Upotpunjenja uređenih polja

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Barbara Pedić

UPOTPUNJENJA UREĐENIH POLJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, veljača, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem mentoru, izv. prof. dr. sc. Zvonku Iljazoviću, na podršci, izdvojenom vremenu i velikodušnoj pomoći tijekom izrade diplomskog rada.

Najveće hvala mojim roditeljima i bratu na bezuvjetnoj podršci i ljubavi koju su mi pružili tijekom cijelog mog obrazovanja. Vi ste bili moj oslonac i snaga onda kada je to bilo najpotrebnije.

Zahvaljujem se i svojim prijateljima koji su uvijek bili tu za mene, vjerovali u mene i zajedno samnom veselili se svim položenim ispitima.

I na kraju, ali ne manje bitno zahvaljujem se svom dečku, budućem suprugu na bezuvjetnoj podršci koju mi je pružao, na razumijevanju, poticajima i velikodušnoj pomoći kada mi je bila potrebna.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu proučavamo uređene prstene i polja, pri čemu posebno promatramo konstrukciju kojom bi se uređeno polje moglo upotpuniti. Diplomski rad je podijeljen na dva poglavlja, uređene prstene i polja te Cauchyjeve nizove u uređenom polju.

U prvom poglavlju proučavamo grupe i uređene grupe, a zatim uređene prstene i polja te konvergenciju nizova u uređenim prstenima.

U drugom poglavlju proučavamo Cauchyjeve nizove u uređenim poljima, omeđenost u uređenim prstenima te relaciju ekvivalencije na skupu Cauchyjevih nizova u uređenom polju. Nakon toga na pripadnom kvocijentom skupu $C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$ definiramo binarne operacije $\oplus$ i $\odot$ te pokazujemo da je $(C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim, \oplus, \odot)$ polje.

Na kraju definiramo relaciju uređaja $\preceq$ na $C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$ te pokazujemo da je $(C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim, \oplus, \odot, \preceq)$ uređeno polje.

Poglavlje 1

Uređeni prsteni i polja

1.1 Grupa

Definicija 1.1.1. *Neka je G neprazan skup i $*$ funkcija sa $G \times G$ u G. Tada za $*$ kažemo da je* **binarna operacija** *na skupu G. Za x,$y \in G$ pišemo $x * y$ umjesto $*(x, y)$. Dakle,*

$$x * y \in G, \text{ za sve } x, y \in G.$$

Definicija 1.1.2. *Neka je $*$ binarna operacija na skupu G. Kažemo da je $*$* ***asocijativna*** *ako vrijedi*

$$(x * y) * z = x * (y * z), \text{za sve } x, y, z \in G.$$

Definicija 1.1.3. *Neka je $*$ binarna operacija na skupu G te neka je $e \in G$. Kažemo da je e* **neutralni element** *za operaciju $*$ ako $\forall x \in G$ vrijedi*

$$x * e = e * x = x.$$

Napomena 1.1.4. *Uočimo da je neutralni element, ako postoji, jedinstven. Naime, pretpostavimo da su e_1 i e_2 neutralni elementi za $*$. Za svaki $x \in G$ vrijedi $x * e_1 = x$ pa posebno za $x = e_2$ dobivamo*

$$e_2 * e_1 = e_2. \tag{1.1}$$

Za svaki $x \in G$ vrijedi $e_2 * x = x$ pa za $x = e_1$ dobivamo

$$e_2 * e_1 = e_1. \tag{1.2}$$

Iz (1.1) i (1.2) slijedi $e_1 = e_2$.

Definicija 1.1.5. *Neka je $*$ binarna operacija na skupu G te neka je e neutralni element za G. Neka su x,$y \in G$. Kažemo da je y* ***inverzni element*** *od x s obzirom na $*$ ako vrijedi*

$$x * y = y * x = e.$$

Napomena 1.1.6. *Neka je $*$ binarna operacija na skupu G te neka je e neutralni element za $*$. Pretpostavimo da su $x,y_1,y_2 \in G$ takvi da su y_1 i y_2 inverzni elementi od x s obzirom na $*$. Tada je $y_1 = y_2$. Naime, vrijedi*

$$y_1 = e * y_1 = (y_2 * x) * y_1 = y_2 * (x * y_1) = y_2 * e = y_2.$$

Definicija 1.1.7. *Za binarnu operaciju $*$ na skupu G kažemo da je **komutativna** ako za sve $x,y \in G$ vrijedi*

$$x * y = y * x.$$

Pretpostavimo da je $*$ asocijativna binarna operacija na skupu G, da postoji neutralni element za $*$ te da za svaki $x \in G$ postoji inverzni element od x s obzirom na $*$. Tada za uređeni par $(G, *)$ kažemo da je **grupa**.

Ako je $(G, *)$ grupa takva da je $*$ komutativna kažemo da je $(G, *)$ **Abelova grupa**.

Napomena 1.1.8. *Neka je $(G, *)$ grupa te neka su $a,b,c \in G$ takvi da je $a * b = a * c$. Tada je $b = c$. Naime, ako je a' inverzni element od a, onda vrijedi $a' * (a * b) = a' * (a * c)$ pa iz asocijativnosti od $*$ slijedi $e * b = e * c$ (gdje je e neutralni element za $*$), dakle $b = c$.*

Napomena 1.1.9. *Ako je $(G, +)$ Abelova grupa, onda sa 0 obično označavamo neutralni element za $+$, a za $x \in G$ sa $-x$ inverzni element od x s obzirom na $+$. Dakle,*

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

1.2 Uređena grupa

Definicija 1.2.1. *Neka je S skup. Za bilo koji podskup od $S \times S$ kažemo da je binarna relacija na skupu S. Ako je $\sim$ binarna relacija na skupu S te ako su $x,y \in S$ takvi da je $(x, y) \in \sim$, onda pišemo $x \sim y$.*

Definicija 1.2.2. *Za binarnu relaciju $\sim$ na skupu S kažemo da je:*

*(1) **refleksivna** ako za svaki $x \in S$ vrijedi $x \sim x$;*

*(2) **antisimetrična** ako za sve $x,y \in S$ takve da je $x \sim y$ i $y \sim x$ vrijedi $x = y$;*

*(3) **tranzitivna** ako za sve $x,y,z \in S$ takve da je $x \sim y$ i $y \sim z$ vrijedi $x \sim z$.*

Neka je $\leqslant$ binarna operacija na skupu S koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Pretpostavimo da za sve $x,y \in S$ vrijedi $x \leqslant y$ ili $y \leqslant x$. Tada za $\leqslant$ kažemo da je **uređaj** na S.

Napomena 1.2.3. *Neka je $\leqslant$ uređaj na skupu S te neka su $x,y \in S$. Pišemo $x < y$ ako je*

$$x \leqslant y \text{ i } x \neq y.$$

Napomena 1.2.4. *Neka je $\leqslant$ uređaj na skupu S te neka su $x,y \in S$. Pišemo $x \nleqslant y$ ako ne vrijedi $x \leqslant y$ te pišemo $x \nless y$ ako ne vrijedi $x < y$.*

Propozicija 1.2.5. *Neka je $\leqslant$ uređaj na skupu S te neka su $x,y,z \in S$. Tada vrijedi:*

(1) $x \nleqslant y \Longleftrightarrow y < x$

(2) $y \nless x \Longleftrightarrow x \leqslant y$

(3) $(x < y \text{ i } y \leqslant z) \Rightarrow x < z$

(4) $(x \leqslant y \text{ i } y < z) \Rightarrow x < z$

Dokaz. (1) Pretpostavimo da $x \nleqslant y$. Prema definiciji uređaja vrijedi $x \leqslant y$ ili $y \leqslant x$. Stoga je $y \leqslant x$. Kada bi vrijedilo $y = x$ onda bismo imali $x \leqslant y$ što je suprotno našoj pretpostavci. Stoga je $y \neq x$ pa zaključujemo da je $y < x$.

Obratno, pretpostavimo da je $y < x$. Tada je $y \leqslant x$ i $y \neq x$. Pretpostavimo da je $x \leqslant y$. Iz antisimetričnosti binarne relacije $\leqslant$, zbog $y \leqslant x$ i $x \leqslant y$ slijedi $y = x$. Kontradikcija. Dakle, ne vrijedi $x \leqslant y$, tj. $x \nleqslant y$.

(2) Slijedi iz (1) obratom po kontrapoziciji.

(3) Pretpostavimo da je $x < y$ i $y \leqslant z$. Iz $x < y$ i (1) slijedi $y \nleqslant x$. Iz ovog i $y \leqslant z$ slijedi $x \neq z$. Iz $x < y$ slijedi $x \leqslant y$ što, zajedno sa $y \leqslant z$, daje $x \leqslant z$. Dakle, $x \neq z$ i $x \leqslant z$ pa je $x < z$.

(4) Pretpostavimo da je $x \leqslant y$ i $y < z$. Iz (2) slijedi $y \nless x$ pa zaključujemo $x \neq z$. Kao u (3) zaključujemo da je $x \leqslant z$ pa je $x < z$. □

Definicija 1.2.6. *Neka je $(G,+)$ Abelova grupa te neka je $\leqslant$ uređaj na G. Kažemo da je $(G,+,\leqslant)$* ***uređena grupa*** *ako za sve $x,y,z \in G$ takve da je $x \leqslant y$ vrijedi*

$$x + z \leqslant y + z.$$

Propozicija 1.2.7. *Neka je $(G,+,\leqslant)$ uređena grupa te neka su $x,y,z \in G$. Tada je*

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow x + z \leqslant y + z.$$

Dokaz. Ako je $x \leqslant y$ onda je po definiciji uređene grupe $x + z \leqslant y + z$.
Obratno, pretpostavimo da je $x + z \leqslant y + z$. Tada iz definicije uređene grupe slijedi

$$(x + z) + (-z) \leqslant (y + z) + (-z),$$

tj. $x \leqslant y$. □

Propozicija 1.2.8. *Neka je $(G, +, \leqslant)$ uređena grupa te neka su $x,y,z \in G$. Pretpostavimo da je $x < y$. Tada je*

$$x + z < y + z.$$

Dokaz. Iz $x < y$ slijedi da je $x \leqslant y$ i $x \neq y$. Iz $x \leq y$ slijedi $x + z \leqslant y + z$. Pretpostavimo da je $x + z = y + z$. Tada iz napomene 1.1.8 slijedi $x = y$, što je u kontradikciji s činjenicom da je $x \neq y$. Prema tome je $x + z \neq y + z$ pa je $x + z < y + z$. □

Korolar 1.2.9. *Neka je $(G, +, \leqslant)$ uređena grupa te neka su $x,y,z \in G$. Tada je*

$$x < y \Longleftrightarrow x + z < y + z.$$

Dokaz. Slijedi iz prethodne propozicije (kao u dokazu propozicije 1.2.7). □

1.3 Prsten

Definicija 1.3.1. *Neka je P skup te neka su $+$ i $\cdot$ binarne operacije na skupu P. Pretpostavimo da je $(P, +)$ Abelova grupa te da je $\cdot$ asocijativna binarna operacija. Pretpostavimo da za sve $x,y,z \in P$ vrijedi $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$ i $z \cdot (x + y) = (z \cdot x) + (z \cdot y)$. Tada za $(P, +, \cdot)$ kažemo da je* ***prsten****.*

Ako je $(P, +, \cdot)$ prsten takav da je $\cdot$ komutativna binarna operacija onda za $(P, +, \cdot)$ kažemo da je **komutativan prsten.**

Ako je $(P, +, \cdot)$ prsten onda neutralni element za operaciju $+$ obično označavamo sa 0 i zovemo **nula u prstenu** $(P, +, \cdot)$.

Ako je $(P, +, \cdot)$ prsten takav da binarna operacija $\cdot$ ima neutralni element onda za $(P, +, \cdot)$ kažemo da je **prsten s jedinicom**. U tom slučaju neutralni element za $\cdot$ obično označavamo sa 1 te nazivamo jedinica u prstenu.

Napomena 1.3.2. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten. Kao i inače prilikom zapisivanja izraza koji uključuju $+$ i $\cdot$ smatramo da $\cdot$ ima "veći prioritet" od $+$. Tako naprimjer umjesto $(x \cdot z) + (y \cdot z)$ pišemo $x \cdot z + y \cdot z$.*

Ako je $(P, +, \cdot)$ prsten onda za $x \in P$ sa $-x$ označavamo inverzni element od x s obzirom na binarnu operaciju $+$. Dakle, za svaki $x \in P$ vrijedi $x + (-x) = (-x) + x = 0$. Iz same definicije inverznog elementa je jasno da je $-(-x) = x$ za svaki $x \in P$. Nadalje ako su a,b $\in$ P, vrijedi $a + b = 0$ ako i samo ako je $a = -b$.

Propozicija 1.3.3. *Neka je* $(P, +, \cdot)$ *prsten te neka je* $x \in P$*. Tada je* $0 \cdot x = 0$ *i* $x \cdot 0 = 0$.

Dokaz. Vrijedi

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x,$$

dakle $0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$ pa dodavanjem lijevoj i desnoj strani $-(0 \cdot x)$ dobivamo $0 = 0 \cdot x$.

