Neeuklidske metričke ravnine

Klokoč, Matea

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Matea Klokoč

NEEUKLIDSKE METRIČKE RAVNINE

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, veljača, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Na ovom mjestu želim izraziti par riječi zahvale ljudima koji su mi uvelike pomogli da danas budem tu gdje jesam.
Ponajprije, najveće hvala mojim roditeljima koji su mi omogućili studiranje u Zagrebu, što su me bodrili i podržavali. Hvala vam na bezuvjetnoj ljubavi i razumijevanju i što ste vjerovali u mene do samog kraja. Bez vas, sve ovo što sam dosad postigla, ne bi bilo moguće.
Hvala mojoj sestri koja se sa mnom radovala lijepim trenucima i tugovala u onim manje lijepim. Hvala na podršci, utjesi, savjetima i svakoj riječi motivacije. Hvala ti što si mi pomogla uvidjeti da neke situacije nisu toliko loše koliko izgledaju.
Posebno hvala mom dečku Vlahu koji je vjerovao u mene čak i kad sama nisam. Hvala za podršku i ljubav bez koje nijedan moj uspjeh pa tako ni ovaj, ne bi bio moguć niti potpun. Hvala na svakoj motivaciji i strpljenju kad sam bila negativna i za svaki izmamljeni osmijeh u teškim trenucima. Hvala ti što, iako si većinu vremena bio daleko od mene, uvijek bio tu.
Najiskrenije zahvale idu mojoj kolegici i najboljoj prijateljici Ivi koja je prolazila isto što i ja, bila velika podrška, rame za plakanje, vjerni suputnik u učenju, a istovremeno i motivacija. Hvala ti na svim divnim trenucima kojima si uljepšala ovo razdoblje mog života i time obogatila moje uspomene na studiranje.
I za kraj, veliko hvala mom mentoru, profesoru Zvonku Iljazoviću koji mi je omogućio izradu ovog rada pod svojim vodstvom i time zaokružio moje školovanje na matematičkom fakultetu. Hvala Vam na posvećenom vremenu i znanju, nesebičnoj pomoći, brojnim savjetima, dostupnosti i povrh svega, korektnosti, razumijevanju i odnosu prema studentima.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu ćemo proučavati metričke ravnine i dati neke primjere metričkih ravnina. U prvom poglavlju ćemo prvo uvesti pojam pravca, a zatim ćemo proučavati segment na pravcu. Nakon toga ćemo proučavati euklidske pravce i uređene euklidske pravce te dokazati da je $\mathbb{R}^2$ zajedno sa skupom svih uređenih euklidskih pravaca, prostor pravaca. Zatim ćemo definirati pojam ravnine te dokazati da je $\mathbb{R}^2$ zajedno sa skupom svih uređenih euklidskih pravaca, ravnina.
Kroz drugo poglavlje ćemo definirati metriku te ćemo nastaviti s definicijom polupravca. Nakon što definiramo metričku ravninu, proučavat ćemo euklidsku metriku na $\mathbb{R}^2$ te definirati euklidsku metričku ravninu. Naposljetku ćemo dati primjere nekih neeuklidskih metričkih ravnina.

Poglavlje 1

Prostori pravaca i ravnine

1.1 Pravac

Definicija 1.1.1. *Neka je M skup. Za podskup od $M \times M$ kažemo da je relacija na M. Ako je R relacija na skupu M, dakle $R \subseteq M \times M$, onda za $x, y \in M$ pišemo $x\,R\,y$ ako je uređeni par (x, y) element od R.*

Definicija 1.1.2. *Neka je R relacija na skupu M. Kažemo da je R* ***refleksivna*** *relacija na M ako za svaki $x \in M$ vrijedi $x\,R\,x$.*

Definicija 1.1.3. *Za relaciju R kažemo da je* ***antisimetrična*** *na skupu M ako za sve $x, y \in M$ vrijedi:*

$$x\,R\,y \;\text{ i }\; y\,R\,x \;\Rightarrow x = y.$$

Definicija 1.1.4. *Za relaciju R kažemo da je* ***tranzitivna*** *na skupu M ako za sve $x, y, z \in M$ vrijedi:*

$$x\,R\,y \;\text{ i }\; y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z.$$

Definicija 1.1.5. *Neka je M skup te neka je R relacija na M. Kažemo da je R* ***uređaj*** *na M ako je R refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija na M te ako za sve $x, y \in M$ vrijedi $x\,R\,y$ ili $y\,R\,x$.*

Propozicija 1.1.6. *Neka je R uređaj na skupu M. Neka je $S = \{(x, y) \mid \; x, y \in M, \; (y, x) \in R\}$. Tada je S uređaj na M.*

Dokaz. Neka je $x \in M$.
Tada je $(x, x) \in R$ jer je R refleksivna relacija na M pa slijedi da je $(x, x) \in S$. Dakle, S je refleksivna relacija na M.
Pretpostavimo da su $x, y \in M$ takvi da je $x\,S\,y$ i $y\,S\,x$. Slijedi $(x, y) \in S$ i $(y, x) \in S$ pa iz

definicije od S slijedi $(y, x) \in R$ i $(x, y) \in R$, tj. $y \, R \, x$ i $x \, R \, y$. Budući da je R antisimetrična relacija vrijedi $x = y$. Time smo pokazali da je S antisimetrična relacija.
Pretpostavimo da su $x, y, z \in M$ takvi da je $x \, S \, y$ i $y \, S \, z$. Slijedi $(x, y) \in S$ i $(y, z) \in S$ pa je $(y, x) \in R$ i $(z, y) \in R$, tj. $y \, R \, x$ i $z \, R \, y$. Budući da je R tranzitivna relacija vrijedi $z \, R \, x$, tj. $(z, x) \in R$. Stoga je $(x, z) \in S$, odnosno $x \, S \, z$. Prema tome, S je tranzitivna relacija na M.
Neka su $x, y \in M$. Budući da je R uređaj na M vrijedi $(x, y) \in R$ ili $(y, x) \in R$. Slijedi $(y, x) \in S$ ili $(x, y) \in S$, odnosno $y \, S \, x$ ili $x \, S \, y$.
Time smo dokazali da je S uređaj na M. $\square$

Neka su M, R i S kao u propoziciji 1.1.6. Tada za S kažemo da je uređaj **suprotan** uređaju R i označavamo ga sa R^{-1}. Uočimo da je $(R^{-1})^{-1} = R$, tj. vrijedi sljedeće:
Ako je S uređaj suprotan uređaju R, onda je R uređaj suprotan uređaju S.

Definicija 1.1.7. *Neka je M skup koji ima bar dva elementa, neka je ρ uređaj na M te neka je σ uređaj suprotan uređaju ρ. Tada za uređeni par $(M, \{\rho, \sigma\})$ kažemo da je* ***pravac.***

Propozicija 1.1.8. *Neka je $(M, \{\rho, \sigma\})$ pravac te neka su $a, b \in M$ takvi da je $a \neq b$. Tada vrijedi ili $a \, \rho \, b$ ili $a \, \sigma \, b$.*

Dokaz. Budući da je ρ uređaj vrijedi $a \, \rho \, b$ ili $b \, \rho \, a$.

1° $a \, \rho \, b$
Tvrdimo da ne vrijedi $a \, \sigma \, b$. Pretpostavimo suprotno. Iz $a \, \sigma \, b$ slijedi $b \, \rho \, a$ pa iz antisimetričnosti relacije ρ slijedi $a = b$ što je u kontradikciji s pretpostavkom propozicije.

2° $b \, \rho \, a$
Kada bi vrijedilo $b \, \sigma \, a$, onda bismo kao u prethodnom slučaju dobili $a = b$ što je nemoguće. Prema tome ne vrijedi $b \, \sigma \, a$.

$\square$

1.2 Segment na pravcu

Definicija 1.2.1. *Neka je p pravac, $p = (M, \{\rho, \sigma\})$ te neka su $a, b \in M$. Definiramo skup $\overline{ab}^p$ na sljedeći način.*

Ako je $a \neq b$, tada postoji jedinstveni element $\leq$ od $\{\rho, \sigma\}$ takav da je $a \leqslant b$ te definiramo

$$\overline{ab}^p = \{x \in M \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

(pod $a \leqslant x \leqslant b$ podrazumijevamo $a \leqslant x$ i $x \leqslant b$).

Ako je $a = b$, onda definiramo

$$\overline{aa}^p = \{a\}.$$

*Za $\overline{ab}^p$ kažemo da je **segment (dužina)** na pravcu p određen točkama a i b.*

Uočimo sljedeće:
Ako je p pravac, $p = (M, \{\rho, \sigma\})$ te ako su $a, b \in M$ i $\leqslant \in \{\rho, \sigma\}$ takvi da je $a \leqslant b$, onda je

$$\overline{ab}^p = \{x \in M \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Naime, ovo je očito ako je $a \neq b$, a ako je $a = b$ onda imamo

$$\{x \in M \mid a \leqslant x \leqslant b\} = \{x \in M \mid a \leqslant x \leqslant a\} = \{a\}$$

zbog antisimetričnosti i refleksivnosti relacije $\leqslant$.

Propozicija 1.2.2. *Neka je p pravac, $p = (M, u)$ te neka su $a, b \in M$. Tada je $\overline{ab}^p = \overline{ba}^p$.*

Dokaz. Tvrdnja je očita ako je $a = b$. Pretpostavimo da je $a \neq b$.
Neka je $\rho \in u$ takav da je $a\, \rho\, b$. Tada je

$$\overline{ab}^p = \{x \in M \mid a\, \rho\, x \;\; i \;\; x\, \rho\, b\}. \tag{1.1}$$

Neka je σ uređaj suprotan uređaju ρ. Vrijedi $\sigma \in u$ i $b\, \sigma\, a$. Stoga je

$$\overline{ba}^p = \{x \in M \mid b\, \sigma\, x \;\; i \;\; x\, \sigma\, a\}. \tag{1.2}$$

Iz (1.1) i (1.2) očito slijedi $\overline{ab}^p = \overline{ba}^p$. □

Propozicija 1.2.3. *Neka je p pravac, $p = (M, u)$ te neka su $a, b, c, d \in M$ takvi da je $\overline{ab}^p = \overline{cd}^p$. Tada je $\{a, b\} = \{c, d\}$.*

Dokaz. Neka je $\leq \in u$ takav da je $a \leqslant b$. Tada je

$$\overline{ab}^p = \{x \in M \mid a \leqslant x \leqslant b\}. \tag{1.3}$$

Budući da je $\leqslant$ uređaj, vrijedi $c \leqslant d$ ili $d \leqslant c$.

1° $c \leqslant d$
Tada je

$$\overline{cd}^p = \{x \in M \mid c \leqslant x \leqslant d\}. \tag{1.4}$$

Očito je $a \in \overline{ab}^p$ pa iz $\overline{ab}^p = \overline{cd}^p$ slijedi $a \in \overline{cd}^p$ pa (1.4) povlači $c \leqslant a$. S druge strane, iz $c \in \overline{cd}^p$ slijedi $c \in \overline{ab}^p$ pa (1.3) povlači $a \leqslant c$. Zbog antisimetričnosti relacije $\leqslant$, vrijedi $a = c$. Analogno dobivamo da je $b = d$. Stoga je $\{a, b\} = \{c, d\}$.

2° $d \leqslant c$
Iz propozicije 1.2.2 slijedi $\overline{cd}^p = \overline{dc}^p$ pa je $\overline{ab}^p = \overline{dc}^p$. Analogno kao u 1° dobivamo $a = d$ i $b = c$ pa je $\{a, b\} = \{c, d\}$.

□

1.3 Prostor pravaca

Definicija 1.3.1. *Neka je p pravac, $p = (M, u)$. Za skup M kažemo da je* ***nosač*** *pravca p i označavamo ga sa $\hat{p}$.*

Uočimo, ako je p pravac i $a, b \in \hat{p}$ onda iz definicije od $\overline{ab}^p$ direktno slijedi $\overline{ab}^p \subseteq \hat{p}$.

