

Primjena modela više smanjenja na hrvatsko tržište životnih osiguranja

Hrastić, Julija

Professional thesis / Završni specijalistički

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:464301>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-10-14**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)





SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK
Poslijediplomski specijalistički studij aktuarske matematike

Julija Hrastić

Primjena modela više smanjenja na hrvatsko tržište životnih osiguranja

Završni rad

Voditelj završnog rada: prof. dr. sc. Miljenko Huzak

Zagreb, 2021.

<i>SADRŽAJ</i>	1
----------------	---

Sadržaj

1 Uvod	4
1.1 Životno osiguranje	4
1.2 Aktuarski kontrolni ciklus	9
2 Mješovito životno osiguranje	11
2.1 Mješovito životno osiguranje – osiguranje za slučaj smrti ili doživljenja	11
2.2 O podacima	13
3 Modeli više smanjenja	13
3.1 Mješovito životno osiguranje kao Markovljev proces	13
3.2 Statistike	16
3.3 Intenziteti prijelaza	23
3.4 Procjena intenziteta prijelaza	31
3.5 Standardna pogreška procjenitelja	41
3.6 Očekivano vrijeme boravka u pojedinom stanju	44
3.7 Vrednovanje police	50
3.8 Primjer izračuna bruto premije	57
3.9 Diskusija	59
Životopis	63
Sažetak	64
Summary	65
Prilog 1	66
Prilog 2	68

<i>SADRŽAJ</i>	2
Prilog 3	70
Prilog 4	74
Prilog 5	77

Zahvala

"Ne učimo za školu, nego za život"

Seneka

Kada bih dolazila iz škole kući i hvalila se dobrom ocjenom roditelji su mi uredno govorili: "Ne učiš za školu, nego za život". Naučili su me da je važno ono što znaš, a ne ocjena koju dobiješ. Meni ovo nije Senekina izreka, njega nisam poznavala. Ovo je izreka mojih roditelja kojima je moje obrazovanje bilo možda i važnije nego meni samoj. Hvala vam na tome.

Zahvaljujem i svojim sestrama Nikolini i Emiliji koje su ravnale moja krivudanja kroz život.

Neupitnu podršku tijekom studija pružao mi je moj suprug Davor koji je uvijek imao razumijevanja za moje izbjivanje tijekom ovog studija. Preuzimao je na sebe kućanske i obiteljske obveze, pa se tako nekada samostalno brinuo za jedno, zatim za dvoje, na kraju i za troje djece (Goran, Tamara i Robert). Hvala!

Hvala i mojoj djeci koja su me svakodnevno razveseljavala, ali i zato jer sam im zbog učenja krala trenutke sa njihovom mamom. Trudila sam se da takvih ukradenih trenutaka bude što manje, no ponekad nisam imala izbora. Nadam se da mi se neće osvetiti u tinejđerskoj dobi.

Posebno zahvaljujem svom mentoru prof.dr.sc. Miljenku Huzaku na izdvojenom vremenu i poticajnoj radnoj okolini. Za svaku nejasnoću strpljivo je sjeo sa mnom za stol i razjasnio mi svaku moju nedoumicu. Stoga mu zahvaljujem na nesebičnom dijeljenju svojeg znanja, iskustva. Hvala mu na svim savjetima i ohrabrenju čime je uvelike doprinjeo izradi ovog rada.

1 Uvod

1.1 Životno osiguranje

Životno osiguranje (Life insurance) je financijski produkt koji omogućava financijsku pomoć najčešće članovima obitelji ili osobi/osobama koje je odredio ugovaratelj.

Ugovorom o osiguranju (vidjeti [9]) osiguratelj se obvezuje ugovaratelju osiguranja isplatiti osiguraniku ili korisniku osiguranja osigurninu ako nastane osigurani slučaj, a ugovaratelj se osiguranja obvezuje osiguratelju platiti premiju osiguranja.

