Elementarni aspekti potpunosti

Ćorak, Iva

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Iva Ćorak

ELEMENTARNI ASPEKTI POTPUNOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, veljača, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Najprije se zahvaljujem svome mentoru, profesoru Zvonku Iljazoviću, na nesebičnoj pomoći, velikom razumijevanju i brojim savjetima tokom studiranja i pisanja ovog rada. Hvala Vam za svaku riječ ohrabrenja i svaku minutu vremena koju ste izdvojili da biste mi olakšali, ne samo izradu ovog rada, nego i samo studiranje i završetak fakulteta.

Posebno se zahvaljujem mojem Miku koji je vjerovao u mene i kada ja to nisam. Hvala ti na silnoj ljubavi i strpljenju koje si mi pružao sve ove godine. Otkad si ti ušetao u moj život sve je postalo lakše.

Hvala mojoj najboljoj prijateljici Matei, mom osloncu i najvjernijoj prijateljici, koja mi je olakšala ovo putovanje i bila uz mene od prvog do zadnjeg predavanja.

Bez tebe bi svako učenje bilo teže, svaki pad tužniji i svaki prolaz manje sretan.

Hvala i mojim bakama koje su me svakodnevno preporučale u molitvama.

I najveća hvala mojoj obitelji.

Mojoj mami i tati koji su mi sve ovo omogućili i od prvog dana bili najveća podrška. I mome bratu i sestri, na pruženoj potpori i poticanju na rad i učenje kada sam imala najmanje volje.

Hvala vam na bezuvjetnoj ljubavi i povjerenju što ste mi pružali od početka do kraja.

Bez vas ništa ne bi bilo moguće!

Karlo, Mia i Maroje, hvala što ste sve ove godine strpljivo čekali da tetka završi 'školu'.

Hvala svima što ste me naučili da je neuspjeh u rješenju bilo kojeg zadatka samo rezultat nedovoljnog broja pokušaja te da su hrabrost, odvažnost i odlučnost utemeljitelji onog najvažnijeg na svijetu: napretka.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu promatramo neke elementarne aspekte potpunosti.

Na početku ćemo definirati osnovne pojmove kao što su binarna operacija, binarna relacija, polje i uređaj na skupu. Na kraju prvog poglavlja proučit ćemo neka svojstva uređenog polja.

U drugom poglavlju fiksirat ćemo jedno potpuno uređeno polje te u njemu konstruirati skupove $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$. Proučit ćemo svojstva tih skupova a ujedno i omeđenost.

Dokazat ćemo da ne postoji $\sqrt{2}$ u $\mathbb{Q}$ a zatim koristeći taj rezultat dokazati da $\mathbb{Q}$ nije potpuno uređeno polje.

Pokazat ćemo da postoji $\sqrt{2}$ u $\mathbb{R}$. Na kraju ćemo promatrati nizove i konvergenciju nizova u uređenim poljima.

Poglavlje 1

Uređena polja

1.1 Binarne operacije i relacije

Definicija 1.1.1. *Neka je S neprazan skup i $* : S \times S \to S$ funkcija. Tada kažemo da je $*$* ***binarna operacija*** *na skupu S.*
Ako je $*$ binarna operacija na skupu S, onda za $x, y \in S$ umjesto $*(x, y)$ pišemo i $x * y$.

Definicija 1.1.2. *Za binarnu operaciju $*$ na skupu S kažemo da je* ***asocijativna*** *ako za sve $x, y, z \in S$ vrijedi:*

$$x * (y * z) = (x * y) * z.$$

Definicija 1.1.3. *Za binarnu operaciju $*$ na skupu S kažemo da je* ***komutativna*** *ako za sve $x, y \in S$ vrijedi:*

$$x * y = y * x.$$

Definicija 1.1.4. *Neka je $*$ binarna operacija na skupu S te neka je $n \in S$. Kažemo da je n* ***neutralni element*** *za operaciju $*$ ako za svaki $x \in S$ vrijedi:*

$$x * n = n * x = x.$$

Napomena 1.1.5. *Neka je $*$ binarna operacija na skupu S. Pretpostavimo da su n_1, n_2 neutralni elementi za $*$. Tada je $n_1 = n_2$.*
Naime, imamo:

$$n_1 = n_1 * n_2 = n_2\ ;$$

prva jednakost vrijedi jer je n_2 neutralni element (za $*$), a druga jer je i n_1 neutralni element (za $*$).

Definicija 1.1.6. *Neka je $*$ binarna operacija na skupu S te neka je n neutralni element za $*$. Neka su x, $y \in S$. Kažemo da je y **inverzni element** za x s obzirom na $*$ ako:*

$$x * y = n \text{ i } y * x = n.$$

Pokažimo sada da je inverzni element od x, ako postoji, jedinstven.

Propozicija 1.1.7. *Neka je $*$ asocijativna binarna operacija na skupu S te neka je $x \in S$. Pretpostavimo da su y_1 i y_2 inverzni elementi od x s obzirom na operaciju $*$. Tada je*

$$y_1 = y_2.$$

Dokaz. Neka je n neutralni element za operaciju $*$. (On sigurno postoji prema definiciji inverznog elementa.)
Imamo:

$$x * y_1 = n,$$

pa je

$$y_2 * (x * y_1) = y_2 * n.$$

Kako je $*$ asocijativna operacija i kako je n neutralni element vrijedi:

$$(y_2 * x) * y_1 = y_2.$$

Stoga je

$$n * y_1 = y_2,$$

tj.

$$y_1 = y_2.$$

$\square$

Definicija 1.1.8. *Neka je S skup. Za svaki podskup od $S \times S$ kažemo da je **binarna relacija** na skupu S. Ako je $\sim$ binarna relacija na skupu S, tj. $\sim \subseteq S \times S$, onda za $x, y \in S$ pišemo $x \sim y$ ako je $(x, y) \in \sim$.*

Definicija 1.1.9. *Za binarnu relaciju $\sim$ na skupu S kažemo da je **refleksivna** ako za svaki $x \in S$ vrijedi $x \sim x$.*

Definicija 1.1.10. *Za binarnu relaciju $\sim$ na skupu S kažemo da je **simetrična** ako za sve x, $y \in S$ vrijedi:*

Ako je $x \sim y$, onda je $y \sim x$
($x \sim y \Rightarrow y \sim x$).

Definicija 1.1.11. *Za binarnu relaciju $\sim$ na skupu S kažemo da je* ***antisimetrična*** *ako za sve x, y $\in$ S vrijedi:*

$$x \sim y \text{ i } y \sim x \Rightarrow x = y.$$

Definicija 1.1.12. *Za binarnu relaciju $\sim$ na skupu S kažemo da je* ***tranzitivna*** *ako za sve x, y, z $\in$ S vrijedi:*

$$x \sim z \text{ i } z \sim y \Rightarrow x \sim y.$$

Definicija 1.1.13. *Za binarnu relaciju $\sim$ na skupu S kažemo da ima* ***svojstvo usporedivosti*** *ako za sve x, y $\in$ S vrijedi:*

$$x \sim y \text{ ili } y \sim x.$$

Definicija 1.1.14. *Neka je S skup i $\sim$ binarna relacija na S koja je refleksivna, antisimetrična, tranzitivna te ima svojstvo usporedivosti. Tada za $\sim$ kažemo da je* ***uređaj*** *na S.*

1.2 Polja

Definicija 1.2.1. *Neka je P skup koji ima bar dva elementa te neka su + i $\cdot$ binarne operacije na skupu P, koje su asocijativne i komutativne. Nadalje, pretpostavimo da postoji neutralni element za operaciju +, označimo ga s 0, te da za svaki x $\in$ P postoji inverzni element od x s obzirom na operaciju +. Nadalje, pretpostavimo da postoji neutralni element za operaciju $\cdot$, označimo ga s 1, te da svaki x $\in$ P, takav da je x $\neq$ 0, ima inverzni element s obzirom na operaciju $\cdot$.*
Pretpostavimo da za sve $x, y, z \in P$ vrijedi:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

Tada za uređenu trojku (P, +, $\cdot$) kažemo da je ***polje****.*

Napomena 1.2.2. *Ako je (P, +, $\cdot$) polje, onda ćemo obično, kao i u definiciji, sa 0 označavati neutralni element za operaciju +, a s 1 neutralni element za operaciju $\cdot$. Za x $\in$ P sa -x ćemo označavati inverzni element od x s obzirom na operaciju +, a ako je x $\neq$ 0, sa x^{-1} ćemo označavati inverzni element od x s obzirom na operaciju $\cdot$.*
Dakle, za svaki x $\in$ P vrijedi x + (-x) = 0 i za svaki x $\in$ P, x $\neq$ 0 vrijedi $x \cdot x^{-1} = 1$.

U sljedećoj propoziciji vidjet ćemo neka svojstva polja $(P, +, \cdot)$.

Propozicija 1.2.3. *Neka je $(P, +, \cdot)$ polje.*

1) *Neka su $x, y, z \in P$ takvi da je $x + z = y + z$. Tada je $x = y$.*

2) *Neka je $x \in P$ takav da je $x + x = x$. Tada je $x = 0$.*

3) *Neka je $x \in P$. Tada je $x \cdot 0 = 0$.*

4) *$0 \neq 1$.*

5) *Neka je $x \in P$. Tada je $-(-x)=x$.*

6) *Neka je $x \in P$, $x \neq 0$. Tada je*

$$x^{-1} \neq 0 \text{ te je } (x^{-1})^{-1} = x.$$

7) *Neka su $x, y \in P$. Tada je*

$$x \cdot (-y) = -(x \cdot y),$$
$$(-x) \cdot y = -(x \cdot y),$$
$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y.$$

Dokaz. 1) Iz $x + z = y + z$ slijedi

$$(x + z) + (-z) = y + z + (-z)$$

pa je

$$x + (z + (-z)) = y + (z + (-z)),$$

tj.

$$x + 0 = y + 0,$$

pa je

$$x = y$$

.

2) Imamo $x + x = 0 + x$ pa iz 1) slijedi $x = 0$.

3) Imamo $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$. Iz 2) sada slijedi $x \cdot 0 = 0$.

4) Pretpostavimo $0 = 1$. Neka je $x \in P$. Tada je

$$x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0,$$

pri čemu smo koristilli 3). Dakle, $x = 0$ za svaki $x \in P$, tj. $P = \{0\}$, što je u kontradikciji s činjenicom da P ima bar dva elementa (prema definiciji polja).

5) Općenito, ako je $*$ binarna operacija na skupu S, te $a \in S$ i b inverzni element od a s obzirom na $*$, onda je a inverzni element od b s obzirom na $*$.
Stoga je x inverzni element od $-x$ s obzirom na operaciju $+$ pa je $x = -(-x)$.

6) Pretpostavimo $x^{-1} = 0$. Tada je

$$0 = x \cdot 0 = x \cdot x^{-1} = 1,$$

što je u kontradikciji s 4). Dakle, $x^{-1} \neq 0$.
Kao u 5), sada zaključujemo $(x^{-1})^{-1} = x$.

7) Vrijedi

$$(x \cdot (-y)) + (x \cdot y) = x \cdot ((-y) + y) = x \cdot 0 = 0.$$

Dakle,

$$(x \cdot (-y)) + (x \cdot y) = 0.$$

Kada prethodnoj jednakosti pribrojimo $-(x \cdot y)$, dobivamo

$$x \cdot (-y) = -(x \cdot y).$$

Jednakost $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ se dokazuje analogno.
Koristeći prethodne dvije jednakosti i 5) dobivamo:

$$(-x) \cdot (-y) = -((-x) \cdot y) = -(-(x \cdot y)) = x \cdot y.$$

□

1.3 Uređena polja

Definicija 1.3.1. *Neka je $(P,+,\cdot)$ polje, te neka je $\leqslant$ uređaj na P. Za $(P,+,\cdot,\leqslant)$ kažemo da je **uređeno polje** ako za sve $x, y, z \in P$ vrijedi:*

(1) Ako je $x \leqslant y$, onda je $x + z \leqslant y + z$,
(2) Ako je $0 \leqslant x$ i $0 \leqslant y$, onda je $0 \leqslant x \cdot y$.