Definicija 1.3.2. *Neka je X skup te neka je $\mathcal{P}$ neprazan skup pravaca takav da za svaki $p \in \mathcal{P}$ vrijedi $\hat{p} \subseteq X$. Nadalje, pretpostavimo da vrijedi sljedeće:*

1. *Za sve $a, b \in X$, $a \neq b$ postoji jedinstveni $p \in \mathcal{P}$ takav da su $a, b \in \hat{p}$.*

2. *Postoje $a, b, c \in X$ takvi da $\{a, b, c\} \nsubseteq \hat{p}$, za svaki $p \in \mathcal{P}$.*

Tada za uređeni par $(X, \mathcal{P})$ kažemo da je ***prostor pravaca****.*

Definicija 1.3.3. *Neka je $(X, \mathcal{P})$ te neka su $a, b \in X$. Definiramo skup $\overline{ab}$ na sljedeći način.*

Ako je $a = b$, neka je $\overline{ab} = \{a\}$.

Ako je $a \neq b$, onda postoji jedinstveni $p \in \mathcal{P}$ takav da su $a, b \in \hat{p}$ pa definiramo $\overline{ab} = \overline{ab}^p$.

Za $\overline{ab}$ kažemo da je ***segment (dužina)*** *određena točkama a, b u $(X, \mathcal{P})$.*

Uočimo sljedeće: Ako je $(X, \mathcal{P})$ prostor pravaca te $a, b \in X$, onda su $a, b \in \overline{ab}$.

Propozicija 1.3.4. *Neka je $(X, \mathcal{P})$ prostor pravaca.*

1. *Neka su $a, b \in X$. Tada je $\overline{ab} = \overline{ba}$.*

2. *Neka su $a, b, c, d \in X$ takvi da je $\overline{ab} = \overline{cd}$. Tada je $\{a, b\} = \{c, d\}$.*

Dokaz. 1. Tvrdnja slijedi iz propozicije 1.2.2.

2. Pretpostavimo da je $a = b$.
   Tada je $\overline{ab} = \{a\}$. Iz $c, d \in \overline{cd}$ i $\overline{ab} = \overline{cd}$ slijedi $c, d \in \overline{ab}$, tj. $c, d \in \{a\}$.
   Dakle, $c = d = a$. Stoga vrijedi $\{a, b\} = \{c, d\}$.

   Pretpostavimo da je $a \neq b$.
   Kada bi vrijedilo $c = d$, onda bi iz $a, b \in \overline{ab} = \overline{cd} = \{c\}$ slijedilo $a = b$ što je u kontradikciji sa pretpostavkom pa zaključujemo da je $c \neq d$.
   Neka je $p \in \mathcal{P}$ takav da su $a, b \in \hat{p}$. Vrijedi $c, d \in \overline{cd} = \overline{ab} = \overline{ab}^p \subseteq \hat{p}$, dakle $c, d \in \hat{p}$.
   Stoga zaključujemo $\overline{cd} = \overline{cd}^p$.
   Iz $\overline{ab} = \overline{cd}$ slijedi $\overline{ab}^p = \overline{cd}^p$ pa propozicija 1.2.3 povlači $\{a, b\} = \{c, d\}$.

□

Primjer 1.3.5. *Neka je $M = \{1, 2, 3\}$. Neka je $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ i neka je $\sigma = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$.*
Tada je ρ uređaj na M, a σ uređaj suprotan uređaju ρ. Neka je $p = (M, \{\rho, \sigma\})$. Tada je p pravac.
Nadalje, neka je $\rho' = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (3, 2)\}$ i neka je
$\sigma' = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (3, 1), (2, 3)\}$.
Tada je ρ' uređaj na M, a σ' uređaj suprotan uređaju ρ'. Neka je $p' = (M, \{\rho', \sigma'\})$. Vrijedi da je p' pravac.
Uočimo da je $\hat{p} = \hat{p'}$, ali $p \neq p'$. Naime, očito je $\rho \neq \rho'$ i $\sigma \neq \sigma'$, pa je $\{\rho, \sigma\} \neq \{\rho', \sigma'\}$.
Vrijedi $1 \,\rho\, 2$ pa prema definiciji dužine dobivamo da je

$$\overline{12}^p = \{x \in M \mid 1 \,\rho\, x \;\; i \;\; x \,\rho\, 2\},$$

dakle $\overline{12}^p = \{1, 2\}$. S druge strane, zbog $1 \,\rho'\, 2$ vrijedi

$$\overline{12}^{p'} = \{x \in M \mid 1 \,\rho'\, x \;\; i \;\; x \,\rho'\, 2\}$$

pa je $\overline{12}^{p'} = \{1, 2, 3\}$.

Propozicija 1.3.6. *Neka je $(X, \mathcal{P})$ prostor pravaca i neka su $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ takvi da $\hat{p}_1 = \hat{p}_2$. Tada je $p_1 = p_2$.*

Dokaz. Prema definiciji pravca skup $\hat{p}_1$ ima bar dva elementa. Odaberimo $a, b \in \hat{p}_1$ takve da je $a \neq b$.
Po definiciji prostora pravaca vrijedi $\hat{p}_1 \subseteq X$. Dakle, $a, b \in X$ pa prema definiciji prostora pravaca postoji jedinstveni $p \in \mathcal{P}$ takav da su $a, b \in \hat{p}$. Iz $\hat{p}_1 = \hat{p}_2$ slijedi $a, b \in \hat{p}_2$ pa zaključujemo $p_1 = p_2$. □

1.4 Euklidski pravci

Definicija 1.4.1. *Neka su $T_0, v \in \mathbb{R}$, $v \neq (0,0)$. Za skup $\{T_0 + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ kažemo da je **pravac kroz** T_0 **vektora smjera** v.*

Napomena 1.4.2. *Prethodni pojam ne treba miješati sa pojmom pravca koji je ranije definiran.*

Propozicija 1.4.3. *Neka je p pravac kroz T_0 vektora smjera v. Neka je $T_1 \in p$. Tada je p pravac kroz T_1 vektora smjera v.*

Dokaz. Budući da je $T_1 \in p$, postoji $\lambda' \in \mathbb{R}$ takva da je

$$T_1 = T_0 + \lambda' \cdot v. \tag{1.5}$$

Neka je $T \in p$. Tada postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takva da je

$$T = T_0 + \lambda \cdot v. \tag{1.6}$$

Neka je q pravac kroz T_1 vektora smjera v. Treba dokazati da je $p = q$. Iz (1.5) slijedi da je

$$T_0 = T_1 - \lambda' \cdot v$$

pa koristeći (1.6) slijedi

$$T = T_1 - \lambda' \cdot v + \lambda \cdot v = T_1 + (\lambda - \lambda') \cdot v.$$

Stoga je $T \in q$.
Obratno, pretpostavimo da je $T \in q$. Tada postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takva da je $T = T_1 + \lambda \cdot v$. Koristeći (1.5) dobivamo

$$T = (T_0 + \lambda' \cdot v) + \lambda \cdot v = T_0 + (\lambda' + \lambda) \cdot v,$$

dakle $T \in p$. Time smo dokazali da je $p = q$. □

Uočimo sljedeće: Ako je p pravac kroz T_0 vektora smjera v onda je $T_0 \in p$.

Propozicija 1.4.4. *Neka je p pravac kroz T_0 vektora smjera v i neka je q pravac kroz T_1 vektora smjera w. Pretpostavimo da je $p = q$. Tada postoji $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ takav da $w = \mu \cdot v$.*

Dokaz. Iz $T_0 \in p$ slijedi $T_0 \in q$. Sada iz propozicije 1.4.3 slijedi da je q pravac kroz T_0 vektora smjera w, odnosno

$$q = \{T_0 + \lambda \cdot w \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Posebno, za $\lambda = 1$ dobivamo da je $T_0 + w \in q$. Budući da smo pretpostavili da je $p = q$ slijedi da je $T_0 + w \in p$ pa postoji $\mu \in \mathbb{R}$ takav da je

$$T_0 + w = T_0 + \mu \cdot v.$$

Dakle, $w = \mu \cdot v$. □

Neka je p pravac kroz T_0 vektora smjera v. Definiramo binarnu relaciju $\preceq$ na sljedeći način.
Neka su $x, y \in p$. Tada postoje jedinstveni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$x = T_0 + \lambda_1 \cdot v,$$

$$y = T_0 + \lambda_2 \cdot v.$$

Kažemo da je $x \preceq y$ ako je $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$.
Lako se pokaže da je ovako definirana relacija $\preceq$ uređaj na p. Za ovaj uređaj kažemo da je **uređaj na p određen točkom T_0** i **vektorom smjera v** i označavamo ga sa $\preceq_{T_0,v}$.

Propozicija 1.4.5. *Neka je p pravac kroz T_0 vektora smjera v. Neka je $T_1 \in p$. Tada je $\preceq_{T_0,v} = \preceq_{T_1,v}$.*

Dokaz. Budući da je $T_1 \in p$ postoji $\lambda' \in \mathbb{R}$ takva da je $T_1 = T_0 + \lambda' \cdot v$. Slijedi $T_0 = T_1 - \lambda' \cdot v$.
Neka su $x, y \in p$ takvi da je $x \preceq_{T_0,v} y$. Tada postoje $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ takve da je $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$,

$$x = T_0 + \lambda_1 \cdot v,$$

$$y = T_0 + \lambda_2 \cdot v.$$

Slijedi

$$x = T_1 + (\lambda_1 - \lambda') \cdot v,$$

$$y = T_1 + (\lambda_2 - \lambda') \cdot v,$$

a očito je $\lambda_1 - \lambda' \leqslant \lambda_2 - \lambda'$. Prema tome $x \preceq_{T_1,v} y$.
Obratno, pretpostavimo da su $x, y \in p$ takvi da je $x \preceq_{T_1,v} y$. Tada postoje $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ takve da je $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$,

$$x = T_1 + \lambda_1 \cdot v,$$

$$y = T_1 + \lambda_2 \cdot v.$$

Slijedi

$$x = T_0 + (\lambda_1 + \lambda') \cdot v,$$

$$y = T_0 + (\lambda_2 + \lambda') \cdot v$$

i očito je $\lambda_1 + \lambda' \leqslant \lambda_2 + \lambda'$. Stoga je $x \preceq_{T_0,v} y$.
Dokazali smo da za sve $x, y \in p$ vrijedi ekvivalencija

$$(x, y) \in \preceq_{T_0,v} \Leftrightarrow (x, y) \in \preceq_{T_1,v}.$$

Dakle, $\preceq_{T_0,v} = \preceq_{T_1,v}$. $\square$

Propozicija 1.4.6. *Neka su $T_0, v, w \in \mathbb{R}^2$. Pretpostavimo da je p pravac kroz T_0 vektora smjera v te da je p ujedno pravac krot T_0 vektora smjera w. Tada su uređaji $\preceq_{T_0,v}$ i $\preceq_{T_0,w}$ jednaki ili međusobno suprotni.*

Dokaz. Imamo $T_0 + v \in p$ pa postoji $r \in \mathbb{R}$ takav da je

$$T_0 + v = T_0 + rw.$$

Slijedi

$$v = rw. \tag{1.7}$$

Budući da je $v \neq (0, 0)$ vrijedi da je $r \neq 0$.

1° $r > 0$
Tvrdimo da je

$$\preceq_{T_0,v} = \preceq_{T_0,w} . \tag{1.8}$$

Neka je $(x, y) \in \preceq_{T_0,v}$.
Tada postoje $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ takve da $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ te

$$x = T_0 + \lambda_1 \cdot v$$

$$y = T_0 + \lambda_2 \cdot v.$$

Iz (1.7) slijedi

$$x = T_0 + (\lambda_1 \cdot r) \cdot w$$

$$y = T_0 + (\lambda_2 \cdot r) \cdot w,$$

a vrijedi $\lambda_1 \cdot r \leqslant \lambda_2 \cdot r$ (što je posljedica činjenica da je $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ i $r > 0$.)
Dakle, $x \preceq_{T_0,w} y$, tj. $(x, y) \in \preceq_{T_0,w}$. Time smo dokazali da je

$$\preceq_{T_0,v} \subseteq \preceq_{T_0,w} .$$

Iz (1.7) slijedi $w = \frac{1}{r} \cdot v$ i očito je $\frac{1}{r} > 0$. Sada na analogan način dobivamo da je

$$\preceq_{T_0,w} \subseteq \preceq_{T_0,v} .$$

Time smo dokazali da vrijedi (1.8).