Životna osiguranja (vidjeti [10]) dijele se na sljedeće vrste osiguranja:

1. životna osiguranja (u užem smislu). Čine ih:
 - a) Osiguranje života koje pokriva sljedeće rizike:
 - osiguranje života za slučaj doživljenja
 - osiguranje života za slučaj smrti
 - mješovito osiguranje života za slučaj smrti i doživljenja
 - osiguranje života s povratom premija
 - osiguranje kritičnih bolesti
 - doživotno osiguranje za slučaj smrti
 - i ostala osiguranja života.
 - b) Rentno osiguranje. Kao što je osiguranje periodičnih isplata tijekom određenog razdoblja ili doživotno.
 - c) Dopunska osiguranja uz osiguranje života. To su osiguranja koja se ugovaraju uz životno osiguranje i pokrivaju primjerice rizike: ozljede uključujući nesposobnost za rad, smrt zbog nezgode i invaliditeta zbog nezgode ili bolesti
2. Osiguranje u slučaju rođenja djeteta ili osiguranje za slučaj vjenčanja ili osiguranje sklapanja životnog partnerstva. Osiguranje za slučaj vjenčanja ili osiguranje sklapanja životnog partnerstva je osiguranje u kojem se naknada isplaćuje prilikom sklapanja braka ili životnog partnerstva ili doživljenje unaprijed određene dobi.

3. Osiguranje života i rentno osiguranje kod kojih ugovaratelj osiguranja snosi rizik ulaganja. To je osiguranje vezano uz vrijednost udjela UCITS fonda kako je definiran zakonom kojim se uređuje osnivanje i poslovanje otvorenih investicijskih fondova s javnom ponudom, uz vrijednost imovine unutarnjeg fonda ili uz dionički indeks, odnosno drugu referentnu vrijednost.
4. Tontine su osiguranja u kojima se osnivaju udruženja članova kako bi zajednički kapitalizirali svoje doprinose i potom raspodijelili tako prikupljena sredstva preživjelim članovima ili korisnicima umrlih članova.
5. Osiguranje s kapitalizacijom isplate je osiguranje temeljeno na aktuarskim izračunima kod kojeg se u zamjenu za jednokratno, odnosno višekratno plaćanje unaprijed ugovorenog iznosa premije preuzimaju obveze isplate iznosa u određenoj visini kroz određeno razdoblje.
6. Upravljanje sredstvima zajedničkih mirovinskih fondova koji uključuju očuvanje kapitala ili plaćanje minimalnih kamata.

Osiguranje života (1 a) sa ili bez sudjelovanja u dobiti ili unit-linked pojedinačno ili grupno				
	Doživotno osiguranje za slučaj smrti	Riziko osiguranje	Osiguranje doživljenja	Mješovito osiguranje
Trajanje	do smrti	dogovoreni broj godina		
Premija	jednokratne ili višekratne konstantne premije			
Naknade	nakon smrti osiguranika	SAMO ako osiguranik umre za vrijeme trajanja osiguranja	SAMO ako osiguranik doživi dogovoreni broj godina	ako osiguranik umre za vrijeme trajanja osiguranja ili ako doživi istek osiguranja
Otkup	moгуć	nije moguć	moгуć	moгуć

Tablica 1: Tablični prikaz osiguranja života

Prema prikupljenim podacima Hrvatskog ureda za osiguranje (HUO) (vidjeti [8]) na dan 30.09.2018. godine udio zaračunate bruto premije i broja osiguranja odabranih vrsta osiguranja prikazan je na slici 1 i 2.

U aktuarskim izvještajima koristimo oznaku 19 za životna osiguranja (u užem smislu), oznaku 20 za rentna osiguranja, oznaku 21 za dopunska osiguranja uz životna osiguranja, oznaku 22 za osiguranja za slučaj vjenčanja ili sklapanja životnog partnerstva ili rođenja, oznaku 24 za tontine i oznaku 25 za osiguranja s kapitalizacijom.