Analogno dobivamo $x \cdot 0 = 0$. □

Propozicija 1.3.4. *Neka je* $(P, +, \cdot)$ *prsten te neka su x,y* $\in P$*. Tada vrijedi*

(1) $x \cdot (-y) = -x \cdot y$

(2) $(-x) \cdot y = -x \cdot y$

(3) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

Dokaz. (1) Koristeći prethodnu propoziciju dobivamo

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot ((-y) + y) = x \cdot 0 = 0,$$

dakle

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = 0$$

pa slijedi tvrdnja (1).

(2) Slično kao pod (1) imamo

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = ((-x) + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0,$$

pa slijedi (2).

(3) Koristeći (2) i (1) dobivamo

$$(-x) \cdot (-y) = -(x \cdot (-y)) = -(-x \cdot y) = x \cdot y.$$

Dakle, (3) vrijedi. □

Napomena 1.3.5. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten s jedinicom takav da P ima bar dva elementa. Tada je $0 \neq 1$. Naime, kada bi vrijedilo $0 = 1$ onda bismo za svaki $x \in P$ imali, prema propoziciji 1.3.3 $x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$, dakle $x = 0$ tj. $P = \{0\}$ što je u kontradikciji s tim da P ima bar dva elementa.*

Napomena 1.3.6. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten takav da P ima bar dva elementa. Tada $(P, \cdot)$ nije grupa. Pretpostavimo suprotno. Tada binarna operacija $\cdot$ ima neutralni element, dakle $(P, +, \cdot)$ je prsten s jedinicom. Budući da je $(P, \cdot)$ grupa, svaki element od P ima inverzni element s obzirom na $\cdot$ pa posebno postoji $x \in P$ takav da je $0 \cdot x = 1$. slijedi $0 = 1$ što je u kontradikciji s prethodnom napomenom.*

1.4 Uređeni prsteni i polja

Definicija 1.4.1. *Neka je $(P, +, \cdot)$ komutativni prsten s jedinicom takav da P ima bar dva elementa. Pretpostavimo da svaki element od P različit od nule ima inverzni element s obzirom na binarnu operaciju $\cdot$. Tada za $(P, +, \cdot)$ kažemo da je **polje**.*

Napomena 1.4.2. *Neka je $(P, +, \cdot)$ polje. Iz napomene 1.3.5 slijedi $0 \neq 1$.*

Ako je $(P, +, \cdot)$ polje onda za $x \in$ P takav da je $x \neq 0$ sa x^{-1} označavamo inverzni element od x s obzirom na binarnu operaciju $\cdot$. Dakle, za svaki $x \in$ P takav da je $x \neq 0$ vrijedi

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

Propozicija 1.4.3. *Neka je $(P, +, \cdot)$ polje te neka su $x,y \in P$ takvi da je $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Tada je $x \cdot y \neq 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $x \cdot y = 0$. Slijedi $x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0 = 0$. S druge strane $x^{-1} \cdot (x \cdot y) = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = 1 \cdot y = y$, dakle $y = 0$, što je u kontradikciji s pretpostavkom propozicije. Dakle, $x \cdot y \neq 0$. $\square$

Napomena 1.4.4. *Neka je $(P, +, \cdot)$ polje te neka je $x \in P$ takav da je $x \neq 0$. Tada je $x^{-1} \neq 0$, naime u suprotnom bismo imali $1 = x \cdot x^{-1} = x \cdot 0 = 0$, što je nemoguće prema napomeni 1.4.2 . Nadalje, očito je*

$$(x^{-1})^{-1} = x.$$

Definicija 1.4.5. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten te neka je $\leqslant$ uređaj na P takav da je $(P, +, \leqslant)$ uređena grupa. Pretpostavimo da za sve $x,y \in P$ takve da za $0 \leqslant x$ i $0 \leqslant y$ vrijedi $0 \leqslant x \cdot y$. Tada za $(P, +, \cdot, \leqslant)$ kažemo da je **uređeni prsten**.*

Definicija 1.4.6. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeni prsten. Ako je* $(P, +, \cdot)$ *prsten s jedinicom onda za* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *kažemo da je uređeni prsten s jedinicom. Ako je* $(P, +, \cdot)$ *polje onda za* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *kažemo da je* ***uređeno polje****.*

Propozicija 1.4.7. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeni prsten s jedinicom. Tada je* $0 \leqslant 1$.

Dokaz. Prema definiciji uređaja vrijedi $0 \leqslant 1$ ili $1 \leqslant 0$. Ako je $1 \leqslant 0$ onda je $0 \leqslant -1$ pa iz definicije uređenog prstena i propozicije 1.3.4 slijedi $0 \leqslant (-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 = 1$, tj. $0 \leqslant 1$. Dakle, u svakom slučaju vrijedi $0 \leqslant 1$. □

Korolar 1.4.8. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeno polje. Tada je* $0 < 1$.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz napomene 1.4.2 i propozicije 1.4.7. □

Definicija 1.4.9. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeni prsten. Za* $x \in P$ *definiramo*

$$|x| = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \\ -x, & \textit{inače} \end{cases}$$

Propozicija 1.4.10. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeni prsten. Neka je* $x \in P$. *Tada vrijedi sljedeće*

(1) $0 \leqslant |x|$

(2) $|x| = 0 \iff x = 0$

(3) $x \leqslant |x|$

(4) $|-x| = |x|$

Dokaz. (1) Prema propoziciji 1.2.5 vrijedi $0 \leqslant x$ ili $x < 0$. Ako je $0 \leqslant x$ onda je $|x| = x$ pa je $0 \leqslant |x|$. Ako je $x < 0$ onda je $|x| = -x$, a iz $x < 0$ i propozicije 1.2.8 slijedi $x + (-x) < 0 + (-x)$, tj. $0 < -x$ pa je $0 < |x|$. U oba slučaja vrijedi $0 \leq |x|$.

(2) Prije svega uočimo da je $0 + 0 = 0$ iz čega slijedi $-0 = 0$. Pretpostavimo da je $|x| = 0$. Tada je $x = 0$ ili $-x = 0$. Ako je $-x = 0$ onda je $-(-x) = -0$ pa je $x = 0$.
U svakom slučaju je $x = 0$.

Obratno, ako je $x = 0$ onda je očito $|x| = 0$.

(3) Vrijedi $0 \leqslant x$ ili $x < 0$. Ako je $0 \leqslant x$ onda je $x = |x|$ pa je $x \leqslant |x|$ zbog refleksivnosti relacije $\leqslant$. Ako je $x < 0$ onda je $0 < -x$ i $-x = |x|$, dakle $0 < |x|$. Posebno $0 \leqslant |x|$. Iz ovog, $x < 0$ i propozicije 1.2.5 slijedi da je $x < |x|$. Time smo dokazali da vrijedi (3).

(4) Vrijedi $0 < x$ ili $x = 0$ ili $x < 0$.
Ako je $0 < x$ onda je $-x < 0$ pa prema definiciji imamo $|-x| = -(-x) = x = |x|$.
Ako je $x = 0$ onda je $-x = 0$ pa je $|x| = 0 = |-x|$.
Ako je $x < 0$ onda je $0 < -x$ pa imamo $|-x| = -x = |x|$.
Dakle, (4) vrijedi. □

Propozicija 1.4.11. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeni prsten te neka su $a,b,c,d \in P$.*

(1) Pretpostavimo da je $a \leqslant b$ i $c \leqslant d$. Tada je $a + c \leqslant b + d$.

(2) Pretpostavimo da je $a < b$ i $c \leqslant d$. Tada je $a + c < b + d$.

Dokaz. (1) Iz $a \leqslant b$ slijedi $a+c \leqslant b+c$ te iz $c \leqslant d$ slijedi $b+c \leqslant b+d$. Tada iz tranzitivnosti relacije $\leqslant$ slijedi $a + c \leqslant b + d$.

(2) Iz $a < b$ slijedi $a + c < b + c$, a iz $c \leqslant d$ slijedi $b + c \leqslant b + d$ pa iz propozicije 1.2.5 (3) slijedi tvrdnja. □

Propozicija 1.4.12. *Neka je $*$ asocijativna binarna operacija na skupu G. Neka su $x,y \in G$ te neka su $x', y' \in G$ takvi da je x' inverzni element od x s obzirom na $*$ te y' inverzni element od y s obzirom na $*$. Tada je $y' * x'$ inverzni element od $x * y$ s obzirom na $*$.*

Dokaz. Neka je e neutralni element s obzirom na operaciju $*$. Vrijedi

$$\begin{aligned}(y' * x') * (x * y) &= y' * (x' * (x * y)) \\ &= y' * ((x' * x) * y) \\ &= y' * (e * y) \\ &= y' * y = e\end{aligned}$$

Dakle, $(y' * x') * (x * y) = e$.
Analogno dobivamo da je $(x * y) * (y' * x') = e$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Korolar 1.4.13. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten te neka su $x,y \in P$. Tada je*

$$-(x + y) = -x + (-y).$$

Dokaz. Znamo da je $-x$ inverzni element od x te $-y$ inverzni element od y s obzirom na operaciju $+$. Prema prethodnoj propoziciji imamo da je $-y+(-x)$ inverzni element od $x+y$. Dakle, $-(x + y) = -y + (-x) = -x + (-y)$. □

Korolar 1.4.14. *Neka je $(P, +, \cdot)$ polje te neka su $x,y \in P$ takvi da je $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Tada je*

$$(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}.$$

Dokaz. Znamo da je x^{-1} inverzni element od x te y^{-1} inverzni element od y s obzirom na operaciju $\cdot$. Prema prethodnoj propoziciji $y^{-1} \cdot x^{-1}$ je inverzni element od $x \cdot y$.
Dakle, $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$. □

Propozicija 1.4.15. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeni prsten te neka su* $x,y \in P$. *Tada je*

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| .$$

Dokaz. Prema poropoziciji 1.4.10(3) vrijedi $x \leqslant |x|$ i $y \leqslant |y|$ pa iz propozicije 1.4.11(1) slijedi

$$x + y \leqslant |x| + |y| . \tag{1.3}$$

Nadalje prema propoziciji 1.4.10(3) vrijedi $-x \leqslant |-x| = |x|$ i $-y \leqslant |-y| = |y|$ pa iz propozicije 1.4.11(1) slijedi $-x + (-y) \leqslant |x| + |y|$.

Iz korolara 1.4.13 slijedi

$$-(x + y) \leqslant |x| + |y| . \tag{1.4}$$

Vrijedi $|x + y| = x + y$ ili $|x + y| = -(x + y)$ pa iz (1.3) i (1.4) slijedi $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. □

Propozicija 1.4.16. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeni prsten te neka su* $x,y \in P$. *Tada je*

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \tag{1.5}$$

Dokaz. Imamo 4 slučaja.

1° $0 \leqslant x$ i $0 \leqslant y$
Tada je prema definiciji uređenog prstena $0 \leqslant x \cdot y$. Slijedi $|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$.
Dakle, (1.5) vrijedi.

2° $x \leqslant 0$ i $0 \leqslant y$
Slijedi $0 \leqslant -x$ pa prema 1° vrijedi $|(-x) \cdot y|=|-x| \cdot |y|$. Prema propoziciji 1.3.4(2) i propoziciji 1.4.10(4) vrijedi $|(-x) \cdot y| = |-x \cdot y| = |x \cdot y|$ pa zaključujemo da je $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

3° $0 \leqslant x$ i $y \leqslant 0$
Prema 2° vrijedi $|y \cdot x| = |y| \cdot |x|$, dakle vrijedi (1.5).

4° $x \leqslant 0$ i $y \leqslant 0$
Tada je $0 \leqslant -x$ i $0 \leqslant -y$ pa prema 1° vrijedi $|(-x) \cdot (-y)| = |-x| \cdot |-y|$ pa iz propozicije 1.3.4(3) i propozicije 1.4.10(4) slijedi (1.5). □

1.5 Konvergencija nizova u uređenim poljima

Definicija 1.5.1. *Neka je S skup te $x : \mathbb{N} \longrightarrow S$ funkcija. Tada za x kažemo da je **niz** u S. Za $n \in \mathbb{N}$ umjesto $x(n)$ pišemo x_n. Funkciju x (niz x) označavamo sa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ili (x_n).*

Ako je $(P, +, \cdot)$ prsten, za $a, b \in P$ sa $a - b$ označavamo $a + (-b)$.