2° $r < 0$
Tvrdimo da su uređaji $\preceq_{T_0,v}$ i $\preceq_{T_0,w}$ međusobno suprotni, tj. da je relacija $\preceq_{T_0,w}$ suprotna relaciji $\preceq_{T_0,v}$. Dakle, treba dokazati da je

$$\preceq_{T_0,w} = \{(x, y) \mid x, y \in p,\ (y, x) \in \preceq_{T_0,v}\}. \tag{1.9}$$

Neka je $(x, y) \in \preceq_{T_0,w}$. Tada postoje $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ takve da je $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ te

$$x = T_0 + \lambda_1 \cdot w,$$

$$y = T_0 + \lambda_2 \cdot w.$$

Prema (1.7) vrijedi $w = \frac{1}{r} \cdot v$ pa je

$$x = T_0 + \left(\lambda_1 \cdot \frac{1}{r}\right) \cdot v, \qquad y = T_0 + \left(\lambda_2 \cdot \frac{1}{r}\right) \cdot v. \tag{1.10}$$

Budući da je $r < 0$, očito je $\dfrac{1}{r} < 0$. Iz $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ slijedi

$$\lambda_2 \cdot \frac{1}{r} \leqslant \lambda_1 \cdot \frac{1}{r}$$

pa (1.10) povlači $(y, x) \in \preceq_{T_0,v}$. Time smo dokazali da je

$$\preceq_{T_0,w} \subseteq \{(x, y) \mid x, y \in p,\ (y, x) \in \preceq_{T_0,v}\}.$$

Neka su $x, y \in p$ takvi da $(y, x) \in \preceq_{T_0,v}$. Onda postoje $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ takve da je $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ i

$$y = T_0 + \lambda_1 \cdot v,$$

$$x = T_0 + \lambda_2 \cdot v.$$

Prema (1.7) vrijedi $v = r \cdot w$ pa je

$$y = T_0 + (\lambda_1 \cdot r) \cdot w,$$

$$x = T_0 + (\lambda_2 \cdot r) \cdot w.$$

Iz $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ slijedi $\lambda_2 \cdot r \leqslant \lambda_1 \cdot r$ pa je $(x, y) \in \preceq_{T_0,w}$. Time smo dokazali da je

$$\{(x, y) \mid x, y \in p,\ (y, x) \in \preceq_{T_0,v}\} \subseteq \preceq_{T_0,w} .$$

Dakle, vrijedi (1.9) i time je tvrdnja propozicije dokazana.

□

Definicija 1.4.7. *Neka je $p \subseteq \mathbb{R}^2$. Kažemo da je p* ***euklidski pravac*** *ako postoje $T_0, v \in \mathbb{R}^2$ takvi da je p pravac kroz T_0 vektora smjera v.*

1.5 Uređeni euklidski pravci

Definicija 1.5.1. *Neka je p euklidski pravac te neka je $\leq$ uređaj na p. Kažemo da je $\leq$* ***euklidski uređaj*** *na p ako postoje $T_0, v \in \mathbb{R}$ takvi da je p pravac krot T_0 vektora smjera v te takvi da je $\leq = \preceq_{T_0,v}$.*

Napomena 1.5.2. *Neka je S skup koji ima bar 2 različita elementa. Neka je $\leqslant$ uređaj na S. Tada su uređaji $\leqslant$ i $\leqslant^{-1}$ međusobno različiti (pri čemu je $\leqslant^{-1}$ uređaj suprotan uređaju $\leqslant$.)*
Prema pretpostavci postoje $x, y \in S$ takvi da je $x \neq y$. Budući da je $\leqslant$ uređaj, vrijedi $x \leqslant y$ ili $y \leqslant x$. Dakle, postoje $a, b \in S$ takvi da je $a \neq b$ i $a \leqslant b$.
Po definiciji od $\leqslant^{-1}$ vrijedi $(b, a) \in \leqslant^{-1}$. Kada bi vrijedilo $\leqslant = \leqslant^{-1}$, onda bismo imali $(b, a) \in \leqslant$, što bi zajedno s činjenicom da je $(a, b) \in \leqslant$ i antisimetričnosću relacije $\leqslant$ povlačilo da je $a = b$. Prema tome $\leqslant \neq \leqslant^{-1}$.

Propozicija 1.5.3. *Neka je p euklidski pravac. Tada postoje točno dva euklidska uređaja R_1 i R_2 na p. Nadalje R_1 i R_2 su međusobno suprotni uređaji.*

Dokaz. Odaberimo $T_0, v \in \mathbb{R}^2$ takve da je p pravac kroz T_0 vektora smjera v. Tvrdimo da je p pravac kroz T_0 vektora smjera $-v$, tj. da je

$$p = \{T_0 + \mu \cdot (-v) \mid \mu \in \mathbb{R}\}. \tag{1.11}$$

Neka je $x \in p$. Tada postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takva da je

$$x = T_0 + \lambda \cdot v.$$

Slijedi

$$x = T_0 + (-\lambda) \cdot (-v)\,.$$

Stoga je

$$x \in \ \{T_0 + \mu \cdot (-v) \mid \mu \in \mathbb{R}\}. \tag{1.12}$$

Obratno, pretpostavimo da vrijedi (1.12). Tada postoji $\mu \in \mathbb{R}$ takav da je

$$x = T_0 + \mu \cdot (-v).$$

Dakle,

$$x = T_0 + (-\mu) \cdot v.$$

Prema tome $x \in p$. Time smo dokazali da vrijedi (1.11).

Dakle, p je pravac kroz T_0 vektora smjera v i p je ujedno pravac kroz T_0 vektora smjera $-v$. Iz dokaza propozicije 1.4.6 slijedi da su uređaji $\preceq_{T_0,v}$ i $\preceq_{T_0,-v}$ međusobno suprotni.

Budući da p ima bar dva elementa (očito su T_0 i $T_0 + v$ dva različita elementa od p) iz napomene 1.5.2 slijedi da su uređaji $\preceq_{T_0,v}$ i $\preceq_{T_0,-v}$ međusobno različiti.

Preostaje nam dokazati da postoje točno dva euklidska uređaja na p.
Neka je $\leqslant$ euklidski uređaj na p. Tada po definiciji euklidskog uređaja znamo da postoje T_1, w takvi da je p pravac kroz T_1 vektora smjera w i $\leqslant \, = \, \preceq_{T_1,w}$.
Iz $T_0 \in p$ i propozicije 1.4.5 slijedi da je

$$\preceq_{T_1,w} \, = \, \preceq_{T_0,w} .$$

Prema propoziciji 1.4.6 vrijedi $\preceq_{T_0,w} \, = \, \preceq_{T_0,v}$ ili $\preceq_{T_0,w} \, = \, \left(\preceq_{T_0,v}\right)^{-1}$, tj. $\preceq_{T_0,w} \, = \, \preceq_{T_0,-v}$.
Time smo dokazali da su $\preceq_{T_1,v}$ i $\preceq_{T_0,-v}$ svi euklidski uređaji na p. □

Propozicija 1.5.4. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}^2$ takvi da je $a \neq b$. Tada postoji jedinstveni euklidski pravac p takav da su $a, b \in p$.*

Dokaz. Neka je $v = b - a$. Iz $a \neq b$ slijedi da je $v \neq (0, 0)$.
Neka je p pravac kroz a vektora smjera v. Očito je $a \in p$. Vrijedi

$$b = a + 1 \cdot v,$$

tj. $b \in p$. Pretpostavimo da je q euklidski pravac takav da su $a, b \in q$. Neka su T_0 i w takvi da je q pravac kroz T_0 vektora smjera w.
Iz $a \in q$ i propozicije 1.4.3 slijedi da je q pravac kroz a vektora smjera w.
Iz $b \in q$ slijedi da postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takva da je

$$b = a + \lambda \cdot w.$$

Slijedi

$$b - a = \lambda \cdot w$$

odnosno

$$v = \lambda \cdot w.$$

Dokažimo da je $p \subseteq q$. Neka je $T \in p$.Tada je, za neki $\mu \in \mathbb{R}$,

$$T = a + \mu \cdot v.$$

Budući da je $v = \lambda \cdot w$ slijedi

$$T = a + \mu \cdot (\lambda \cdot w),$$

odnosno

$$T = a + (\mu \cdot \lambda) \cdot w,$$

tj. $T \in q$. Time smo dokazali da je $p \subseteq q$.
Iz $v = \lambda \cdot w$ slijedi $w = \frac{1}{\lambda} \cdot v$ pa se na analogan način dokaže da je $q \subseteq p$.
Zaključujemo da je $p = q$ što smo i trebali dokazati. □

Propozicija 1.5.5. *Neka je* $a = (0,0)$*,* $b = (0,1)$ *i* $c = (1,0)$*. Tada ne postoji euklidski pravac* p *takav da su* $a, b, c \in p$*.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji euklidski pravac p takav da su $a, b, c \in p$. Prema propoziciji 1.4.3 slijedi da je pravac p kroz a vektora smjera v. Budući da je $b \in p$, slijedi

$$b = a + \lambda \cdot v$$

za neki $\lambda \in \mathbb{R}$, tj.

$$v = \frac{1}{\lambda} \cdot (b - a),$$

odnosno

$$v = \frac{1}{\lambda} \cdot b.$$

Iz $c \in p$ slijedi da postoji $\mu \in \mathbb{R}$ takav da je

$$c = a + \mu \cdot v,$$

odnosno

$$c = \mu \cdot v = \mu \cdot \frac{1}{\lambda} = \left(0, \frac{\mu}{\lambda}\right)$$

što je u kontradikciji sa $c = (1, 0)$. □

Definicija 1.5.6. *Neka je* p *euklidski pravac te neka su* ρ, τ *međusobno suprotni euklidski uređaji na* p*. Tada za* $(p, \{\rho, \tau\})$ *kažemo da je* ***uređeni euklidski pravac****.*

Uočimo da je svaki euklidski pravac i pravac u smislu definicije 1.1.7. Nadalje, uočimo da za svaki euklidski pravac p postoji jedinstveni S takav da je (p, S) uređeni euklidski pravac. To slijedi iz propozicije 1.5.3.

Korolar 1.5.7. *Neka je* $\mathcal{P}$ *skup svih uređenih euklidskih pravaca. Tada je uređeni par* $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}\right)$ *prostor pravaca.*

Dokaz. Neka je $p \in \mathcal{P}$. Tada je p uređeni euklidski pravac pa je $p = (p', \{\rho, \tau\})$, gdje je p' euklidski pravac. Slijedi $\hat{p} = p'$ pa je očito $\hat{p} \subseteq \mathbb{R}^2$.
Neka su $a, b \in \mathbb{R}^2$ takvi da je $a \neq b$. Prema propoziciji 1.5.4, postoji jedinstveni euklidski pravac p' takav da su $a, b \in p'$.
Nadalje, znamo da postoji jedinstveni S takav da je uređeni par (p', S) uređeni euklidski pravac.
Označimo $p = (p', S)$. Tada je $p \in \mathcal{P}$ te su $a, b \in \hat{p}$.
Pretpostavimo da je $q \in \mathcal{P}$ takav da su $a, b \in \hat{q}$. Vrijedi $q = (q', T)$ gdje je q' euklidski pravac.