Slika 1: Broj novih osiguranja s jednokratnim ili višekratnim plaćanjem premije

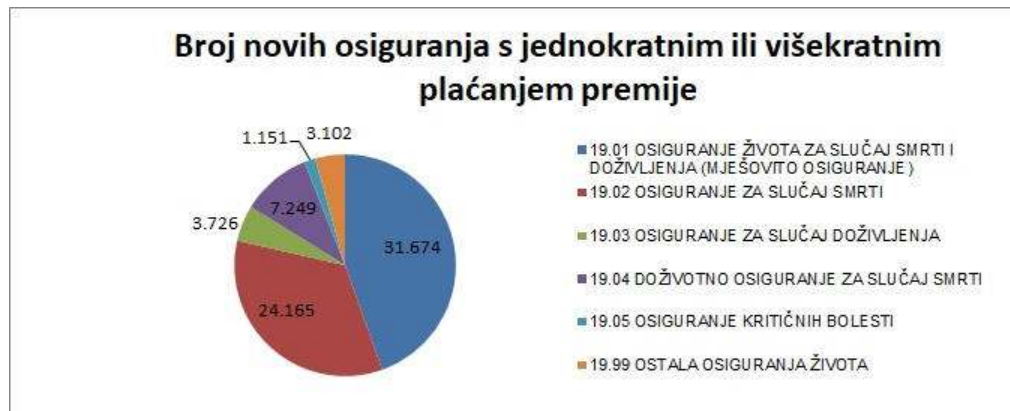


Slika 2: Zaračunata bruto premija novih osiguranja s jednokratnim ili višekratnim plaćanjem premije u kunama

Na grafovima se vidi da po broju osiguranja i prema zaračunatoj bruto premiji vrste osiguranja (vidjeti [11]) 19 životna osiguranja ima daleko više nego ostalih vrsta osiguranja.

U aktuarskim izvještajima vrsta osiguranja s oznakom 19 životno osiguranje djeli se na podvrste. Oznaka 19.01 predstavlja osiguranje života za slučaj smrti i doživljenja (mješovito osiguranje). Oznaka 19.02 predstavlja osiguranje za slučaj smrti. Oznaka 19.03 predstavlja osiguranje za slučaj doživljenja. Oznaka 19.04 predstavlja doživotno osiguranje za slučaj smrti. Oznaka 19.05 predstavlja osiguranje kritičnih bolesti. Oznaka 19.99 predstavlja ostala životna osiguranja koja nisu ranije navedena.

Prema prikupljenim podacima Hrvatskog ureda za osiguranje (HUO) (vidjeti [8]) na dan 30.09.2018. godine udio zaračunate bruto premije i broja osiguranja odabranih rizika osiguranja vrste osiguranja 19 životno osiguranje prikazan je na slikama 3 i 4.



Slika 3: Broj novih osiguranja s jednokratnim ili višekratnim plaćanjem premije za vrstu osiguranja 19 životna osiguranja