Definicija 1.5.2. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeni prsten. Neka je (x_n) niz u P te $a \in P$. Kažemo da niz (x_n) teži prema a u $(P, +, \cdot, \leqslant)$ i pišemo $x_n \longrightarrow a$ ako $\forall \varepsilon \in P$ takav da je $0 < \varepsilon$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall n \geqslant n_0$ vrijedi*

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Napomena 1.5.3. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeni prsten. Za a,$b \in P$ definiramo sljedeće skupove:*

$$\begin{aligned}
\langle a, b\rangle &= \{x \in P \mid a < x \quad \text{i} \quad x < b\},\\
[a, b] &= \{x \in P \mid a \leqslant x \quad \text{i} \quad x \leqslant b\},\\
[a, b\rangle &= \{x \in P \mid a \leqslant x \quad \text{i} \quad x < b\},\\
\langle a, b] &= \{x \in P \mid a < x \quad \text{i} \quad x \leqslant b\}.
\end{aligned}$$

Lema 1.5.4. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeni prsten te neka su $x, \varepsilon \in P$. Tada je $|x| < \varepsilon$ ako i samo ako je $-\varepsilon < x < \varepsilon$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $|x| < \varepsilon$. Znamo iz propozicije 1.4.10(3) da je $x \leqslant |x|$ pa slijedi $x < \varepsilon$. Nadalje iz propozicije 1.4.10(4) i (3) slijedi

$$-x \leqslant |-x| = |x| < \varepsilon,$$

dakle,

$$-x < \varepsilon.$$

Koristeći propoziciju 1.2.8 dobivamo

$$-x + x < \varepsilon + x,$$

tj.

$$0 < \varepsilon + x$$

pa analogno dobivamo

$$-\varepsilon < x.$$

Prema tome

$$-\varepsilon < x < \varepsilon.$$

Obratno, pretpostavimo da je $-\varepsilon < x < \varepsilon$. Iz $-\varepsilon < x$ slijedi, koristeći propoziciju 1.2.8 da je

$$-x < \varepsilon.$$

Dakle,

$$x < \varepsilon \quad \text{i} \quad -x < \varepsilon.$$

Budući da je $|x| = x$ ili $|x| = -x$, imamo $|x| < \varepsilon$. □

Napomena 1.5.5. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeni prsten te neka su* $a,b,\varepsilon \in P$. *Tada je*

$$|b-a| < \varepsilon \text{ ako i samo ako je } b \in \, < a-\varepsilon, a+\varepsilon >$$

Naime koristeći lemu 1.5.4 i propoziciju 1.2.8 dobivamo

$$\begin{aligned} |b-a| < \varepsilon &\Longleftrightarrow -\varepsilon < b-a \quad \text{i} \\ b-a < \varepsilon &\Longleftrightarrow a-\varepsilon < b \quad \text{i} \\ b < a+\varepsilon &\Longleftrightarrow b \in \, < a-\varepsilon, a+\varepsilon > . \end{aligned}$$

Prema napomeni 1.5.5 vrijedi sljedeće:
ako je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeni prsten, (x_n) niz u P te $a \in P$, onda $x_n \longrightarrow a$ ako i samo ako $\forall \varepsilon \in P$ takav da je $0 < \varepsilon \ \exists \, n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall n \geqslant n_0$ vrijedi $x_n \in \, < a-\varepsilon, a+\varepsilon >$.

Propozicija 1.5.6. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeno polje. Neka je* $x \in P$.

(1) Pretpostavimo da je $0 < x$. *Tada je* $0 < x^{-1}$.

(2) Pretpostavimo da je $x < 0$. *Tada je* $x^{-1} < 0$.

Dokaz. (1) Iz $0 < x$ slijedi $x \neq 0$ pa je prema napomeni 1.4.4 $x^{-1} \neq 0$.
Stoga je $0 < x^{-1}$ ili $x^{-1} < 0$. Pretpostavimo da je $x^{-1} < 0$. Tada je $0 < -x^{-1}$. Posebno $0 \leqslant -x^{-1}$ što zajedno sa $0 \leqslant x$ povlači da je $0 \leqslant (-x^{-1}) \cdot x$. Prema propoziciji 1.3.4(1) vrijedi $0 \leqslant -(x^{-1} \cdot x)$, tj. $0 \leqslant -1$ što povlači da je $1 \leqslant 0$. To je u kontradikciji s korolarom 1.4.8. Stoga je $0 < x^{-1}$.

(2) Vrijedi $x^{-1} \neq 0$ pa je $x^{-1} < 0$ ili $0 < x^{-1}$.
Pretpostavimo da je $0 < x^{-1}$. Iz $x < 0$ slijedi $0 < -x$ što zajedno sa $0 < x^{-1}$ povlači $0 \leqslant (-x) \cdot x^{-1}$, tj. $0 \leqslant -(x \cdot x^{-1})$ pa je $0 \leqslant -1$ tj. $1 \leqslant 0$, a to je kontradikcija.
Dakle, $x^{-1} < 0$. □

Propozicija 1.5.7. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeno polje. Neka su* $x, y, a, b \in P$.

(1) Pretpostavimo da je $0 < x$ *i* $0 < y$. *Tada je* $0 < x \cdot y$.

(2) Pretpostavimo da je $0 \leqslant x$ *i* $a \leqslant b$*. Tada je* $a \cdot x \leqslant b \cdot x$*.*

(3) Pretpostavimo da je $0 < x$ *i* $a < b$*. Tada je* $a \cdot x < b \cdot x$*.*

Dokaz. (1) Iz $0 < x$ i $0 < y$ slijedi

$$0 \leqslant x \text{ i } x \neq 0 \text{ te } 0 \leqslant y \text{ i } y \neq 0.$$

Iz propozicije 1.4.3 i definicije uređenog polja slijedi

$$x \cdot y \neq 0 \text{ i } 0 \leqslant x \cdot y.$$

Prema tome, $0 < x \cdot y$.

(2) Iz $a \leqslant b$ slijedi $0 \leqslant b + (-a)$. Iz ovog i $0 \leqslant x$ slijedi

$$0 \leqslant x \cdot (b + (-a)).$$

Stoga je

$$0 \leqslant x \cdot b + x \cdot (-a),$$

tj.

$$0 \leqslant x \cdot b + (-x \cdot a)$$

pa je

$$x \cdot a \leqslant x \cdot b.$$

Dakle, (2) vrijedi.

(3) Koristeći tvrdnju (1) dobivamo, analogno kao u (2) da je

$$0 < b + (-a)$$

pa je

$$0 < (x \cdot (b + (-a)),$$

tj.

$$0 < x \cdot b + x \cdot (-a)$$

pa je

$$0 < x \cdot b + (-x \cdot a)$$

što povlači

$$x \cdot a < x \cdot b.$$

Dakle, (3) vrijedi. □

Definicija 1.5.8. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeni prsten. Definiramo* $2 = 1 + 1$.

Propozicija 1.5.9. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeno polje. Tada je* $1 < 2$ *te je*

$$0 < 2^{-1} < 1.$$

Dokaz. Prema korolaru 1.4.8 vrijedi $0 < 1$, pa iz propozicije 1.2.8 slijedi $1 < 2$. Iz $0 < 1$ i $1 < 2$ slijedi $0 < 2$. Iz propozicije 1.5.6 slijedi

$$0 < 2^{-1}.$$

Sada iz $1 < 2$ i propozicije 1.5.7(3) slijedi

$$1 \cdot 2^{-1} < 2 \cdot 2^{-1},$$

tj.

$$2^{-1} < 1.$$

Time je propozicija dokazana. □

Lema 1.5.10. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeno polje. Neka je* $x \in P$ *takav da je* $0 < x$. *Tada postoji* $y \in P$ *takav da je*

$$0 < y < x.$$

Dokaz. Prema propoziciji 1.5.9 vrijedi $2^{-1} < 1$ pa prema propoziciji 1.5.7(3) vrijedi

$$x \cdot 2^{-1} < x \cdot 1, \text{ tj. } x \cdot 2^{-1} < x.$$

Iz $0 < x$ i $0 < 2^{-1}$ (iz propozicije 1.5.9) slijedi

$$0 < x \cdot 2^{-1}.$$

Označimo $y = x \cdot 2^{-1}$. Imamo dakle

$$0 < y < x.$$

□

Propozicija 1.5.11. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeno polje. Neka su* $x, y \in P$ *takvi da je* $x < y$. *Tada postoji* $z \in P$ *takav da je*

$$x < z < y.$$

Dokaz. Iz $x < y$ slijedi $0 < y + (-x)$. Prema lemi 1.5.10 $\exists y^{'} \in P$ takav da je

$$0 < y^{'} < y + (-x).$$

Iz $0 < y^{'}$ slijedi $x < y^{'} + x$. Iz $y^{'} < y + (-x)$ slijedi $y^{'} + x < y$. Označimo $z = y^{'} + x$. Tada je

$$x < z < y.$$

□

Napomena 1.5.12. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeni prsten. Neka je* $x \in P$ *takav da je* $x \neq 0$. *Tada je* $0 < |x|$. *Naime, iz propozicije 1.4.10*(2) *slijedi* $|x| \neq 0$ *pa iz propozicije 1.4.10*(1) *zaključujemo*

$$0 < |x| .$$

Propozicija 1.5.13. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeno polje. Neka je* (x_n) *niz u* P *te neka su* $a, b \in P$ *takvi da* $x_n \to a$ *i* $x_n \to b$. *Tada je* $a = b$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $a \neq b$. Iz toga slijedi $0 \neq a - b$. Prema napomeni 1.5.12 imamo

$$0 < |a - b| .$$

Prema propoziciji 1.5.9 vrijedi $0 < 2^{-1}$. Iz propozicije 1.5.7(1) slijedi

$$0 < 2^{-1} \cdot |a - b| .$$

Označimo $\varepsilon = 2^{-1} \cdot |a - b|$.

Budući da $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall n \geqslant n_0$ vrijedi

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Isto tako, zbog $x_n \to b$, postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall n \geqslant m_0$ vrijedi

$$|x_n - b| < \varepsilon.$$

Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da $n \geqslant n_0$ i $n \geqslant m_0$. Tada je

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{i} \quad |x_n - b| < \varepsilon.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} a - x_n &= -(-(a - x_n)) \\ &= -(-(a + (-x_n))) \\ &= -(-a + (-(-x_n))) \\ &= -(-a + x_n) \\ &= -(x_n - a). \end{aligned}$$

Dakle, $a - x_n = -(x_n - a)$ pa je prema propoziciji 1.4.10(4)

$$|a - x_n| = |x_n - a| .$$

Koristeći propoziciju 1.4.11 i propoziciju 1.4.15 dobivamo

$$\begin{aligned}
|a - b| &= |(a - x_n) + (x_n + b)| \\
&\leqslant |a - x_n| + |x_n - b| \\
&= |x_n - a| + |x_n - b| \\
&< \varepsilon + \varepsilon = 1 \cdot \varepsilon + 1 \cdot \varepsilon \\
&= (1 + 1) \cdot \varepsilon = 2 \cdot \varepsilon \\
&= 2 \cdot (2^{-1} |a - b|) \\
&= |a - b| .
\end{aligned}$$

Dakle, $|a - b| < |a - b|$, što je nemoguće. Prema tome, $a = b$. □

Definicija 1.5.14. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje. Za $(P, +, \cdot, \leqslant)$ kažemo da je* ***potpuno uređeno polje*** *ako za sve neprazne podskupove S i T od P takve da je $x \leqslant y$ za svaki $x \in S$ i svaki $y \in T$ postoji $z \in P$ takav da je $x \leqslant z \leqslant y$ za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in T$.*

Poglavlje 2

Cauchyjevi nizovi u uređenom polju

2.1 Cauchyjevi nizovi

Definicija 2.1.1. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeno polje te neka je* (x_n) *niz u* P*. Kažemo da je* (x_n) ***Cauchyjev niz*** *u* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *ako za svaki* $\varepsilon \in P$ *takav da je* $0 < \varepsilon$ *postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da za sve* $m, n \geqslant n_0$ *vrijedi*

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Definicija 2.1.2. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeno polje, te neka je* (x_n) *niz u* P*. Kažemo da je* (x_n) ***konvergentan niz*** *u* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *ako postoji* $a \in P$ *takav da* $x_n \to a$*.*

Propozicija 2.1.3. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeno polje te neka je* (x_n) *konvergentan niz u* $(P, +, \cdot, \leqslant)$*. Tada je* (x_n) *Cauchyjev niz u* $(P, +, \cdot, \leqslant)$*.*

Dokaz. Budući da je (x_n) konvergentan, postoji $a \in P$ takav da $x_n \to a$. Neka je $\varepsilon \in P$ takav da je $0 < \varepsilon$. Znamo da je $0 < 2^{-1}$ pa iz toga slijedi $0 < 2^{-1} \cdot \varepsilon$. Budući da $x_n \to a$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall n \geqslant n_0$ vrijedi $|x_n - a| < 2^{-1} \cdot \varepsilon$. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da $m, n \geqslant n_0$. Tada je

$$|x_m - a| < 2^{-1} \cdot \varepsilon \quad \text{i} \quad |x_n - a| < 2^{-1} \cdot \varepsilon.$$

Koristeći propoziciju 1.4.10(4) i korolar 1.4.13 dobivamo

$$|x_n - a| = |-(x_n - a)| = |-x_n + a| = |a - x_n|.$$

Dakle, $|a - x_n| < \varepsilon$.

Koristeći propoziciju 1.4.11 i propoziciju 1.4.15 dobivamo

$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &= |(x_m - a) + (a - x_n)| \\ &\leqslant |x_m - a| + |a - x_n| \\ &< (2^{-1} \cdot \varepsilon) + (2^{-1} \cdot \varepsilon) \\ &= 1 \cdot (2^{-1}\varepsilon) + 1 \cdot (2^{-1}\varepsilon) \\ &= (1 + 1) \cdot (2^{-1} \cdot \varepsilon) \\ &= 2 \cdot (2^{-1} \cdot \varepsilon) \\ &= (2 \cdot 2^{-1}) \cdot \varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$

Dakle, $|x_m - x_n| < \varepsilon$, za sve $m, n \geqslant n_0$. Time smo dokazali da je (x_n) Cauchyjev niz. □

Primjer 2.1.4. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeni prsten. Neka je $a \in P$ te neka je (x_n) niz u P definiran sa $x_n = a$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada $x_n \to a$.*

Naime neka je $\varepsilon \in P$ takav da je $0 < \varepsilon$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n - a = 0$. Stoga za $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi $|x_n - a| = 0$. Stoga za bilo koji $n_0 \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće:

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geqslant n_0.$$

Dakle, (x_n) je konvergentan niz, pa je i Cauchyjev niz.

