$ povlači da je $x < x$, što je u kontradikciji s činjenicom da je $<$ irefleksivna relacija. Dakle $x = y$. Prema tome relacija $\leq$ je antisimetrična.

Neka su $x, y, z \in A$ takvi da $x \leq y$ i $y \leq z$. Želimo dokazati da je

$$x \leq z. \tag{1.6}$$

Ako je $x = y$ onda (1.6) slijedi iz $y \leq z$. Ako je $y = z$ onda (1.6) slijedi iz $x \leq y$. Pretpostavimo da je $x \neq y$ i $y \neq z$. Tada je $x < y$ i $y < z$. Iz tranzitivnosti relacije $<$ slijedi $x < z$ pa je $x \leq z$. Time smo dokazali da je $\leq$ tranzitivna relacija.

Neka su $x, y \in A$. Tvrdimo da

$$x \leq y \quad \text{ili} \quad y \leq x. \tag{1.7}$$

Ako je $x = y$ onda je $x \leq y$ pa vrijedi (1.7). Pretpostavimo da je $x \neq y$. Tada prema teoremu 1.5.6 vrijedi $x < y$ ili $y < x$. Iz ovoga očito slijedi (1.7).

Zaključak: $\leq$ je uređaj na A. □

Definicija 1.5.10. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka. Definiramo binarnu relaciju $\geq$ na A sa $x \geq y$ ako je $y \leq x$.*

Lako se vidi da je $\geq$ uređaj na A.

1.6 Izomorfizam Peanovih trojki

Definicija 1.6.1. *Neka su* (A, f, α) *i* (B, g, β) *Peanove trojke. Neka je* $h : A \to B$ *bijekcija. Kažemo da je h* ***izomorfizam*** *Peanovih trojki* (A, f, α) *i* (B, g, β) *ako je* $g(h(a)) = h(f(a))$ *za* $\forall a \in A$.

Propozicija 1.6.2. *Neka su* (A, f, α) *i* (B, g, β) *Peanove trojke te neka je* $h : A \to B$ *izomorfizam ovih Peanovih trojki. Tada je* $h^{-1} : B \to A$ *izomorfizam Peanovih trojki* (B, g, β) *i* (A, f, α).

Dokaz. Očito je h^{-1} bijekcija. Ostaje dokazati da za svaki $b \in B$ vrijedi

$$f(h^{-1}(b)) = h^{-1}(g(b)). \tag{1.8}$$

Neka je $b \in B$. Definirajmo $a = h^{-1}(b)$. Slijedi $h(a) = b$. Budući da je h izomorfizam Peanovih trojki vrijedi

$$g(h(a)) = h(f(a)),$$

to jest

$$g(b) = h(f(h^{-1}(b))).$$

Stoga je

$$h^{-1}(g(b)) = f(h^{-1}(b)).$$

Dakle (1.8) vrijedi za $\forall b \in B$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Lema 1.6.3. *Neka je* (A, f, α) *Peanova trojka. Neka je S skup te neka je* $\prec$ *tranzitivna relacija na S. Pretpostavimo da je* $h : A \to S$ *funkcija takva da je* $h(a) \prec h(f(a))$ *za svaki* $a \in A$. *Tada za sve* $x, y \in A$ *takve da je* $x < y$ *vrijedi* $h(x) \prec h(y)$.

Dokaz. Neka je $x \in A$. Dokažimo da za svaki $y \in A$ takav da je $x < y$ vrijedi $h(x) \prec h(y)$. Budući da za svaki $y \in A$ takav da je $x < y$ postoji $z \in A$ takav da je $y = x + z$, dovoljno je dokazati da za $\forall z \in A$ vrijedi $h(x) \prec h(x + z)$.

Neka je

$$T = \{z \in A \mid h(x) \prec h(x + z)\}.$$

Vrijedi $\alpha \in T$ budući da je $x + \alpha = f(x)$, a po pretpostavci je $h(x) \prec h(f(x))$. Pretpostavimo da je $z \in T$. Želimo dokazati da je

$$h(x) \prec h(x + f(z)). \tag{1.9}$$

Iz $z \in T$ slijedi

$$h(x) \prec h(x + z),$$

a iz pretpostavke leme slijedi

$$h(x+z) \prec h(f(x+z)).$$

Zbog tranzitivnosti relacije $\prec$ imamo

$$h(x) \prec h(f(x+z)).$$

Prema definiciji binarne operacije + vrijedi

$$f(x+z) = x + f(z).$$

Dakle, vrijedi (1.9). Stoga je $f(z) \in T$. Zaključujemo da je $T = A$, što znači da za svaki $z \in A$ vrijedi

$$h(x) \prec h(x+z).$$

Time je lema dokazana. □

Napomena 1.6.4. *Neka je $<$ irefleksivna i tranzitivna binarna relacija na S. Neka su $x, y \in S$. Tada ne može vrijediti $x < y$ i $y < x$. Naime, kada bi to vrijedilo, onda bi iz tranzitivnosti relacije $<$ slijedilo da je $x < x$, što je nemoguće jer je $<$ irefleksivna relacija.*

Teorem 1.6.5. *Neka su (A, f, α) i (B, g, β) Peanove trojke. Tada postoji jedinstveni izomorfizam $h : A \to B$ ovih Peanovih trojki.*

Dokaz. Iz teorema 1.3.3 slijedi (za $S = B$ i $x_1 = \beta$) da postoji jedinstvena funkcija $h : A \to B$ takva da je $h(\alpha) = \beta$ i

$$h(f(a)) = g(h(a)) \quad \text{za} \quad \forall a \in A. \tag{1.10}$$

Neka su $<_A$ i $<_B$ relacije na A i B kao u definiciji 1.5.2. Za svaki $b \in B$ vrijedi da je

$$b <_B g(b).$$

Neka je $a \in A$. Tada je

$$h(a) <_B g(h(a)),$$

to jest

$$h(a) <_B h(f(a)).$$

Iz ovoga, prethodne leme i činjenice da je $<_B$ tranzitivna relacija na B slijedi da za sve $x, y \in A$ takve da je $x <_A y$ vrijedi

$$h(x) <_B h(y).$$

Neka su $x, y \in A$ takvi da je $x \neq y$. Prema teoremu 1.5.6 vrijedi $x <_A y$ ili $y <_A x$. Ako je $x <_A y$ onda je $h(x) <_B h(y)$, a ako je $y <_A x$ onda je $h(y) <_B h(x)$. U oba slučaja irefleksivnost relacije $<_B$ povlači $h(x) \neq h(y)$. Zaključujemo da je h injekcija.

Dokažimo sada da je h surjekcija, to jest da je $h(A) = B$. Očito je $h(A) \subseteq B$. Nadalje, zbog $h(\alpha) = \beta$ slijedi da $\beta \in h(A)$. Pretpostavimo da je $b \in h(A)$. Želimo dokazati da je $g(b) \in h(A)$. Imamo da je $b = h(a)$ za neki $a \in A$, slijedi

$$g(b) = g(h(a))$$

pa (1.10) povlači da je

$$g(b) = h(f(a)).$$

Stoga je $g(b) \in h(A)$. Dakle, $\beta \in h(A)$ i svaki $b \in h(A) \Rightarrow g(b) \in h(A)$. Iz definicije Peanove trojke slijedi da je $h(A) = B$. Dakle, h je surjekcija. Zaključak: h je bijekcija i vrijedi (1.10). Znači, h jest izomorfizam Peanovih trojki (A, f, α) i (B, g, β).