Propozicija 1.3.2. *Neka je $(P,+,\cdot,\leqslant)$ uređeno polje. Tada je $0 \leqslant 1$.*

Dokaz. Budući da je $\leqslant$ uređaj, vrijedi: $1 \leqslant 0$ ili $0 \leqslant 1$.
Pretpostavimo da je $1 \leqslant 0$. Iz *definicije* 1.3.1 (1) slijedi:

$$1 + (-1) \leqslant 0 + (-1), \text{ tj. } 0 \leqslant -1.$$

Iz *definicije* 1.3.1 (2) slijedi:

$$0 \leqslant (-1) \cdot (-1).$$

Prema *propoziciji* 1.2.3 (7) vrijedi:

$$(-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Dakle, $0 \leqslant 1$. Ovo, zajedno sa $1 \leqslant 0$, daje $0 = 1$ što je nemoguće prema *propoziciji* 1.2.3 (4).
Došli smo do kontradikcije, pa zaključujemo: $0 \leqslant 1$. □

Propozicija 1.3.3. *Neka je* $(P,+,\cdot)$ *polje, te neka su* $x, y \in P$ *takvi da* $x \neq 0$ *i* $y \neq 0$. *Tada je* $x \cdot y \neq 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $x \cdot y = 0$. Slijedi:

$$x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0,$$

pa je $1 \cdot y = 0$, tj. $y = 0$, što je u kontradikciji s pretpostavkom propozicije. □

Definicija 1.3.4. *Neka je* $\leqslant$ ***uređaj na skupu*** S. *Za* $x, y \in S$ *pišemo* $x < y$ *ako je* $x \leqslant y$ *i* $x \neq y$. *Nadalje, pišemo* $x \nleqslant y$ *ako ne vrijedi* $x \leqslant y$ *te pišemo* $x \nless y$ *ako ne vrijedi* $x < y$.

U idućoj propoziciji vidjet ćemo neka svojstva uređaja na skupu.

Propozicija 1.3.5. *Neka je* $\leqslant$ *uređaj na* S. *Neka su* $x, y, z \in S$. *Tada vrijedi:*

1) $x \nless x$

2) *Ako je* $x \leqslant y$ *i* $y < z$, *onda je* $x < z$.

3) *Ako je* $x < y$ *i* $y \leqslant z$, *onda je* $x < z$.

4) *Ako je* $x < y$ *i* $y < z$, *onda je* $x < z$.

5) $x \nleqslant y$ *ako i samo ako vrijedi* $y < x$.

6) $x \nless y$ *ako i samo ako vrijedi* $y \leqslant x$.

Dokaz. 1) Očito vrijedi.

2) Pretpostavimo da je $x \leqslant y$ i $y < z$. Tada je $y \leqslant z$ pa tranzitivnost relacije $\leqslant$ povlači da je $x \leqslant z$.
Preostaje još dokazati da je $x \neq z$. Pretpostavimo suprotno, tj. $x = z$. Sada zbog $y \leqslant z$ imamo $y \leqslant x$ pa antisimetričnost relacije $\leqslant$ povlači da je $x = y$. No, to je nemoguće jer je $y < z$, tj. $y < x$. Prema tome, $x \neq z$, pa je $x < z$.

3) Dokazuje se analogno kao i (2).

4) Tvrdnja slijedi iz (2).

5) Dokazujemo tvrdnju $\Rightarrow$
Pretpostavimo da je $x \nleqslant y$. Budući da relacija $\leqslant$ ima svojstvo usporedivosti, mora vrijediti $y \leqslant x$. Također vrijedi $y \neq x$ ($y = x$ povlači $x \leqslant y$) pa je $y < x$.
Dokazujemo tvrdnju $\Leftarrow$
Pretpostavimo $y < x$. Kada bi vrijedilo $x \leqslant y$ onda bismo iz (2) zaključili da je $x < x$ što je nemoguće.
Dakle, $x \nleqslant y$.

6) iz prethodne tvrdnje negacijom slijedi:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow y \nless x,$$

a to je upravo tvrdnja (6) uz zamjenu uloga x i y.

□

Propozicija 1.3.6. *Neka je $(P,+,\cdot,\leqslant)$ uređeno polje.*
(1) $0 < 1$
(2) Neka su x, $y \in P$ takvi da je $0 < x$ i $0 < y$. Tada je $0 < x \cdot y$.
(3) Neka su $x,y,z \in P$ takvi da je $x < y$. Tada je $x + z < y + z$.

Dokaz. 1) Iz *propozicije* 1.2.3 (4) i *propozicije* 1.3.2 slijedi $0 < 1$.

2) Slijedi $0 \leqslant x$ i $0 \leqslant y$ pa je $0 \leqslant x \cdot y$ (prema definiciji uređenog polja). Nadalje, također imamo $x \neq 0$ i $y \neq 0$, pa iz *propozicije* 1.3.3 slijedi $x \cdot y \neq 0$.
Prema tome, $0 < x \cdot y$.

3) Iz $x < y$ slijedi $x \leqslant y$ pa je $x + z \leqslant y + z$. Pretpostavimo da je

$$x + z = y + z.$$

Tada je

$$(x + z) + (-z) = (y + z) + (-z),$$

iz čega lako zaključujemo da je $x = y$. To je nemoguće jer je $x < y$. Stoga je $x + z \neq y + z$, pa je $x + z < y + z$.

□

Definicija 1.3.7. *Neka je $(P, +, \cdot)$ polje. Za $x, y \in P$ definiramo:*

$$x - y = x + (-y).$$

Propozicija 1.3.8. *Neka je $(P, +, \cdot)$ polje, te neka su $x, y, z \in P$. Tada vrijedi:*
1) $x - x = 0$,
2) $x \cdot (y - z) = (x \cdot y) - (x \cdot z)$,
3) $(x - y) \cdot z = (x \cdot z) - (y \cdot z)$.

Dokaz. 1) Očito vrijedi.

2) Koristeći *propoziciju* 1.2.3 imamo

$$x \cdot (y - z) = x \cdot (y + (-z)) = (x \cdot y) + (x \cdot (-z)) = (x \cdot y) + (-(x \cdot z)) = (x \cdot y) - (x \cdot z).$$

3) Slijedi iz (2) zbog komutativnosti operacije $\cdot$.

□

Propozicija 1.3.9. *Neka je $(P, +, \cdot)$ polje, te neka je $x \in P$, $x \neq 0$. Tada je $-x \neq 0$ te je $(-x)^{-1} = -x^{-1}$*

Dokaz. Kada bi vrijedilo $-x = 0$, onda bi slijedilo $-(-x) = -0$, tj. $x = -0$, a budući da je $-0 = 0$, vrijedilo bi $x = 0$ što je u kontradikciji s pretpostavkom propozicije. Dakle, $-x \neq 0$.
Koristeći *propoziciju* 1.2.3 (7), dobivamo: $(-x) \cdot (-x^{-1}) = x \cdot x^{-1} = 1$, dakle $(-x) \cdot (-x^{-1}) = 1$, pa zaključujemo da je $-x^{-1}$ inverzni element od $-x$ s obzirom na operaciju $\cdot$.
Dakle, $-x^{-1} = (-x)^{-1}$. □

Propozicija 1.3.10. *Neka je $(P, +, \cdot)$ polje, te neka su $x, y \in P$ takvi da je $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Tada je*

$$(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}.$$

Dokaz. Znamo da je $x \cdot y \neq 0$ prema *propoziciji* 1.3.3. Imamo

$$(x \cdot y) \cdot (x^{-1} \cdot y^{-1}) = (x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = x \cdot (y \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1})) = x \cdot ((y \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1}) = x \cdot (1 \cdot x^{-1}) = x \cdot x^{-1} = 1.$$

□

Definicija 1.3.11. *Neka je $(P, +, \cdot)$ polje. Za $x, y \in P$, $y \neq 0$ definiramo*

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}.$$

Propozicija 1.3.12. *Neka je $(P, +, \cdot)$ polje.*
1) Za svaki $x \in P$ vrijedi

$$\frac{x}{1} = x.$$

2) Neka je $x \in P$ takav da $x \neq 0$. Tada je

$$\frac{x}{x} = 1 \ i \ \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

3) Neka su $a, b, c \in P$ takvi da je $c \neq 0$. Tada je

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

4) Neka su $x, y, z \in P$ takvi da je $y \neq 0$ i $z \neq 0$. Tada je

$$\frac{z \cdot x}{z \cdot y} = \frac{x}{y}.$$

5) Neka su $x, y, a, b \in P$ takvi da je $y \neq 0$ i $b \neq 0$. Tada je

$$\frac{x}{y} + \frac{a}{b} = \frac{x \cdot b + a \cdot y}{y \cdot b}.$$

6) Neka su $x, y, a, b \in P$ takvi da je $y \neq 0$ i $b \neq 0$. Tada je

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{a}{b} = \frac{x \cdot a}{y \cdot b}.$$

7) Neka su $x, y \in P$ takvi da je $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Tada je

$$\frac{x}{y} \neq 0 \ i \ \left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}.$$

8) Neka su $x, y \in P$ takvi da je $y \neq 0$. Tada je

$$-\frac{x}{y} = \frac{-x}{y},$$

$$-\frac{x}{y} = \frac{x}{-y},$$

$$\frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}.$$

Dokaz. 1) Neka je $x \in P$. Imamo

$$\frac{x}{1} = x \cdot 1^{-1} = x \cdot 1 = x.$$

2) Imamo
$$\frac{x}{x} = x \cdot x^{-1} = 1, \text{ i } \frac{1}{x} = 1 \cdot x^{-1} = x^{-1}.$$

3) Vrijedi
$$\frac{a+b}{c} = (a+b) \cdot c^{-1} = (a \cdot c^{-1}) + (b \cdot c^{-1}) = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

4) Koristeći *propoziciju* 1.3.10 imamo:
$$\frac{z \cdot x}{z \cdot y} = (z \cdot x) \cdot (z \cdot y)^{-1} = (z \cdot x) \cdot (z^{-1} \cdot y^{-1}) = x \cdot y^{-1} = \frac{x}{y}.$$
Dakle,
$$\frac{z \cdot x}{z \cdot y} = \frac{x}{y}.$$

5) Koristeći (4) i (3) dobivamo
$$\frac{x}{y} + \frac{a}{b} = \frac{x \cdot b}{y \cdot b} + \frac{a \cdot y}{b \cdot y} = \frac{x \cdot b + a \cdot y}{y \cdot b}.$$

6) Koristeći *propoziciju* 1.3.10 dobivamo:
$$\frac{x}{y} \cdot \frac{a}{b} = (x \cdot y^{-1}) \cdot (a \cdot b^{-1}) = (x \cdot a) \cdot (y^{-1} \cdot b^{-1}) = x \cdot a \cdot (y \cdot b)^{-1} = \frac{x \cdot a}{y \cdot b}.$$

7) Iz $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$, *propozicije* 1.2.3 (6) i *propozicije* 1.3.3 slijedi da je $\frac{x}{y} \neq 0$.
Koristeći *propoziciju* 1.2.3 (6) i *propoziciju* 1.3.10 dobivamo:
$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = (x \cdot y^{-1})^{-1} = x^{-1} \cdot (y^{-1})^{-1} = x^{-1} \cdot y = y \cdot x^{-1} = \frac{y}{x}.$$

8) Koristeći *propoziciju* 1.2.3 (7) dobivamo
$$-\frac{x}{y} = x \cdot (-y)^{-1} = (-x) \cdot y^{-1} = \frac{-x}{y}.$$
Nadalje, koristeći *propoziciju* 1.3.9 i *propoziciju* 1.2.3 (7) dobivamo
$$\frac{x}{-y} = x \cdot y^{-1} = x \cdot (-y^{-1}) = -x \cdot y^{-1} = -\frac{x}{y}.$$
Prema dokazanom imamo
$$\frac{x}{y} = -\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{-x}{y} = \frac{-x}{-y}.$$

$\square$

Napomena 1.3.13. *Neka je $(P, +, \cdot)$ polje. Kao i inače, u izrazima koji uključuju $+$ i $\cdot$ smatrat ćemo da $\cdot$ ima veći "prioritet" od $+$. Tako će npr. za $x, y, z \in P$, $x + y \cdot z$ značiti $x + (y \cdot z)$.*

Propozicija 1.3.14. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje.*
(1) Neka su $x, y, z \in P$ takvi da je $x \leqslant y$ i $0 \leqslant z$. Tada je $x \cdot z \leqslant y \cdot z$.
(2) Neka su $x, y, z \in P$ takvi da je $x < y$ i $0 < z$. Tada je $x \cdot z < y \cdot z$.