Imamo $a, b \in q'$ pa zbog jedinstvenosti od p' slijedi $p' = q'$. Sada imamo da su (p', S) i (p', T) uređeni euklidski pravci pa zbog jedinstvenosti od S slijedi $T = S$.
Dakle, $q = (q', T) = (p', S) = p$, tj. $q = p$.
Zaključak: Za sve $a, b \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$ postoji jedinstveni $p \in \mathcal{P}$ takav da su $a, b \in \hat{p}$.
Neka su a, b, c kao u propoziciji 1.5.5. Neka je $p \in \mathcal{P}$. Kada bi vrijedilo $\{a, b, c\} \subseteq \hat{p}$, to bi značilo da a, b, c pripadaju istom euklidskom pravcu što je nemoguće prema propoziciji 1.5.5.
Stoga $\{a, b, c\} \nsubseteq \hat{p}$.
Zaključujemo da je $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}\right)$ prostor pravaca. □

1.6 Ravnine

Definicija 1.6.1. *Neka je $(X, \mathcal{P})$ prostor pravaca. Kažemo da je $(X, \mathcal{P})$* ***ravnina*** *ako za sve $a, b, c \in X$ i $p \in \mathcal{P}$ takve da je $\hat{p} \cap \overline{ab} \neq \emptyset$ vrijedi $\hat{p} \cap \overline{bc} \neq \emptyset$ ili $\hat{p} \cap \overline{ac} \neq \emptyset$.*

Propozicija 1.6.2. *Neka je $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}\right)$ prostor pravaca iz Korolara 1.1.29. Neka su $a, b \in \mathbb{R}^2$. Tada vrijedi*

$$\overline{ab} = \{a + \lambda \cdot (b - a) \mid \lambda \in [0, 1]\}$$

pri čemu je $\overline{ab}$ dužina određena točkama a, b u $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}\right)$.

Dokaz. Ako je $a = b$, onda je $\overline{ab} = \{a\}$ pa tvrdnja očito vrijedi.
Pretpostavimo da je $a \neq b$. Neka je $v = b - a$. Očito je $v \neq (0, 0)$. Neka je p pravac kroz a vektora smjera v. Dakle,

$$p = \{a + \lambda \cdot (b - a) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Očito su $a, b \in p$.
Imamo da je p euklidski pravac. Nadalje, $\preceq_{a,v}$ je euklidski uređaj na p. Neka je $\leqslant'$ euklidski uređaj na p suprotan uređaju $\preceq_{a,v}$. Neka je

$$q = \left(p, \{\preceq_{a,v}, \leqslant'\}\right).$$

Tada je q uređeni euklidski pravac, dakle $q \in \mathcal{P}$.
Imamo $a, b \in \hat{q}$. Stoga vrijedi $\overline{ab} = \overline{ab}^q$. Uočimo da je $a \preceq_{a,v} b$ (naime $a = a + 0 \cdot v$ i $b = a + 1 \cdot v$, a $0 < 1$). Dakle,

$$\overline{ab}^q = \{x \in p \mid a \preceq_{a,v} x \preceq_{a,v} b\}.$$

Neka je $x \in \overline{ab}^q$. Tada je $x \in p$ i $a \preceq_{a,v} x \preceq_{a,v} b$ pa postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takva da je $x = a + \lambda \cdot v$ i slijedi da je $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Time smo dokazali da je

$$\overline{ab}^q \subseteq \{a + \lambda \cdot v \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

Obratno, neka je $\lambda \in [0,1]$ te neka je $x = a + \lambda \cdot v$. Tada je $x \in p$ i vrijedi $a \preceq_{a,v} x \preceq_{a,v} b$. Dakle, $x \in \overline{ab}^q$. Prema tome,

$$\overline{ab}^q = \{a + \lambda \cdot v \mid \lambda \in [0,1]\}.$$

Budući da je $\overline{ab} = \overline{ab}^q$, tvrdnja propozicije je dokazana. □

Definicija 1.6.3. *Neka je $(X, \mathcal{P})$ prostor pravaca te neka je $S \subseteq X$. Kažemo da je S* ***konveksan skup*** *u $(X, \mathcal{P})$ ako za sve $a, b \in S$ vrijedi $\overline{ab} \subseteq S$.*

Propozicija 1.6.4. *Neka je $(X, \mathcal{P})$ prostor pravaca. Pretpostavimo da za svaki $p \in \mathcal{P}$ postoje konveksni skupovi K i L u $(X, \mathcal{P})$ takvi da je*

$$X \setminus \hat{p} = K \cup L$$

te takvi da je

$$\overline{ab} \cap \hat{p} \neq \emptyset$$

za svaki $a \in K$ i svaki $b \in L$. Tada je $(X, \mathcal{P})$ ravnina.

Dokaz. Neka su $a, b, c \in X$ te neka je $p \in \mathcal{P}$ takav da je $\overline{ab} \cap \hat{p} \neq \emptyset$. Želimo dokazati da je

$$\hat{p} \cap \overline{ac} \neq \emptyset \text{ ili } \hat{p} \cap \overline{bc} \neq \emptyset. \tag{1.13}$$

Ako je $a \in \hat{p}$ onda je $\hat{p} \cap \overline{ac} \neq \emptyset$ pa vrijedi (1.13). Ako je $b \in \hat{p}$ onda je $\hat{p} \cap \overline{bc} \neq \emptyset$ pa vrijedi (1.13). Isto tako dobivamo da vrijedi (1.13) ako je $c \in \hat{p}$.
Pretpostavimo sada da $a \notin \hat{p}$, $b \notin \hat{p}$, $c \notin \hat{p}$. Prema pretpostavci propozicije postoje skupovi K i L koji su konveksni u $(X, \mathcal{P})$, takvi da je

$$X \setminus \hat{p} = K \cup L \tag{1.14}$$

te takvi da za svaki $x \in K$ i $y \in L$ vrijedi $\overline{xy} \cap \hat{p} \neq \emptyset$.
Imamo $a, b \in X \setminus \hat{p}$ pa su $a, b \in K \cup L$. Kada bi vrijedilo $a, b \in K$ onda bismo zbog konveksnosti od K imali $\overline{ab} \subseteq X \setminus \hat{p}$, a to bi povlačilo da je $\overline{ab} \cap \hat{p} = \emptyset$, što nije moguće. Isto tako vidimo da $a, b \in L$ vodi na kontradikciju. Prema tome vrijedi $a \in K$ i $b \in L$ ili $a \in L$ i $b \in K$.

1° $a \in K, b \in L$
Imamo $c \in X \setminus \hat{p}$ pa slijedi $c \in K \cup L$.
Ako je $c \in K$ onda zbog $b \in L$ vrijedi $\overline{bc} \cap \hat{p} \neq \emptyset$, a ako je $c \in L$ onda zbog $a \in K$ vrijedi $\overline{ac} \cap \hat{p} \neq \emptyset$.
U svakom slučaju vrijedi (1.13).

1° $a \in L, b \in K$
   Analogno kao u prethodnom slučaju dobivamo da vrijedi (1.13).

Dakle u oba slučaja vrijedi (1.13). Prema tome $(X, \mathcal{P})$ je ravnina. □

Propozicija 1.6.5. *Neka je M euklidski pravac. Tada postoje $a, b, c \in \mathbb{R}$ takvi da je $a \neq 0$ ili $b \neq 0$ te takvi da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi sljedeće:*

$$(x, y) \in M \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot x + b \cdot y + c = 0.$$

Dokaz. Imamo da je M pravac kroz T_0 vektora smjera v, gdje je $T_0 \in \mathbb{R}^2$ i $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Vrijedi $T_0 = (t_1, t_2)$ i $v = (v_1, v_2)$ za neke $t_1, t_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$.
Vrijedi $M = \{T_0 + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(t_1, t_2) + \lambda \cdot (v_1, v_2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, dakle

$$M = \{(t_1 + \lambda \cdot v_1, t_2 + \lambda \cdot v_2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}. \tag{1.15}$$

Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $(x, y) \in M$. Prema (1.15) postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je

$$(x, y) = (t_1 + \lambda \cdot v_1, t_2 + \lambda \cdot v_2). \tag{1.16}$$

Slijedi

$$x = t_1 + \lambda \cdot v_1 \;\; i \;\; y = t_2 + \lambda \cdot v_2. \tag{1.17}$$

Množenjem prve jednakosti sa v_2 i druge sa v_1 dobivamo:

$$v_2 \cdot x = v_2 \cdot t_1 - \lambda \cdot v_1 \cdot v_2 \;\; i \;\; v_1 \cdot y = v_1 \cdot t_2 + \lambda \cdot v_1 \cdot v_2. \tag{1.18}$$

Stoga je

$$\lambda \cdot v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot x - v_2 \cdot t_1 \;\; i \;\; \lambda \cdot v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot y - v_1 \cdot t_2 \tag{1.19}$$

pa je

$$v_2 \cdot x - v_2 \cdot t_1 = v_1 \cdot y - v_1 \cdot t_2. \tag{1.20}$$

Slijedi:

$$v_2 \cdot x - v_1 \cdot y + v_1 \cdot t_2 - v_2 \cdot t_1 = 0. \tag{1.21}$$

Definirajmo $a = v_2, b = -v_1, c = v_1 \cdot t_2 - v_2 \cdot t_1$. Tada je $a \neq 0$ ili $b \neq 0$ (jer je $v \neq (0,0)$) i dokazali smo da vrijedi sljedeće:
Ako su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $(x, y) \in M$ onda je $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$.
Dokažimo sada da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ takve da je $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ vrijedi $(x, y) \in M$.
Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$. Tada vrijedi (1.21) pa stoga vrijedi i (1.20).

1° Pretpostavimo da je $v_1 = 0$.
   Tada je $v_2 \neq 0$ te iz (1.20) slijedi $x = t_1$. Definirajmo $\lambda = \frac{y - t_2}{v_2}$. Tada je $y = t_2 + \lambda \cdot v_2$ pa je

$$(x, y) = (t_1 + \lambda \cdot v_1, t_2 + \lambda \cdot v_2).$$

   Prema (1.15) $(x, y) \in M$.

2° Pretpostavimo da je $v_2 = 0$.
Tada je $v_1 \neq 0$ pa iz (1.20) slijedi da je $y = t_2$. Definirajmo $\lambda = \frac{x-t_1}{v_1}$. Tada je $x = t_1 + \lambda \cdot v_1$ pa je

$$(x, y) = (t_1 + \lambda \cdot v_1, t_2 + \lambda \cdot v_2).$$

Stoga je $(x, y) \in M$.

3° Pretpostavimo $v_1, v_2 \neq 0$.
Definirajmo $\lambda = \frac{v_2 \cdot x - v_2 \cdot t_1}{v_1 \cdot v_2}$. Iz (1.20) slijedi da je $\lambda = \frac{v_1 \cdot y - v_1 \cdot t_2}{v_1 \cdot v_2}$ pa iz zadnje dvije jednakosti slijedi (1.19). Sada iz (1.19) slijedi (1.18) odakle dijeljenjem sa v_1 odnosno sa v_2 dolazimo do (1.17). Dakle, vrijedi (1.16) te zaključujemo da je $(x, y) \in M$.

Budući da smo pokrili sve slučajeve, tvrdnja propozicije je dokazana. □

Lema 1.6.6. *Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ te neka je*

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \cdot x + b \cdot y + c < 0\right\}.$$

Tada je K koveksan skup u prostoru pravaca $(\mathbb{R}^2, \mathcal{P})$ gdje je $\mathcal{P}$ skup svih uređenih euklidskih pravaca.