Definicija 2.1.5. *Neka je S skup te neka je $\sim$ binarna relacija na S. Za $\sim$ kažemo da je **simetrična** binarna relacija ako za sve $x,y \in S$ takve da je $x \sim y$ vrijedi $y \sim x$.*

Definicija 2.1.6. *Neka je S skup. Za binarnu relaciju $\sim$ na S kažemo da je **relacija ekvivalencije** na S ako je $\sim$ refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija na S.*

Definicija 2.1.7. *Neka je $\sim$ relacija ekvivalencija na skupu S. Neka je $x \in S$. Definiramo*

$$[x] = \{y \in S \mid y \sim x\}.$$

*Za $[x]$ kažemo da je **klasa ekvivalencije** od x pri relaciji $\sim$.*

Općenito ako je $\sim$ binarna operacija na skupu S te x, y ∈ S takvi da ne vrijedi $x \sim y$, tj. takvi da $(x, y) \notin \sim$ onda pišemo $x \nsim y$.

Propozicija 2.1.8. *Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu S. Neka su $x,\ y \in S$. Tada vrijedi sljedeće:*

(1) $x \in [x]$

(2) $x \sim y \Longleftrightarrow [x] = [y]$

(3) $x \nsim y \Longleftrightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$

Dokaz. Tvrdnja (1) slijedi iz refleksivnosti relacije $\sim$.

(2) Pretpostavimo da je $x \sim y$. Dokažimo $[x] = [y]$. Neka je $z \in [x]$.
Tada po definiciji vrijedi $z \sim x$, a zbog pretpostavke $x \sim y$ i tranzitivnosti vrijedi $z \sim y$, dakle $z \in [y]$. Dakle,

$$[x] \subseteq [y].$$

Obratno, neka je $z \in [y]$. Tada je $z \sim y$, a zbog simetričnosti vrijedi $y \sim x$ pa iz tranzitivnosti slijedi $z \sim x$, dakle $z \in [x]$. Stoga je

$$[y] \subseteq [x]$$

pa je

$$[x] = [y].$$

Pretpostavimo sada $[x] = [y]$. Po tvrdnji (1) imamo $x \in [x]$ pa je $x \in [y]$. To znači da je

$$x \sim y.$$

Time je tvrdnja (2) dokazana.

(3) Uzmimo da $x \nsim y$. Želimo dokazati da je $[x] \cap [y] = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji z takav da je

$$z \in [x] \cap [y].$$

Tada je

$$z \in [x] \quad \text{i} \quad z \in [y].$$

To znači da je

$$z \sim x \quad \text{i} \quad z \sim y.$$

Primjenom simetričnosti i tranzitivnosti relacije $\sim$ dobivamo $x \sim y$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $x \nsim y$. Dakle,

$$[x] \cap [y] = \emptyset.$$

Obratno, pretpostavimo da je $[x] \cap [y] = \emptyset$. Kada bi vrijedilo $x \sim y$ onda bismo po tvrdnji (2) imali $[x] = [y]$ pa bi iz tvrdnje (1) slijedilo $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Dakle,

$$x \nsim y.$$

Time je tvrdnja (3) dokazana. □

Definicija 2.1.9. *Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu S. Skup svih klasa ekvivalencije s obzirom na relaciju $\sim$ nazivamo* ***kvocijentni skup*** *s obzirom na relaciju $\sim$ i označavamo ga sa $S/_\sim$. Dakle,*

$$S/_\sim = \{[x] \mid x \in S\}.$$

2.2 Ekvivalentnost Cauchyjevih nizova

Definicija 2.2.1. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje. Označimo sa $C(P, +, \cdot, \leqslant)$ skup svih Cauchyjevih nizova u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Na $C(P, +, \cdot, \leqslant)$ definiramo relaciju $\sim$ na sljedeći način:*

$$(x_n) \sim (y_n) \Longleftrightarrow x_n - y_n \to 0.$$

Dokazat ćemo da je relacija $\sim$ relacija ekvivalencije na $C(P, +, \cdot, \leqslant)$, no prvo nam trebaju neke tvrdnje.

Propozicija 2.2.2. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje. Neka su (x_n) i (y_n) nizovi u P te $a, b \in P$ takvi da $x_n \to a$ i $y_n \to b$. Tada*

$$x_n + y_n \to a + b.$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon \in$ P takav da je $0 < \varepsilon$. Iz propozicija 1.5.7 i 1.5.9 slijedi da je

$$0 < 2^{-1} \cdot \varepsilon.$$

Iz $x_n \to a$ slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall n \geqslant n_0$ vrijedi

$$|x_n - a| < 2^{-1} \cdot \varepsilon. \tag{2.1}$$

Iz $y_n \to b$ slijedi da postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall n \geqslant m_0$ vrijedi

$$|y_n - b| < 2^{-1} \cdot \varepsilon. \tag{2.2}$$

Odaberimo $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0 \geqslant n_0$ i $k_0 \geqslant m_0$. Neka je $n \geqslant k_0$. Tada je

$$n \geqslant n_0 \quad \text{i} \quad n \geqslant m_0,$$

pa vrijedi 2.1 i 2.2. Koristeći korolar 1.4.13 te propozicije 1.4.11 i 1.4.15 dobivamo

$$\begin{aligned}
|(x_n + y_n) - (a + b)| &= |(x_n + y_n) + (-(a + b))| \\
&= |(x_n + y_n) + (-a + (-b)| \\
&= |((x_n + y_n) + (-a)) + (-b)| \\
&= |(x_n + (y_n + (-a)) + (-b)| \\
&= |(x_n + (-a + y_n)) + (-b)| \\
&= |((x_n + (-a)) + y_n) + (-b)| \\
&= |(x_n + (-a)) + (y_n + (-b))| \\
&= |(x_n - a) + (y_n - b)| \\
&\leqslant |x_n - a| + |y_n - b| \\
&< 2^{-1} \cdot \varepsilon + 2^{-1} \cdot \varepsilon \\
&= (2^{-1} + 2^{-1}) \cdot \varepsilon \\
&= (2^{-1} \cdot (1 + 1)) \cdot \varepsilon \\
&= (2^{-1} \cdot 2) \cdot \varepsilon = 1 \cdot \varepsilon \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, $|(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon \quad \forall n \geqslant k_0$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 2.2.3. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje, neka je (x_n) niz u P te neka je $a \in P$ takav da $x_n \to a$. Tada*

$$-x_n \to -a.$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon \in P$ takav da je $0 < \varepsilon$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall n \geqslant n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Koristeći korolar 1.4.13 i propoziciju 1.4.10 dobivamo

$$\begin{aligned}
|(-x_n) - (-a)| &= |\,(-x_n) + (-(-a))| \\
&= |-(x_n + (-a))| \\
&= |x_n + (-a)| \\
&= |x_n - a|\,.
\end{aligned}$$

Dakle, $|(-x_n) - (-a)| = |x_n - a| \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Stoga $\forall n \geqslant n_0$ slijedi

$$|(-x_n) - (-a)| < \varepsilon.$$

Prema tome, $-x_n \to -a$. Time je tvrdnja dokazana. □

Propozicija 2.2.4. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje. Tada je $\sim$ relacija ekvivalencije na $C(P, +, \cdot, \leqslant)$.*

Dokaz. Neka je $(x_i) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$. Za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x_i - x_i = 0.$$

Stoga prema primjeru 2.1.4 vrijedi

$$x_i - x_i \to 0.$$

Prema tome, $(x_i) \sim (x_i)$. Dakle, relacija $\sim$ je refleksivna.

Pretpostavimo da su $(x_i), (y_i) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$ takvi da je $(x_i) \sim (y_i)$. Tada

$$x_i - y_i \to 0$$

pa iz propozicije 2.2.3 slijedi

$$-(x_i - y_i) \to -0.$$

Stoga prema korolaru 1.4.13 imamo $y_i - x_i \to 0$. Dakle, $(y_i) \sim (x_i)$ pa je relacija $\sim$ simetrična.

Neka su $(x_i), (y_i), (z_i) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$ takvi da je $(x_i) \sim (y_i)$ i $(y_i) \sim (z_i)$. Tada

$$x_i - y_i \to 0 \quad \text{i} \quad y_i - z_i \to 0.$$

Prema propoziciji 2.2.2 vrijedi

$$(x_i - y_i) + (y_i - z_i) \to 0 + 0,$$

tj.

$$x_i - z_i \to 0,$$

pa je

$$(x_i) \sim (z_i).$$

Stoga je relacija $\sim$ tranzitivna. Dakle, relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije. □

2.3 Zbrajanje na $C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$

Propozicija 2.3.1. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje. Neka su (x_i) i (y_i) Cauchyjevi nizovi u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Tada je $(x_i + y_i)$ Cauchyjev niz u $(P, +, \cdot, \leqslant)$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon \in P$ takav da je $0 < \varepsilon$. Budući da je (x_i) Cauchyjev niz postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall m, n \geqslant n_0$ vrijedi $|x_m - x_n| < 2^{-1} \cdot \varepsilon$.
Odaberemo $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0 \geqslant n_0$ i $k_0 \geqslant m_0$. Neka su $m, n \geqslant k_0$. Tada je

$$|x_m - x_n| < 2^{-1} \cdot \varepsilon \quad \text{i} \quad |y_m - y_n| < 2^{-1} \cdot \varepsilon.$$

Slično kao u dokazu propozicije 2.2.2 dobivamo

$$\begin{aligned} |(x_m + y_m) - (x_n + y_n)| &= |(x_m - x_n) + (y_m - y_n)| \\ &\leqslant |x_m - x_n| + |y_m - y_n| \\ &< 2^{-1} \cdot \varepsilon + 2^{-1} \cdot \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dakle, $|(x_m + y_m) - (x_n + y_n)| < \varepsilon$ za sve m, n $\geqslant k_0$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Lema 2.3.2. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje. Pretpostavimo da su $(x_i), (y_i), (x_i^{'})$ i $(y_i^{'}) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$ takvi da je $(x_i) \sim (x_i^{'})$ i $(y_i) \sim (y_i^{'})$. Tada je*

$$(x_i + y_i) \sim (x_i^{'} + y_i^{'}).$$

Dokaz. Iz propozicije 2.3.1 znamo da su $(x_i + y_i)$ i $(x_i^{'} + y_i^{'})$ Cauchyjevi nizovi. Iz $(x_i) \sim (x_i^{'})$ slijedi

$$x_i - x_i^{'} \to 0$$

te iz $(y_i) \sim (y_i^{'})$ slijedi

$$y_i - y_i^{'} \to 0.$$

Prema propoziciji 2.2.2 vrijedi

$$(x_i - x_i^{'}) + (y_i - y_i^{'}) \to 0 + 0.$$

Grupiranjem dobivamo $(x_i + y_i) - (x_i^{'} + y_i^{'}) \to 0$. Prema tome,

$$(x_i + y_i) \sim (x_i^{'} + y_i^{'}).$$

□

Propozicija 2.3.3. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje te neka je (x_i) Cauhyjev niz u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Tada je $(-x_i)$ Cauchyjev niz u $(P, +, \cdot, \leqslant)$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon \in P$ takav da je $0 < \varepsilon$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall m, n \geqslant n_0$ vrijedi $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Kao u dokazu propozicije 2.2.3 vidimo da za sve $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|(-x_m) - (-x_n)| = |x_m - x_n|.$$

Stoga za sve $m, n \geqslant n_0$ vrijedi

$$|(-x_m) - (-x_n)| < \varepsilon.$$

Dakle, $(-x_i)$ je Cauchyjev niz. □

Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje. Na kvocijentnom skupu $C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$ definiramo binarnu operaciju $\oplus$ na sljedeći način:

$$[(x_i)] \oplus [(y_i)] = [(x_i + y_i)].$$

Da je $\oplus$ dobro definirana binarna operacija slijedi iz propozicije 2.3.1 i leme 2.3.2.

Propozicija 2.3.4. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje. Tada je $(C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim, \oplus)$ Abelova grupa.*

Dokaz. Neka je (x_i), (y_i), $(z_i) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$. Imamo

$$\begin{aligned}
([(x_i)] \oplus [(y_i)]) \oplus [(z_i)] &= [(x_i + y_i)] \oplus [(z_i)] \\
&= [((x_i + y_i) + z_i)] \\
&= [(x_i + (y_i + z_i))] \\
&= [(x_i)] \oplus [(y_i + z_i)] \\
&= [(x_i)] \oplus ([(y_i)] \oplus [(z_i)])
\end{aligned}$$

Dakle, $([(x_i)] + [(y_i)]) \oplus [(z_i)] = [(x_i)] \oplus ([(y_i)] + [(z_i)])$.
Prema tome je $\oplus$ asocijativna binarna operacija.