Dokaz. (1) Iz $x \leqslant y$ slijedi $0 \leqslant y - x$. Iz definicije uređenog polja slijedi $0 \leqslant (y - x) \cdot z$. *Propozicija* 1.3.8 (3) povlači :

$$0 \leqslant y \cdot z - x \cdot z$$

pa je

$$x \cdot z \leqslant y \cdot z.$$

(2) Iz $x < y$ i *propozicije* 1.3.6 (3) slijedi

$$0 < y - x.$$

Sada, iz *propozicije* 1.3.6 (2) slijedi $0 < (y - x) \cdot z$.
Dakle, $0 < y \cdot z - x \cdot z$, pa iz *propozicije* 1.3.6 (3) slijedi $x \cdot z < y \cdot z$. □

Poglavlje 2

Konstrukcija skupova $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

Definicija 2.0.1. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje. Pretpostavimo da vrijedi sljedeće:*

Ako su A i B neprazni podskupovi od P takvi da je $x \leqslant y$ za svaki $x \in A$ i svaki $y \in B$, onda postoji $z \in P$ takav da je $x \leqslant z \leqslant y$, za svaki $x \in A$ i svaki $y \in B$.

*Tada za $(P, +, \cdot, \leqslant)$ kažemo da je **POTPUNO** uređeno polje ili polje realnih brojeva.*

Od sada pa nadalje, neka je $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ jedno fiksirano potpuno uređeno polje.

2.1 Skup $\mathbb{N}$

Definicija 2.1.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je S induktivan skup ako vrijedi sljedeće:*
(1) $1 \in S$
(2) Ako je $x \in S$, onda je $x + 1 \in S$.

Primjer 2.1.2. *Uočavamo da je $\mathbb{R}$ induktivan skup. Nadalje, neka je*

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x\}.$$

Tada je S induktivan skup.
Naime, imamo $1 \in S$ jer je $1 \leqslant 1$. Pretpostavimo da je $x \in S$. Iz $0 \leqslant 1$ slijedi $x \leqslant x + 1$. Zbog $x \in S$ vrijedi $1 \leqslant x$, pa iz tranzitivnosti relacije $\leqslant$ dobivamo $1 \leqslant x + 1$. Stoga je $x + 1 \in S$.

Definicija 2.1.3. *Definirajmo $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in S$, za svaki induktivan skup $S\}$*

Uočimo sljedeće: za svaki induktivan skup S vrijedi $\mathbb{N} \subseteq S$.

Propozicija 2.1.4. *$\mathbb{N}$ je induktivan skup.*

Dokaz. Očito je $1 \in \mathbb{N}$.
Ako je $x \in \mathbb{N}$ onda je $x \in S$ za svaki induktivan skup S, pa je $x+1 \in S$, za svaki induktivan skup S, tj. $x+1 \in \mathbb{N}$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 2.1.5. *(PRINCIP INDUKCIJE)*
Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $1 \in S$ te takav da za svaki $x \in S$ vrijedi $x+1 \in S$. Tada je $S = \mathbb{N}$.

Dokaz. Očito je S induktivan skup, pa je $\mathbb{N} \subseteq S$. Iz ovoga i iz pretpostavke da je $S \subseteq \mathbb{N}$ slijedi $S = \mathbb{N}$. □

Propozicija 2.1.6. *Za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $1 \leqslant x$.*

Dokaz. Neka je $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x\}$.
Znamo da je S induktivan skup, stoga je $\mathbb{N} \subseteq S$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Korolar 2.1.7. *Za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $0 < x$.*

Dokaz. Slijedi iz *propozicije* 1.3.6 (1) i *propozicije* 1.3.5 (3). □

Propozicija 2.1.8. *Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi $x + y \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Fiksirajmo $x \in \mathbb{N}$. Dokažimo indukcijom po y da je $x + y \in \mathbb{N}$, za svaki $y \in \mathbb{N}$. Točnije govoreći, neka je $S = \{y \in \mathbb{N} \mid x + y \in \mathbb{N}\}$. Dokažimo da je $S = \mathbb{N}$ koristeći propoziciju *Princip indukcije*.
Očito je $1 \in S$.
Pretpostavimo da je $y \in S$. Tada je $y \in \mathbb{N}$ i $x + y \in \mathbb{N}$. Slijedi

$$y + 1 \in \mathbb{N} \text{ i } (x + y) + 1 \in \mathbb{N},$$

tj. $x + (y + 1) \in \mathbb{N}$.
Zaključujemo da je $y + 1 \in S$.
Iz *propozicije* 2.1.5 *(Princip indukcije)* slijedi da je $S = \mathbb{N}$.
Dakle, za svaki $y \in \mathbb{N}$ vrijedi $x + y \in \mathbb{N}$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 2.1.9. *Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi $x \cdot y \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Fiksirajmo $x \in \mathbb{N}$. Neka je

$$S = \{y \in \mathbb{N} \mid x \cdot y \in \mathbb{N}\}.$$

Očito je $S \subseteq \mathbb{N}$. Nadalje, očito je $1 \in S$.
Pretpostavimo da je $y \in S$. Tada je $x \cdot y \in \mathbb{N}$, pa iz

$$x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x \cdot 1 = x \cdot y + x,$$

i prethodne propozicije slijedi da je $x \cdot (y + 1) \in \mathbb{N}$. Dakle, $y + 1 \in S$.
Iz *propozicije* 2.1.5 *(Princip indukcije)* slijedi da je $S = \mathbb{N}$.
Dakle, za svaki $y \in \mathbb{N}$ vrijedi $x \cdot y \in \mathbb{N}$. □

Lema 2.1.10. *Za svaki $x \in \mathbb{N}$ takav da je $1 < x$ vrijedi:*

$$x - 1 \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Neka je $S = \{1\} \cup \{1 + k \mid k \in \mathbb{N}\}$.
Očito je $S \subseteq \mathbb{N}$ te $1 \in S$.
Za svaki $x \in S$ vrijedi $x + 1 \in S$.
Prema *propoziciji* 2.1.5 *(Princip indukcije)* imamo $S = \mathbb{N}$.
Neka je $x \in \mathbb{N}$ takav da je $1 < x$. Imamo $x \in S$ pa postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x = 1 + k$.
Slijedi $x - 1 = k$, dakle, $x - 1 \in \mathbb{N}$. □

Lema 2.1.11. *Neka je $y \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $x \in \mathbb{N}$, takav da je $x < y$, vrijedi $x + 1 \leqslant y$.*

Dokaz. Dokažimo ovo indukcijom po y. Preciznije, neka je S skup svih $y \in \mathbb{N}$ takvih da za svaki $x \in \mathbb{N}$, takav da je $x < y$, vrijedi $x + 1 \leqslant y$.
Na trivijalan način vrijedi $1 \in S$.
Pretpostavimo da je $y \in S$. Želimo dokazati da je $y + 1 \in S$.
Neka je $x \in \mathbb{N}$ takav da je $x < y + 1$. Tvrdimo da je $x + 1 \leqslant y + 1$. Ako je $x = 1$, onda zbog $1 \leqslant y$ (*propozicija* 2.1.6) imamo

$$1 + 1 \leqslant y + 1,$$

tj.

$$x + 1 \leqslant y + 1.$$

Pretpostavimo $1 < x$. Iz *leme* 2.1.10 slijedi da je $x - 1 \in \mathbb{N}$. Iz $x < y + 1$ slijedi $x - 1 < y$.
Budući da je $y \in S$, prema definiciji skupa S imamo

$$(x - 1) + 1 \leqslant y,$$

tj.

$$x \leqslant y.$$

Iz ovoga slijedi

$$x + 1 \leqslant y + 1.$$

Time smo dokazali da je $y + 1 \in S$.
Prema principu matematičke indukcije slijedi da je $S = \mathbb{N}$.
Time je tvrdnja leme dokazana. □

Propozicija 2.1.12. *Neka su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da je $x < y$. Tada je $y - x \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Definirajmo $S = \{z \in \mathbb{N} \mid z \leqslant x\} \cup \{x + k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Dovoljno je dokazati da je $S = \mathbb{N}$. Naime, tada će slijediti da je $y \in S$ pa će zbog $x < y$ slijediti da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $y = x + k$, iz čega će odmah slijediti da je $y - x \in \mathbb{N}$.

Skup S je unija dva skupa koji su očito podskupovi od $\mathbb{N}$ pa je $S \subseteq \mathbb{N}$.

Prema *propoziciji* 2.1.6 vrijedi $1 \leqslant x$, stoga je $1 \in S$.

Pretpostavimo da je $z \in S$. Želimo dokazati da je $z + 1 \in S$. Imamo dva slučaja:

1. $z \leqslant x$. Tada je $z < x$ ili $z = x$.

   Ako je $z < x$, onda je $z + 1 \leqslant x$ prema *lemi* 2.1.11 pa slijedi da je $z + 1 \in S$. Ako je $z = x$, onda je $z + 1 = x + 1$, dakle $z + 1 \in \{x + k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Dakle $z + 1 \in S$.

2. $z = x + k$, za neki $k \in \mathbb{N}$.

   Tada je $z + 1 = (x + k) + 1 = x + (k + 1)$ pa je $z + 1 \in S$.

Dakle, za svaki $z \in S$ vrijedi $z + 1 \in S$. Prema propoziciji *Princip indukcije* vrijedi $S = \mathbb{N}$. Time je propozicija dokazana. □

2.2 Omeđeni skupovi

Definicija 2.2.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, te $M \in \mathbb{R}$. Kažemo da je M **gornja međa** skupa S ako za svaki $x \in S$ vrijedi $x \leqslant M$.*

Definicija 2.2.2. *Ako je M gornja međa skupa S i $M \in S$, onda za M kažemo da je **maksimum** skupa S.*

Definicija 2.2.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Za S kažemo da je **odozgo omeđen** skup ako postoji bar jedna gornja međa od S.*

Definicija 2.2.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $M \in \mathbb{R}$. Kažemo da je M **supremum** skupa S ako je M najmanja gornja međa od S, tj. ako vrijedi*

1) *M je gornja međa od S,*

2) *za svaku gornju među M' od S vrijedi $M \leqslant M'$.*

Pretpostavimo da je M maksimum skupa S. Tvrdimo da je tada M supremum skupa S. Očito je M gornja međa skupa S. Nadalje, za svaku gornju među M' od S vrijedi $M \leqslant M'$ jer je $M \in S$.

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Pretpostavimo da su M_1 i M_2 supremumi skupa S. Tada je $M_1 = M_2$. Naime, iz 2) slijedi $M_1 \leqslant M_2$ i $M_2 \leqslant M_1$, pa je $M_1 = M_2$.

Nadalje, uočimo i ovo:

Ako su M_1 i M_2 maksimumi skupa S, onda je $M_1 = M_2$. To možemo zaključiti iz činjenice da su M_1 i M_2 također supremumi od S.

Supremum skupa S, ako postoji, označavamo sa $\sup S$.

Maksimum skupa S, ako postoji, označavamo sa $\max S$.

Propozicija 2.2.5. *Neka je $x \in \mathbb{R}$.*

1) *Pretpostavimo da je $0 < x$. Tada je $0 < x^{-1}$.*

2) *Pretpostavimo da je $x < 0$. Tada je $x^{-1} < 0$.*

Dokaz. 1) Prema *propoziciji* 1.2.3 (6) vrijedi $x^{-1} \neq 0$. Znamo da vrijedi $0 \leqslant x^{-1}$ ili $x^{-1} \leqslant 0$, tj. $0 < x^{-1}$ ili $x^{-1} < 0$. Pretpostavimo $x^{-1} < 0$. Tada je $0 < -x^{-1}$ pa iz $0 < x$ i *propozicije* 1.3.6 (2) slijedi

$$0 < (-x^{-1}) \cdot x = -(x^{-1} \cdot x) = -1.$$

Dakle, $0 < -1$ pa je $1 < 0$ što je u kontradikciji sa *propozicijom* 1.3.6 (1).