Dokaz. Neka su $p, q \in K$. Želimo dokazati da je $\overline{pq} \subseteq K$. Prema propoziciji 1.6.2 vrijedi

$$\overline{pq} = \{p + \lambda \cdot (q - p) \mid \lambda \in [0, 1]\},$$

tj.

$$\overline{pq} = \{(1 - \lambda) \cdot p + \lambda \cdot q \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

Neka je $t \in \overline{pq}$. Tada za neki $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi

$$t = (1 - \lambda) \cdot p + \lambda \cdot q. \tag{1.22}$$

Imamo $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$ i $t = (t_1, t_2)$ za neke $p_1, p_2, q_1, q_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.
Iz $p \in K$ slijedi

$$a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c < 0. \tag{1.23}$$

Iz $q \in K$ slijedi

$$a \cdot q_1 + b \cdot q_2 + c < 0. \tag{1.24}$$

Iz (1.22) slijedi

$$(t_1, t_2) = ((1 - \lambda) \cdot p_1 + \lambda \cdot q_1, (1 - \lambda) \cdot p_2 + \lambda \cdot q_2). \tag{1.25}$$

Želimo dokazati da je $t \in K$.
Koristeći (1.25) dobivamo da vrijedi sljedeći niz ekvivalencija:

$$t \in K \Leftrightarrow a \cdot t_1 + b \cdot t_2 + c < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \cdot ((1-\lambda) \cdot p_1 + \lambda \cdot q_1) + (b \cdot (1-\lambda) \cdot p_2 + \lambda \cdot q_2) + c < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1-\lambda) \cdot a \cdot p_1 + \lambda \cdot a \cdot q_1 + (1-\lambda) \cdot b \cdot p_2 + \lambda \cdot b \cdot q_2 + (1-\lambda) \cdot c + \lambda \cdot c < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1-\lambda) \cdot (a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c) + \lambda \cdot (a \cdot q_1 + b \cdot q_2 + c) < 0.$$

Zadnja nejednakost vrijedi što slijedi iz (1.23) i (1.24) te činjenice da je $1 - \lambda \geqslant 0$ i $\lambda \geqslant 0$ te da je $1 - \lambda > 0$ ili $\lambda > 0$. Stoga je $t \in K$.
Time smo dokazali da je $\overline{pq} \subseteq K$. Prema tome K je konveksan skup. □

Propozicija 1.6.7. *Neka je $\mathcal{P}$ skup svih uređenih euklidskih pravaca. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ te neka je*

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \cdot x + b \cdot y + c = 0\right\},$$
$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \cdot x + b \cdot y + c < 0\right\},$$
$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \cdot x + b \cdot y + c > 0\right\}.$$

Neka je $P \in K$ i $Q \in L$. Tada je $\overline{PQ} \cap M \neq \emptyset$, gdje je $\overline{PQ}$ dužina određena točkama P i Q u $(\mathbb{R}^2, \mathcal{P})$.

Dokaz. Znamo da je

$$\overline{PQ} = \{(1-\lambda) \cdot P + \lambda \cdot Q \mid \lambda \in [0, 1]\}. \tag{1.26}$$

Imamo $P = (p_1, p_2)$ i $Q = (q_1, q_2)$ gdje su $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}$.
Iz $P \in K$ slijedi

$$a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c < 0,$$

a iz $Q \in L$ slijedi

$$a \cdot q_1 + b \cdot q_2 + c > 0.$$

Definirajmo

$$u = a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c,$$
$$v = a \cdot q_1 + b \cdot q_2 + c.$$

Dakle $u < 0$ i $v > 0$. Definirajmo sada $\lambda = \frac{-u}{v-u}$. Tada je $0 < \lambda < 1$. Vrijedi $\lambda = \frac{u}{u-v}$ pa je

$$u + \lambda \cdot (v - u) = 0.$$

No

$$u + \lambda \cdot (v - u) = (1 - \lambda) \cdot u + \lambda \cdot v$$

pa je

$$(1 - \lambda) \cdot u + \lambda \cdot v = 0.$$

Slijedi

$$(1-\lambda) \cdot (a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c) + \lambda \cdot (a \cdot q_1 + b \cdot q_2 + c) = 0,$$

pa sređivanjem dobivamo

$$a \cdot ((1-\lambda) \cdot p_1 + \lambda \cdot q_1) + b \cdot ((1-\lambda) \cdot p_2 + \lambda \cdot q_2) + c = 0. \tag{1.27}$$

Označimo

$$t_1 = (1-\lambda) \cdot p_1 + \lambda \cdot q_1,$$
$$t_2 = (1-\lambda) \cdot p_2 + \lambda \cdot q_2.$$

Neka je $T = (t_1, t_2)$. Iz (1.27) slijedi $a \cdot t_1 + b \cdot t_2 + c = 0$ pa je $T \in M$. Nadalje, imamo

$$T = ((1-\lambda) \cdot p_1 + \lambda \cdot q_1, (1-\lambda) \cdot p_2 + \lambda \cdot q_2) = (1-\lambda) \cdot (p_1, p_2) + \lambda \cdot (q_1, q_2) = (1-\lambda) \cdot P + \lambda \cdot Q.$$

Dakle $T = (1-\lambda) \cdot P + \lambda \cdot Q$ i $\lambda \in [0,1]$ pa iz (1.26) slijedi da je $T \in \overline{PQ}$. Ovo zajedno sa $T \in M$ povlači da je $\overline{PQ} \cap M \neq \emptyset$ što je i trebalo dokazati.

□

Teorem 1.6.8. *Neka je $\mathcal{P}$ skup svih uređenih euklidskih pravaca. Tada je uređeni par $(\mathbb{R}^2, \mathcal{P})$ ravnina.*

Dokaz. Iz korolara 1.5.7 znamo da je $(\mathbb{R}^2, \mathcal{P})$ prostor pravaca. Neka je $p \in \mathcal{P}$. Tada je $p = (M, u)$ gdje je M euklidski pravac. Iz propozicije 1.6.5 slijedi da postoje $a, b, c \in \mathbb{R}$ takvi da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(x, y) \in M \Leftrightarrow a \cdot x + b \cdot y + c = 0.$$

Slijedi

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \cdot x + b \cdot y + c = 0\right\}.$$

Definirajmo

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \cdot x + b \cdot y + c < 0\right\},$$
$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \cdot x + b \cdot y + c > 0\right\}.$$

Očito je $K \cup L = \mathbb{R}^2 \setminus M$, tj. $K \cup L = \mathbb{R}^2 \setminus \hat{p}$. Iz leme 1.6.6 slijedi da je K konveksan skup u $(\mathbb{R}^2, \mathcal{P})$. Vrijedi

$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-a) \cdot x + (-b) \cdot y + (-c) < 0\right\}$$

pa također iz leme 1.6.6 slijedi da je L konveksan skup u $(\mathbb{R}^2, \mathcal{P})$.
Nadalje, neka je $P \in K$ i $Q \in L$. Prema propoziciji 1.6.7 vrijedi $\overline{PQ} \cap M \neq \emptyset$, tj. $\overline{PQ} \cap \hat{p} \neq \emptyset$. Konačno, iz propozicije 1.6.4 slijedi da je $(\mathbb{R}^2, \mathcal{P})$ ravnina. □

Poglavlje 2

Metričke ravnine

2.1 Metrika i polupravci

Definicija 2.1.1. *Neka je X neprazan skup te neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. $d(x, y) \geq 0$ *za sve* $x, y \in X$
2. *Za sve* $x, y \in X$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ *za sve* $x, y \in X$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *za sve* $x, y, z \in X$.

*Tada za d kažemo da je **metrika** na skupu X, a za uređeni par (X, d) kažemo da je **metrički prostor**.*

Definicija 2.1.2. *Neka je p pravac te neka je $a \in \hat{p}$. Imamo $p = (M, \{\rho, \sigma\})$. Za skupove*

$$\{x \in M \mid a \, \rho \, x\} \quad i \quad \{x \in M \mid a \, \sigma \, x\}$$

*kažemo da su **polupravci u** p **određeni točkom** a.*

Napomena 2.1.3. *Uočimo da je $\{x \in M \mid a \, \sigma \, x\} = \{x \in M \mid x \, \rho \, a\}$ jer su uređaji ρ i σ međusobno suprotni. Jasno je da skupovi $\{x \in M \mid a \, \rho \, x\}$ i $\{x \in M \mid x \, \rho \, a\}$ u uniji daju M te da je a jedini zajednički element ovih skupova. Prema tome, ako su t_1 i t_2 svi polupravci u p određeni točkom a, onda je $p = t_1 \cup t_2$ i $t_1 \cap t_2 = \{a\}$.*

Propozicija 2.1.4. *Neka je $p = (M, \{\rho, \sigma\})$ pravac te neka je $a \in M$. Neka je l polupravac u p određen točkom a. Neka su $x, y \in l$. Tada je $\overline{xy}^p \subseteq l$.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je

$$l = \{z \in M \mid a\,\sigma\,z\}\,.$$

Iz $x, y \in l$ slijedi $a\,\sigma\,x$ i $a\,\sigma\,y$. Vrijedi $x\,\sigma\,y$ ili $y\,\sigma\,x$.
Pretpostavimo da je $x\,\sigma\,y$. Znamo da je

$$\overline{xy}^p = \{z \in M \mid x\,\sigma\,z \;\; i \;\; z\,\sigma\,y\}\,.$$

Neka je $z \in \overline{xy}^p$. Tada je $x\,\sigma\,z$ pa iz $a\,\sigma\,x$ slijedi $a\,\sigma\,z$. Slijedi $z \in l$. Dakle, $\overline{xy}^p \subseteq l$.
Ako je $y\,\sigma\,x$ onda na isti način dobivamo da je $\overline{xy}^p \subseteq l$. □

Definicija 2.1.5. *Neka je $(X, \mathcal{P})$ prostor pravaca. Neka je $a \in X$ te neka je $l \subseteq X$. Ako postoji $p \in \mathcal{P}$ takav da je l polupravac u p određen točkom a, kažemo da je l* ***polupravac u*** *$(X, \mathcal{P})$* ***s vrhom*** *a.*

Propozicija 2.1.6. *Neka je p pravac takav da svaki polupravac u p ima bar dva elementa. Neka su $a, b \in \hat{p}$ te neka je $l \subseteq \hat{p}$. Pretpostavimo da je l polupravac u p određen sa a te da je ujedno l polupravac u p određen sa b. Tada je $a = b$.*

Dokaz. Imamo $p = (M, \{\rho, \sigma\})$ i

$$l = \{x \in M \mid a\,\rho\,x\}\,. \tag{2.1}$$

Budući da je l polupravac u p određen sa b vrijedi

$$l = \{x \in M \mid b\,\rho\,x\} \tag{2.2}$$

ili $l = \{x \in M \mid b\,\sigma\,x\}$. Pretpostavimo da vrijedi (2.2). Iz (2.1) slijedi da je $a \in l$ pa (2.2) povlači da je $b\,\rho\,a$.
S druge strane, iz (2.2) slijedi da je $b \in l$ pa (2.1) povlači da je $a\,\rho\,b$. Stoga je $a = b$ što je posljedica antisimetričnosti relacije ρ.
Sada pretpostavimo da je $l = \{x \in M \mid b\,\sigma\,x\}$. Tada je

$$l = \{x \in M \mid x\,\rho\,b\}\,. \tag{2.3}$$

Iz $a \in l$ i (2.3) slijedi $a\,\rho\,b$. Neka je

$$l' = \{x \in M \mid b\,\rho\,x\}\,.$$

Tada je l' polupravac u p pa po pretpostavci l' ima bar dva elementa. Stoga postoji $x \in l'$ takav da je $x \neq b$. Vrijedi $b\,\rho\,x$ pa iz $a\,\rho\,b$ slijedi $a\,\rho\,x$. Iz (2.1) slijedi da je $x \in l$. Sada iz (2.3) slijedi da je $x\,\rho\,b$. To zajedno sa $b\,\rho\,x$ povlači da je $x = b$ što je kontradikcija. Prema tome, ne vrijedi da je $l = \{x \in M \mid b\,\sigma\,x\}$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 2.1.7. *Neka je $(X, \mathcal{P})$ prostor pravaca u kojem svaki polupravac ima bar dvije točke. Neka je $l \subseteq X$ te neka su $p, q \in \mathcal{P}$ i $a, b \in X$ takvi da vrijedi sljedeće:*

1. *l je polupravac u p određen sa a,*

2. *l je polupravac u q određen sa b.*

Tada je $p = q$ i $a = b$.