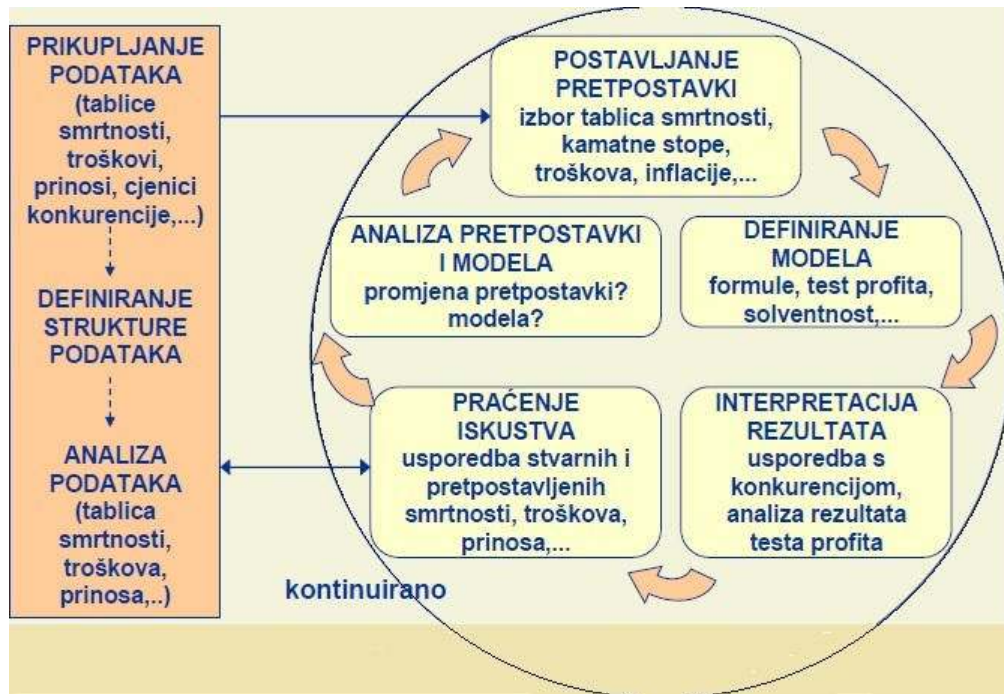


Slika 4: Zaračunata bruto premija novih osiguranja s jednokratnim ili višekratnim plaćanjem premije u kunama za vrstu osiguranja 19 životna osiguranja

Na grafovima se vidi da po broju osiguranja ima više a prema zaračunatoj bruto premiji vrste osiguranja (vidjeti [11]) 19.01 osiguranje života za slučaj smrti i doživljenja ima daleko više nego ostalih vrsta osiguranja. Iz tog razloga daljnji izračuni će se raditi nad vrstom osiguranja 19.01 osiguranje života za slučaj smrti i doživljenja.

1.2 Aktuarski kontrolni ciklus

Osiguravajuće društvo izloženo je raznim rizicima kojima treba upravljati, a najveći rizik je nelikvidnost odnosno nesolventnost. Aktuar prati sve rizike i svojim preporukama sudjeluje u poduzimanju aktivnosti za postizanje poslovnih ciljeva. Aktuarski kontrolni ciklus opisuje proces donošenja odluka.



Slika 5: Aktuarski kontrolni ciklus [7]

Prvi korak je prikupljanje podataka da bi znali odgovoriti na pitanje što naš klijent treba a da mu mi možemo ponuditi po konkurentnoj cijeni uz uvjet da je unutar zakonskih okvira.

Zatim postavljamo pretpostavke tako da identificiramo i kvantificiramo sve rizike proizvoda, te donosimo odluku vezano za rizik maksimizirajući pri-nos na kapital uzimajući u obzir prihvatljivi nivo rizika. Najveći rizici proiz-laze iz pretpostavljene premije osiguranja novog proizvoda (izbor tablica smrtnosti, troškova, odustanaka, poboljevanja, provizije, dobiti, temeljni ka-

pital, obiteljski status, prinos na ulaganje, matematičku pričuvu...).

Kada imamo sve pretpostavke, definiramo model. Postojeće modele prilagođavamo konkretnim problemima, istražujemo testom profita iznos profita mijenjajući ključne pretpostavke ili strukturu modela. Rezultate modela analiziramo i uspoređujemo s konkurencijom. Interpretiramo ih.

Model mora biti dinamičan da bi prikazivao trenutno stanje. Iz tog razloga model sustavno pratimo. Praćenjem identificiramo uzroke odstupanja pretpostavljenog modela od stvarnog stanja. Ukoliko je potrebno mijenjaju se pretpostavke i/ili model.