Dakle, $0 < x^{-1}$.

2) Iz $x < 0$ slijedi $0 < -x$ pa prema tvrdnji (1) vrijedi $0 < (-x)^{-1}$. Iz *propozicije* 1.3.9 slijedi

$$0 < -x^{-1}$$

pa je

$$x^{-1} < 0.$$

□

Definirajmo $2 = 1 + 1$. Iz $0 < 1$ slijedi $0 + 1 < 1 + 1$ tj. $1 < 2$. Iz ovoga slijedi također da je $0 < 2$. Iz ovoga i (1) slijedi $0 < 2^{-1}$.

Iz *propozicije* 1.3.14 (2) slijedi $1 \cdot 2^{-1} < 2 \cdot 2^{-1}$, tj. $2^{-1} < 1$.

Propozicija 2.2.6. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $x < y$. Tada postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $x < z < y$.*

Dokaz. Iz $x < y$ slijedi $0 < y - x$. Znamo da je $0 < 2^{-1} < 1$ pa je prema *propoziciji* 1.3.6 (2):

$$0 < 2^{-1}(y - x).$$

S druge strane, iz *propozicije* 1.3.14 (2) slijedi:

$$2^{-1}(y - x) < y - x.$$

Označimo $\varepsilon = 2^{-1}(y - x)$. Imamo $0 < \varepsilon < y - x$.
Iz $0 < \varepsilon$ slijedi $x < x + \varepsilon$.
Iz $\varepsilon < y - x$ slijedi $x + \varepsilon < y$.
Definirajmo $z = x + \varepsilon$. Tada je $x < z < y$. □

Definicija 2.2.7. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Definiramo:*

$$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \text{ i } x < b\},$$
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \text{ i } x \leqslant b\},$$
$$[a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \text{ i } x < b\},$$
$$\langle a, \infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}.$$

Analogno definiramo $\langle -\infty, a\rangle, [a, \infty\rangle, \langle -\infty, a], \langle a, b]$.

Primjer 2.2.8. *Tvrdimo da je 0 supremum skupa $\langle -\infty, 0\rangle$.*

Očito je 0 gornja međa skupa $\langle -\infty, 0\rangle$. Pretpostavimo da je M gornja međa skupa $\langle -\infty, 0\rangle$. Tvrdimo da je $0 \leqslant M$.

Pretpostavimo suprotno. Tada je $M < 0$. Prema propoziciji 2.2.6 postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $M < x < 0$.

Iz $x < 0$ slijedi $x \in \langle -\infty, 0\rangle$ pa $x \leqslant M$ (jer je M gornja međa ovog skupa), što je u kontradikciji sa $M < x$. Dakle, $0 \leqslant M$ pa zaključujemo da je 0 supremum skupa $\langle -\infty, 0\rangle$.

Očito 0 nije maksimum ovog skupa jer $0 \notin \langle -\infty, 0\rangle$.

Nadalje, skup $\langle -\infty, 0\rangle$ nema maksimum (jer bi taj maksimum morao biti supremum pa bi morao biti jednak 0).

Uočimo sljedeće: ako skup S ima supremum, onda je S odozgo omeđen.

Propozicija 2.2.9. *Neka je S neprazan odozgo omeđen podskup od $\mathbb{R}$. Tada S ima supremum.*

Dokaz. Neka je G skup svih gornjih međa od S. Imamo da su S i G neprazni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da za svaki $x \in S$ i svaki $y \in G$ vrijedi $x \leqslant y$.

Znamo da je $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ potpuno uređeno polje pa iz definicije potpuno uređenog polja slijedi da postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leqslant z \leqslant y$ za svaki $x \in S$ i svaki $y \in G$. Iz ovoga zaključujemo da je z supremum skupa S. □

2.3 Skup $\mathbb{Z}$

Definicija 2.3.1. *Neka je* $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-x \mid x \in \mathbb{N}\}$.

Lema 2.3.2. *Neka je* $(P, +, \cdot)$ *polje. Neka su* $x, y \in P$. *Tada je* $-(x + y) = -x + (-y)$.

Dokaz. Imamo

$$(x + y) + (-x + (-y)) = ((x + y) + (-x)) + (-y) =$$
$$= ((y + x) + (-x)) + (-y) = (y + (x + (-x))) + (-y) =$$
$$= (y + 0) + (-y) = y + (-y) = 0.$$

Dakle,

$$(x + y) + (-x + (-y)) = 0$$

pa je

$$-(x + y) = -x + (-y).$$

□

Propozicija 2.3.3. *Za sve* $x, y \in \mathbb{Z}$ *vrijedi* $x + y \in \mathbb{Z}$.

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{Z}$. Jasno je da je $x + y \in \mathbb{Z}$ ako je $x = 0$ ili $y = 0$.

Pretpostavimo da je $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Imamo nekoliko slučajeva:

1. $x, y \in \mathbb{N}$

   Prema *propoziciji* 2.1.8 vrijedi $x + y \in \mathbb{N}$. Dakle, $x + y \in \mathbb{Z}$.

2. $x, y \in \{-z \mid z \in \mathbb{N}\}$

   Tada je $x = -z_1$ i $y = -z_2$, gdje su $z_1, z_2 \in \mathbb{N}$. Koristeći *lemu* 2.3.2 dobivamo

   $$x + y = (-z_1) + (-z_2) = -(z_1 + z_2).$$

   Prema *propoziciji* 2.1.8 vrijedi $z_1 + z_2 \in \mathbb{N}$. Stoga je $x + y \in \mathbb{Z}$.

3. $x \in \mathbb{N}$ i $y \in \{-z \mid z \in \mathbb{N}\}$

   Tada postoji $z \in \mathbb{N}$ takav da je $y = -z$. Vrijedi $z < x$ ili $z = x$ ili $x < z$.

   Ako je $z < x$ onda je prema *propoziciji* 2.1.12 $x - z \in \mathbb{N}$, dakle $x - z \in \mathbb{Z}$.

   Ako je $z = x$ onda je $x - z = 0$ pa je $x - z \in \mathbb{Z}$.

   Ako je $x < z$, onda je koristeći *lemu* 2.3.2 i *propoziciju* 1.2.3 (5) dobivamo

   $$x - z = x + (-z) = -(-(x + (-z))) = -(-x + (-(-z))) = -(-x + z) = -(z - x),$$

   dakle $x - z = -(z - x)$ pa iz *propozicije* 2.1.12 slijedi $x - z \in \mathbb{Z}$. U svakom slučaju vrijedi $x + y \in \mathbb{Z}$.

4. $x \in \{-z \mid z \in \mathbb{N}\}$ i $y \in \mathbb{N}$

   Analogno kao u 3. dobivamo $x + y \in \mathbb{Z}$.

□

Napomena 2.3.4. *Neka je $x \in \mathbb{Z}$. Tada je $x \in \mathbb{N}$ ili $x = 0$ ili $x \in \{-z \mid z \in \mathbb{N}\}$.*

Ako je $x \in \mathbb{N}$, onda je očito $-x \in \mathbb{Z}$.

Ako je $x = 0$, onda je i $-x = 0$ pa je $-x \in \mathbb{Z}$.

Ako je $x \in \{-z \mid z \in \mathbb{N}\}$, onda je $x = -z$ za neki $z \in \mathbb{N}$. Sada imamo $-x = -(-z) = z$ pa je $-x \in \mathbb{N}$. Dakle $-x \in \mathbb{Z}$.

U svakom slučaju vrijedi $-x \in \mathbb{Z}$.

Propozicija 2.3.5. *Neka su $x, y \in \mathbb{Z}$. Tada je $x \cdot y \in \mathbb{Z}$.*

Dokaz. Ako je $x = 0$ ili $y = 0$, onda je prema *propoziciji* 1.2.3 (3) $x \cdot y = 0$ pa je $x \cdot y \in \mathbb{Z}$.

Pretpostavimo sada da je $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Imamo 4 slučaja:

1. $x, y \in \mathbb{N}$

   Prema *propoziciji* 2.1.9 slijedi da je $x \cdot y \in \mathbb{N}$ pa je $x \cdot y \in \mathbb{Z}$.

2. $x, y \in \{-z \mid z \in \mathbb{N}\}$

   Tada postoje z_1 i $z_2 \in \mathbb{N}$ takvi da je $x = -z_1$ i $y = -z_2$. Koristeći *propoziciju* 1.2.3 (7) dobivamo
   $$x \cdot y = (-z_1) \cdot (-z_2) = z_1 \cdot z_2$$
   pa iz *propozicije* 2.1.9 slijedi $x \cdot y \in \mathbb{N}$. Dakle, $x \cdot y \in \mathbb{Z}$.

3. $x \in \mathbb{N}, y \in \{-z \mid z \in \mathbb{N}\}$

   Tada postoji $z \in \mathbb{N}$ takav da je $y = -z$. Koristeći *propoziciju* 1.2.3 (7) dobivamo
   $$x \cdot y = x \cdot (-z) = -(x \cdot z),$$
   pa iz $x \cdot z \in \mathbb{N}$ (što slijedi iz *propozicije* 2.1.9) slijedi $x \cdot y \in \mathbb{Z}$.

4. $x \in \{-z \mid z \in \mathbb{N}\}, y \in \mathbb{N}$

   Analogno kao u 3. dobivamo $x \cdot y \in \mathbb{Z}$.

□

2.4 Skup $\mathbb{Q}$

Definirajmo $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

Uočimo da je ova definicija dobra jer $0 \notin \mathbb{N}$ (prema *korolaru* 2.1.7).

Propozicija 2.4.1. *Neka su $x, y \in \mathbb{Q}$. Tada je $x + y \in \mathbb{Q}$ i $x \cdot y \in \mathbb{Q}$. Nadalje, vrijedi da je $-x \in \mathbb{Q}$. Ako je $x \neq 0$, onda je $x^{-1} \in \mathbb{Q}$.*

Dokaz. Neka su $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ te $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takvi da je $x = \frac{m_1}{n_1}$ i $y = \frac{m_2}{n_2}$. Koristeći *propoziciju* 1.3.12 (5) dobivamo

$$x + y = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{n_1 n_2}$$

pa je $x + y \in \mathbb{Q}$ (prema *propoziciji* 2.1.9, *propoziciji* 2.2.8 i *propoziciji* 2.2.9).

Nadalje, $x \cdot y = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}$, pa zaključujemo da je $x \cdot y \in \mathbb{Q}$.

Koristeći *propoziciju* 1.3.12 (8) dobivamo

$$-x = -\frac{m_1}{n_1} = \frac{-m_1}{n_1}$$

pa iz $-m_1 \in \mathbb{Z}$ slijedi $-x \in \mathbb{Q}$.

Pretpostavimo da je $x \neq 0$. Tada je $m_1 \neq 0$. Također vrijedi $n_1 \neq 0$. Prema *propoziciji* 1.3.12 (7) vrijedi

$$x^{-1} = \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^{-1} = \frac{n_1}{m_1}.$$

Ako je $m_1 \in \mathbb{N}$ onda je očito $x^{-1} \in \mathbb{Q}$.

Inače, zbog $m_1 \in \mathbb{Z}$ i $m_1 \neq 0$ vrijedi $m_1 = -n$, za neki $n \in \mathbb{N}$. Stoga je $-m_1 = -(-n) = n$ pa iz *propozicije* 1.3.12 (8) slijedi

$$x^{-1} = \frac{n_1}{m_1} = \frac{-n_1}{-m_1} = \frac{-n_1}{n}$$

pa je očito $x^{-1} \in \mathbb{Q}$.

Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Definicija 2.4.2. *Neka su $+_{\mathbb{Q}}$ i $\cdot_{\mathbb{Q}}$ binarne operacije na $\mathbb{Q}$ definirane sa*

$$x +_{\mathbb{Q}} y = x + y,$$

$$x \cdot_{\mathbb{Q}} y = x \cdot y.$$

Uočimo da su ove definicije dobre prema propoziciji 2.4.1.