Pretpostavimo da je h' izmorfizam Peanovih trojki (A, f, α) i (B, g, β). Želimo dokazati da je $h' = h$. Iz definicije izomorfizma Peanovih trojki slijedi da je

$$h'(f(a)) = g(h'(a)) \tag{1.11}$$

za $\forall a \in A$.

Koristeći (1.11) i činjenicu da za svaki $b \in B$ vrijedi $b < g(b)$ dobivamo da za svaki $a \in A$ vrijedi

$$h'(a) < g(h'(a)) = h'(f(a))$$

to jest

$$h'(a) < h'(f(a)).$$

Iz dobivenog $h'(a) < h'(f(a))$ i leme 1.6.3 slijedi da za sve $x, y \in A$ vrijedi da

$$x < y \quad \Rightarrow \quad h'(x) < h'(y) \tag{1.12}$$

Budući da je h' surjekcija postoji $x \in A$ takav da $h'(x) = \beta$. Tvrdimo da je $x = \alpha$. Pretpostavimo suprotno $x \neq \alpha$. Tada iz leme 1.5.4 slijedi

$$\alpha < x.$$

Prema (1.12) vrijedi

$$h'(\alpha) < h'(x)$$

to jest

$$h'(\alpha) < \beta.$$

Budući da je $<$ irefleksivna binarna relacija vrijedi

$$\beta \neq h'(\alpha).$$

Iz leme 1.5.4 slijedi

$$\beta < h'(\alpha),$$

što je u kontradikciji sa napomenom 1.6.4.
Zaključak: $x = \alpha$, prema tome $h'(\alpha) = \beta$.

Neka je

$$S = \{a \in A | h(a) = h'(a)\}.$$

Dokazali smo da je $h'(\alpha) = \beta$, a znamo da je $h(\alpha) = \beta$ prema tome $h'(\alpha) = \beta$, dakle $\alpha \in S$. Pretpostavimo da je $a \in S$. Želimo dokazati da je $f(a) \in S$. Iz $a \in S$ slijedi

$$h(a) = h'(a).$$

Koristeći (1.10) i (1.11) dobivamo

$$h(f(a)) = g(h(a)) = g(h'(a)) = h'(f(a)).$$

Dakle,

$$h(f(a)) = h'(f(a)).$$

Prema tome $f(a) \in S$. Imamo sljedeće: $S \subseteq A$, $\alpha \in S$ i $f(a) \in S$ za svaki $a \in S$. Stoga je $S = A$. To znači da za svaki $a \in A$ vrijedi $h(a) = h'(a)$. Prema tome $h = h'$. Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Napomena 1.6.6. *Iz dokaza prethodnog teorema vidimo da vrijedi sljedeće: Ako su* (A, f, α) *i* (B, g, β) *Peanove trojke i* $h : A \to B$ *izomorfizam tih Peanovih trojki onda je* $h(\alpha) = \beta$.

Poglavlje 2

Beskonačni skupovi

Definicija 2.0.1. *Za skup S kažemo da je* ***beskonačan*** *ako postoje $T \subseteq S$, $T \neq S$ i bijekcija $f : S \to T$.*

Primjer 2.0.2. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka. Tada je A beskonačan skup. Naime, znamo da je $f : A \to A$ injekcija takva da je $f(A) = A \setminus \{\alpha\}$. Definirajmo $\varphi : A \to A \setminus \{\alpha\}$ tako da je $\varphi(x) = f(x), \forall x \in A$. Tada je φ bijekcija, a vrijedi $A \setminus \{\alpha\} \subseteq A$ i $A \setminus \{\alpha\} \neq A$. Prema tome A je beskonačan skup.*

Napomena 2.0.3. *Neka je S beskonačan skup. Tada postoji injekcija $f : S \to S$ koja nije surjekcija.*

Naime, znamo da postoje $T \subseteq S$, $T \neq S$ i bijekcija $g : S \to T$. Definirajmo funkciju $f : S \to S$ sa $f(x) = g(x), \forall x \in S$. Iz činjenice da je g injekcija slijedi da je f injekcija. Budući da je $T \subseteq S$, $T \neq S$ postoji $y \in S$ takav da $y \notin T$. Kada bi postojao $x \in S$ takav da je $f(x) = y$ onda bi vrijedilo $g(x) = y$, a to bi povlačilo da je $y \in T$, što je nemoguće. Prema tome ne postoji $x \in S$ takav da je $f(x) = y$, dakle f nije surjekcija.

2.1 Egzistencija Peanove trojke

Lema 2.1.1. *Neka je A skup, $f : A \to A$ injekcija te $\alpha \in A$ takav da je*

$$f(A) \subseteq A \setminus \{\alpha\}. \tag{2.1}$$

Pretpostavimo da vrijedi sljedeće:
ako je $B \subseteq A$ takav da vrijedi

1. $\alpha \in B$
2. $x \in B \Rightarrow f(x) \in B$,

onda je $B = A$.
Tada je (A, f, α) Peanova trojka.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je $f(A) = A \setminus \{\alpha\}$.
Definirajmo

$$B = \{\alpha\} \cup f(A).$$

Očito je $B \subseteq A$, nadalje, očito je $\alpha \in B$. Ako je $x \in B$ onda je $x \in A$ pa je $f(x) \in f(A)$ što povlači da je $f(x) \in B$. Prema tome vrijedi

$$x \in B \Rightarrow f(x) \in B.$$

Iz pretpostavke leme slijedi da je $B = A$.
Dakle

$$\{\alpha\} \cup f\{A\} = A. \tag{2.2}$$

Neka je $x \in A \setminus \{\alpha\}$. Tada je $x \in A$ pa iz (2.2) slijedi da je

$$x \in \{\alpha\} \cup f(A).$$

Stoga je

$$x \in f(A).$$

Time smo dokazali da je

$$A \setminus \{\alpha\} \subseteq f(A).$$

Iz (2.1) slijedi da je

$$f(A) = A \setminus \{\alpha\}.$$

Time je tvrdnja leme dokazana. □

Teorem 2.1.2. *Ako postoji beskonačan skup, tada postoji Peanova trojka.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji beskonačan skup S. Prema napomeni 2.0.3 postoji injekcija $f : S \to S$ koja nije surjekcija. Budući da f nije surjekcija postoji $\alpha \in S$ takav da

$$\alpha \notin f(S). \tag{2.3}$$

Neka je $\mathcal{F}$ familija svih $T \subseteq S$ za koje vrijedi sljedeće:

1. $\alpha \in T$
2. $x \in T \Rightarrow f(x) \in T$.

Uočimo da je $S \in \mathcal{F}$, dakle $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Neka je

$$A = \{x \in S \mid x \in T, \forall T \in \mathcal{F}\}.$$

Tvrdimo da je

1.' $\alpha \in A$

2.' $x \in A \Rightarrow f(x) \in A$.