Dokaz. Odaberimo $x, y \in l$ takve da je $x \neq y$. Iz $l \subseteq \hat{p}$ i $l \subseteq \hat{q}$ slijedi $x, y \in \hat{p}$ i $x, y \in \hat{q}$. Iz definicije prostora pravaca slijedi da je $p = q$. Sada iz propozicije 2.1.6 slijedi da je $a = b$. □

Definicija 2.1.8. *Neka je $(X, \mathcal{P})$ ravnina te neka je d metrika na X. Pretpostavimo da vrijedi sljedeće:*

1. *ako su $a, b, c \in X$ onda je*

$$d(a, b) = d(a, c) + d(c, b) \Leftrightarrow c \in \overline{ab}$$

2. *ako je l polupravac u $(X, \mathcal{P})$ s vrhom a i $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, onda postoji $x \in l$ takav da je $d(a, x) = r$.*

*Tada za uređenu trojku $(X, \mathcal{P}, d)$ kažemo da je **metrička ravnina**.*

Lema 2.1.9. *Neka je $(X, \mathcal{P})$ prostor pravaca te neka je l polupravac u $(X, \mathcal{P})$ s vrhom a. Pretpostavimo da su $x, y \in l$. Tada je $x \in \overline{ay}$ ili $y \in \overline{ax}$.*

Dokaz. Prema definiciji postoji $p \in \mathcal{P}$ takav da je l polupravac u p određen točkom a.
Imamo $p = (\hat{p}, \{\rho, \sigma\})$ te $l = \{z \in \hat{p} \mid a \leq z\}$ pri čemu je $\leq \in \{\rho, \sigma\}$.
Iz $x, y \in l$ slijedi da je $x, y \in \hat{p}$ te $a \leq x$ i $a \leq y$. Vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$.

1° Pretpostavimo da je $x \leq y$.
Dakle, $a \leq x$ i $x \leq y$ pa je $x \in \overline{ay}^p$, tj. $x \in \overline{ay}$.

2° Pretpostavimo da je $y \leq x$.
Dakle, $a \leq y$ i $y \leq x$ pa je $y \in \overline{ax}^p$, tj. $y \in \overline{ax}$.

□

Propozicija 2.1.10. *Neka je $(X, \mathcal{P}, d)$ metrička ravnina. Neka je l polupravac u $(X, \mathcal{P})$ s vrhom a te neka je $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Tada postoji jedinstveni $x \in l$ takav da je $d(a, x) = r$.*

Dokaz. Prema definiciji metričke ravnine postoji $x \in l$ takav da je $d(a, x) = r$. Dokažimo sada da je takav x jedinstven.
Pretpostavimo da je $y \in l$ takav da je $d(a, y) = r$. Iz leme 2.1.9 slijedi da je $x \in \overline{ay}$ ili $y \in \overline{ax}$.

1° Pretpostavimo da je $x \in \overline{ay}$.
Iz definicije metričke ravnine slijedi da je

$$d(a, x) + d(x, y) = d(a, y).$$

Stoga je $r + d(x, y) = r$ pa slijedi da je $d(x, y) = 0$ što povlači da je $x = y$.

2° Pretpostavimo da je $y \in \overline{ax}$.
Tada je

$$d(a, y) + d(y, x) = d(a, x)$$

pa slijedi da je $d(x, y) = 0$ tj. $x = y$.

Time smo dokazali da postoji jedinstveni $x \in l$ takav da je $d(a, x) = r$. □

2.2 Euklidska metrika

Propozicija 2.2.1. *Neka su $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Tada je*

$$(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2)^2 \leq (a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2). \tag{2.4}$$

Dokaz. Nejednakost (2.4) je ekvivalentna sljedećoj nejednakosti:

$$a_1^2 \cdot a_2^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot b_1 \cdot b_2 + b_1^2 \cdot b_2^2 \leq a_1^2 \cdot a_2^2 + a_1^2 \cdot b_2^2 + b_1^2 \cdot a_2^2 + b_1^2 \cdot b_2^2,$$

što je, nakon skraćivanja, ekvivalentno sa

$$2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot b_1 \cdot b_2 \leq a_1^2 \cdot b_2^2 + b_1^2 \cdot a_2^2.$$

Zadnja nejednakost je ekvivalentna sa

$$0 \leq b_1^2 \cdot a_2^2 - 2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot b_1 \cdot b_2 + a_1^2 \cdot b_2^2,$$

što je ekvivalentno sa

$$0 \leq (b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2)^2.$$

Zadnja nejednakost očito vrijedi pa zaključujemo da vrijedi (2.4). □

Lema 2.2.2. *Neka su $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Tada je*

$$\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}. \tag{2.5}$$

Dokaz. Nejednakost (2.5) je ekvivalentna sa

$$(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \leq a_1^2 + b_1^2 + 2 \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + a_2^2 + b_2^2,$$

tj. sa

$$a_1^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_2 + a_2^2 + b_1^2 + 2 \cdot b_1 \cdot b_2 + b_2^2 \leq a_1^2 + b_1^2 + 2 \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + a_2^2 + b_2^2.$$

Nakon skraćivanja dobivamo da je posljednja nejednakost ekvivalentna sa

$$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}. \tag{2.6}$$

Iz propozicije 2.2.1 slijedi da je

$$|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}.$$

Očito je

$$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 \leq |a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2|$$

pa slijedi (2.6). Prema tome, vrijedi (2.5). □

Propozicija 2.2.3. *Neka je $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Tada je d metrika na $\mathbb{R}^2$.

Dokaz. Očito je $d(x, y) \geq 0$ za sve $x, y \in \mathbb{R}^2$.
Neka su $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Ako je $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ onda je očito $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0$. Obratno, ako je $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0$ onda $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 0$ pa je $x_1 - x_2 = 0$ i $y_1 - y_2 = 0$. Stoga je $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$ pa je $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.
Nadalje, očito je $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d((x_2, y_2), (x_1, y_1))$.
Neka su $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$. Želimo dokazati da je

$$d\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) \leqslant d\left((x_1, y_1), (x_3, y_3)\right) + d\left((x_3, y_3), (x_2, y_2)\right), \tag{2.7}$$

tj. da je

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)} \leqslant \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}. \tag{2.8}$$

Definirajmo $a_1 = x_1 - x_3$, $a_2 = x_3 - x_2$, $b_1 = y_1 - y_3$ i $b_2 = y_3 - y_2$. Tada je $a_1 + a_2 = x_1 - x_2$ i $b_1 + b_2 = y_1 - y_2$. Prema lemi 2.2.2 vrijedi:

$$\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2},$$

a to je točno nejednakost (2.8). Prema tome, vrijedi (2.7).
Zaključak: d je metrika na $\mathbb{R}^2$. □

Definicija 2.2.4. *Za funkciju d iz prethodne propozicije kažemo da je* ***euklidska metrika na*** $\mathbb{R}^2$.

2.3 Euklidske metričke ravnine

Primjer 2.3.1. *Neka je p uređeni euklidski pravac. Tada je $p = (M, \{\rho, \tau\})$ gdje je M euklidski pravac, a ρ i τ međusobno suprotni euklidski uređaji na M. Pretpostavimo da je l polupravac od p određen točkom a. Tada je*

$$l = \{x \in M \mid a \leqslant x\}, \tag{2.9}$$

gdje je $\leqslant = \rho$ ili $\leqslant = \tau$. U svakom slučaju $\leqslant$ je euklidski uređaj na M. Stoga postoje $T_0, v \in \mathbb{R}^2$ takvi da je M pravac kroz T_0 vektora smjera v i $\leqslant = \preceq_{T_0,v}$.
Imamo $a \in M$ pa znamo da je M pravac kroz a vektora smjera v te da je $\leqslant = \preceq_{a,v}$ (po propoziciji 1.4.5).
Tvrdimo da je

$$l = \{a + \lambda \cdot v \mid \lambda \in [0, \infty\rangle\}. \tag{2.10}$$

Neka je $x \in l$. Prema (2.9) *imamo $a \leqslant x$. Stoga je*

$$a \preceq_{a,v} x. \tag{2.11}$$

Očito je $a = a + 0 \cdot v$, a imamo $x = a + \lambda \cdot v$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}$ (jer je $x \in M$ i M je pravac kroz a vektora smjera v). Iz (2.11) *slijedi $0 \leqslant \lambda$. Prema tome,*

$$x \in \{a + \lambda \cdot v \mid \lambda \in [0, \infty\rangle\}.$$

Obratno, neka je $\lambda \in [0, \infty\rangle$ te neka je $x = a + \lambda \cdot v$. Očito je tada $a \preceq_{a,v} x$, tj. $a \leqslant x$ pa je $x \in l$ prema (2.9). *Time smo dokazali da vrijedi* (2.10).

Propozicija 2.3.2. *Neka je $\mathcal{P}$ skup svih uređenih euklidskih pravaca. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^2$. Neka je $c \in \overline{ab}$ gdje je $\overline{ab}$ dužina određena točkama a i b u $(\mathbb{R}^2, \mathcal{P})$. Tada je*

$$d(a, b) = d(a, c) + d(c, b).$$

Dokaz. Prema propoziciji 1.6.2 vrijedi

$$\overline{ab} = \{a + \lambda \cdot (b - a) \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

Stoga postoji $\lambda \in [0, 1]$ takav da je $c = a + \lambda \cdot (b - a)$. Imamo $a = (x_1, y_1)$ i $b = (x_2, y_2)$ za neke $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Vrijedi:

$$c = a + \lambda \cdot (b - a) = (x_1, y_1) + \lambda \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (x_1 + \lambda \cdot (x_2 - x_1), y_1 + \lambda \cdot (y_2 - y_1)).$$

Dakle,

$$c = (x_1 + \lambda \cdot (x_2 - x_1), y_1 + \lambda \cdot (y_2 - y_1)). \tag{2.12}$$

Koristeći (2.12) dobivamo:

$$
\begin{aligned}
& d(a,c) + d(c,b) = \\
&= \sqrt{(x_1 - x_1 - \lambda(x_2 - x_1))^2 + (y_1 - y_1 - \lambda(y_2 - y_1))^2} + \\
&+ \sqrt{(x_1 + \lambda(x_2 - x_1) - x_2)^2 + (y_1 + \lambda\,(y_2 - y_1) - y_2)^2} \\
&= \sqrt{\lambda^2\,(x_2 - x_1)^2 + \lambda^2(y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(\lambda(x_2 - x_1) - (x_2 - x_1))^2 + (\lambda(y_2 - y_1) - (y_2 - y_1)^2)} \\
&= \lambda\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(\lambda - 1)^2\,(x_2 - x_1)^2 + (\lambda - 1)^2(y_2 - y_1)^2} \\
&= \lambda\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + (1 - \lambda)\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
&= \lambda d(a,b) + (1 - \lambda)\,d(a,b) \\
&= d(a,b)\,(\lambda + 1 - \lambda) \\
&= d(a,b).
\end{aligned}
$$

Prema tome, $d(a,c) + d(c,b) = d(a,b)$. □

Lema 2.3.3. *Neka je p pravac te neka su $a,b,c \in \hat{p}$. Pretpostavimo da $c \notin \overline{ab}^p$. Tada je $a \in \overline{cb}^p$ ili $b \in \overline{ac}^p$.*

Dokaz. Imamo $p = (\hat{p}, \{\rho, \sigma\})$ i $\leqslant \in \{\rho, \sigma\}$ takav da je $a \leqslant b$.
Tada je

$$\overline{ab}^p = \{x \in \hat{p} \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Imamo $c \notin \overline{ab}^p$ pa je $a \nleqslant c$ ili $c \nleqslant b$ (pri čemu za $x, y \in \hat{p}$ pišemo $x \nleqslant y$ ako ne vrijedi $x \leqslant y$).

1° Pretpostavimo da je $a \nleqslant c$.
Stoga je $c \leqslant a$ (jer je $\leqslant$ uređaj). Dakle, $c \leqslant a \leqslant b$ pa je $a \in \overline{cb}^p$.