Nadalje, neka je $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ binarna relacija na $\mathbb{Q}$ definirana sa $x \leqslant_{\mathbb{Q}} y$ ako je $x \leqslant y$.

Propozicija 2.4.3. *Uređena četvorka* $(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, \leqslant_{\mathbb{Q}})$ *je uređeno polje.*

Dokaz. Neka su $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Tada je

$$(x +_{\mathbb{Q}} y) +_{\mathbb{Q}} z = (x + y) + z,$$

$$x +_{\mathbb{Q}} (y +_{\mathbb{Q}} z) = x + (y + z).$$

Iz činjenice da je $+$ asocijativna binarna operacija, slijedi da je

$$(x +_{\mathbb{Q}} y) +_{\mathbb{Q}} z = x +_{\mathbb{Q}} (y +_{\mathbb{Q}} z).$$

Dakle, $+_{\mathbb{Q}}$ je asocijativna binarna operacija.

Analogno vidimo da asocijativnost binarne opreacije $\cdot$ povlači asocijativnost binarne operacije $\cdot_{\mathbb{Q}}$.

Na isti način zaključujemo da su $+_{\mathbb{Q}}$ i $\cdot_{\mathbb{Q}}$ komutativne binarne operacije.

Očito je $0 \in \mathbb{Q}$. Za svaki $x \in \mathbb{Q}$ vrijedi

$$-x \in \mathbb{Q},$$

te

$$x +_{\mathbb{Q}} (-x) = x + (-x) = 0.$$

Dakle,

$$x +_{\mathbb{Q}} (-x) = 0,$$

te također

$$(-x) +_{\mathbb{Q}} x = 0.$$

Svaki element od $\mathbb{Q}$ ima inverzni element s obzirom na operaciju $+_{\mathbb{Q}}$.

Očito je $1 \in \mathbb{Q}$. Za svaki $x \in \mathbb{Q}$ vrijedi $x \cdot_{\mathbb{Q}} 1 = x \cdot 1 = x$ te također $1 \cdot_{\mathbb{Q}} x = x$. Stoga je 1 neutralni element za operaciju $\cdot_{\mathbb{Q}}$.

Neka je $x \in \mathbb{Q}$ takav da je $x \neq 0$. Prema *propoziciji* 2.4.1 vrijedi

$$x^{-1} \in \mathbb{Q}.$$

Imamo

$$x \cdot_{\mathbb{Q}} x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1.$$

Stoga svaki element iz $\mathbb{Q}$ različit od 0 ima inverzni element s obzirom na $\cdot_{\mathbb{Q}}$

Neka su $x, y \in \mathbb{Q}$. Tada je

$$x \cdot_{\mathbb{Q}} (y +_{\mathbb{Q}} z) = x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z = x \cdot_{\mathbb{Q}} y +_{\mathbb{Q}} x \cdot_{\mathbb{Q}} z.$$

Dakle, $x \cdot_{\mathbb{Q}} (y +_{\mathbb{Q}} z) = x \cdot_{\mathbb{Q}} y +_{\mathbb{Q}} x \cdot_{\mathbb{Q}} z$.

Zaključak: $(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}})$ je polje.

Neka je $x \in \mathbb{Q}$. Tada je $x \leqslant x$ (jer je $\leqslant$ refleksivna binarna operacija. Stoga je $x \leqslant_{\mathbb{Q}} x$. Dakle, $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ je refleksivna binarna relacija na $\mathbb{Q}$.

Neka su $x, y \in \mathbb{Q}$ takvi da je $x \leqslant_{\mathbb{Q}} y$ i $y \leqslant_{\mathbb{Q}} x$. Stoga je $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$ iz čega zaključujemo da je $x = y$ (jer je $\leqslant$ antisimetrična relacija). Prema tome, $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ je antisimetrična binarna relacija.

Neka su $x, y, z \in \mathbb{Q}$ takvi da vrijedi

$$x \leqslant_{\mathbb{Q}} y \text{ i } y \leqslant_{\mathbb{Q}} z.$$

Tada je $x \leqslant y$ i $y \leqslant z$ pa je $x \leqslant z$. Dakle, $x \leqslant_{\mathbb{Q}} z$. Zaključujemo da je $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ tranzitivna binarna relacija.

Neka su $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Znamo da je

$$x \leqslant y \text{ ili } y \leqslant x$$

pa je

$$x \leqslant_{\mathbb{Q}} y \text{ ili } y \leqslant_{\mathbb{Q}} x.$$

Zaključak: Relacija $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ je uređaj na $\mathbb{Q}$.

Neka su $x, y, z \in \mathbb{Q}$ takvi da je $x \leqslant_{\mathbb{Q}} y$.Tada je $x \leqslant y$ pa je

$$x + z \leqslant y + z.$$

Stoga je i

$$x +_{\mathbb{Q}} z \leqslant_{\mathbb{Q}} y +_{\mathbb{Q}} z.$$

Neka su $x, y, z \in \mathbb{Q}$ takvi da je

$$0 \leqslant_{\mathbb{Q}} x \text{ i} 0 \leqslant_{\mathbb{Q}} y.$$

Tada je

$$0 \leqslant x \text{ i } 0 \leqslant y$$

pa je $0 \leqslant x \cdot y$. Zaključujemo da je $0 \leqslant_{\mathbb{Q}} x \cdot_{\mathbb{Q}} y$.

Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

2.5 Minimum skupa

Definicija 2.5.1. *Neka je S podskup od $\mathbb{R}$ te neka je $s_0 \in S$. Kažemo da je s_0* ***minimum skupa S*** *ako je $s_0 \leqslant x$, za svaki $x \in S$.*

Uočimo sljedeće: ako su s_0 i s_1 minimumi skupa S onda je $s_0 = s_1$. Naime, imamo $s_0 \leqslant s_1$ jer je s_0 minimum od S te $s_1 \leqslant s_0$, jer je s_1 minimum od S. Dakle, minimum skupa S je, ako postoji, jedinstven te ga označavamo sa $\min S$.

Primjer 2.5.2. *Vrijedi da je 0 minimum skupa* $[0, \infty\rangle$.
S druge strane, skup $\langle 0, \infty\rangle$ *nema minimum tj. ne postoji x takav da je x minimum skupa* $\langle 0, \infty\rangle$. *Pretpostavimo suprotno, tj. da takav x postoji. Tada je* $x \in \langle 0, \infty\rangle$ *pa je* $0 < x$. *Iz propozicije 2.2.6 slijedi da postoji* $y \in \mathbb{R}$ *takav da je* $0 < y < x$. *Slijedi,* $y \in \langle 0, \infty\rangle$ *pa iz činjenice da je x minimum skupa* $\langle 0, \infty\rangle$ *slijedi da je* $x \leqslant y$. *Prema tome, skup* $\langle 0, \infty\rangle$ *nema minimum.*
Skup $\mathbb{R}$ *nema minimum. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji* $x \in \mathbb{R}$ *takav da je x minimum od* $\mathbb{R}$. *Iz* $0 < 1$ *slijedi* $-1 < 0$ *pa je* $x + (-1) < x$ *tj.* $x - 1 < x$ *što je u kontradikciji s činjenicom da je x minimum od* $\mathbb{R}$.

Teorem 2.5.3. *Svaki neprazan podskup od* $\mathbb{N}$ *ima minimum.*

Dokaz. Definirajmo

$$T = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ako je } S \subseteq \mathbb{N} \text{ takav da postoji } k \in S \text{ takav da je } k \leqslant n, \text{ onda } S \text{ ima minimum}\}.$$

Dokažimo da je $T = \mathbb{N}$.
Dokažimo prvo $1 \in T$.
Pretpostavimo da je $S \subseteq \mathbb{N}$ takav da postoji $k \in S$ sa svojstvom da je $k \leqslant 1$. Imamo $k \in \mathbb{N}$ pa je prema *propoziciji* 2.1.6, $1 \leqslant k$. Stoga je $k = 1$.
Dakle, $1 \in S$ pa zbog $S \subseteq \mathbb{N}$ i *propozicije* 2.1.6 slijedi da je 1 minimum skupa S.
Time smo dokazali da je $1 \in T$.

Pretpostavimo da je $n \in T$. Tvrdimo da je $n + 1 \in T$. Pretpostavimo da je $S \subseteq \mathbb{N}$ takav da postoji $k \in S$ sa svojstvom da je $k \leqslant n + 1$. Ako postoji $k' \in S$ takav da je $k' \leqslant n$, onda S ima minimum (jer je $n \in T$).

Pretpostavimo da ne postoji $k' \in S$ takav da je $k' \leqslant n$. Tada, prema *propoziciji* 1.3.5 (5) vrijedi

$$n < k' \text{ za svaki } k' \in S. \tag{2.1}$$

Posebno, $n < k$ pa iz *leme* 2.1.11 slijedi $n + 1 \leqslant k$. Znamo da je $k \leqslant n + 1$ pa je prema tome $k = n + 1$.

Dakle, $n + 1 \in S$.

Iz *leme* 2.1.11 i (2.1) slijedi da je $n + 1 \leqslant k'$ za svaki $k' \in S$.

Prema tome, $n + 1$ je minimum skupa S.

Dokazali smo da svaki podskup od $\mathbb{N}$ koji sadrži element manji ili jednak $n + 1$ ima minimum. Stoga je $n + 1 \in T$.

Dokazali smo sljedeće: $1 \in T$ te ako je $n \in T$ onda je $n + 1 \in T$. Iz *propozicije* 2.1.5 *(Princip indukcije)* slijedi da je $T = \mathbb{N}$.

Dokažimo sada tvrdnju teorema.
Neka je S neprazan podskup od $\mathbb{N}$. Odaberimo neki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $n \in \mathbb{N}$ pa je $n \in T$. To znači da svaki podskup od $\mathbb{N}$ koji sadrži element manji ili jednak n ima minimum. Skup S sadrži element manji ili jednak n (jer je $n \in S$), stoga S ima minimum.

$\square$

Poglavlje 3

Potpunost

3.1 Nepostojanje korijena iz 2 u $\mathbb{Q}$

Definicija 3.1.1. *Neka je $x \in \mathbb{Z}$. Kažemo da je x* ***paran broj*** *ako postoji $y \in \mathbb{Z}$ takav da je $x = 2 \cdot y$.*

Definicija 3.1.2. *Za $x \in \mathbb{Z}$ kažemo da je* ***neparan*** *broj ako x nije paran.*

Primjer 3.1.3. ***1 nije paran broj****.*

Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $y \in \mathbb{Z}$ takav da je $1 = 2 \cdot y$. Vrijedi $y \neq 0$ (jer bismo u suprotnom imali $1 = 0$). Pretpostavimo da je $y = -n$, za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $1 = 2 \cdot (-n) = -(2n)$. Dakle, $1 = -k$, gdje je $k \in \mathbb{N}$. Prema korolaru 2.1.7 vrijedi $0 < k$ pa je $-k < 0$ tj. $1 < 0$, što je nemoguće. Stoga je $y \in \mathbb{N}$. Prema propoziciji 2.1.6 vrijedi $1 \leqslant y$ pa iz propozicije 1.3.14 (1) slijedi

$$2 \cdot 1 \leqslant 2 \cdot y,$$

tj., $2 \leqslant 2 \cdot y$. Sada iz $1 < 2$ slijedi $1 < 2y$ što je u kontradikciji s činjenicom da je $1 = 2y$.

Zaključak: 1 nije paran broj.

Propozicija 3.1.4. *Neka su $x, y \in \mathbb{Z}$.*

1. *Ako su x, y parni, onda je $x + y$ paran.*
2. *Ako je x paran, onda je $x \cdot y$ paran.*
3. *Ako je x paran, onda je $-x$ paran.*

Dokaz. 1. Pretpostavimo da su x, y parni. Tada je $x = 2m$ i $y = 2n$ za neke $m, n \in \mathbb{Z}$. Slijedi

$$x + y = 2m + 2n = 2(m + n),$$

pa je očito $x + y$ paran.