Očito je $\alpha \in T$ za svaki $T \in \mathcal{F}$. Stoga je $\alpha \in A$. Pretpostavimo da je $x \in A$. Neka je $T \in \mathcal{F}$. Tada je $x \in T$ (prema definiciji od A) pa je onda $f(x) \in T$ (jer je $T \in \mathcal{F}$). Dakle, $f(x) \in T$ za svaki $T \in \mathcal{F}$. Stoga je $f(x) \in A$. Prema tome za svaki $x \in A$ vrijedi da je $f(x) \in A$, prema tome vrijedi 1.$'$ i 2.$'$.
Definirajmo funkciju $g : A \to A$ sa $g(x) = f(x)$ za svaki $x \in A$. Uočimo da je funkcija g dobro definirana zbog 2.$'$. Tvrdimo da je (A, g, α) Peanova trojka. Neka su $x_1, x_2 \in A$ takvi da je $x_1 \neq x_2$. Budući da je f injekcija vrijedi $f(x_1) \neq f(x_2)$, dakle $g(x_1) \neq g(x_2)$. Prema tome g je injekcija.
Pretpostavimo da je $B \subseteq A$ takav da vrijedi sljedeće:

i $\alpha \in B$

ii $x \in B \Rightarrow g(x) \in B$.

Želimo dokazati da je $B = A$. Očito je $B \subseteq S$, a iz *ii* zaključujemo da vrijedi sljedeće:

$$x \in B \Rightarrow f(x) \in B.$$

Iz ovoga te iz (i) i definicije od $\mathcal{F}$ slijedi da je $B \in \mathcal{F}$. Iz definicije od A slijedi da je $A \subseteq T$ za svaki $T \in \mathcal{F}$. Posebno vrijedi $A \subseteq B$. Ovo, zajedno sa $B \subseteq A$ daje $B = A$.
Da bismo dokazali da je (A, g, α) Peanova trojka dovoljno je još, prema lemi 2.1.1, dokazati da je $g(A) \subseteq A \setminus \{\alpha\}$. Očito je $g(A) \subseteq A$. Pretpostavimo da je $\alpha \in g(A)$, tada postoji $x \in A$ takav da $\alpha = g(x)$. No $g(x) = f(x)$, dakle $\alpha = f(x)$ pa je $\alpha \in f(S)$ što je u kontradikciji sa (2.3). Prema tome $\alpha \notin g(A)$ pa zaključujemo da je $g(A) \subseteq A \setminus \{\alpha\}$. Prema tome (A, g, α) je Peanova trojka. □

2.2 Egzistencija beskonačnog skupa

Tvrdimo da ne postoji skup svih skupova to jest da ne postoji $\mathcal{S}$ takav da za svaki skup S vrijedi $S \in \mathcal{S}$.

Pretpostavimo da takav skup $\mathcal{S}$ postoji. (Uočimo da je tada $\mathcal{S} \in \mathcal{S}$.)
Definirajmo

$$\mathcal{T} = \{S \in \mathcal{S} \mid S \notin S\}. \tag{2.4}$$

Očito je $\mathcal{T} \in \mathcal{S}$. Iz definicije od $\mathcal{T}$ je jasno da za svaki S vrijedi ako $S \in \mathcal{T} \Rightarrow S \notin S$. Stoga kada bi vrijedilo $\mathcal{T} \in \mathcal{T}$ onda bi slijedilo $\mathcal{T} \notin \mathcal{T}$, kontradikcija. Stoga vrijedi $\mathcal{T} \notin \mathcal{T}$. Sada iz $\mathcal{T} \in \mathcal{S}$ i (2.4) slijedi $\mathcal{T} \in \mathcal{T}$. Kontradikcija. Pretpostavka da postoji skup svih skupova nas je dovela do kontradikcije stoga zaključujemo da takav skup ne postoji.

Definicija 2.2.1. *Neka je $\sim$ binarna operacija na skupu S. Za $\sim$ kažemo da je **relacija ekvivalencije** na S ako je $\sim$ refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija na S.*

Pretpostavimo da je S skup te $\sim$ relacija ekvivalencije na S. Za $x \in S$ definiramo

$$[x] = \{y \in S \mid x \sim y\}.$$

Za $[x]$ kažemo da je klasa ekvivalencije od x pri relaciji $\sim$.

Pretpostavimo da su $x, y \in S$ takvi da $x \sim y$. Tvrdimo da $[x] = [y]$. Neka je $z \in [x]$. Tada je $x \sim z$. Iz $x \sim y$ i simetričnosti relacije $\sim$ slijedi da je $y \sim x$. Ovo i $x \sim z$ daje $y \sim z$ (tranzitivnost od $\sim$). Prema tome $z \in [y]$. Dakle $[x] \subseteq [y]$. Analogno dobivamo da je $[y] \subseteq [x]$.

Pretpostavimo da su $x, y \in S$ takvi da $x \nsim y$, tvrdimo da tada $[x] \cap [y] = \emptyset$. Pretpostavimo da $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Odaberemo $z \in [x] \cap [y]$. Iz $z \in [x]$ slijedi $x \sim z$, a iz $z \in [y]$ slijedi $y \sim z$. Iz simetričnosti i tranzitivnosti relacije $\sim$ slijedi $x \sim y$ što je u kontradikciji sa pretpostavkom. Prema tome $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Ako je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu S onda skup svih klasa ekvivalencije pri relaciji $\sim$ označavamo sa $S/_\sim$ i nazivamo **kvocijentni skup** od S pri relaciji $\sim$. Dakle

$$S/_\sim = \{[x] \mid x \in S\}.$$

Definicija 2.2.2. *Neka je S skup. Skup svih podskupova od S nazivamo **partitivni skup** od S i označavamo sa $\mathcal{P}(S)$ (smatramo da takav skup postoji). Dakle*

$$\mathcal{P}(S) = \{T \mid T \subseteq S\}$$

Propozicija 2.2.3. *Neka su S i T skupovi takvi da je $S \neq T$. Tada je $\mathcal{P}(S) \neq \mathcal{P}(T)$.*

Dokaz. Iz $S \neq T$ slijedi $S \nsubseteq T$ ili $T \nsubseteq S$. Pretpostavimo da $S \nsubseteq T$. Tada postoji $x \in S$ takav da $x \notin T$. Slijedi $\{x\} \subseteq S$ pa je $\{x\} \in \mathcal{P}(S)$. Budući da $x \notin T$ imamo $\{x\} \nsubseteq T$ pa $\{x\} \notin \mathcal{P}(T)$. Iz $\{x\} \in \mathcal{P}(S)$ i $\{x\} \notin \mathcal{P}(T)$ slijedi $\mathcal{P}(S) \neq \mathcal{P}(T)$. Do istog zaključka dolazimo u slučaju $T \nsubseteq S$. Tvrdnja propozicije je time dokazana. □

Napomena 2.2.4. *Za svaki skup S vrijedi $\mathcal{P}(S) \neq \emptyset$. Naime, imamo $S \in \mathcal{P}(S)$ za svaki skup S.*

Napomena 2.2.5. *U napomeni 2.0.3 smo vidjeli da ako je S beskonačan skup onda postoji injekcija $f : S \to S$ koja nije surjekcija. No vrijedi i obrat ove tvrdnje to jest ako je S skup takav da postoji injekcija $f : S \to S$ koja nije surjekcija onda je S beskonačan.*
Naime pretpostavimo da je S skup te da je $f : S \to S$ injekcija koja nije surjekcija. Definirajmo $T = f(S)$. Za funkciju $g : S \to T$ definiranu sa $g(x) = f(x)$ za svaki $x \in S$ vrijedi da je surjekcija, ali očito je g i injekcija jer je f injekcija. Prema tome g je bijekcija. Očito je $f(S) \subseteq S$, a s obzirom da f nije surjekcija vrijedi $f(S) \neq S$. Dakle $T \subseteq S$, $T \neq S$ te postoji bijekcija $g : S \to T$, zaključujemo da je S beskonačan skup.