Neka je (a_i) niz u P definiran s $a_i = 0$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Prema primjeru 2.1.4 imamo $a_i \to 0$. Dakle (a_i) je konvergentan niz u $(P, +, \cdot, \leqslant)$ pa je i Cauchyjev niz u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Stoga je $(a_i) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$.

Tvrdimo da je $[(a_i)]$ neutralni element za $\oplus$. Neka je $(x_i) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$. Vrijedi

$$[(x_i)] \oplus [(a_i)] = [(x_i + a_i)] = [(x_i)].$$

Dakle, $[(x_i)] \oplus [(a_i)] = [(x_i)]$ te analogno $[(a_i)] \oplus [(x_i)] = [(x_i)]$.
Stoga je $[(a_i)]$ neutralni element za $\oplus$.

Neka su (x_i), $(y_i) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$. Imamo

$$[(x_i)] \oplus [(y_i)] = [(x_i + y_i)] = [(y_i + x_i)] = [(y_i)] \oplus [(x_i)].$$

Dakle, $[(x_i)] \oplus [(y_i)] = [(y_i)] \oplus [(x_i)]$. Prema tome, $\oplus$ je komutativna binarna operacija.

Neka je $u \in C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$. Želimo dokazati da postoji $v \in C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$ takav da je

$$u \oplus v = [(a_i)] \text{ i } v \oplus u = [(a_i)].$$

Imamo $u = [(x_i)]$ za neki $(x_i) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$. Prema propoziciji 2.3 vrijedi da je $(-x_i) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$. Definirajmo $v = [(-x_i)]$. Imamo

$$u \oplus v = [(x_i)] + [(-x_i)] = [(x_i + (-x_i)] = [(a_i)].$$

Dakle, $u \oplus v = [(a_i)]$, a zbog komutativnosti binarne operacije $\oplus$ vrijedi i $v \oplus u = [(a_i)]$.

Dakle, $(C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim, \oplus)$ je Abelova grupa. □

2.4 Omeđenost u uređenom prstenu

Definicija 2.4.1. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeni prsten. Neka je $S \subseteq P$ i $a \in P$. Za a kažemo da je **gornja međa** skupa S u $(P, +, \cdot, \leqslant)$ ako za svaki $x \in S$ vrijedi $x \leqslant a$. Za a kažemo da je **donja međa** skupa $(P, +, \cdot, \leqslant)$ ako za svaki $x \in S$ vrijedi $a \leqslant x$.*

Definicija 2.4.2. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeni prsten te neka je $S \subseteq P$. Kažemo da je S **odozgo omeđen skup** u $(P, +, \cdot, \leqslant)$ ako postoji gornja međa od S u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Kažemo da je S **odozdo omeđen skup** u $(P, +, \cdot, \leqslant)$ ako postoji donja međa od S u $(P, +, \cdot, \leqslant)$.*
*Kažemo da je S **omeđen skup** u $(P, +, \cdot, \leqslant)$ ako je S omeđen odozgo i odozdo.*

Napomena 2.4.3. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeni prsten. Neka su $a, b \in P$. Tada postoji $c \in P$ takav da je $a \leqslant c$ i $b \leqslant c$. Naime možemo definirati*

$$c = \begin{cases} b, & \text{ako je } a \leqslant b \\ a, & \text{inače} \end{cases}$$

Ako je $a \leqslant b$ onda je $a \leqslant c$ (jer je $c = b$) te $b \leqslant c$ (jer je $c = b$). Ako ne vrijedi $a \leqslant b$ onda je $b < a$ pa je $a \leqslant c$ (jer je $a = c$) i $b \leqslant c$ (jer je $c = a$).

Na sličan način vidimo da postoji $d \in P$ takav da je $d \leqslant a$ i $d \leqslant b$. Naime možemo definirati

$$d = \begin{cases} a, & \text{ako je } a \leqslant b \\ b, & \text{inače} \end{cases}$$

Propozicija 2.4.4. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeni prsten. Neka su $S, T \subseteq P$.*

(1) Pretpostavimo da su S i T odozgo omeđeni u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Tada je $S \cup T$ odozgo omeđena u $(P, +, \cdot, \leqslant)$.

(2) Pretpostavimo da su S i T odozdo omeđeni u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Tada je $S \cup T$ odozdo omeđena u $(P, +, \cdot, \leqslant)$.

(3) Pretpostavimo da su S i T omeđeni u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Tada je $S \cup T$ omeđena u $(P, +, \cdot, \leqslant)$.

Dokaz. (1) Budući da je S odozgo omeđen postoji $a \in P$ takav da je a gornja međa od S u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Isto tako postoji $b \in S$ takav da je b gornja međa od T u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Prema napomeni 2.4.3 postoji $c \in P$ takav da je $a \leqslant c$ i $b \leqslant c$.

Neka je $x \in S \cup T$. Tada postoje $x \in S$ ili $x \in T$. Ako je $x \in S$ onda je $x \leqslant a$ pa iz $a \leqslant c$ slijedi $x \leqslant c$. Ako je $x \in T$ onda je $x \leqslant b$ pa iz $b \leqslant c$ slijedi $x \leqslant c$. U svakom slučaju vrijedi $x \leqslant c$. Dakle, za svaki $x \in S \cup T$ vrijedi $x \leqslant c$ pa je c gornja međa od $S \cup T$.
Dakle, $S \cup T$ je odozgo omeđena u $(P, +, \cdot, \leqslant)$.

(2) Budući da su S i T odozdo omeđeni u $(P, +, \cdot, \leqslant)$ postoji $a, b \in P$ takvi da je a donja međa od S, a b donja međa od T u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Prema napomeni 2.4.3 postoji $d \in P$ takav da je $d \leqslant a$ i $d \leqslant b$.

Neka je $x \in S \cup T$. Tada je $x \in S$ ili $x \in T$. Ako je $x \in S$ onda je $a \leqslant x$ pa iz $d \leqslant a$ slijedi $d \leqslant x$. Ako je $x \in T$ onda je $b \leqslant x$ pa iz $d \leqslant b$ slijedi $d \leqslant x$. Dakle, za svaki $x \in S \cup T$ vrijedi da je $d \leqslant x$ pa je d donja međa od $S \cup T$.
Dakle, $S \cup T$ je odozdo omeđena u $(P, +, \cdot, \leqslant)$.

(3) Imamo da su S i T omeđeni i odozgo i odozdo u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Iz tvrdnje (1) slijedi da je $S \cup T$ odozgo omeđena u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Iz tvrdnje (2) slijedi da je $S \cup T$ odozdo omeđena u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Stoga je $S \cup T$ omeđena u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. □

Korolar 2.4.5. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeni prsten. Ako su $n \in \mathbb{N}$ i $S_1, \ldots, S_n$ omeđeni skupovi u $(P, +, \cdot, \leqslant)$, onda je $S_1 \cup \cdots \cup S_n$ omeđen skup u $(P, +, \cdot, \leqslant)$.*

Dokaz. Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom.
Za $n = 1$ tvdnja je očita.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
Neka su $S_1, \ldots, S_{n+1}$ omeđeni skupovi u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Imamo

$$S_1 \cup \cdots \cup S_{n+1} = (S_1 \cup \cdots \cup S_n) \cup S_{n+1}.$$

Prema pretpostavci indukcije $S_1 \cup \cdots \cup S_n$ je omeđen pa iz propozicije 2.4.4 (3) slijedi da je $(S_1 \cup \cdots \cup S_n) \cup S_{n+1}$ omeđen. Dakle, $S_1 \cup \cdots \cup S_{n+1}$ je omeđen.
Time je tvrdnja korolara dokazana. □

Korolar 2.4.6. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeni prsten. Neka je K konačan podskup od P. Tada je K omeđen skup u $(P, +, \cdot, \leqslant)$.*

Dokaz. Ako je K prazan skup onda je K omeđen u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. (Trivijalno vrijedi da je svaki element od P gornja i donja međa praznog skupa.)
Pretpostavimo da je $K \neq \emptyset$. Tada je $K = \{k_1, \dots k_n\}$ gdje je $n \in \mathbb{N}$ i $k_1, \dots, k_n \in P$.
Svaki jednočlani podskup od P je omeđen u $(P, +, \cdot, \leqslant)$ (naime, ako je $a \in P$ onda je a i gornja i donja međa od $\{a\}$).
Vrijedi

$$K = \{k_1\} \cup \dots \cup \{k_n\}$$

pa iz korolara 2.4.5 slijedi da je K omeđen skup u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. □

Definicija 2.4.7. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeni prsten te neka je (x_n) niz u P. Kažemo da je (x_n) omeđen niz u $(P, +, \cdot, \leqslant)$ ako je skup $\{x_n | \, n \in \mathbb{N}\}$ omeđen u $(P, +, \cdot, \leqslant)$.*

Propozicija 2.4.8. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje. Neka je (x_n) Cauchyjev niz u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Tada je (x_n) omeđen niz u $(P, +, \cdot, \leqslant)$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon = 1$. Tada je $0 < \varepsilon$ pa budući da je (x_n) Cauchyjev niz postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \geqslant n_0$ vrijedi

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Posebno za svaki $n \geqslant n_0$ je $\left|x_n - x_{n_0}\right| < \varepsilon$. Iz ovoga i napomene 1.5.5 slijedi da za svaki $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$x_n \in \langle x_{n_0} - \varepsilon, x_{n_0} + \varepsilon \rangle.$$

Stoga je $\{x_n | \, n \geqslant n_0\} \subseteq \langle x_{n_0} - \varepsilon, x_{n_0} + \varepsilon \rangle$. Prema tome je $x_{n_0} + \varepsilon$ gornja međa, a $x_{n_0} - \varepsilon$ donja međa skupa $\{x_n | \, n \geqslant n_0\}$.
Stoga je $\{x_n | \, n \geqslant n_0\}$ omeđen skup u $(P, +, \cdot, \leqslant)$.

Imamo

$$\{x_n | \, n \in \mathbb{N}\} = \{x_1, \dots, x_{n_0}\} \cup \{x_n | \, n \geqslant n_0\} \tag{2.3}$$

Skup $\{x_1, \dots, x_{n_0}\}$ je konačan pa je omeđen u $(P, +, \cdot, \leqslant)$ prema korolaru 2.4.6. Stoga iz (2.3) slijedi da je $\{x_n | \, n \in \mathbb{N}\}$ omeđen skup u $(P, +, \cdot, \leqslant)$ kao unija dva omeđena skupa.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 2.4.9. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeni prsten. Neka je S omeđeni skup u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Tada postoji $M \in P$ takav da je*

$$|x| \leqslant M, \ \forall x \in S.$$

Dokaz. Budući da je S omeđen odozgo postoji gornja međa a skupa S u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Isto tako budući da je S omeđen odozdo postoji donja međa b skupa S u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Za svaki $x \in S$ vrijedi $b \leqslant x$ i $x \leqslant a$.

Neka je $x \in S$. Tada je iz $b \leqslant x$ slijedi $-x \leqslant -b$. Prema napomeni 2.4.3 postoji $M \in P$, takav da je $-b \leqslant M$ i $a \leqslant M$. Za svaki $x \in S$ vrijedi $-x \leqslant -b$ i $x \leqslant a$ pa slijedi

$$-x \leqslant M \text{ i } x \leqslant M.$$

Budući da je $|x| = x$ ili $|x| = -x$ iz prethodnih nejednakosti slijedi da je

$$|x| \leqslant M, \forall x \in S.$$

□

Korolar 2.4.10. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeni prsten te neka je (x_n) omeđeni niz u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Tada postoji $M \in P$ takav da je $|x_n| \leqslant M$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Budući da je (x_n) omeđen niz skup $\{x_n | \ n \in \mathbb{N}\}$ je omeđen pa tvrdnja slijedi iz propozicije 2.4.9. □

2.5 Množenje na $C(P, +, \cdot, \leqslant)/_{\sim}$

Propozicija 2.5.1. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje. Neka su (x_n) i (y_n) nizovi u P. Pretpostavimo da su $a, b \in P$ takvi da $x_n \to a$ i $y_n \to b$. Tada*

$$x_n \cdot y_n \to a \cdot b$$

Dokaz. Niz (x_n) je konvergentan u $(P, +, \cdot, \leqslant)$ pa je i Cauchyjev. Iz propozicije 2.4.8 slijedi da je (x_n) omeđen pa prema korolaru 2.4.10 postoji $M \in P$ takav da je

$$|x_n| \leqslant M, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Prema napomeni 2.4.3 slijedi da postoji $c \in P$ takav da je

$$M \leqslant c \text{ i } |b| \leqslant c.$$

Iz $0 \leqslant |b|$ slijedi $0 \leqslant c$. Možemo pretpostaviti da je $0 < c$ (jer imamo $c < c + 1$ i $0 < c + 1$ pa možemo umjesto c uzeti $c + 1$). Slijedi $0 < c^{-1}$.