Na sličan način dokazujemo tvrdnje 2. i 3.

$\square$

Propozicija 3.1.5. *Za svaki neparan broj x postoji* $m \in \mathbb{Z}$ *takav da je* $x = 2m + 1$.

Dokaz. Neka je

$$S = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ paran ili } x = 2m + 1, \text{ za neki } m \in \mathbb{Z}\}.$$

Imamo $1 \in S$ jer je $1 = 2 \cdot 0 + 1$. Pretpostavimo da je $x \in S$. Tada je x paran ili je $x = 2m+1$ za neki $m \in \mathbb{Z}$. Ako je x paran, onda je $x = 2n$ za neki $n \in \mathbb{Z}$ pa je $x + 1 = 2n + 1$ što očito povlači da je $x + 1 \in S$. Ako je $x = 2m + 1$ za neki $m \in \mathbb{Z}$ onda je:

$$x + 1 = 2m + 2 = 2(m + 1),$$

dakle $x + 1$ je paran broj pa je $x + 1 \in S$. Zaključak: vrijedi $S \subseteq \mathbb{N}$, $1 \in S$, te $x + 1 \in S$ za svaki $x \in S$. Stoga je $S = \mathbb{N}$. Stoga je svaki neparan broj iz $\mathbb{N}$ oblika $2m + 1$ za neki $m \in \mathbb{Z}$.

Pretpostavimo sada da je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $-n$ neparan broj. Iz *propozicije* 3.1.4 (3) lako zaključujemo da je n neparan broj. Prema dokazanom postoji $m \in \mathbb{Z}$ takav da je $n = 2m + 1$. Imamo

$$-n = -2m - 1 = -2m - 2 + 1 = 2(-m - 1) + 1.$$

Dakle, $-n = 2m' + 1$, gdje je $m' = -m - 1$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. $\square$

Propozicija 3.1.6. *Neka je* $m \in \mathbb{Z}$. *Tada je* $2m + 1$ *neparan broj.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $2m + 1$ paran broj. Tada postoji $n \in \mathbb{Z}$ takav da je $2m + 1 = 2n$. Slijedi $1 = 2n - 2m = 2(n - m)$, što povlači da je 1 paran broj. To je u kontradikciji s *primjerom* 3.1.3. Prema tome, $2m + 1$ je neparan broj. $\square$

Propozicija 3.1.7. *Neka su* x, y *neparni brojevi. Tada je* $x \cdot y$ *neparan broj.*

Dokaz. Imamo $x = 2m + 1$ i $y = 2n + 1$ za neke $m, n \in \mathbb{Z}$. Vrijedi:

$$x \cdot y = (2m+1)(2n+1) = (2m+1) \cdot 2n + (2m+1) \cdot 1 = 2m \cdot 2n + 2n + 2m + 1 = 2(m \cdot (2n) + n + m) + 1.$$

Dakle, postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $x \cdot y = 2k + 1$. Iz *propozicije* 3.1.6 slijedi da je $x \cdot y$ neparan broj. $\square$

Napomena 3.1.8. *Neka su* $k, n \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $n = 2k$. *Tada je* $k < n$. *Naime, iz* $1 < 2$ *i propozicije 1.3.14 (2) slijedi* $1 \cdot k < 2 \cdot k$ *tj.* $k < 2k$. *Dakle,* $k < n$.

Za $x \in \mathbb{R}$ definiramo $x^2 = x \cdot x$. Uočimo da za $x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0$ vrijedi

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}.$$

To slijedi iz *propozicije* 1.3.12 (6).

Teorem 3.1.9. *Ne postoji $x \in \mathbb{Q}$ takav da je $x^2 = 2$.*

Dokaz. Pretpostavimo da takav x postoji. Budući da je $x \in \mathbb{Q}$ postoje $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{N}$ takvi da je $x = \frac{p}{q}$. Definirajmo

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \text{postoji } m \in \mathbb{Z} \text{ takav da je } x = \frac{m}{n} \right\}.$$

Očito je $S \subseteq \mathbb{N}$. Nadalje, imamo da je $S \neq \emptyset$ jer je $q \in S$. Prema *teoremu* 2.5.3 skup S ima minimum.
Označimo

$$n_0 = \min S. \tag{3.1}$$

Imamo $n_0 \in S$ pa postoji $m_0 \in \mathbb{Z}$ takav da je

$$x = \frac{m_0}{n_0}.$$

Iz

$$x^2 = 2$$

slijedi

$$\left(\frac{m_0}{n_0}\right)^2 = 2.$$

Dakle,

$$\frac{(m_0)^2}{(n_0)^2} = 2$$

pa je

$${m_0}^2 = 2 \cdot {n_0}^2.$$

Iz ovoga slijedi da je ${m_0}^2$ paran broj. Kada bi m_0 bio neparan onda bi prema *propoziciji* 3.1.7 ${m_0}^2$ bio neparan broj. Prema tome, m_0 je paran broj pa postoji $m_1 \in \mathbb{Z}$ takav da je $m_0 = 2m_1$.

Sada iz ${m_0}^2 = 2{n_0}^2$ slijedi $(2m_1)^2 = (2n_0)^2$ pa je $2 \cdot 2 \cdot {m_1}^2 = 2{n_0}^2$. Množenjem ove jednakosti sa 2^{-1} dobivamo $2{m_1}^2 = {n_0}^2$.

Stoga je ${n_0}^2$ paran broj pa na sličan način kao prije slijedi da je n_0 paran broj.

Slijedi da postoji $n_1 \in \mathbb{Z}$ takav da je $n_0 = 2n_1$.

Kada bi vrijedilo $n_1 < 0$ onda bismo (zbog $0 < 2$) imali $2n_1 \leqslant 2 \cdot 0$ (zbog *propozicije* 1.3.14 (1)) tj. $n_0 \leqslant 0$, što je nemoguće jer je $n_0 \in \mathbb{N}$. Stoga je $0 < n_1$ pa je $n_1 \in \mathbb{N}$. Imamo

$$x = \frac{m_0}{n_0} = \frac{2m_1}{2n_1} = \frac{m_1}{n_1}. \tag{3.2}$$

Dakle, $x = \frac{m_1}{n_1}$. Iz (2.1) i napomene slijedi da je

$$n_1 < n_0. \tag{3.3}$$

Prema (3.2) je $n_1 \in S$. Iz (3.1) slijedi $n_0 \leqslant n_1$, no to je u kontradikciji sa (3.3). Zaključak: ne postoji $x \in \mathbb{Q}$ takav da je $x^2 = 2$. $\square$

3.2 Nepotpunost od $\mathbb{Q}$

Napomena 3.2.1. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Tada se lako vidi da vrijedi: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ i $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.*

Lema 3.2.2. *Neka su $x, r \in \mathbb{R}$ takvi da je $0 < x$ i $0 < r$. Tada postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < \varepsilon$ te takav da je $2\varepsilon x + \varepsilon^2 < r$.*

Dokaz. Iz $0 < x$ slijedi $0 < 2x$ pa je $0 < 2x + 1$. Iz *propozicije* 2.2.5 (1) slijedi da je

$$0 < (2x+1)^{-1}$$

pa je

$$0 < r \cdot (2x+1)^{-1}.$$

Iz *propozicije* 2.2.6 slijedi da postoji $z \in \mathbb{Z}$ takav da je

$$0 < z < r \cdot (2x+1)^{-1}. \tag{3.4}$$

Vrijedi $z \leqslant 1$ ili $1 < z$. Ako je $z \leqslant 1$ definiramo $\varepsilon = z$, a ako je $1 < z$ definiramo $\varepsilon = 1$. U svakom slučaju vrijedi $0 < \varepsilon$ te $\varepsilon \leqslant z$ i $\varepsilon \leqslant 1$. Iz (3.4) slijedi

$$\varepsilon < r \cdot (2x+1)^{-1}$$

pa iz *propozicije* 1.3.14 (2) slijedi:

$$\varepsilon \cdot (2x+1) < r. \tag{3.5}$$

Iz $\varepsilon \leqslant 1$ slijedi $2x + \varepsilon \leqslant 2x + 1$, pa je $\varepsilon \cdot (2x + \varepsilon) \leqslant \varepsilon(2x + 1)$. Iz ovoga i iz (3.5) slijedi:

$$\varepsilon \cdot (2x + \varepsilon) < r.$$

No, $\varepsilon \cdot (2x + \varepsilon) = 2\varepsilon x + \varepsilon^2$.

Time je tvrdnja leme dokazana. □

Propozicija 3.2.3. *Skup $\mathbb{N}$ nije odozgo omeđen.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada prema *propoziciji* 2.2.9 skup $\mathbb{N}$ ima supremum.

Označimo $s = \sup \mathbb{N}$.

Vrijedi $s - 1 < s$ pa $s - 1$ nije gornja međa skupa $\mathbb{N}$ (jer je s najmanja gornja međa), pa postoji $x \in \mathbb{N}$ takav da je $s - 1 < x$. Slijedi $s < x + 1$.

No, $x + 1 \in \mathbb{N}$ pa je prethodna nejednakost u kontradikciji s činjenicom da je s gornja međa skupa $\mathbb{N}$ (jer je supremum od $\mathbb{N}$).

Dakle, $\mathbb{N}$ nije odozgo omeđen skup. □

Korolar 3.2.4. *Za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x < n$.*

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Kada ne bi postojao $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x < n$, onda bi za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedilo $n \leqslant x$, što bi značilo da je x gornja međa skupa $\mathbb{N}$. No, to je nemoguće zbog prethodne propozicije. □

Propozicija 3.2.5. *Neka je $x \in \mathbb{R}$ takav da je* $0 < x$. *Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je*

$$\frac{1}{n} < x.$$

Dokaz. Prema prethodnom korolaru, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x^{-1} < n$.

Iz ovoga, zbog $0 < x$ imamo $x \cdot x^{-1} < xn$, tj. $1 < xn$. Sada zbog

$$0 < \frac{1}{n}$$

imamo

$$1 \cdot \frac{1}{n} < (x \cdot n) \cdot \frac{1}{n},$$

tj.

$$\frac{1}{n} < x.$$

□

Napomena 3.2.6. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$.*

1. *Pretpostavimo da je* $0 \leqslant a$ *i* $a \leqslant b$. *Tada je* $a^2 \leqslant b^2$.

   Naime, iz $a \leqslant b$ *i* $0 \leqslant a$ *slijedi* $a \cdot a \leqslant a \cdot b$, *tj.* $a^2 \leqslant a \cdot b$. *S druge strane, iz* $a \leqslant b$ *i* $0 \leqslant b$ *slijedi* $a \cdot b \leqslant b \cdot b$, *tj.* $a \cdot b \leqslant b^2$.

   Iz tranzitivnosti relacije $\leqslant$ *slijedi* $a^2 \leqslant b^2$.

2. *Pretpostavimo da je* $0 < a$ *i* $a < b$. *Tada na isti način kao u 1. dobivamo* $a^2 < b^2$.

Napomena 3.2.7. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeno polje te neka su* $a, b, c, d \in P$.

1. *Pretpostavimo da je* $a \leqslant b$ *i* $c \leqslant d$. *Tada je* $a + c \leqslant b + d$. *Naime, iz* $a \leqslant b$ *slijedi* $a + c \leqslant b + c$, *a iz* $c \leqslant d$ *slijedi* $b + c \leqslant b + d$ *pa zbog tranzitivnosti relacije* $\leqslant$ *slijedi* $a + c \leqslant b + d$.

2. *Pretpostavimo da je* $a < b$ *i* $c \leqslant d$. *Na sličan način vidimo da je* $a + c < b + d$.

3. *Neka je* $a \leqslant b$ *i* $c < d$. *Tada na isti način dobivamo* $a + c < b + d$.

Propozicija 3.2.8. *Neka je* $x \in \mathbb{Q}$ *takav da* $0 < x$ *i* $x^2 < 2$. *Tada postoji* $y \in \mathbb{Q}$ *takav da je* $x < y$ *i* $y^2 < 2$.