Ranije smo vidjeli da ne postoji skup svih skupova, no pretpostavimo na trenutak da postoji takav skup, označimo ga sa $\mathcal{S}$. Neka je $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ funkcija definirana sa $f(S) = \mathcal{P}(S)$. Ako su $S, T \in \mathcal{S}$ takvi da je $S \neq T$, onda je $\mathcal{P}(S) \neq \mathcal{P}(T)$ prema propoziciji 2.2.3 pa $f(S) \neq f(T)$. Dakle f je injekcija. Imamo $\emptyset \in S$, no ne postoji $S \in \mathcal{S}$ takav da $f(S) = \emptyset$ (napomena 2.2.4). Stoga f nije surjekcija. Dakle, postoji injekcija $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ koja nije surjekcija. To prema napomeni 2.2.5 povlači da je $\mathcal{S}$ beskonačan skup. Prethodno zaključivanje pokazuje kako bismo mogli dokazati egzistenciju beskonačnog skupa. No, problem je u tome što ne postoji skup svih skupova.

Dokažimo da postoji beskonačan skup uz jednu dodatnu pretpostavku, a to je da postoji "čitav novi svijet skupova" koji ćemo zvati p-skupovi. Smatramo da p-skupovi imaju analogna svojstva kao i skupovi, pa tako imamo prazan p-skup, kojeg označavamo sa $\emptyset_p$, nadalje da za p-skupove x i y imamo p-skupove $\{x\}_p$ i $\{x, y\}_p$ te također uređeni p-par $(x, y)_p$. Da je x element p-skupa S označavamo sa $x \in_p S$. Ako su S i T p-skupovi takvi da za svaki x takav da je $x \in_p S$ vrijedi $x \in_p T$ onda kažemo da je S p-podskup od T i pišemo $S \subseteq_p T$. Za dva p-skupa S i T smatramo da vrijedi $S = T$ ako i samo ako $S \subseteq_p T$ i $T \subseteq_p S$. Nadalje smatramo da za svaki p-skup S postoji partitivni p-skup od S, to je p-skup koji se sastoji od svih p-podskupova od S. Njega označavamo sa $\mathcal{P}_p(S)$. Dakle $\mathcal{P}_p(S) = \{T \mid T \subseteq_p S\}_p$.

Napomena 2.2.6. *Također za p-skupove S i T imamo Kartezijev p-produkt $S \times_p T$ tih skupova, a svaki p-podskup od $S \times_p T$ nazivamo p-relacija između S i T. Imamo i p-funkcije između p-skupova (ako su S i T skupovi te f p-funkcija između S i T onda pišemo $f : S \to_p T$). No ovi pojmovi nam za sada neće biti potrebni.*

Važna pretpostavka koju uvodimo je sljedeća: postoji skup svih p-skupova.

Propozicija 2.2.7. *Neka su S i T p-skupovi takvi da $S \neq T$, tada je $\mathcal{P}_p(S) \neq \mathcal{P}_p(T)$.*

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu propozicije 2.2.3, no navodimo ga zbog navikavanja na nove oznake.

Iz $S \neq T$ slijedi $S \nsubseteq_p T$ ili $T \nsubseteq_p S$. Pretpostavimo da $S \nsubseteq_p T$. Tada postoji $x \in_p S$ takav da $x \notin_p T$. Slijedi $\{x\}_p \subseteq_p S$ pa je $\{x\} \in_p \mathcal{P}_p(S)$. Budući da $x \notin_p T$ imamo $\{x\}_p \nsubseteq_p T$ pa $\{x\}_p \notin_p \mathcal{P}_p(S)$. Iz $\{x\}_p \in_p \mathcal{P}_p(S)$ i $\{x\}_p \notin_p \mathcal{P}_p(T)$ slijedi $\mathcal{P}_p(S) \neq \mathcal{P}_p(T)$. Do istog zaključka dolazimo u slučaju $T \nsubseteq_p S$. Tvrdnja propozicije je time dokazana. □

Napomena 2.2.8. *Za svaki p-skup S vrijedi $\mathcal{P}_p(S) \neq \emptyset_p$. Naime za svaki p-skup S vrijedi $S \in_p \mathcal{P}_p(S)$ i $S \notin_p \emptyset_p$, dakle $\mathcal{P}_p(S) \not\subseteq_p \emptyset_p$.*

Teorem 2.2.9. *Postoji beskonačan skup.*

Dokaz. Znamo da postoji skup $\mathcal{S}$ svih p-skupova. Definirajmo funkciju $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ sa $f(S) = \mathcal{P}_p(S)$. Da je f injekcija slijedi iz propozicije 2.2.7. Imamo $\emptyset_p \in \mathcal{S}$ te $f(S) \neq \emptyset_p$ za svaki $S \in \mathcal{S}$ prema napomeni 2.2.8. Ovo znači da f nije surjekcija. Zaključak: postoji injekcija $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ koja nije surjekcija, prema tome $\mathcal{S}$ je beskonačan skup. □

2.3 Ekvipotentnost

Definicija 2.3.1. *Za skupove S i T kažemo da su* ***ekvipotentni*** *ako postoji bijekcija $f : S \to T$. U tom slučaju pišemo $S \cong T$. Ako skupovi S i T nisu ekvipotentni pišemo $S \ncong T$.*

Propozicija 2.3.2. *Neka su S, T i V skupovi te neka su $f : S \to T$ i $g : T \to V$ funkcije.*

(1) Ako su f i g injekcije onda je i $g \circ f$ injekcija.

(2) Ako su f i g surjekcije onda je i $g \circ f$ surjekcija.

(3) Ako su f i g bijekcije onda je i $g \circ f$ bijekcija.

Dokaz. (1) Pretpostavimo da su f i g injekcije. Imamo $g \circ f : S \to V$. Neka su $s_1, s_2 \in S$ takvi da je

$$s_1 \neq s_2.$$

Budući da je f injekcija

$$f(s_1) \neq f(s_2).$$

Također, zbog činjenice da je g injekcija

$$g(f(s_1)) \neq g(f(s_2)).$$

Dakle,

$$(g \circ f)(s_1) \neq (g \circ f)(s_2).$$

Stoga $g \circ f$ je injekcija.

(2) Pretpostavimo da su f i g surjekcije. Neka je $v \in V$. Budući da je g surjekcija postoji $t \in T$ takav da

$$g(t) = v.$$

Također, zbog činjenice da je f surjekcija postoji $s \in S$ takav da

$$f(s) = t.$$

Dakle,

$$v = g(t) = g(f(s))$$

to jest

$$v = (g \circ f)(s).$$

Zaključujemo da je $g \circ f$ surjekcija.

(3) Iz tvrdnji (1) i (2) slijedi tvrdnja (3).

□

Propozicija 2.3.3. *Neka su S, T i V skupovi. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

i) $S \cong S$,

ii) ako je $S \cong T$ *onda je* $T \cong S$,

iii) ako je $S \cong T$ *i* $T \cong V$ *onda je* $S \cong V$.