2° Pretpostavimo da je $c \nleqslant b$.
Tada je $b \leqslant c$, dakle $a \leqslant b \leqslant c$ pa je $b \in \overline{ac}^p$.

□

Lema 2.3.4. *Neka je $\mathcal{P}$ skup svih uređenih euklidskih pravaca. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^2$ i $a,b,c \in \mathbb{R}^2$. Pretpostavimo da postoji $p \in \mathcal{P}$ takav da su $a,b,c \in \hat{p}$. Nadalje, pretpostavimo da $c \notin \overline{ab}$. Tada je*

$$d(a,b) < d(a,c) + d(c,b). \tag{2.13}$$

Dokaz. Imamo da $c \notin \overline{ab}^p$ pa prema lemi 2.3.3 vrijedi $a \in \overline{cb}^p$ ili $b \in \overline{ac}^p$, tj. $a \in \overline{cb}$ ili $b \in \overline{ac}$.

1° Pretpostavimo da je $a \in \overline{cb}$.
Iz propozicije 2.3.2 slijedi

$$d(c,b) = d(c,a) + d(a,b). \tag{2.14}$$

Uočimo da je $c \neq a$ (jer $c \notin \overline{ab}$) pa je $d(c,a) > 0$.
Stoga, iz (2.14) slijedi $d(a,b) < d(c,b)$. Očito je da to povlači (2.13).

2° Pretpostavimo da je $b \in \overline{ac}$.
Iz propozicije 2.3.2 slijedi

$$d(a,c) = d(a,b) + d(b,c).$$

Imamo $d(b,c) > 0$ (jer je $b \neq c$) pa je $d(a,b) < d(a,c)$. Stoga vrijedi (2.13).

Time je lema dokazana. □

Propozicija 2.3.5. *Neka je M euklidski pravac u $\mathbb{R}^2$. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^2$ i $b \in \mathbb{R}^2 \setminus M$. Tada postoji $b' \in M$ takav da za svaki $T \in M$ vrijedi $d(T,b') < d(T,b)$.*

Dokaz. Prema definiciji euklidskog pravca postoje $a, v \in \mathbb{R}^2$ takvi da je M pravac kroz a vektora smjera v.
Imamo $a = (a_1, a_2)$, $v = (v_1, v_2)$ i $b = (b_1, b_2)$. Iz $v \neq (0,0)$ slijedi $v_1 \neq 0$ ili $v_2 \neq 0$ pa je $v_1^2 + v_2^2 > 0$.
Definirajmo

$$\lambda = \frac{(b_1 - a_1) \cdot v_1 + (b_2 - a_2) \cdot v_2}{v_1^2 + v_2^2}. \tag{2.15}$$

Neka je $b' = a + \lambda \cdot v$. Tvrdimo da je b' tražena točka.
Imamo

$$b' = (a_1 + \lambda \cdot v_1,\ a_2 + \lambda \cdot v_2).$$

Neka je $T \in M$. Tada postoji $\mu \in \mathbb{R}$ takav da je $T = a + \mu \cdot v$. Dakle,

$$T = (a_1 + \mu \cdot v_1,\ a_2 + \mu \cdot v_2).$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} d(T,b') &= \sqrt{((\lambda - \mu) \cdot v_1)^2 + ((\lambda - \mu) \cdot v_2)^2} = \\ &= \sqrt{(\lambda - \mu)^2 \cdot (v_1^2 + v_2^2)} \end{aligned}$$

$$= |\lambda - \mu| \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Dakle,

$$d(T, b') = |\lambda - \mu| \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Imamo sljedeće ekvivalencije:

$$d(T, b') < d(T, b) \Leftrightarrow |\lambda - \mu| \sqrt{v_1^2 + v_2^2} < \sqrt{(a_1 - b_1 + \mu v_1)^2 + (a_2 - b_2 + \mu v_2)^2}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - \mu)^2 (v_1^2 + v_2^2) < (a_1 - b_1 + \mu v_1)^2 + (a_2 - b_2 + \mu v_2)^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 (v_1^2 + v_2^2) - 2\lambda\mu(v_1^2 + v_2^2) + \mu^2 (v_1^2 + v_2^2) < (a_1 - b_1)^2 + 2(a_1 - b_1)\mu v_1 + \mu^2 v_1^2 +$$

$$+ (a_2 - b_2)^2 + 2\,(a_2 - b_2)\mu v_2 + \mu^2 v_2^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 (v_1^2 + v_2^2) - 2\lambda\mu(v_1^2 + v_2^2) < (a_1 - b_1)^2 + 2(a_1 - b_1)\mu v_1 + (a_2 - b_2)^2 + 2(a_2 - b_2)\mu v_2$$

Koristeći (2.15), imamo sljedeće ekvivalencije:

$$\frac{((b_1 - a_1)v_1 + (b_2 - a_2)v_2)^2}{v_1^2 + v_2^2} - 2\,((b_1 - a_1)v_1 + (b_2 - a_2)v_2)\,\mu < (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 +$$

$$+2\,((a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2)\,\mu$$

$$\Leftrightarrow \frac{((b_1 - a_1)v_1 + (b_2 - a_2)v_2)^2}{v_1^2 + v_2^2} < (a_1 - b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2$$

$$\Leftrightarrow ((b_1 - a_1)v_1 + (b_2 - a_2)v_2)^2 < (v_1^2 + v_2^2)\left((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2\right) \tag{2.16}$$

Neka su $x = b_1 - a_1$ i $y = b_2 - a_2$. Tada je (2.16) ekvivalentno sa

$$(xv_1 + yv_2)^2 < (v_1^2 + v_2^2)(x^2 + y^2).$$

Nova nejednakost je ekvivalentna sa

$$x^2 v_1^2 + 2xv_1 yv_2 + y^2 v_2^2 < v_1^2 x^2 + v_1^2 y^2 + v_2^2 x^2 + v_2^2 y^2,$$

tj. sa

$$2xv_1 yv_2 < v_1^2 y^2 + v_2^2 x^2$$

$$\Leftrightarrow 0 < v_2^2 x^2 - 2xv_1 yv_2 + v_1^2 y^2.$$

Posljednja nejednakost je ekvivalantna sa

$$0 < (v_2 x - v_1 y)^2.$$

Stoga je $d(T,b') < d(T,b)$ ako i samo ako je $v_2 \cdot x \neq v_1 \cdot y$.
Pretpostavimo da je $v_2 \cdot x = v_1 \cdot y$. Dakle,

$$v_2(b_1 - a_1) = v_1(b_2 - a_2). \tag{2.17}$$

Pretpostavimo da je $v_1 \neq 0$. Tada iz (2.17) slijedi

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{v_1} \cdot v_2, \tag{2.18}$$

a očito je

$$b_1 - a_1 = \frac{b_1 - a_1}{v_1} \cdot v_1. \tag{2.19}$$

Neka je $k = \dfrac{b_1 - a_1}{v_1}$. Iz (2.18) i (2.19) slijedi $b_2 = a_2 + k \cdot v_2$ i $b_1 = a_1 + k \cdot v_1$, tj. $b = a + k \cdot v$ što znači da je $b \in M$ što je u kontradikciji sa pretpostavkom. Stoga je $v_1 = 0$ pa slijedi da je $v_2 \neq 0$. Iz (2.17) slijedi

$$b_1 - a_1 = \frac{b_2 - a_2}{v_2} \cdot v_1,$$

a očito je

$$b_2 - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{v_2} \cdot v_2.$$

Slijedi da je $b = a + k' \cdot v$ gdje je $k' = \dfrac{b_2 - a_2}{v_2}$. To znači da je $b \in M$ što je nemoguće.
Zaključak: $v_2 \cdot x \neq v_1 \cdot y$. Stoga je $d(T,b') < d(T,b)$. Time je tvrdnja propozicije dokazana.

□

Teorem 2.3.6. *Neka je $\mathcal{P}$ skup svih uređenih euklidskih pravaca. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^2$. Tada je $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}, d\right)$ metrička ravnina.*

Dokaz. Prema teoremu 1.6.8 imamo da je $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}\right)$ ravnina, a prema propoziciji 2.2.3 znamo da je d metrika na $\mathbb{R}^2$.
Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^2$. Tvrdimo da je

$$d(a,b) = d(a,c) + d(c,b) \Leftrightarrow \; c \in \overline{ab}. \tag{2.20}$$

Ako je $c \in \overline{ab}$, onda je $d(a,b) = d(a,c) + d(c,b)$ prema propoziciji 2.3.2.
Obratno, pretpostavimo da je

$$d(a,b) = d(a,c) + d(c,b). \tag{2.21}$$

Želimo dokazati da je $c \in \overline{ab}$. Pretpostavimo suprotno, tj. $c \notin \overline{ab}$. Odaberimo $p \in \mathcal{P}$ takav da su $a, b \in \hat{p}$ (takav p je jedinstven ako je $a \neq b$, a ako je $a = b$ onda sigurno možemo

naći jedan takav pravac).
Ako je $c \in \hat{p}$, onda iz leme 2.3.4 slijedi da je $d(a,b) < d(a,c)+d(c,b)$, što je u kontradikciji sa (2.21). Stoga, $c \notin \hat{p}$.
Imamo da je $\hat{p}$ euklidski pravac pa iz propozicije 2.3.5 slijedi da postoji $c' \in \hat{p}$ takav da je $d(T,c') < d(T,c)$ za svaki $T \in \hat{p}$. Posebno $d(a,c') < d(a,c)$ i $d(b,c') < d(b,c)$. Stoga je

$$d(a,b) \leqslant d(a,c') + d(c',b) < d(a,c) + d(c,b).$$

Dakle, $d(a,b) < d(a,c) + d(c,b)$ što je u kontradikciji sa (2.21).
Zaključak: $c \in \overline{ab}$. Prema tome, vrijedi (2.20).

Nadalje, neka je l polupravac u $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}\right)$ s vrhom a te neka je $r \in \mathbb{R}, r > 0$. Tada postoji $p \in \mathcal{P}$ takav da je l polupravac u p određen točkom a. Imamo da je p uređeni euklidski pravac pa iz primjera 2.3.1 slijedi da postoji $v \in \mathbb{R}^2, v \neq (0,0)$ takav da je

$$l = \{a + \lambda \cdot v \mid \lambda \in [0, \infty\rangle\}. \tag{2.22}$$

Imamo $a = (a_1, a_2)$ i $v = (v_1, v_2)$. Uočimo da je $v_1^2 + v_2^2 > 0$. Definirajmo

$$\lambda = \frac{r}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Očito je $\lambda > 0$. Definirajmo $x = a + \lambda \cdot v$. Prema (2.22) vrijedi $x \in l$. Uočimo da je

$$x = (a_1 + \lambda \cdot v_1, a_2 + \lambda \cdot v_2).$$

Imamo

$$d(x,a) = \sqrt{(\lambda \cdot v_1)^2 + (\lambda \cdot v_2)^2} = \lambda \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \frac{r}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = r.$$

Dakle, $d(x,a) = r$. Prema tome, postoji $x \in l$ takav da je $d(x,a) = r$.
Zaključak: $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}, d\right)$ je metrička ravnina. □

Definicija 2.3.7. *Za uređenu trojku $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}, d\right)$ iz prethodnog teorema kažemo da je* ***euklidska metrička ravnina.***

2.4 Neeuklidske metričke ravnine

Propozicija 2.4.1. *Neka je $\mathcal{P}$ skup svih uređenih euklidskih pravaca. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^2$ te neka je $M \in \mathbb{R}, M > 0$. Definirajmo funkciju $d' : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sa*

$$d'(x,y) = M \cdot d(x,y).$$

Tada je $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}, d'\right)$ metrička ravnina.