Neka je $\varepsilon \in P$ takav da je $0 < \varepsilon$. Tada je $0 < 2^{-1} \cdot (c^{-1} \cdot \varepsilon)$. Budući da $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$|x_n - a| < 2^{-1} \cdot (c^{-1} \cdot \varepsilon). \tag{2.4}$$

Budući da $y_n \to b$ postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geqslant m_0$ vrijedi

$$|y_n - b| < 2^{-1} \cdot (c^{-1} \cdot \varepsilon). \tag{2.5}$$

Odaberimo $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 \leqslant k_0$ i $m_0 \leqslant k_0$. Tada za svaki $n \geqslant k_0$ vrijedi (2.4) i (2.5). Neka je $n \geqslant k_0$. Tada vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned}
|x_n \cdot y_n - a \cdot b| &= |x_n \cdot y_n - x_n \cdot b + x_n \cdot b - a \cdot b| \\
&= |x_n \cdot (y_n - b) + b \cdot (x_n - a)| \\
&\leqslant |x_n \cdot (y_n - b)| + |b \cdot (x_n - a)| \\
&= |x_n| \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a| \\
&\leqslant M \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a| \\
&\leqslant c \cdot |y_n - b| + c \cdot |x_n - a| \\
&= c \cdot (|y_n - b| + |x_n - a|) \\
&< c \cdot (2^{-1} \cdot (c^{-1} \cdot \varepsilon) + 2^{-1} \cdot (c^{-1} \cdot \varepsilon)) \\
&= c \cdot (c^{-1} \cdot \varepsilon) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$|x_n \cdot y_n - a \cdot b| < \varepsilon$$

za svaki $n \geqslant k_0$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 2.5.2. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje te neka su (x_n) i (y_n) Cauchyjevi nizovi u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Tada je $(x_n \cdot y_n)$ Cauchyjev niz u $(P, +, \cdot, \leqslant)$.*

Dokaz. Nizovi (x_n) i (y_n) su omeđeni prema propoziciji 2.4.8 pa iz korolara 2.4.10 slijedi da postoje $M, N \in P$ takvi da je

$$|x_n| \leqslant M, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N} \text{ i } |y_n| \leqslant N, \text{za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Prema napomeni 2.4.3 postoji $c \in P$ takav da je $M \leqslant c$ i $N \leqslant c$.
Možemo pretpostaviti da je $0 < c$. Uočimo da je $|x_n| \leqslant c$ i $|y_n| \leqslant c$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Budući da je (x_n) Cauchyjev niz postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $m, n \geqslant n_0$ vrijedi

$$|x_n - x_m| < 2^{-1} \cdot (c^{-1} \cdot \varepsilon) \tag{2.6}$$

Isto tako budući da je (y_n) Cauchyjev niz postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $m, n \geqslant m_0$ vrijedi

$$|y_n - y_m| < 2^{-1} \cdot (c^{-1} \cdot \varepsilon) \tag{2.7}$$

Odaberimo $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0 \geqslant n_0$ i $k_0 \geqslant m_0$. Tada za sve $m, n \geqslant k_0$ vrijedi (2.6) i (2.7).

Neka su $m, n \geqslant k_0$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
|x_n \cdot y_n - x_m \cdot y_m| &= |x_n \cdot y_n - x_m \cdot y_n + x_m \cdot y_n - x_m \cdot y_m| \\
&= |(x_n - x_m) \cdot y_n + x_m \cdot (y_n - y_m)| \\
&\leqslant |x_n - x_m| \cdot |y_n| + |x_m| \cdot |y_n - y_m| \\
&\leqslant |x_n - x_m| \cdot c + c \cdot |y_n - y_m| \\
&= c \cdot (|x_n - x_m| + |y_n - y_m|) \\
&< c \cdot (2^{-1} \cdot (c^{-1} \cdot \varepsilon) + 2^{-1} \cdot (c^{-1} \cdot \varepsilon)) \\
&= c \cdot (c^{-1} \cdot \varepsilon) = \varepsilon
\end{aligned}$$

Dakle, $|x_n \cdot y_n - x_m \cdot y_m| < \varepsilon$ za sve $m, n \geqslant k_0$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Lema 2.5.3. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje. Neka je (x_n) niz u P takav da $x_n \to 0$ te neka je (y_n) Cauchyjev niz u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Tada $x_n \cdot y_n \to 0$.*

Dokaz. Niz (y_n) je omeđen prema propoziciji 2.4.8 pa prema korolaru 2.4.10 postoji $M \in P$ takav da je $|y_n| \leqslant M$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Možemo pretpostaviti da je $0 < M$. Neka je $\varepsilon \in P$ takav da je $0 < \varepsilon$. Budući da $x_n \to 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$|x_n - 0| < M^{-1} \cdot \varepsilon, \text{ to jest } |x_n| < M^{-1} \cdot \varepsilon.$$

Neka je $n \geqslant n_0$. Imamo

$$\begin{aligned}
|x_n \cdot y_n - 0| &= |x_n \cdot y_n| \\
&= |x_n| \cdot |y_n| \\
&\leqslant |x_n| \cdot M \\
&< M^{-1} \cdot \varepsilon \cdot M = \varepsilon
\end{aligned}$$

Dakle, $|x_n \cdot y_n - 0| < \varepsilon$, za svaki $n \geqslant n_0$. Time je tvrdnja leme dokazana. □

Definicija 2.5.4. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje. Na kvocijentnom skupu $C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$ definiramo binarnu operaciju $\odot$ sa:*

$$[(x_n)] \odot [(y_n)] = [(x_n \cdot y_n)].$$

Dokažimo da je $\odot$ dobro definirana binarna operacija. Prije svega $(x_n \cdot y_n)$ je Cauchyjev niz u $(P, +, \cdot, \leqslant)$ prema propoziciji 2.5.2.
Pretpostavimo da su $(x'_n), (y'_n) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$ takvi da je

$$(x_n) \sim (x'_n) \text{ i } (y_n) \sim (y'_n).$$

Želimo dokazati da je $(x_n \cdot y_n) \sim (x'_n \cdot y'_n)$. Imamo

$$x_n - x'_n \to 0 \text{ i } y_n - y'_n \to 0$$

pa iz leme 2.5.3 slijedi

$$(x_n - x'_n) \cdot y_n \to 0 \text{ i } x'_n \cdot (y_n - y'_n) \to 0.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} x_n \cdot y_n - x'_n \cdot y_n &\to 0 \text{ i} \\ x'_n \cdot y_n - x'_n \cdot y'_n &\to 0. \end{aligned}$$

Iz propozicije 2.2.2 slijedi da

$$(x_n \cdot y_n - x'_n \cdot y_n) + (x'_n \cdot y_n - x'_n \cdot y'_n) \to 0$$

to jest

$$x_n \cdot y_n - x'_n \cdot y'_n \to 0$$

pa je

$$(x_n \cdot y_n) \sim (x'_n \cdot y'_n).$$

Stoga je $\odot$ dobro definirana binarna operacija.

Propozicija 2.5.5. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje. Tada je binarna operacija $\odot$ na $C(P, +, \cdot, \leqslant)$ asocijativna i komutativna. Postoji neutralni element za $\odot$.*

Dokaz. Neka su $(x_n), (y_n), (z_n) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$. Imamo

$$\begin{aligned} ([(x_n)] \odot [(y_n)]) \odot [(z_n)] &= [(x_n \cdot y_n)] \odot [(z_n)] \\ &= [((x_n \cdot y_n) \cdot z_n)] \\ &= [(x_n \cdot (y_n \cdot z_n))] \\ &= [(x_n)] \odot [(y_n \cdot z_n)] \\ &= [(x_n)] \odot ([(y_n)] \odot [(z_n)]) \end{aligned}$$

Dakle,

$$([(x_n)] \odot [(y_n)]) \odot [(z_n)] = [(x_n)] \odot ([(y_n)] \odot [(z_n)])$$

Prema tome, $\odot$ je asocijativna binarna operacija. Analogno dobivamo da je $\odot$ komutativna binarna operacija.

Neka je (e_n) niz u P definiran sa $e_n = 1$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema primjeru 2.1.4 niz (e_n) je Cauchyjev. Dakle

$$(e_n) \in C(P, +, \cdot, \leqslant).$$

Neka je $(x_n) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$. Imamo

$$[(x_n)] \odot [(e_n)] = [(x_n \cdot e_n)] = [(x_n)].$$

Dakle,

$$[(x_n)] \odot [(e_n)] = [(x_n)]$$

te analogno

$$[(e_n)] \odot [(x_n)] = [(x_n)].$$

□

2.6 Struktura polja na $C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$

Propozicija 2.6.1. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje. Tada je $(C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim, \oplus, \odot)$* ***komutativan prsten s jedinicom.***

Dokaz. Neka su $a, b, c \in C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$. Tada postoje $(x_n), (y_n), (z_n) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$ takvi da je

$$a = [(x_n)], b = [(y_n)], c = [(z_n)].$$

Imamo

$$\begin{aligned}
a \odot (b \oplus c) &= [(x_n)] \odot ([(y_n)] \oplus [(z_n)]) \\
&= [(x_n)] \odot [(y_n + z_n)] \\
&= [(x_n \cdot (y_n + z_n))] \\
&= [(x_n \cdot y_n + x_n \cdot z_n)] \\
&= [(x_n \cdot y_n)] \oplus [(x_n \cdot z_n)] \\
&= ([(x_n)] \odot [(y_n)]) \oplus ([(x_n)] \odot [(z_n)]) \\
&= (a \odot b) \oplus (a \odot c).
\end{aligned}$$

Dakle,

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c).$$

Budući da je $\oplus$ komutativna binarna operacija, vrijedi

$$(b \oplus c) \odot a = (b \odot a) \oplus (c \odot a).$$

Prema propoziciji 2.5.5 i propoziciji 2.3.4 vrijedi da je $(C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim, \oplus, \odot)$ komutativan prsten s jedinicom. □

Lema 2.6.2. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje. Neka je (x_n) Cauchyjev niz u $(P, +, \cdot, \leqslant)$ takav da (x_n) ne teži u nulu. Tada postoje $N \in \mathbb{N}$ i $M \in P$ takvi da je*

$$0 < M \text{ i } M \leqslant |x_n| \text{ za svaki } n \geqslant N.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada za svaki $N \in \mathbb{N}$ i za svaki $M \in P$ takav da je $0 < M$ postoji $n \geqslant N$ takav da je $|x_n| < M$, to jest

$$\forall N \in \mathbb{N} \text{ i } \forall M \in P \text{ takav da je } 0 < M \ \exists n \geqslant N \text{ takav da je } |x_n| < M. \tag{2.8}$$

Neka je $\varepsilon \in P$ takav da je $0 < \varepsilon$. Budući da je (x_n) Cauchyjev niz postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \geqslant n_0$ vrijedi

$$|x_m - x_n| < 2^{-1} \cdot \varepsilon. \tag{2.9}$$

Koristeći (2.8) (za $N = n_0$ i $M = 2^{-1} \cdot \varepsilon$) dobivamo da postoji $n \geqslant n_0$ takav da je

$$|x_n| < 2^{-1} \cdot \varepsilon. \tag{2.10}$$

Neka je $m \geqslant n_0$. Koristeći (2.9) i (2.10) dobivamo

$$\begin{aligned}
|x_m - 0| = |x_m| &= |(x_m - x_n) + x_n| \\
&\leqslant |x_m - x_n| + |x_n| \\
&< 2^{-1} \cdot \varepsilon + 2^{-1} \cdot \varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

Dakle, $|x_m - 0| < \varepsilon$, za svaki $m \geqslant n_0$. Zaključujemo da $x_n \to 0$. To je u kontradikciji s pretpostavkom leme. Time je tvrdnja leme dokazana. □

Lema 2.6.3. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ polje te neka su $u, v \in P$ takvi da je $u \neq 0$ i $v \neq 0$. Tada je*

$$u^{-1} - v^{-1} = (u^{-1} \cdot v^{-1})(v - u).$$

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned}
(u^{-1} \cdot v^{-1})(v - u) &= (u^{-1} \cdot v^{-1}) \cdot (v + (-u)) \\
&= (u^{-1} \cdot v^{-1}) \cdot v + (u^{-1} \cdot v^{-1}) \cdot (-u) \\
&= u^{-1} \cdot (v^{-1} \cdot v) + (v^{-1} \cdot u^{-1}) \cdot (-u) \\
&= u^{-1} \cdot 1 + v^{-1} \cdot (u^{-1} \cdot (-u)) \\
&= u^{-1} + v^{-1} \cdot (-(u^{-1} \cdot u)) \\
&= u^{-1} + v^{-1} \cdot (-1) \\
&= u^{-1} + (-(v^{-1} \cdot 1)) \\
&= u^{-1} + (-v^{-1}) \\
&= u^{-1} - v^{-1}
\end{aligned}$$