Dokaz. i) Neka je $f : S \to S$ definirana sa $f(x) = x$ za svaki $x \in S$. Očito je f bijekcija. Prema tome $S \cong S$.

ii) Pretpostavimo da $S \cong T$. Tada postoji bijekcija $f : S \to T$. Funkcija $f^{-1} : T \to S$ je bijekcija, pa zaključujemo da je $T \cong S$.

iii) Pretpostavimo da je $S \cong T$ i $T \cong V$. Tada postoje bijekcije $f : S \to T$ i $g : T \to V$. Prema propoziciji 2.3.2 funkcija $g \circ f : S \to V$ je bijekcija. Prema tome $S \cong V$.

□

Korolar 2.3.4. *Neka je $\mathcal{F}$ familija skupova. Neka je $\sim$ binarna relacija na $\mathcal{F}$ definirana sa $A \sim B$ ako je $A \cong B$. Tada je $\sim$ relacija ekvivalencije na $\mathcal{F}$.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz prethodne propozicije. □

Propozicija 2.3.5. *Neka su S i T skupovi. Pretpostavimo da su a i b takvi da $a \notin S, b \notin T$.*

1) Pretpostavimo da je $S \cong T$, tada $S \cup \{a\} \cong T \cup \{b\}$.

2) Pretpostavimo da $S \ncong T$, tada $S \cup \{a\} \ncong T \cup \{b\}$

Dokaz. 1) Neka je $f : S \to T$ bijekcija. Definirajmo funkciju $g : S \cup \{a\} \to T \cup \{b\}$ sa

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in S \\ b, & x = a \end{cases}.$$

Neka su $x_1, x_2 \in S \cup \{a\}$ takvi da je

$$x_1 \neq x_2.$$

Ako su $x_1, x_2 \in S$ onda je

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

(jer je f injekcija), pa je

$$g(x_1) \neq g(x_2).$$

Inače imamo $x_1 \in S$ i $x_2 = a$ ili $x_1 = a$ i $x_2 \in S$. Ako je $x_1 \in S$ i $x_2 = a$ onda je

$$g(x_1) = f(x_1) \in T,$$

a $g(x_2) = b \notin T$. Stoga je

$$g(x_1) \neq g(x_2).$$

Do istog zaključka dolazimo u slučaju $x_1 = a$ i $x_2 \in S$. Prema tome za sve $x_1, x_2 \in S \cup \{a\}$ takve da $x_1 \neq x_2$ vrijedi $g(x_1) \neq g(x_2)$. Prema tome g je injekcija.
Neka je $y \in T \cup \{b\}$. Ako je $y \in T$, postoji $x \in S$ takav da je $f(x) = y$ (f je surjekcija), dakle $g(x) = y$. Ako je $y = b$ onda je očito $g(a) = y$. Dakle za svaki $y \in T \cup \{b\}$ postoji $x \in S \cup \{a\}$ takav da $g(x) = y$. Prema tome g je surjekcija, dakle g je bijekcija.
Time smo dokazali da je $S \cup \{a\} \cong T \cup \{b\}$.

2) Pretpostavimo suprotno to jest da je $S \cup \{a\} \cong T \cup \{b\}$. Tada postoji bijekcija $f : S \cup \{a\} \to T \cup \{b\}$. Pretpostavimo da je $f(a) = b$. Ako je $x \in S$, onda je $x \neq a$ pa je $f(x) \neq f(a)$ to jest $f(x) \neq b$, što povlači $f(x) \in T$. Dakle za svaki $x \in S$ vrijedi $f(x) \in T$. Definirajmo funkciju $g : S \to T$ sa $g(x) = f(x)$ za svaki $x \in S$. Iz ove definicije je očito da je g injekcija. Neka je $y \in T$, budući da je f surjekcija tada postoji $x \in S \cup \{a\}$ takav da $f(x) = y$. No, $x \neq a$ jer bi $x = a$ povlačilo $b = f(a) = f(x) = y \in T$ to jest $b \in T$, što je nemoguće. Stoga je $x \in S$. Dakle, za svaki $y \in T$ postoji $x \in S$ takav da $f(x) = y$. Prema tome za svaki $y \in T$ postoji $x \in S$ takav da $g(x) = y$. To znači da je g surjekcija. Dokazali smo da je g bijekcija pa slijedi $S \cong T$. No to je u kontradikciji sa pretpostavkom iz 2). Stoga je $f(a) \neq b$, dakle $f(a) \in T$. Budući da je f surjekcija postoji $x_0 \in S \cup \{a\}$ takav da $f(x_0) = b$. Očito da je $x_0 \neq a$, dakle $x_0 \in S$. Uočimo sljedeće, ako je $x \in S$ takav da $x \neq x_0$ onda je $f(x) \neq f(x_0)$ to jest $f(x) \neq b$,

pa je $f(x) \in T$. Dakle, za svaki $x \in S$ takav da je $x \neq x_0$ vrijedi $f(x) \in T$. Definirajmo funkciju $g : S \to T$ sa

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ f(a), & x = x_0 \end{cases}.$$

Dokažimo da je g injekcija. Pretpostavimo da su $x, x' \in S$ takvi da $x \neq x'$. Ako je $x \neq x_0$ i $x' \neq x_0$ onda je $g(x) = f(x)$ i $g(x') = f(x')$, a $f(x) \neq f(x')$ jer je f injekcija. Stoga je $g(x) \neq g(x')$. Ako je $x = x_0$, onda je $g(x) = f(a)$, no $x' \neq a$ jer je $x' \in S$ pa injektivnost funkcije f povlači da je $f(x') \neq f(a)$. Zbog $x \neq x'$ imamo $x' \neq x_0$, pa je $g(x') = f(x')$. Dakle

$$g(x') = f(x') \neq f(a) = g(x),$$

to jest $g(x') \neq g(x)$. Ako je $x' = x_0$ na sličan način dobivamo da je $g(x') \neq g(x)$. Prema tome g je injekcija. Neka je $y \in T$. Ako je $y = f(a)$ onda $y = g(x_0)$. Pretpostavimo da je $y \neq f(a)$. Budući da je f surjekcija postoji $x \in S \cup \{a\}$ takav da je $y = f(x)$. Očito je $x \neq a$, dakle $x \in S$. Nadalje, imamo $x \neq x_0$ jer bismo u suprotnom imali

$$y = f(x) = f(x_0) = b \notin T.$$

Prema definiciji od g vrijedi $g(x) = f(x)$ za takav x. Dakle, $g(x) = y$.
Zaključak: g je surjekcija. Prema tome g je bijekcija, što povlači da je $S \cong T$. No to je u suprotnosti sa pretpostavkom. Prema tome $S \cup \{a\} \not\cong T \cup \{b\}$.

□

Ako su S i T p-skupovi te $f : S \to_p T$ p-funkcija onda je očito kada za f definiramo da je f injekcija, surjekcija i bijekcija. Nadalje, za p-skupove kažemo da su ekvipotentni ako postoji p-bijekcija $f : S \to_p T$. U tom slučaju pišemo $S \cong_p T$.

Sljedeća propozicija je analogon propozicijama 2.3.3 i 2.3.5.

Propozicija 2.3.6. *Neka su S, T i V p-skupovi.*

1) $S \cong_p S$

2) Ako je $S \cong_p T$, onda je $T \cong_p S$.

3) Ako je $S \cong_p T$ i $T \cong_p V$, onda je $S \cong_p V$.

4) Pretpostavimo da su a i b p-skupovi takvi da $a \notin_p S$ i $b \notin_p T$.
Ako je $S \cong_p T$, onda je $S \cup \{a\}_p \cong_p T \cup \{b\}_p$.
Ako $S \not\cong_p T$, onda $S \cup \{a\}_p \not\cong_p T \cup \{b\}_p$.