Dokaz. Definirajmo
$$r = 2 - x^2.$$
Iz $x^2 < 2$ slijedi $0 < r$. Prema *lemi* 3.2.2 postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}$ takav da je
$$0 < \varepsilon \text{ i } 2\varepsilon x + \varepsilon^2 < r.$$
Prema *propoziciji* 3.2.5 postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Označimo
$$\delta = \frac{1}{n}.$$
Imamo $0 < \delta$, $\delta < \varepsilon$ i $\delta \in \mathbb{Q}$.

Iz $\delta < \varepsilon$ slijedi $2\delta x < 2\varepsilon x$.

Nadalje, prema *napomeni* 3.2.6 (2) vrijedi
$$\delta^2 < \varepsilon^2.$$
Iz *napomene* 3.2.7 (2) slijedi i
$$2\delta x + \delta^2 < 2\varepsilon x + \varepsilon^2.$$
Stoga je $2\delta x + \delta^2 < r$. Slijedi da je
$$x^2 + 2\delta x + \delta^2 < x^2 + r,$$

tj.

$$(x+\delta)^2 < x^2 + r.$$

No, $x^2 + r = 2$, prema definiciji od r.

Dakle, $(x+\delta)^2 < 2$. Označimo $y = x + \delta$. Zbog $x \in \mathbb{Q}$ i $\delta \in \mathbb{Q}$ imamo $y \in \mathbb{Q}$. Nadalje, iz $0 < \delta$ slijedi $x < x + \delta$, tj. $x < y$.

Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Uočimo da skup $\{a, b\}$ ima minimum. Naime, taj minimum je a ako je $a \leqslant b$, a inače je jednak b.

Propozicija 3.2.9. *Neka je $x \in \mathbb{Q}$ takav da je $0 < x$ i $2 < x^2$. Tada postoji $y \in \mathbb{Q}$ takav da je $0 < y$, $y < x$ i $2 < y^2$.*

Dokaz. Iz $2 < x^2$ slijedi $0 < x^2 - 2$. Definirajmo

$$r = x^2 - 2. \tag{3.6}$$

Imamo dakle, $0 < r$, pa prema *lemi* 3.2.2 postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}$ takav da je

$$0 < \varepsilon \text{ i } \varepsilon x + \varepsilon^2 < r.$$

Uočimo da je $0 < \min\{\varepsilon, x\}$.

Prema *propoziciji* 3.2.5 postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\frac{1}{n} < \min\{\varepsilon, x\}.$$

Definirajmo $\delta = \frac{1}{n}$. Imamo

$$\delta < \min\{\varepsilon, x\}, \tag{3.7}$$

a očito je $0 < \delta$ i $\delta \in \mathbb{Q}$.

Definirajmo $y = x - \delta$. Iz $0 < \delta$ slijedi $-\delta < 0$, što povlači $x - \delta < x$ tj. $y < x$.

Nadalje, očito je $y \in \mathbb{Q}$. Iz (3.7) slijedi $\delta < x$ pa je $0 < x - \delta$ tj. $0 < y$.

Iz (3.7) slijedi $\delta < \varepsilon$ pa iz *napomene* 3.2.6 (2) slijedi

$$\delta^2 < \varepsilon^2. \tag{3.8}$$

Nadalje, iz $\delta < \varepsilon$ i *propozicije* 1.3.14 (2) slijedi $2\delta x < 2\varepsilon x$. Iz ovoga i (3.8) te *napomene* 3.2.7 (2) slijedi

$$2\delta x + \delta^2 < 2\varepsilon x + \varepsilon^2. \tag{3.9}$$

Vrijedi $0 < \delta^2$ pa je $-\delta^2 < 0$, što povlači $-\delta^2 < \delta^2$. Slijedi $2\delta x - \delta^2 < 2\delta x + \delta^2$.

Iz ovoga i (3.9) slijedi

$$2\delta x - \delta^2 < 2\varepsilon x + \varepsilon^2.$$

Sada iz činjenice da je $2\varepsilon x + \varepsilon^2 < r$ imamo $2\delta x - \delta^2 < r$, te iz (3.6) slijedi $2\delta x - \delta^2 < x^2 - 2$.

Slijedi,

$$2 < x^2 - 2\delta x + \delta^2,$$

tj.

$$2 < (x - \delta)^2,$$

dakle,

$$2 < y^2.$$

□

Teorem 3.2.10. $(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, \leqslant_{\mathbb{Q}})$ *nije potpuno uređeno polje.*

Dokaz. Prema *propoziciji* 2.4.3 znamo da je $(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, \leqslant_{\mathbb{Q}})$ uređeno polje.

Neka je $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \text{ } i \text{ } x^2 < 2\}$ te $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \text{ } i \text{ } 2 < x^2\}$.

Očito je $1 \in A$, dakle $A \neq \emptyset$. Iz $1 < 2$ slijedi

$$2 \cdot 1 < 2 \cdot 2,$$

tj.

$$2 < 2^2.$$

Stoga je $2 \in B$ pa je $B \neq \emptyset$.

Neka su $x \in A$ i $y \in B$.

Pretpostavimo da je $y < x$. Imamo $0 < y < x$ pa iz *napomene* 3.2.6 (2) slijedi $y^2 < x^2$. Imamo $2 < y^2$ i $x^2 < 2$ pa slijedi $2 < 2$ što je nemoguće. Prema tome, ne vrijedi $y < x$ i stoga je $x \leqslant y$ tj. $x \leqslant_{\mathbb{Q}} y$.

Pretpostavimo da je $(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, \leqslant_{\mathbb{Q}})$ potpuno uređeno polje. Tada postoji $z \in \mathbb{Q}$ takav da je

$$x \leqslant_{\mathbb{Q}} z \text{ i } z \leqslant_{\mathbb{Q}} y, \text{ za svaki } x \in A \text{ i za svaki } y \in B. \tag{3.10}$$

Iz *teorema* 3.1.9 slijedi da je $z^2 \neq 2$. Stoga je $z^2 < 2$ ili $2 < z^2$. Znamo $1 \in A$ pa (3.10) povlači $1 \leqslant_{\mathbb{Q}} z$ pa je $1 \leqslant z$ i posebno $0 < z$.

Pogledajmo dva slučaja:

1. $z^2 < 2$

   Iz *propozicije* 3.2.8 slijedi da postoji $x \in \mathbb{Q}$ takav da je $z < x$ i $x^2 < 2$. Iz $0 < z$ slijedi $0 < x$. Stoga je $x \in A$. Iz (3.10) slijedi $x \leqslant_{\mathbb{Q}} z$ tj. $x \leqslant z$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $z < x$.

2. $2 < z^2$

   Iz *propozicije* 3.2.9 slijedi da postoji $y \in \mathbb{Q}$ takav da je $0 < y$, $y < z$ i $2 < y^2$. Slijedi da je $y \in B$. Stoga, prema (3.10) slijedi $z \leqslant y$. No, ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $y < z$.

U oba slučaja smo došli do kontradikcije.
Zaključak: $(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, \leqslant_{\mathbb{Q}})$ nije potpuno uređeno polje. $\square$

3.3 Egzistencija korijena iz 2 u $\mathbb{R}$

Propozicija 3.3.1. *Neka je $x \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < x$ i $x^2 < 2$. Tada postoji $y \in \mathbb{R}$ takav da je $x < y$ i $y^2 < 2$.*

Dokaz. Definirajmo
$$r = 2 - x^2.$$
Tada je $0 < r$. Prema *lemi* 3.2.2 postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}$ takav da je
$$0 < \varepsilon \text{ i } 2\varepsilon x + \varepsilon^2 < r.$$

Dakle,
$$2\varepsilon x + \varepsilon^2 < 2 - x^2$$
pa je
$$x^2 + 2\varepsilon x + \varepsilon^2 < 2,$$
tj.
$$(x + \varepsilon)^2 < 2.$$

Očito je $x < x + \varepsilon$ pa za traženi y možemo uzeti $y = x + \varepsilon$. $\square$

Propozicija 3.3.2. *Neka je $x \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < x$ i $2 < x^2$. Tada postoji $y \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < y$, $y < x$ i $2 < y^2$.*

Dokaz. Neka je $r = x^2 - 2$. Tada je $0 < r$ pa prema *lemi* 3.2.2 postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}$ takav da je
$$0 < \varepsilon \text{ i } 2\varepsilon x + \varepsilon^2 < r.$$
Očito je
$$0 < \min\{\varepsilon, x\}. \tag{3.11}$$
Prema *propoziciji* 2.2.6 postoji $\delta \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < \delta < \min\{\varepsilon, x\}$. Imamo $0 < \delta < \varepsilon$ pa iz *napomene* (3.2.6) (2) i iz *propozicije* 1.3.14 te iz *napomene* (3.2.7) (2) slijedi
$$2\delta x + \delta^2 < 2\varepsilon x + \varepsilon^2.$$

Stoga je $2\delta x + \delta^2 < r$.
Na isti način kao u dokazu *propozicije* 3.2.9 dobivamo
$$2\delta x - \delta^2 < 2\delta x + \delta^2.$$

Stoga je

$$2\delta x - \delta^2 < r,$$

tj.

$$2\delta x - \delta^2 < x^2 - 2.$$

Slijedi

$$2 < x^2 - 2\delta x + \delta^2,$$

dakle,

$$2 < (x - \delta)^2.$$

Iz $0 < \delta < \min\{\varepsilon, x\}$ slijedi $\delta < x$ pa je $0 < x - \delta$. Stoga za traženi y možemo uzeti $x - \delta$ (očito $y < x$). □

Teorem 3.3.3. *Postoji jedinstveni* $x \in \mathbb{R}$ *takav da je* $0 < x$ *i* $x^2 = 2$.

Dokaz. Pretpostavimo da su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $0 < x$, $0 < y$, $x \neq y$, $x^2 = 2$ i $y^2 = 2$.

Tada je $x < y$ ili $y < x$ pa iz *napomene* 3.2.6 (2) slijedi $x^2 < y^2$ ili $y^2 < x^2$. U oba slučaja dobivamo $2 < 2$, što je nemoguće. Prema tome, ako postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < x$ i $x^2 = 2$, onda je takav x jedinstven. Definirajmo skupove

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \text{ i } x^2 < 2\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \text{ i } 2 < x^2\}.$$

Kao u dokazu *teorema* 3.2.10 vidimo da je $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$ te da za svaki $x \in A$ i svaki $y \in B$ vrijedi $x \leqslant y$. Budući da je $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ potpuno uređeno polje, postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leqslant z \leqslant y$ za svaki $x \in A$ i za svaki $y \in B$.

Odaberimo neki $x \in A$. Imamo $0 < x$ i $x \leqslant z$ pa je $0 < z$. Tvrdimo da je $z^2 = 2$.

Pretpostavimo suprotno. Tada je $z^2 < 2$ ili $2 < z^2$.

Pretpostavimo da je $z^2 < 2$. Prema *propoziciji* 3.3.1 postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $z < x$ i $x^2 < 2$. Tada je $x \in A$ pa je $x \leqslant z$ što je nemoguće zbog $z < x$.

Pretpostavimo da je $2 < z^2$. Prema *propoziciji* 3.3.2 postoji $y \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < y$, $y < z$ i $2 < y^2$. Stoga je $y \in B$ pa je $z \leqslant y$ što je nemoguće zbog $y < z$.

Zaključujemo da je $z^2 = 2$ i time je tvrdnja teorema dokazana. □

3.4 Nizovi i konvergencija

Definicija 3.4.1. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeno polje. Za* $x \in P$ *definiramo*

$$|x| = \begin{cases} x & , \textit{ako je } 0 \leqslant x \\ -x & , \textit{inače.} \end{cases}$$

Propozicija 3.4.2. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeno polje. Neka je* $x \in P$. *Tada vrijedi:*

1. $0 \leqslant |x|$
2. $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $x \leqslant |x|$
4. $|-x| = |x|$.

Dokaz.