Prema tome, tvrdnja leme vrijedi. □

Napomena 2.6.4. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeno polje. Kao u dokazu propozicije 2.1.3 vidimo da za sve* $u, v \in P$ *vrijedi*

$$|u - v| = |v - u| .$$

Napomena 2.6.5. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeno polje. Neka je* $u \in P$ *takav da je* $u \neq 0$. *Tada je*

$$\left|u^{-1}\right| = |u|^{-1} .$$

Naime, vrijedi

$$\left|u^{-1}\right| \cdot |u| = \left|u^{-1} \cdot u\right| = |1| = 1.$$

Dakle, $\left|u^{-1}\right| \cdot |u| = 1$ *pa množenjem ove jednakosti sa* $|u|^{-1}$ *dobvamo*

$$\left|u^{-1}\right| = |u|^{-1} .$$

Lema 2.6.6. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeno polje. Neka je* (x_n) *Cauchyjev niz u* $(P, +, \cdot, \leqslant)$. *Pretpostavimo da su* $N \in \mathbb{N}$ *i* $M \in P$ *takvi da je* $0 < M$ *te* $M \leqslant |x_n|$, *za svaki* $n \geqslant N$. *Neka je* (y_n) *niz u* P *definiran sa*

$$y_n = \begin{cases} 1, & n < N \\ x_n^{-1}, & n \geqslant N \end{cases}$$

Tada je (y_n) *Cauchyjev niz u* $(P, +, \cdot, \leqslant)$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon \in P$ takav da je $0 < \varepsilon$. Budući da je (x_n) Cauchyjev niz postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \geqslant n_0$ vrijedi

$$|x_m - x_n| < M \cdot M \cdot \varepsilon. \tag{2.11}$$

Neka je $k = max\{n_0, N\}$. Neka su $m, n \geqslant k$. Tada imamo $m, n \geqslant n_0$ i $m, n \geqslant N$.
Slijedi $M \leqslant |x_n|$ pa je $1 \leqslant |x_n| \cdot M^{-1}$ te je $|x_n|^{-1} \leqslant M^{-1}$. Iz napomene 2.6.5 slijedi

$$\left|x_n^{-1}\right| \leqslant M^{-1}. \tag{2.12}$$

Analogno dobivamo da je

$$\left|x_m^{-1}\right| \leqslant M^{-1}. \tag{2.13}$$

Koristeći lemu 2.6.3 i napomenu 2.6.4, propoziciju 1.5.7 te (2.12), (2.13) i (2.11) dobivamo

$$\begin{aligned}
|y_m - y_n| &= \left|x_m^{-1} - x_n^{-1}\right| = \left|(x_m^{-1} \cdot x_n^{-1}) \cdot (x_n - x_m)\right| \\
&= \left|x_m^{-1} \cdot x_n^{-1}\right| \cdot |x_n - x_m| \\
&= (\left|x_m^{-1}\right| \cdot \left|x_n^{-1}\right|) \cdot |x_m - x_n| \\
&\leqslant (M^{-1} \cdot \left|x_n^{-1}\right|) \cdot |x_m - x_n| \\
&\leqslant (M^{-1} \cdot M^{-1}) \cdot |x_m - x_n| \\
&< (M^{-1} \cdot M^{-1}) \cdot (M \cdot M \cdot \varepsilon) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, $|y_m - y_n| < \varepsilon$ za sve $m, n \geqslant k$. Prema tome, (y_n) je Cauchyjev niz. □

Napomena 2.6.7. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeni prsten. Neka je $c \in P$ te neka je (x_n) niz u P. Pretpostavimo da postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n = c$ za svaki $n \geqslant N$. Tada $x_n \to c$.*

Naime, neka je $\varepsilon \in P$ takav da je $0 < \varepsilon$. Za svaki $n \geqslant N$ vrijedi $|x_n - c| < \varepsilon$ jer je $|x_n - c| = 0$. Prema tome, $x_n \to c$.

Teorem 2.6.8. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje. Tada je $(C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim, \oplus, \odot)$* ***polje.***

Dokaz. Znamo da je $(C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim, \oplus, \odot)$ komutativni prsten s jedinicom. Neka je (a_n) niz u P definiran sa $a_n = 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. U dokazu propozicije 2.3.4 smo vidjeli da je $[(a_n)]$ neutralni element za $\oplus$. Dakle,

$$[(a_n)] \text{ je nula u prstenu } (C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim, \oplus, \odot).$$

Nadalje, neka je (e_n) niz u P definiran sa $e_n = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz dokaza propozicije 2.5.5 vidimo da je $[(e_n)]$ neutralni element za $\odot$.

Neka je $(x_n) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$ takav da je

$$[(x_n)] \neq [(a_n)].$$

Želimo dokazati da postoji $\alpha \in C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$ takva da je

$$[(x_n)] \odot \alpha = [(e_n)].$$

Prema propoziciji 2.1.8 (2) iz $[(x_n)] \neq [(a_n)]$ slijedi $(x_n) \nsim (a_n)$. Stoga, niz $(x_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ne teži prema nuli, to jest niz (x_n) ne teži prema nuli.

Prema lemi 2.6.2 postoji $N \in \mathbb{N}$ i postoji $M \in P$, $0 < M$ takav da je $M \leqslant |x_n|$, za svaki $n \geqslant N$.
Definirajmo niz (y_n) u P sa

$$y_n = \begin{cases} 1, & n < N \\ x_n^{-1}, & n \geqslant N \end{cases}$$

Iz leme 2.6.6 slijedi da je (y_n) Cauchyjev niz u $(P, +, \cdot, \leqslant)$. Vrijedi,

$$x_n \cdot y_n = \begin{cases} x_n, & n < N \\ 1, & n \geqslant N \end{cases}$$

Stoga je

$$x_n \cdot y_n - e_n = \begin{cases} x_n - 1, & n < N \\ 0, & n \geqslant N \end{cases}$$

Prema napomeni 2.6.7 vrijedi $x_n \cdot y_n - e_n \to 0$.

Dakle, $(x_n \cdot y_n) \sim (e_n)$ pa je onda

$$[(x_n \cdot y_n)] = [(e_n)]$$

to jest,

$$[(x_n)] \odot [(y_n)] = [(e_n)].$$

Zbog komutativnosti $\odot$ vrijedi

$$[(y_n)] \odot [(x_n)] = [(e_n)].$$

Prema tome, $[(x_n)]$ ima inverzni element s obzirom na operaciju $\odot$. Time je teorem dokazan. □

2.7 Uređaj na $C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$

Definicija 2.7.1. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje. Na skupu $C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$ definiramo binarnu relaciju $\prec$ na sljedeći način. Za $\alpha, \beta \in C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$ neka je*

$$\alpha \prec \beta$$

ako postoje $(x_n), (y_n) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$ takvi da je $\alpha = [(x_n)], \beta = [(y_n)]$ te takvi da postoje $N \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon \in P$, $0 < \varepsilon$ takvi da je

$$x_n + \varepsilon \leqslant y_n,$$

za svaki $n \geqslant N$.

Propozicija 2.7.2. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje te neka su $\alpha, \beta \in C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$ takvi da je*

$$\alpha \prec \beta.$$

Neka su $(a_n), (b_n) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$ takvi da je $\alpha = [(a_n)], \beta = [(b_n)]$. Tada postoje $M \in \mathbb{N}$ i $\delta \in P$, $0 < \delta$ takvi da je

$$a_n + \delta \leqslant b_n,$$

za svaki $n \geqslant M$.

Dokaz. Iz $\alpha \prec \beta$ slijedi da postoje $(x_n), (y_n) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$ te $N \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon \in P$, $0 < \varepsilon$ takvi da je $\alpha = [(x_n)], \beta = [(y_n)]$ te

$$x_n + \varepsilon \leqslant y_n,$$

za svaki $n \geqslant N$.

Definirajmo $3 = 2 + 1$. Očito je $0 < 3$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
(3^{-1} \cdot \varepsilon + 3^{-1} \cdot \varepsilon) + 3^{-1} \cdot \varepsilon &= (3^{-1} + 3^{-1}) \cdot \varepsilon + 3^{-1} \cdot \varepsilon \\
&= ((3^{-1} + 3^{-1}) + 3^{-1}) \cdot \varepsilon \\
&= ((1 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-1}) + 1 \cdot 3^{-1}) \cdot \varepsilon \\
&= ((1 + 1) \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-1}) \cdot \varepsilon \\
&= (2 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-1}) \cdot \varepsilon \\
&= ((2 + 1) \cdot 3^{-1}) \cdot \varepsilon \\
&= 3 \cdot 3^{-1} \cdot \varepsilon = 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, $(\delta + \delta) + \delta = \varepsilon$, gdje je $\delta = 3^{-1} \cdot \varepsilon$.

Očito je $0 < \delta$. Neka je $n \geqslant N$. Imamo $x_n + \varepsilon \leqslant y_n$ pa je

$$x_n + ((\delta + \delta) + \delta) \leqslant y_n$$

pa je

$$x_n + (\delta + \delta) \leqslant y_n - \delta.$$

Dakle,

$$(x_n + \delta) + \delta \leqslant y_n - \delta, \text{ za svaki } n \geqslant N. \tag{2.14}$$

Znamo da je $\alpha = [(a_n)]$ i $\alpha = [(x_n)]$ pa je

$$[(a_n)] = [(x_n)],$$

što povlači da je

$$(a_n) \sim (x_n),$$

to jest

$$a_n - x_n \to 0.$$

Stoga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$|(a_n - x_n) - 0| < \delta.$$

Dakle, za svaki $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$|a_n - x_n| < \delta.$$

Neka je $n \geqslant n_0$. Očito je
$$a_n - x_n \leqslant |a_n - x_n|$$
pa je $a_n - x_n < \delta$. Prema tome je
$$a_n < x_n + \delta, \text{ za svaki } n \geqslant n_0. \tag{2.15}$$
Na isti način vidimo da $y_n - b_n \to 0$ pa postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je
$$|(y_n - b_n) - 0| < \delta,$$
za svaki $n \geqslant n_1$. Stoga je $y_n - b_n < \delta$, za svaki $n \geqslant n_1$. Prema tome
$$y_n - \delta < b_n, \text{ za svaki } n \geqslant n_1. \tag{2.16}$$
Definirajmo $M = max\{N, n_0, n_1\}$. Neka je $n \geqslant M$. Tada je $n \geqslant N, n \geqslant n_0$ i $n \geqslant n_1$.
Iz (2.15) slijedi $a_n < x_n + \delta$ pa je
$$a_n + \delta < (x_n + \delta) + \delta.$$
Iz (2.14) slijedi da je
$$a_n + \delta < y_n - \delta$$
pa iz (2.16) dobivamo
$$a_n + \delta < b_n.$$
Dakle,
$$a_n + \delta \leqslant b_n, \text{ za svaki } n \geqslant M.$$
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 2.7.3. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje. Neka su $a, b, c \in C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$.*

(1) Ne vrijedi $a \prec a$.

(2) Pretpostavimo da je $a \prec b$ i $b \prec c$. Tada je $a \prec c$.

Dokaz. (1) Pretpostavimo da je $a \prec a$. Imamo $a = [(x_n)]$, gdje je $(x_n) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$. Vrijedi
$$[(x_n)] \prec [(x_n)]$$
pa prema poproziciji 2.7.2 postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon \in P$, $0 < \varepsilon$ takav da je
$$x_n + \varepsilon \leqslant x_n, \text{ za svaki } n \geqslant n_0.$$
To je očito nemoguće. Dakle, ne vrijedi $a \prec a$.

(2) Pretpostavimo da je $a \prec b$ i $b \prec c$. Imamo $a = [(x_n)], b = [(y_n)], c = [(z_n)]$, gdje su $(x_n), (y_n), (z_n) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$. Iz propozicije 2.7.2 slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon \in P$, $0 < \varepsilon$ takav da je

$$x_n + \varepsilon \leqslant y_n, \text{ za svaki } n \geqslant n_0$$

te da postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ i $\delta \in P$, $0 < \delta$ takav da je

$$y_n + \delta \leqslant z_n, \text{ za svaki } n \geqslant m_0.$$

Neka je $k_0 = max\{n_0, m_0\}$. Neka je $n \geqslant k_0$. Tada je

$$x_n + \varepsilon \leqslant y_n \tag{2.17}$$

i

$$y_n + \delta \leqslant z_n. \tag{2.18}$$

Iz (2.17) slijedi

$$(x_n + \varepsilon) + \delta \leqslant y_n + \delta,$$

to jest

$$x_n + (\varepsilon + \delta) \leqslant y_n + \delta$$

pa iz (2.18) slijedi

$$x_n + (\varepsilon + \delta) \leqslant z_n. \tag{2.19}$$

Dakle, (2.19) vrijedi za svaki $n \geqslant k_0$. Očito je $0 < \varepsilon + \delta$. Stoga je

$$[(x_n)] \prec [(z_n)], \text{ to jest } a \prec c.$$

□

Definicija 2.7.4. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje. Neka je $\preceq$ binarna relacija u $C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$ definirana sa*

$$a \preceq b \text{ ako je } a \prec b \text{ ili } a = b.$$

Teorem 2.7.5. *Neka je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje. Tada je $\preceq$* ***uređaj*** *na $C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$.*

Dokaz. Očito je $a \preceq a$ za svaki $a \in C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$. Prema tome binarna relacija $\preceq$ je refleksivna na $C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$.

Pretpostavimo da su $a, b \in C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$ takvi da je $a \preceq b$ i $b \preceq a$. Pretpostavimo da je $a \neq b$. Tada je $a \prec b$ i $b \prec a$. Iz propozicije 2.7.3 slijedi $a \prec a$, no to je nemoguće prema istoj propoziciji. Prema tome je $a = b$. Dakle, $\preceq$ je antisimetrična relacija.