Analogno kao u slučaju skupova vidimo da ne postoji p-skup svih p-skupova.

Napomena 2.3.7. *Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu S. Neka su $x, y \in S$. Tada je*

$$x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y]. \tag{2.5}$$

Naime, ranije smo vidjeli da $x \sim y$ povlači $[x] = [y]$. Obratno ako je $[x] = [y]$ onda iz $y \in [y]$ slijedi $y \in [x]$ pa je $x \sim y$.
Iz (2.5) slijedi da

$$x \nsim y \Leftrightarrow [x] \neq [y].$$

Napomena 2.3.8. *Neka je S skup takav da $S \cong \emptyset$. Tada postoji bijekcija $f : S \to \emptyset$. Iz primjera 1.1.11 slijedi da je $S = \emptyset$.*
Isto tako ako je S p-skup takav da je $S \cong_p \emptyset_p$ onda je $S = \emptyset_p$.

Primjer 2.3.9. *Neka je $\mathcal{S}$ skup svih p-skupova. Na $\mathcal{S}$ definiramo binarnu relaciju $\sim$ tako da za $S, T \in \mathcal{S}$ stavimo $S \sim T$ ako je $S \cong_p T$.*
Iz tvrdnji 1) − 3) iz prethodne propozicije slijedi da je $\sim$ relacija ekvivalencije na $\mathcal{S}$.
Neka je $S \in \mathcal{S}$. Tada je

$$[S] = \{T \in \mathcal{S} \mid S \sim T\}$$

to jest

$$[S] = \{T \in \mathcal{S} \mid S \cong_p T\}.$$

Imamo

$$\mathcal{S}/_{\sim} = \{[s] \mid s \in \mathcal{S}\}.$$

Definirajmo funkciju $f : \mathcal{S}/_{\sim} \to \mathcal{S}/_{\sim}$ na sljedeći način. Neka je $\alpha \in \mathcal{S}/_{\sim}$. Tada postoji $S \in \mathcal{S}$ takav da $\alpha = [S]$. Nadalje, budući da S nije p-skup svih p-skupova (jer takav ne postoji), postoji p-skup a takav da $a \notin_p S$. Imamo p-skup $S \cup \{a\}_p$, dakle $S \cup \{a\}_p \in \mathcal{S}$ pa definiramo

$$f(\alpha) = [S \cup \{a\}_p].$$

Dokažimo da ova definicija ne ovisi o izboru od S i a.
Pretpostavimo da je $T \in \mathcal{S}$ takav da je $\alpha = [T]$ te da je b p-skup takav da $b \notin_p T$. Tvrdimo da je $[S \cup \{a\}] = [T \cup \{b\}]$. Iz $\alpha = [T]$ slijedi $[S] = [T]$, pa je prema napomeni 2.3.7 $S \sim T$. Dakle $S \cong_p T$. Iz $a \notin_p S$ i $b \notin_p T$ te propozicije 2.3.6 pod 4) slijedi

$$S \cup \{a\}_p \cong_p T \cup \{b\}_p.$$

Dakle $S \cup \{a\}_p \sim T \cup \{b\}_p$ pa je

$$[S \cup \{a\}_p] = [T \cup \{b\}_p].$$

Prema tome funkcija f je dobro definirana.
Dokažimo da je f injekcija. Neka su $\alpha, \beta \in \mathcal{S}/_{\sim}$ takvi da $\alpha \neq \beta$. Imamo $\alpha = [S]$ i $\beta = [T]$ za neke $S, T \in \mathcal{S}$. Odaberimo p-skupove a i b takve da $a \notin_p S$ i $b \notin_p T$. Imamo

$$f(\alpha) = [S \cup \{a\}_p] \;\; i \;\; f(\beta) = [T \cup \{b\}_p].$$

Iz $\alpha \neq \beta$ slijedi $[S] \neq [T]$ pa $S \nsim T$. Prema tome $S \ncong_p T$ pa iz propozicije 2.3.6 slijedi

$$S \cup \{a\}_a \ncong T \cup \{b\}_p.$$

Dakle $S \cup \{a\}_p \nsim T \cup \{b\}_p$, pa je $[S \cup \{a\}_p] \neq [T \cup \{b\}_p]$ to jest $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Prema tome f je injekcija.
No f nije surjekcija. Naime imamo $[\emptyset_p] \in \mathcal{S}/_{\sim}$, a ne postoji $\alpha \in \mathcal{S}/_{\sim}$ takav da $f(\alpha) = [\emptyset_p]$. Pretpostavimo suprotno to jest da takav α postoji. Imamo $f(\alpha) = [S \cup \{a\}_p]$ gdje su S i a neki p-skupovi. Iz $[S \cup \{a\}_p] = [\emptyset_p]$ slijedi $S \cup \{a\}_p \cong \emptyset_p$ pa je prema napomeni 2.3.8 $S \cup \{a\}_p = \emptyset_p$. No to je nemoguće jer $S \cup \{a\}_p$ nije prazan p-skup. Naime očito $a \in_p S \cup \{a\}_p$. Prema tome ne postoji α takav da je $f(\alpha) = [\emptyset_p]$ pa zaključujemo da f nije surjekcija.
Iz napomene 2.2.5 slijedi da je $\mathcal{S}/_{\sim}$ beskonačan skup.

2.4 Karakterizacija beskonačnih skupova

Propozicija 2.4.1. *Neka su S i T skupovi takvi da je $S \subseteq T$. Pretpostavimo da je S beskonačan skup. Tada je T beskonačan.*

Dokaz. Budući da je S beskonačan skup postoji injekcija $f : S \to S$ koja nije surjekcija. Definirajmo funkciju $g : T \to T$ sa

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in S \\ x, & x \in T \setminus S \end{cases}.$$

Dokažimo da je g injekcija. Neka su $x_1, x_2 \in T$ takvi da je $x_1 \neq x_2$. Imamo 4 slučaja.
Prvi slučaj: $x_1, x_2 \in S$, tada je $g(x_1) = f(x_1)$, $g(x_2) = f(x_2)$, a $f(x_1) \neq f(x_2)$ jer je f injekcija. Prema tome $g(x_1) \neq g(x_2)$.
Drugi slučaj: $x_1, x_2 \in T \setminus S$, tada je $g(x_1) = x_1$, $g(x_2) = x_2$ pa je očito $g(x_1) \neq g(x_2)$.
Treći slučaj: $x_1 \in S, x_2 \in T \setminus S$, očito je tada $g(x_1) \in S$ i $g(x_2) \in T \setminus S$ pa je jasno da je $g(x_1) \neq g(x_2)$.
Četvrti slučaj: $x_1 \in T \setminus S, x_2 \in S$, analogno trećem slučaju slično zaključujemo $g(x_1) \neq g(x_2)$.
Dakle, za sve $x_1, x_2 \in T$ takve da $x_1 \neq x_2$ vrijedi $g(x_1) \neq g(x_2)$. Stoga je g injekcija. Budući da f nije surjekcija postoji $y \in S$ takav da $f(x) \neq y$ za svaki $x \in S$. Očito da je tada