Dokaz. Dokažimo prvo da je d' metrika na $\mathbb{R}^2$.
Neka su $x, y \in \mathbb{R}^2$. Očito je $d'(x, y) \geqslant 0$. Nadalje, imamo

$$d'(x, y) = 0 \Leftrightarrow M \cdot d(x, y) = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Dakle, $d'(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
Očito je $d'(x, y) = d'(y, x)$. Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^2$. Imamo

$$d'(x, y) = M \cdot d(x, y) \leqslant M\,(d(x, z) + d(z, y)) = M \cdot d(x, z) + M \cdot d(z, y) = d'(x, z) + d'(z, y).$$

Dakle, $d'(x, y) \leqslant d'(x, z) + d'(z, y)$.
Prema tome, d' je metrika na $\mathbb{R}^2$.
Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^2$. Koristeći činjenicu da je $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}, d\right)$ metrička ravnina, dobivamo

$$d'(a, b) = d'(a, c) + d'(c, b) \Leftrightarrow M \cdot d(a, b) = M \cdot d(a, c) + M \cdot d(c, b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d(a, b) = d(a, c) + d(c, b) \Leftrightarrow c \in \overline{ab}.$$

Neka je l polupravac u $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}\right)$ s vrhom a. Neka je $r \in \mathbb{R}, r > 0$. Želimo dokazati da postoji $x \in l$ takav da je $d'(x, a) = r$.
Očito je $\frac{r}{M} > 0$ pa budući da je $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}, d\right)$ metrička ravnina, postoji $x \in l$ takav da je $d(x, a) = \frac{r}{M}$. Slijedi $M \cdot d(x, a) = r$, tj. $d'(x, a) = r$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Teorem 2.4.2. *Neka je $\mathcal{P}$ skup svih uređenih euklidskih pravaca. Neka je $D : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$D\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + |x_1 - x_2|.$$

Tada je $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}, D\right)$ metrička ravnina.

Dokaz. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^2$. Uočimo da je

$$D\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = d\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) + |x_1 - x_2|.$$

Dokažimo da je D metrika.
Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^2$, $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$ i $c = (x_3, y_3)$.
Očito je $D(a, b) \geqslant 0$. Nadalje, ako je $a = b$, onda je $D(a, b) = 0$. Obratno, pretpostavimo da je $D(a, b) = 0$. Tada je $d(a, b) + |x_1 - x_2| = 0$ pa je (zbog $d(a, b) \geqslant 0$) $d(a, b) = 0$, što povlači $a = b$.
Očito je i $D(a, b) = D(b, a)$.
Koristeći činjenicu da za sve $u, v \in \mathbb{R}$ vrijedi $|u + v| \leq |u| + |v|$ dobivamo

$$D(a, b) = d(a, b) + |x_1 - x_2| \leqslant$$

$$\begin{aligned} &\leqslant d(a,c) + d(c,b) + |x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \leqslant \\ &\leqslant d(a,c) + d(c,b) + |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| = \\ &= d(a,c) + |x_1 - x_3| + d(c,b) + |x_3 - x_2| = \\ &= D(a,c) + D(c,b). \end{aligned}$$

Dakle, $D(a,b) \leqslant D(a,c) + D(c,b)$.
Prema tome, D je metrika na $\mathbb{R}^2$.
Dokažimo da je

$$D(a,b) = D(a,c) + D(c,b) \Leftrightarrow c \in \overline{ab}. \tag{2.23}$$

Pretpostavimo da je $D(a,b) = D(a,c) + D(c,b)$. Tada je

$$d(a,b) + |x_1 - x_2| = d(a,c) + |x_1 - x_3| + d(c,b) + |x_3 - x_2|. \tag{2.24}$$

Kao maloprije, vrijedi

$$|x_1 - x_2| \leqslant |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|. \tag{2.25}$$

Znamo da je $d(a,b) \leqslant d(a,c) + d(c,b)$.
Kada bi vrijedilo $d(a,b) < d(a,c) + d(c,b)$, onda bismo zbrajanjem sa (2.25) dobili

$$d(a,b) + |x_1 - x_2| < d(a,c) + d(c,b) + |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|,$$

što je nemoguće prema (2.24). Stoga je $d(a,b) = d(a,c) + d(c,b)$ pa je $c \in \overline{ab}$ (jer je $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}, d\right)$ metrička ravnina.)
Dakle, $D(a,b) = D(a,c) + D(c,b)$ povlači $c \in \overline{ab}$.
Obratno, pretpostavimo da je $c \in \overline{ab}$. Prema propoziciji 1.6.2 vrijedi

$$\overline{ab} = \{a + \lambda \cdot (b - a) \mid \lambda \in [0,1]\}.$$

Stoga postoji $\lambda \in [0,1]$ takav da je $c = a + \lambda \cdot (b - a)$.
Slijedi

$$(x_3, y_3) = (x_1 + \lambda \cdot (x_2 - x_1), y_1 + \lambda \cdot (y_2 - y_1))$$

pa je $x_3 = x_1 + \lambda \cdot (x_2 - x_1)$ i $y_3 = y_1 + \lambda \cdot (y_2 - y_1)$.
Imamo

$$\begin{aligned} |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| &= |\lambda \cdot (x_2 - x_1)| + |x_1 + \lambda \cdot (x_2 - x_1) - x_2| = \\ &= \lambda \cdot |x_2 - x_1| + |(1 - \lambda) \cdot (x_1 - x_2)| = \\ &= \lambda \cdot |x_1 - x_2| + (1 - \lambda) \cdot |x_1 - x_2| = \\ &= (\lambda + 1 - \lambda) \cdot |x_1 - x_2| = \\ &= |x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Dakle,

$$|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| = |x_1 - x_2| \tag{2.26}$$

Iz $c \in \overline{ab}$ i činjenice da je $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}, d\right)$ metrička ravnina, slijedi

$$d(a, c) + d(c, b) = d(a, b). \tag{2.27}$$

Zbrajanjem jednakosti (2.26) i (2.27) dobivamo

$$d(a, c) + |x_1 - x_3| + d(c, b) + |x_3 - x_2| = d(a, b) + |x_1 - x_2|,$$

tj. $D(a, c) + D(c, b) = D(a, b)$. Time smo dokazali da vrijedi (2.23).
Neka je l polupravac u $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}\right)$ s vrhom a. Neka je $r \in \mathbb{R}, r > 0$.
Kao u dokazu teorema 2.3.6, zaključujemo da postoji $v \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ takav da je

$$l = \{a + \lambda \cdot v \mid \lambda \in [0, \infty\rangle\}. \tag{2.28}$$

Imamo $a = (a_1, a_2)$ i $v = (v_1, v_2)$.
Definirajmo

$$\lambda = \frac{r}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2} + |v_1|}.$$

Očito je $\lambda > 0$.
Definirajmo

$$x = a + \lambda \cdot v.$$

Prema 2.28 slijedi $x \in l$.
Uočimo da je

$$x = (a_1 + \lambda \cdot v_1, a_2 + \lambda \cdot v_2).$$

Imamo

$$\begin{aligned} D(x, a) &= d(x, a) + |\lambda \cdot v_1| = \\ &= \sqrt{\lambda^2 \cdot v_1^2 + \lambda^2 \cdot v_2^2} + \lambda \cdot |v_1| = \\ &= \lambda \cdot \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2} + |v_1|\right) = \\ &= \frac{r}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2} + |v_1|} \cdot \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2} + |v_1|\right) = \\ &= r. \end{aligned}$$

Dakle, $D(x, a) = r$.
Zaključak: $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}, D\right)$ je metrička ravnina. □

Primjer 2.4.3. *Neka je $d_\infty : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d_\infty\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \max\left\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\right\}.$$

Tvrdimo da je d_∞ metrika na $\mathbb{R}^2$.
Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^2$, $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$ i $c = (x_3, y_3)$.
Očito je $d_\infty(a, b) \geqslant 0$. Imamo

$$d_\infty(a, b) = 0 \Leftrightarrow \max\left\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\right\} = 0 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \ \ i \ \ y_1 = y_2 \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow a = b.$$

Dakle, $d_\infty(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$.
Očito je $d_\infty(a, b) = d_\infty(b, a)$. Vrijedi

$$|x_1 - x_2| = |x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \leqslant |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|\right\} + \max\left\{|x_3 - x_2|, |y_3 - y_2|\right\} = d_\infty(a, c) + d_\infty(c, b).$$

Dakle, $|x_1 - x_2| \leqslant d_\infty(a, c) + d_\infty(c, b)$. Analogno dobivamo da je $|y_1 - y_2| \leqslant d_\infty(a, c) + d_\infty(c, b)$. Stoga je

$$\max\left\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\right\} \leqslant d_\infty(a, c) + d_\infty(c, b),$$

tj. $d_\infty(a, b) \leqslant d_\infty(a, c) + d_\infty(c, b)$.
Prema tome, d_∞ je metrika na $\mathbb{R}^2$.

Neka je $\mathcal{P}$ skup svih uređenih euklidskih pravaca. Tvrdimo da $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}, d_\infty\right)$ nije metrička ravnina.
Neka je $a = (0, 0), b = (1, 0)$ i $c = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Prema propoziciji 1.6.2 imamo

$$\overline{ab} = \{a + \lambda \cdot (b - a) \ \mid \ \lambda \in [0, 1]\}.$$

Slijedi $c \notin \overline{ab}$.
Imamo $d_\infty(a, b) = 1, d_\infty(a, c) = \frac{1}{2}$ i $d_\infty(c, b) = \frac{1}{2}$.
Stoga je $d_\infty(a, b) = d_\infty(a, c) + d_\infty(c, b)$. No, kao što smo pokazali, $c \notin \overline{ab}$.
Prema tome, $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}, d_\infty\right)$ nije metrička ravnina.

Bibliografija

[1] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, J. Wiley, New York, 1969.

[2] P. J. Ryan, *Euclidian and non-Euclidian geometry - an analytic approach*, Cambridge University Press, 1986.

[3] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[4] M. Tomić Kruljac, *Metrička ravnina*, diplomski rad, PMF-MO, Zagreb, 2015.

Sažetak

U ovom diplomskom radu smo proučavali metričke prostore na kojima su zadane određene geometrijske strukture. Točnije, promatrali smo metričke ravnine i dali neke primjere metričkih ravnina.
U prvom poglavlju smo uveli pojam pravca i segmenta na pravcu. Zatim smo definirali prostor pravaca i proučavali euklidske i uređene euklidske pravce. Dokazali smo da je $\mathbb{R}^2$ zajedno sa skupom svih uređenih euklidskih pravaca, prostor pravaca. Nakon toga smo definirali ravninu i dokazali da je $\mathbb{R}^2$ zajedno sa skupom svih uređenih euklidskih pravaca također i ravnina.
U drugom poglavlju smo definirali metriku i polupravac. Nakon definicije metričke ravnine, proučavali smo euklidsku metriku na $\mathbb{R}^2$ i definirali euklidsku metričku ravninu. Na samome kraju smo naveli primjere neeuklidskih metričkih ravnina.

Summary

In this thesis we studied metric spaces in which certain geometric structures are given. Specifically, we observed metric planes and gave some examples of metric planes.
In the first chapter, we introduced term of line and segment on a line. Then we defined the space of lines and studied Euclidean and ordered Euclidean lines. We have proved that $\mathbb{R}^2$ together with the set of all ordered Euclidean lines is a space of lines. Afterwards we defined the plane and proved that $\mathbb{R}^2$ together with the set of all ordered Euclidean lines is also a plane.
In the second chapter, we defined metrics and half-lines. After defining the metric plane, we studied the Euclidean metric on $\mathbb{R}^2$ and defined the Euclidean metric plane. At the very end, we have given examples of non-Euclidean metric planes.

Životopis

Rođena sam 18. srpnja 1996. godine u Dubrovniku. Pohađala sam Osnovnu školu Župa dubrovačka. Nakon završetka osnovne škole upisujem opći program Gimnazije Dubrovnik. Srednjoškolsko obrazovanje završavam 2015. godine, a iste godine i upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika - nastavnički smjer na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij završavam 2018. godine kada i upisujem diplomski studij Matematika - nastavnički smjer na istom fakultetu.