Neka su $a, b, c \in C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$ takvi da je $a \preceq b$ i $b \preceq c$.
Ako je $a = b$, onda je očito $a \preceq c$. Isto tako ako je $b = c$, onda je $a \preceq c$. Ako je $a \neq b$ i $b \neq c$, onda je $a \prec b$ i $b \prec c$, pa iz propozicije 2.7.3 slijedi $a \prec c$, a onda je očito $a \preceq c$.
U svakom slučaju $a \preceq c$. Prema tome $\preceq$ je tranzitivna relacija.

Neka su $a, b \in C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$. Želimo dokazati da je $a \preceq b$ ili $b \preceq a$. To je jasno ako je $a = b$. Pretpostavimo da je $a \neq b$. Imamo $a = [(x_i)]$ i $b = [(y_i)]$ za neke $(x_i), (y_i) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$.
Iz $a \neq b$ i propozicije 2.1.8 (2) slijedi da $(x_i) \nsim (y_i)$. Stoga niz $(x_i - y_i)$ ne teži u 0.
Iz propozicije 2.3.3 i 2.3.1 slijedi da je $(x_i - y_i)$ Cauchyjev niz u $(P, +, \cdot, \leqslant)$.

Prema lemi 2.6.2 postoje $N \in \mathbb{N}$ i $M \in P$ takvi da je $0 < M$ i

$$M \leqslant |x_i - y_i| \text{ za svaki } i \geqslant N. \tag{2.20}$$

Neka je 3 definiran kao u dokazu propozicije 2.7.2. Budući da je (x_i) Cauchyjev niz, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve

$$i, j \geqslant n_0 \text{ vrijedi } \left|x_i - x_j\right| < 3^{-1} \cdot M. \tag{2.21}$$

Isto tako postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve

$$i, j \geqslant m_0 \text{ vrijedi } \left|y_i - y_j\right| < 3^{-1} \cdot M. \tag{2.22}$$

Neka je $k = max\{N, n_0, m_0\}$. Tada je $k \geqslant N$ pa iz (2.20) slijedi

$$M \leqslant |x_k - y_k|\,. \tag{2.23}$$

Vrijedi $x_k \neq y_k$ (u suprotnom bismo imali $M \leqslant 0$). Stoga je $x_k < y_k$ ili $y_k < x_k$.

1. slučaj: $x_k < y_k$.

Neka je $i \geqslant k$. Tvrdimo da je

$$x_i + 3^{-1} \cdot M \leqslant y_i. \tag{2.24}$$

Iz $i \geqslant k$ i $k \geqslant n_0$ slijedi $i, k \geqslant n_0$ pa iz (2.21) slijedi

$$|x_i - x_k| < 3^{-1} \cdot M.$$

Iz $x_i - x_k \leqslant |x_i - x_k|$ slijedi $x_i - x_k < 3^{-1} \cdot M$. Stoga je

$$x_i < x_k + 3^{-1} \cdot M. \tag{2.25}$$

Isto tako imamo $i, k \geqslant m_0$ pa iz (2.22) slijedi

$$|y_i - y_k| < 3^{-1} \cdot M.$$

Stoga je
$$-(y_i - y_k) \leqslant |-(y_i - y_k)| = |y_i - y_k| < 3^{-1} \cdot M.$$
Dakle,
$$-(y_i - y_k) < 3^{-1} \cdot M$$
pa je
$$-3^{-1} \cdot M < y_i - y_k$$
odnosno
$$y_k - 3^{-1} \cdot M < y_i. \tag{2.26}$$
Dokažimo (2.24) . Pretpostavimo suprotno. Tada je
$$y_i < x_i + 3^{-1} \cdot M.$$
Koristeći (2.25) i (2.26) dobivamo
$$y_k - 3^{-1} \cdot M < y_i < x_i + 3^{-1} \cdot M < (x_k + 3^{-1} \cdot M) + 3^{-1} \cdot M$$
dakle,
$$y_k - 3^{-1} \cdot M < x_k + (3^{-1} \cdot M + 3^{-1} \cdot M)$$
pa je
$$y_k < x_k + (3^{-1} \cdot M + 3^{-1} \cdot M + 3^{-1} \cdot M),$$
to jest
$$y_k < x_k + M.$$
Slijedi
$$y_k - x_k < M.$$
Znamo da je $x_k < y_k$ pa je $0 < y_k - x_k$. Stoga je
$$|y_k - x_k| = y_k - x_k < M,$$
dakle
$$|y_k - x_k| < M,$$
što je u kontradikciji sa (2.23).
Prema tome vrijedi (2.24). Dakle, $x_i + 3^{-1} \cdot M \leqslant y_i,$ za svaki $i \geqslant k$.
Stoga je
$$[(x_i)] \prec [(y_i)],$$
to jest
$$a \prec b.$$

Posebno,

$$a \preceq b.$$

2. slučaj: $y_k < x_k$.

Na isti način kao u prethodnom slučaju dobivamo da je

$$y_i + 3^{-1} \cdot M \leqslant x_i, \text{ za svaki } i \geqslant k.$$

Stoga je

$$[(y_i)] \prec [(x_i)],$$

to jest

$$b \prec a$$

pa je posebno

$$b \preceq a.$$

Zaključak:

$$a \preceq b \text{ ili } b \preceq a.$$

Prema tome $\preceq$ je uređaj na $C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$. □

Teorem 2.7.6. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leqslant)$ *uređeno polje. Tada je*

$$(C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim, \oplus, \odot, \preceq) \ \textbf{uređeno polje}.$$

Dokaz. Znamo da je $(C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim, \oplus, \odot)$ polje. Treba dokazati da je $(C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim, \oplus, \odot, \preceq)$ uređeni prsten, to jest da je $(C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim, \oplus, \preceq)$ uređena grupa te da za sve $a, b \in C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$ takve da je $0 \preceq a$ i $0 \preceq b$ vrijedi $0 \preceq a \odot b$, pri čemu je 0 nula u prstenu $(C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim, \oplus, \odot)$.

Dakle, dovoljno je dokazati da za sve $a, b, c \in C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$ vrijedi sljedeće:

(1) $a \preceq b \Longrightarrow a \oplus c \preceq b \oplus c$

(2) $0 \preceq a$ i $0 \preceq b \Longrightarrow 0 \preceq a \odot b$

Neka su $a, b, c \in C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$ takvi da je $a \preceq b$. Imamo

$$a = [(x_i)], b = [(y_i)], c = [(z_i)]$$

gdje su $(x_i), (y_i), (z_i) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$.

Vrijedi $a \prec b$ ili $a = b$. Ako je $a = b$, onda je $a \oplus c = b \oplus c$ pa je

$$a \oplus c \preceq b \oplus c.$$

Pretpostavimo da je $a \prec b$. Dakle, $[(x_i)] \prec [(y_i)]$ pa postoje $n_0 \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon \in P$, $0 < \varepsilon$, takve da je

$$x_i + \varepsilon \leqslant y_i, \text{ za svaki } i \geqslant n_0.$$

Neka je $i \geqslant n_0$. Budući da je $(P, +, \cdot, \leqslant)$ uređeno polje iz $x_i + \varepsilon \leqslant y_i$ slijedi

$$(x_i + \varepsilon) + z_i \leqslant y_i + z_i.$$

Dakle,

$$(x_i + z_i) + \varepsilon \leqslant y_i + z_i \text{ za svaki } i \geqslant n_0.$$

Stoga je

$$[(x_i + z_i)] \prec [(y_i + z_i)],$$

to jest

$$a \oplus c \prec b \oplus c.$$

Posebno,

$$a \oplus c \preceq b \oplus c.$$

U svakom slučaju vrijedi $a \oplus c \preceq b \oplus c$. Prema tome, vrijedi (1).

Dokažimo (2). Neka je $[(e_i)]$ niz u P definiran sa $e_i = 0$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Znamo da je $[(e_i)]$ nula u prstenu $(C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim, \oplus, \odot)$.

Pretpostavimo da su $a, b \in C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$ takvi da je

$$0 \preceq a \text{ i } 0 \preceq b.$$

Želimo dokazati da je $0 \preceq a \odot b$.
Ako je $0 = a$, onda je $a \odot b = 0 \odot b = 0$ prema propoziciji 1.3.3. Stoga je

$$0 \preceq a \odot b.$$

Do istog zaključka dolazimo ako je $0 = b$. Pretpostavimo stoga da je $0 \prec a$ i $0 \prec b$. Imamo

$$0 = [(e_i)], a = [(x_i)], b = [(y_i)],$$

gdje su $(x_i), (y_i) \in C(P, +, \cdot, \leqslant)$.

Iz $0 \prec a$, to jest $[(e_i)] \prec [(x_i)]$ slijedi da postoje $n_0 \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon \in P$, $0 < \varepsilon$ takvi da je

$$e_i + \varepsilon \leqslant x_i, \text{ za svaki } i \geqslant n_0.$$

Dakle,

$$\varepsilon \leqslant x_i, \quad \text{za svaki } i \geqslant n_0. \tag{2.27}$$

Imamo, $0 \prec b$, to jest $[(e_i)] \prec [(y_i)]$ pa postoje $m_0 \in \mathbb{N}$ i $\delta \in P$, $0 < \delta$ takvi da je

$$e_i + \delta \leqslant y_i, \text{ za svaki } i \geqslant m_0.$$

Dakle,

$$\delta \leqslant y_i, \quad \text{za svaki } i \geqslant m_0. \tag{2.28}$$

Neka je $k_0 = max\{n_0, m_0\}$. Neka je $i \geqslant k_0$. Tada je $i \geqslant n_0$ i $i \geqslant m_0$ pa iz (2.27) i (2.28) slijedi

$$\varepsilon \leqslant x_i \text{ i } \delta \leqslant y_i.$$

Iz propozicije 1.5.7 (2) slijedi

$$\varepsilon \cdot \delta \leqslant x_i \cdot \delta. \tag{2.29}$$

Zbog $\varepsilon \leqslant x_i$ imamo $0 < x_i$ pa iz propozicije 1.5.7 (2) slijedi

$$x_i \cdot \delta \leqslant x_i \cdot y_i \tag{2.30}$$

Iz (2.29) i (2.30) slijedi

$$\varepsilon \cdot \delta \leqslant x_i \cdot y_i.$$

Zaključak,

$$\varepsilon \cdot \delta \leqslant x_i \cdot y_i, \text{ za svaki } i \geqslant k_0.$$

Prema propoziciji 1.5.7 (1) vrijedi $0 < \varepsilon \cdot \delta$. Za svaki $i \geqslant k_0$ vrijedi

$$e_i + \varepsilon \cdot \delta \leqslant x_i \cdot y_i$$

pa vidimo da je

$$[(e_i)] \prec [(x_i \cdot y_i)],$$

odnosno

$$[(e_i)] \prec [(x_i)] \odot [(y_i)].$$

Dakle,

$$0 \prec a \odot b.$$

U svakom slučaju vrijedi

$$0 \preceq a \odot b.$$

Prema tome vrijedi (2). Time je teorem dokazan. $\square$

Bibliografija

[1] S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Školska Knjiga, Zagreb, 1997.

[2] S. Mardešić, *Matematička analiza 1*, Školska Knjiga, Zagreb, 1991.

[3] B. Pavković i D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

Sažetak

U ovom diplomskom radu, kroz prvo poglavlje proučavani su pojmovi uređene grupe, uređenih prstena i polja. Definirao se pojam niza te opisala konvergencija nizova u uređenim prstenima. U drugom se poglavlju proučavalo Cauchyjeve nizove u uređenim poljima. Uveden je pojam relacije ekvivalencije na skupu svih Cauchyjevih nizova u uređenom polju te pripadni kvocijentni skup. Definirane su binarne operacije $\oplus$ i $\odot$ na skupu $C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$ te dokazano da je $(C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim, \oplus, \odot)$ polje. Na kraju je definirana relacija uređaja $\preceq$ na $C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim$ te je dokazano da je $(C(P, +, \cdot, \leqslant)/_\sim, \oplus, \odot, \preceq)$ uređeno polje.

Summary

In this thesis through first chapter we studied ordered groups, ordered rings and fields. The concept of sequence was defined and we described convergence of sequence in ordered fields. In second chapter we studied Cauchy sequences in ordered fields. We introduced an equivalence relation on the set of all Cauchy sequences in an ordered field and a corresponding quotient set. We defined binary operations $\oplus$ and $\odot$ on the set $C(P, +, \cdot, \leqslant)/_{\sim}$ and proved that $(C(P, +, \cdot, \leqslant)/_{\sim}, \oplus, \odot)$ is a field. Finally, we defined an order $\preceq$ on $C(P, +, \cdot, \leqslant)/_{\sim}$ and we proved that $(C(P, +, \cdot, \leqslant)/_{\sim}, \oplus, \odot, \preceq)$ is an ordered field.

Životopis

Rođena sam 3. prosinca 1993. godine u Zadru. Nakon završene Osnovne škole Petra Preradovića u Zadru, srednjoškolsko obrazovanje stekla sam u općoj gimnaziji Juraj Baraković u Zadru. Maturirala sam 2012. godine i iste godine u srpnju upisala preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija, na kojem sam stekla naziv sveučilišne prvostupnice edukacije matematike, 2017. godine upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na istom fakultetu.