$g(x) \neq y$ za svaki $x \in S$. Za $x \in T \setminus S$ imamo $g(x) \in T \setminus S$ pa je očito $g(x) \neq y$. Prema tome za svaki $x \in T$ vrijedi $g(x) \neq y$ pa zaključujemo da g nije surjekcija. Stoga slijedi da je T beskonačan skup. □

Propozicija 2.4.2. *Neka su S i T skupovi takvi da je $S \cong T$. Pretpostavimo da je S beskonačan skup. Tada je T beskonačan skup.*

Dokaz. Budući da je S beskonačan skup, postoji $A \subseteq S$ takav da $A \neq S$ i $A \cong S$. Budući da $S \cong T$ postoji $f : S \to T$. Označimo $B = f(A)$. Definirajmo funkciju $g : A \to B$ sa $g(x) = f(x)$ za svaki $x \in A$. Lako zaključujemo da je g bijekcija. Prema tome $A \cong B$. Budući da $A \subseteq S$ i $A \neq S$ postoji $x_0 \in S$ takav da $x_0 \notin A$. Imamo $f(x_0) \in T$. Pretpostavimo $f(x_0) \in B$, tada je $f(x_0) \in f(A)$ pa postoji $x \in A$ takav da $f(x_0) = f(x)$. Injektivnost funkcije f povlači $x_0 = x$ što znači da je $x_0 \in A$, a to je u suprotnosti s odabirom od x_0. Prema tome $f(x_0) \notin B$, dakle $B \neq T$. Iz $T \cong S$, $S \cong A$ i $A \cong B$ slijedi $T \cong B$. Stoga je T beskonačan skup. □

Propozicija 2.4.3. *Neka su S i T skupovi te neka je $f : S \to T$ injekcija. Pretpostavimo da je S beskonačan skup. Tada je T beskonačan skup.*

Dokaz. Neka je $g : S \to f(S)$ funkcija definirana sa $g(x) = f(x)$ za svaki $x \in S$. Tada je g bijekcija pa je $S \cong f(S)$. Prema propoziciji 2.4.2 imamo da je $f(S)$ beskonačan. Očito da $f(S) \subseteq T$ pa iz propozicije 2.4.1 slijedi da je T beskonačan skup. □

Teorem 2.4.4. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka te neka je S skup. Tada je S beskonačan skup ako i samo ako postoji injekcija $g : A \to S$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji injekcija $g : A \to S$. Prema primjeru 2.0.2 skup A je beskonačan skup. Stoga je S beskonačan prema propoziciji 2.4.3.
Obratno, pretpostavimo da je S beskonačan skup. Tada prema napomeni 2.0.3 postoji injekcija $h : S \to S$ koja nije surjekcija. Budući da h nije surjekcija postoji $x_1 \in S$ takav da $x_1 \notin h(S)$. Prema teoremu 1.3.3 postoji funkcija $g : A \to S$ takva da $g(\alpha) = x_1$ i

$$g(f(a)) = h(g(a)) \tag{2.6}$$

za svaki $a \in A$.
Dokažimo da je g injekcija.
Dokažimo prvo sljedeće: za svaki $a \in A$ takav da $a \neq \alpha$ vrijedi $g(a) \in h(S)$. Neka je $a \in A$ takav da $a \neq \alpha$. Tada je $a \in A \setminus \{\alpha\}$, a po definiciji Peanove trojke znamo da je $f(A) = A \setminus \{\alpha\}$. Stoga, postoji $a' \in A$ takav da je $f(a') = a$. Koristeći (2.6) dobivamo

$$g(a) = g(f(a')) = h(g(a')),$$

dakle $g(a) \in h(S)$. Neka je $a \in A$ takav da $a \neq \alpha$. Tada je $g(\alpha) \neq g(a)$. Naime $g(\alpha) = x_1$, $g(a) \in h(S)$, a $x_1 \notin h(S)$.
Neka je

$$B = \{x \in A \mid \text{za svaki } y \in A \text{ takav da je } x < y \text{ vrijedi } g(x) \neq g(y)\}.$$

Vrijedi $\alpha \in B$ jer ako je $y \in A$ takav da $\alpha < y$ onda je $g(\alpha) \neq g(y)$ prema dokazanom. Pretpostavimo da je $x \in B$. Tvrdimo da je $f(x) \in B$. Pretpostavimo da je $y \in A$ takav da $f(x) < y$. Iz $\alpha \leq f(x)$ slijedi $\alpha < y$ (ako je $\alpha = f(x)$ to je očito, a ako je $\alpha < f(x)$ onda iz tranzitivnosti od $<$ slijedi). Stoga je $y \neq \alpha$ to jest $y \in A \setminus \{\alpha\}$ pa postoji $z \in A$ takav da $y = f(z)$. Dakle $f(x) < f(z)$ pa iz toga slijedi $x < z$ (u suprotnom bismo prema teoremu 1.5.6 imali $x = z$ ili $z < x$ pa bi slijedilo $f(x) = f(z)$ ili $f(z) < f(x)$ prema lemi 1.5.5, no i jedno i drugo je u kontradikciji sa $f(x) < f(z)$). Iz $x < z$ i $x \in B$ slijedi $g(x) \neq g(z)$. Budući da je h injekcija dobivamo $h(g(x)) \neq h(g(z))$. No, prema (2.6) to znači $g(f(x)) \neq g(f(z))$, to jest $g(f(x)) \neq g(y)$. Time smo dokazali da je $f(x) \in B$.
Zaključak: $\alpha \in B$, i za svaki $x \in B$ vrijedi $f(x) \in B$. Iz definicije Peanove trojke slijedi $B = A$.
Neka su $x, y \in A$ takvi da $x \neq y$. Prema teoremu 1.5.6 vrijedi $x < y$ ili $y < x$. Ako je $x < y$ onda zbog $x \in B$ (što slijedi iz $B = A$) imamo $g(x) \neq g(y)$. Ako je $y < x$, onda zbog $y \in B$ imamo $g(y) \neq g(x)$. Prema tome, g je injekcija i time je tvrdnja teorema dokazana. □

2.5 Konačni skupovi

Definicija 2.5.1. *Za skup S koji nije beskonačan kažemo da je* ***konačan skup****.*

Lema 2.5.2. *Neka je S konačan skup te neka je x_0 neki objekt. Tada je $S \cup \{x_0\}$ konačan skup.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, neka je $S \cup \{x_0\}$ beskonačan skup to jest postoji pravi podskup T od $S \cup \{x_0\}$ takav da je $S \cup \{x_0\} \cong T$. Uočimo da $x_0 \notin S$ (jer bi inače vrijedilo $S \cup \{x_0\} = S$ što je konačan skup).

1. slučaj: $x_0 \notin T$

Očito je $T \neq \emptyset$ (jer je $S \cup \{x_0\} \cong T$ i $S \cup \{x_0\} \neq \emptyset$). Odaberimo neki $t_0 \in T$. Iz $T \subseteq S \cup \{x_0\}$ i $x_0 \notin T$ slijedi $T \subseteq S$. Slijedi $t_0 \in S$ pa zaključujemo da je $T \setminus \{t_0\}$ pravi podskup od S. Iz ovoga slijedi da $S \ncong T \setminus \{t_0\}$ (u suprotnom bi S bio beskonačan skup što je u suprotnosti s pretpostavkom leme). Iz propozicije 2.3.5 slijedi $S \cup \{x_0\} \ncong (T \setminus \{t_0\}) \cup \{t_0\}$, to jest $S \cup \{x_0\} \ncong T$. Kontradikcija.