1. Ako je $0 \leqslant x$, onda je $|x| = x$ pa je očito $0 \leqslant |x|$. Inače imamo $x < 0$ pa je $0 < -x$, dakle $0 < |x|$.
2. Ako je $|x| = 0$ onda je $x = 0$ ili $-x = 0$ pa je $x = 0$. Obratno, ako je $x = 0$, onda je očito $|x| = 0$.
3. Ako je $0 \leqslant x$ onda je $x = |x|$ pa je $x \leqslant |x|$. Inače, imamo $x < 0$ a prema (1.) je $0 \leqslant |x|$. Stoga je $x < |x|$.
4. Pretpostavimo da je $0 < x$. Tada je $|x| = x$. Imamo $-x < 0$ pa je prema definiciji

   $$|-x| = -(-x), \text{tj.} |-x| = x.$$

   Dakle, $|-x| = |x|$.

   Ako je $x = 0$, onda je očito $|-x| = |x|$. Pretpostavimo da je $x < 0$. Imamo $0 < -x$ pa je $|-x| = -x$.

   Dakle, $|x| = -x = |-x|$.

   Time je tvrdnja propozicije dokazana.

□

Napomena 3.4.3. *Neka je* $(P, +, \cdot)$ *polje. Neka su* $x, y \in P$. *Tada se lako vidi da je*

$$-(x + y) = (-x) + (-y).$$

Propozicija 3.4.4. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeno polje. Neka su* $x, y \in P$. *Tada je*

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Dokaz. Prema prethodnoj propoziciji vrijedi $x \leqslant |x|$ i $y \leqslant |y|$ pa je, prema *napomeni* 3.2.7

$$x + y \leqslant |x| + |y|. \tag{3.12}$$

Nadalje, imamo $-x \leqslant |-x| = |x|$, dakle $-x \leqslant |x|$.

Isto tako, $-y \leqslant |y|$ pa je $(-x) + (-y) \leqslant |x| + |y|$. Iz *napomene* 3.4.3 slijedi

$$-(x + y) \leqslant |x| + |y|. \tag{3.13}$$

Znamo da je $|x + y| = x + y$ ili $|x + y| = -(x + y)$ pa iz 3.12 i 3.13 slijedi

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

□

Definicija 3.4.5. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeno polje. Za* $a, b \in P$ *definiramo*

$$\langle a, b\rangle = \{x \in P \mid a < x \text{ i } x < b\}.$$

Propozicija 3.4.6. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeno polje. Neka su* $a, b, r \in P$. *Tada je*

$$|b - a| < r \Leftrightarrow b \in \langle a - r, a + r\rangle.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $|b - a| < r$. Imamo $b - a \leqslant |b - a|$ pa je

$$b - a < r. \tag{3.14}$$

Nadalje,

$$-(b - a) \leqslant | - (b - a)| = |b - a| < r.$$

Dakle,

$$-(b - a) < r.$$

No,

$$-(b - a) = -(b + (-a)) = -b + (-(-a)) = -b + a = a - b.$$

Dakle, $a - b < r$.

Stoga je $a - r < b$.

Iz 3.14 slijedi

$$b < a + r.$$

Stoga je $b \in \langle a - r, a + r\rangle$.

Obratno, pretpostavimo da je $b \in \langle a - r, a + r\rangle$. Tada je $a - r < b$ i $b < a + r$, pa je

$$a - b < r \text{ i } b - a < r.$$

Dakle, $-(b - a) < r$ i $b - a < r$. Stoga je $|b - a| < r$. □

Definicija 3.4.7. *Neka je* S *skup te neka je* $x : \mathbb{N} \to S$ *funkcija. Tada za* x *kažemo da je* ***niz*** *u skupu* S. *Za* $n \in \mathbb{N}$ *pišemo* x_n *umjesto* $x(n)$. *Funkciju* x *označavamo i sa* (x_n) *ili* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definicija 3.4.8. *Neka je* $(P,+,\cdot,\leqslant)$ *uređeno polje i neka je* (x_n) *niz u* P *te neka je* $a \in P$. *Kažemo da niz* (x_n) *teži ili* ***konvergira*** *prema* a *u* $(P,+,\cdot,\leqslant)$ *i pišemo* $x_n \to a$ *ako za svaki* $\varepsilon \in P$ *takav da je* $0 < \varepsilon$ *postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *takav da je* $n_0 \leqslant n$ *vrijedi*

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Napomena 3.4.9. *Neka je* $(P,+,\cdot,\leqslant)$ *uređeno polje i* (x_n) *niz u* P *te neka je* $a \in P$. *Tada* (x_n) *teži u* a *u* $(P,+,\cdot,\leqslant)$ *ako i samo ako za svaki* $\varepsilon \in P$, *takav da je* $0 < \varepsilon$, *postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da za svaki* $n \in \mathbb{N}$, *takav da je* $n_0 \leqslant n$, *vrijedi* $x_n \in \langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle$.

Definicija 3.4.10. *Neka je* $(P,+,\cdot,\leqslant)$ *uređeno polje. Neka je* (x_n) *niz u* P. *Kažemo da je* (x_n) ***konvergentan niz*** *u* $(P,+,\cdot,\leqslant)$ *ako postoji* $a \in P$ *takav da* $(x_n) \longrightarrow a$ *u* $(P,+,\cdot,\leqslant)$.

Definicija 3.4.11. *Neka je* $(P,+,\cdot,\leqslant)$ *uređeno polje te neka je* $S \subseteq P$ *i* $M \in P$. *Kažemo da je* M ***gornja međa*** *od* S *u* $(P,+,\cdot,\leqslant)$ *ako je* $x \leqslant M$, *za svaki* $x \in S$. *Za skup* S *kažemo da je* ***odozgo omeđen*** *u* $(P,+,\cdot,\leqslant)$ *ako* S *ima gornju među u* $(P,+,\cdot,\leqslant)$.

Analogno definiramo da je m ***donja međa*** *od* S *u* $(P,+,\cdot,\leqslant)$ *te da je* S ***odozdo omeđen*** *u* $(P,+,\cdot,\leqslant)$.

Kažemo da je S ***omeđen skup*** *u* $(P,+,\cdot,\leqslant)$ *ako je* S *omeđen odozgo i odozdo u polju* $(P,+,\cdot,\leqslant)$.

Definicija 3.4.12. *Neka je* $(P,+,\cdot,\leqslant)$ *uređeno polje, te neka je* (x_n) *niz u* P. *Kažemo da je* (x_n) ***omeđen niz*** *u* $(P,+,\cdot,\leqslant)$ *ako je skup* $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *omeđen u* $(P,+,\cdot,\leqslant)$.

Definicija 3.4.13. *Neka je* $(P,+,\cdot,\leqslant)$ *uređeno polje te* (x_n) *niz u* P. *Kažemo da je* (x_n) ***rastući niz*** *u* $(P,+,\cdot,\leqslant)$ *ako je* $x_n \leqslant x_{n+1}$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$.

Propozicija 3.4.14. *Neka je* $(P,+,\cdot,\leqslant)$ *uređeno polje te neka je* (x_n) *rastući niz u* $(P,+,\cdot,\leqslant)$. *Tada za sve* $m,n \in \mathbb{N}$, *takvi da je* $n \leqslant m$, *vrijedi* $x_n \leqslant x_m$.

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je $x_n \leqslant x_{n+k}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Neka je $S = \{k \in \mathbb{N} \mid x_n \leqslant x_{n+k}\}$.

Očito je $1 \in S$. Pretpostavimo da je $k \in S$. Tada je

$$x_n \leqslant x_{n+k}.$$

Znamo da je

$$x_{n+k} \leqslant x_{(n+k)+1},$$

pa iz tranzitivnosti relacije $\leqslant$ slijedi da je

$$x_n \leqslant x_{n+(k+1)}.$$

Dakle, $k+1 \in S$.

Iz *propozicije* 2.1.5 *(PRINCIP INDUKCIJE)* slijedi da je

$$S = \mathbb{N}.$$

Prema tome, za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x_n \leqslant x_{n+k}.$$

Pretpostavimo da je $m \in \mathbb{N}$ takav da je $n \leqslant m$. Tvrdimo da je $x_n \leqslant x_m$. To je jasno ako je $n = m$.

Pretpostavimo da je $n < m$. Iz *propozicije* 2.1.12 slijedi da je $m - n \in \mathbb{N}$. Označimo $k = m - n$. Imamo $k \in \mathbb{N}$ i $m = n + k$. Prema dokazanom vrijedi $x_n \leqslant x_{n+k}$, tj. $x_n \leqslant x_m$.

Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Teorem 3.4.15. *Neka je* (x_n) *rastući niz u* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$. *Pretpostavimo da je a supremum skupa* $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. *Tada* $x_n \longrightarrow a$ *u* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < \varepsilon$.

Tvrdimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a - \varepsilon < x_{n_0}.$$

U suprotnom bi za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedilo da je

$$x_n \leqslant a - \varepsilon,$$

što bi značilo da je $a - \varepsilon$ gornja međa skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

To bi, prema definiciji supremuma, povlačilo da je

$$a \leqslant a - \varepsilon,$$

tj. $\varepsilon \leqslant 0$, što je nemoguće.

Dakle, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a - \varepsilon < x_{n_0}$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 \leqslant n$. Iz *propozicije* 3.4.14 slijedi da je $x_{n_0} \leqslant x_n$.

Iz ovoga i $a - \varepsilon < x_{n_0}$ slijedi da je $a - \varepsilon < x_n$.

Vrijedi $x_n \leqslant a$ (prema definiciji supremuma), a očito je $a < a + \varepsilon$. Stoga je

$$x_n < a + \varepsilon.$$

Prema tome, $x_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 \leqslant n$.

Zaključak: $x_n \longrightarrow a$ u $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$. □

Korolar 3.4.16. *Neka je* (x_n) *omeđen i rastući niz u* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$. *Tada je* (x_n) *konvergentan niz u* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$.

Dokaz. Budući da je (x_n) omeđen niz u $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$, skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je omeđen u $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$.

Prema *propoziciji* 2.2.9 postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je a supremum skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Iz prethodnog teorema slijedi da $x_n \longrightarrow a$.

Dakle, (x_n) je konvergentan u $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$. □

Bibliografija

[1] S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[2] S. Mardešić, *Matematička analiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

Sažetak

Ovaj diplomski rad podijelili smo na tri veća poglavlja u kojima smo promatrali neke elementarne aspekte potpunosti.

Prvo poglavlje sadrži definicije osnovnih definicija, kao što su binarna operacija, binarna relacija, polje i uređaj na skupu. Na kraju prvog pogljavlja proučili smo svojstva uređenog polja.

U drugom poglavlju fiksirali smo jedno potpuno uređeno polje te u njemu konstruirali skupove $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$. Proučili smo svojstva tih skupova a ujedno i omeđenost.

U trećem poglavlju dokazali smo da ne postoji $\sqrt{2}$ u $\mathbb{Q}$ a zatim smo, koristeći taj rezultat, dokazali da $\mathbb{Q}$ nije potpuno uređeno polje.

Također smo pokazali da postoji $\sqrt{2}$ u $\mathbb{R}$. Na kraju smo promatrali nizove i konvergenciju nizova u uređenim poljima.

Summary

This graduate thesis is divided into three chapters through which we shown some elementary aspects of completeness.

First chapter contains the basic definitions, such as binary operation, binary relation, field and order on a set. At the end of first chapter we studied some properties of an ordered field.

In second chapter we fixed one complete ordered field and we constructed sets $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. We studied properties of those sets and at the same time we studied bounded sets.

In third chapter we proved that there is no $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}$ and then, using that result, we proved that $\mathbb{Q}$ is not a complete ordered field.

We also showed that there is $\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$. At the end we studied a sequence and convergence of a sequence in an ordered field.

Životopis

Rođena sam 4.2.1997. godine u Dubrovniku. Školovanje sam započela 2003. godine u Osnovnoj školi Ivana Gundulića u Dubrovniku te nastavljam školovanje u Gimnaziji Dubrovnik. Nakon završenog općeg programa gimnazije 2015. godine, upisujem preddiplomski studij Matematike (nastavnički smjer) Prirodoslovno Matematičkog fakulteta u Zagrebu. Preddiplomski studij završila sam 2018. godine čime sam postala prvostupnica edukacije matematike (univ.bacc.educ.math). Iste godine nastavljam školovanje na diplomskom studiju matematike (nastavnički smjer).