2. slučaj: $x_0 \in T$

Iz $T \subseteq S \cup \{x_0\}$ slijedi $T \setminus \{x_0\} \subseteq S$ (ako je $x \in T \setminus \{x_0\}$, onda je $x \in T$ i $x \neq x_0$ pa je $x \in S \cup \{x_0\}$ i $x \neq x_0$, dakle $x \in S$). Kada bi vrijedilo $T \setminus \{x_0\} = S$ onda bismo imali

$(T \setminus \{x_0\}) \cup \{x_0\} = S \cup \{x_0\}$, to jest $T = S \cup \{x_0\}$, što je nemoguće jer je T pravi podskup od $S \cup \{x_0\}$. Stoga je $T \setminus \{x_0\} \neq S$, dakle $T \setminus \{x_0\}$ je pravi podskup od S. Budući da S nije beskonačan imamo $S \not\approx T \setminus \{x_0\}$ pa propozicija 2.3.5 povlači $S \cup \{x_0\} \not\approx (T \setminus \{x_0\}) \cup \{x_0\}$, to jest $S \cup \{x_0\} \not\approx T$. Kontradikcija.

U oba slučaja smo dobili kontradikciju pa zaključujemo da je $S \cup \{x_0\}$ konačan skup. □

Lema 2.5.3. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka. Neka su $x, y \in A$ takvi da je $x < y$. Tada za svaki $z \in A$ vrijedi*

$$x + z < y + z.$$

Dokaz. Iz $x < y$ slijedi da postoji $k \in A$ takav da je $y = x + k$. Koristeći propozicije 1.4.3 i 1.4.5 dobivamo

$$y + z = (x + k) + z = x + (k + z) = x + z + k = (x + z) + k.$$

Dakle

$$y + z = (x + z) + k$$

pa je

$$x + z < y + z.$$

□

Napomena 2.5.4. *Ako je (A, f, α) Peanova trojka te ako su $x, y, z \in A$ takvi da je $x \leq y$, onda je $x + z \leq y + z$.*

Naime to je očito ako $x = y$, a ako je $x \neq y$ onda je $x < y$ pa tvrdnja slijedi iz leme 2.5.3.

Propozicija 2.5.5. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka te neka su $a, x \in A$ takvi da je $a < x$. Tada je $f(a) \leq x$.*

Dokaz. Zbog $a < x$ postoji $k \in A$ takav da je $x = a + k$. Imamo $\alpha \leq k$ (lema 1.5.4) pa iz prethodne napomene slijedi da je $a + \alpha \leq a + k$, to jest $f(a) \leq x$. □

Teorem 2.5.6. *Neka je (A, f, α) Peanova trojka. Za $a \in A$ neka je*

$$S_a = \{x \in A \mid x \leq a\}.$$

Tada je S_a konačan skup za svaki $a \in A$.

Dokaz. Neka je

$$T = \{a \in A \mid S_a \text{ je konačan skup}\}.$$

Vrijedi $S_\alpha = \{\alpha\}$ pa je očito S_α konačan skup. Dakle $\alpha \in T$.
Pretpostavimo da je $a \in T$. Želimo dokazati da je $f(a) \in T$.
Tvrdimo da je

$$S_{f(a)} = S_a \cup \{f(a)\}. \tag{2.7}$$

Neka je $x \in S_a \cup \{f(a)\}$. Tada je $x \in S_a$ ili $x = f(a)$. Ako je $x \in S_a$, onda je $x \leq a$ pa zbog $a \leq f(a)$ slijedi $x \leq f(a)$, dakle $x \in S_{f(a)}$. Ako je $x = f(a)$, onda je očito $x \leq f(a)$ pa je $x \in S_{f(a)}$. Prema tome $S_a \cup \{f(a)\} \subseteq S_{f(a)}$.
Obratno, pretpostavimo da je $x \in S_{f(a)}$. Tada je $x \leq f(a)$. Ako je $x = a$, onda je očito $x \in S_a$, dakle $x \in S_a \cup \{f(a)\}$. Pretpostavimo da je $x \neq a$. Tada je $x < a$ ili $a < x$ (teorem 1.5.6). Ako je $x < a$, onda je očito $x \in S_a$, dakle $x \in S_a \cup \{f(a)\}$. Ako je $a < x$, onda je prema prethodnoj propoziciji $f(a) \leq x$, što zajedno sa $x \leq f(a)$ daje $x = f(a)$ pa je $x \in S_a \cup \{f(a)\}$.
Zaključak: $S_{f(a)} \subseteq S_a \cup \{f(a)\}$.
Prema tome vrijedi (2.7).
Skup S_a je konačan (jer je $a \in T$) pa iz (2.7) i leme 2.5.2 slijedi da je $S_{f(a)}$ konačan skup. Dakle $f(a) \in T$.
Prema tome, $\alpha \in T$ i $f(a) \in T$ za svaki $a \in T$. Zaključujemo da je $T = A$. Dakle za svaki $a \in A$ vrijedi da je $a \in T$ to jest S_a je konačan skup. $\square$

Bibliografija

[1] S. Mardešić, *Matematička analiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

[2] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

Sažetak

U ovom diplomskom radu smo pručavali Peanove trojke. U prvom poglavlju smo najprije opisali osnovne pojmove vezane za funkciju potrebne za ovaj rad. Nadalje, definirali smo pojam Peanove trojke i proučili neka njena svojstva između kojeg je i dokaz principa definicije indukcijom. U nastavku rada smo definirali zbrajanje i uređaj na Peanovoj trojci uz njihova osnovna svojstva. Za kraj prvog poglavlja definirali smo izomorfizam i proučili ga u okviru Peanovih trojki dokazavši i ujedno da su svake dvije Peanove trojke izomorfne.

Drugo poglavlje je bilo posvećeno beskonačnim skupovima. Uz pretpostavku da postoji beskonačan skup dokazali smo egzistenciju Peanove trojke. Potom smo i dokazali egzistenciju beskonačnog skupa uz pretpostavku postojanja novouvedenih p-skupova. Dotakli smo se i teme ekvipotentnosti skupova. Koristeći Peanove trojke karakterizirali smo beskonačne skupove. Na kraju smo iskazali i dokazali neke od činjenica vezanih za konačne skupove.

Summary

In this Master's Thesis Peano triples were discussed. First chapter started with definition of a function and its main properties that were necessary for this Thesis. Then we defined Peano triples and studied some of its characteristics, main one being the definition by induction. Furthermore, by using Peano triples addition and inequality were introduced. Final topic of first chapter was isomorphism where we proved that any two Peano triples are isomorphic.

Chapter two was dedicated to infinite sets. By assuming that an infinite set exists we proved existence of a Peano triple. Afterwards, we also demonstrated existence of an infinite set with the assumption that p-sets exist. Then we observed equipotent sets. Using Peano triples we characterized infinite sets. At the very end, we stated and proved some of the properties of finite sets.

Životopis

Rođena sam 23. srpnja 1996. godine u Dubrovniku. Pohađala sam Osnovnu školu Župa dubrovačka. Nakon završetka osnovne škole upisujem prirodoslovno-matematički program Gimnazije Dubrovnik. Srednjoškolsko obrazovanje završavam 2015. godine, a iste godine i upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika - nastavnički smjer na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij završavam 2018. godine kada i upisujem diplomski studij Matematika - nastavnički smjer na istom fakultetu.