Jedna od ključnih pretpostavki koje koristimo za upotpunjenje modela za vrstu osiguranja 19.01 osiguranje života za slučaj smrti i doživljenja je način kako se smanjuje i brzina kojom se smanjuje broj aktivnih polica. Način kako se smanjuje i brzina kojom se smanjuje broj aktivnih polica ćemo izložiti u ovom radu pomoću primjera modela više smanjenja.

2 Mješovito životno osiguranje

2.1 Mješovito životno osiguranje – osiguranje za slučaj smrti ili doživljenja

Osiguranje je metoda prijenosa rizika s osiguranika na osiguratelja. Osiguratelj prihvaća nadoknaditi slučajne štete kod onih osiguranika kod kojih su te štete nastale i njihov trošak raspodijeliti na sve članove rizične skupine. Da bi osiguratelj mogao prihvatiti rizik i raspodijeliti ih na ostale osiguranike treba na temelju prošlog iskustva zaključiti kakva su očekivanja za budućnost. Životno osiguranje predviđa isplatu određene svote (naknadu, ugovorenu svotu, rentu) kod nastanka osiguranog događaja (osigurani događaj vezan za život osiguranika) u zamjenu za niz uplata (premija).

Mješovito životno osiguranje je osiguranje za slučaj smrti i doživljenja. Kada se kaže osiguranje za slučaj smrti mislimo na prirodnu smrt bez obzira na uzrok za vrijeme trajanja osiguranja. Osiguratelj se obvezuje određenom korisniku ili korisnicima isplatiti ugovoreni iznos za slučaj smrti ili njen dio, odmah nakon smrti osiguranika, ako osiguranik umre za vrijeme trajanja osiguranja. U slučaju doživljenja osiguratelj se obvezuje određenom korisniku isplatiti ugovoreni iznos za slučaj doživljenja ako osiguranik doživi dogovoreni istek osiguranja.

Pitanje koje nam se nameće jest: što se događa nakon zaključivanja mješovitog životnog osiguranja? Ovdje se nećemo baviti financijskim iznosima u smislu povećanja ili smanjenja osiguranog iznosa ili premije, niti ćemo se baviti skraćivanjem ili produživanjem trajanja osiguranja. Više ćemo se orijentirati na sljedeće opcije:

1. DOŽIVLJENJE kod aktivne¹ police. Ako osiguranik doživi ugovoreni broj godina, osiguratelj će korisniku isplatiti ugovoreni iznos. Osiguranja uz ugovoreni iznos obično isplaćuju i dio dobiti no za ovaj rad to nije relevantno, pa je ovdje samo spomenuto. Nakon doživljenja osiguranje prestaje.
2. SMRT kod aktivne police. Ako osiguranik umre prilikom trajanja osi-

¹Polica po kojoj se nije dogodio niti jedan štetni događaj, nije napravljen otkup, polica nije stornirana, kapitalizirana niti je nastalo doživljenje.

guranja, osiguratelj će korisniku isplatiti ugovoreni iznos. Nakon smrti osiguranje prestaje.

3. OTKUP kod aktivne police. Ugovaratelj može „otkupiti“ svoje osiguranje, odnosno povući svoja sredstva. Nužno je zadovoljiti minimalne uvjete za otkup police. Na primjer, plaćanje barem q godina premije. Za q ćemo staviti 3 godine. Osiguranje nakon otkupa prestaje.
4. STORNO aktivne police. Događa se u trenutku kada ugovaratelj ne plati jednu godišnju premiju unutar prvih q godina. $q = 3$. Nema povrata sredstava. Osiguranje nakon storniranja prestaje.
5. KAPITALIZACIJA aktivne police. Događa se u trenutku kada ugovaratelj ne plati jednu godišnju premiju nakon isteka barem q godina. Osiguranje NE prestaje, no osigurani iznos je manji. Neka je ${}_kL_x = \max\{{}_kV_x, 0\}$ iznos kojim raspolaže osiguranik pristupne dobi x koji je u trenutku k izašao iz stanja AKTIVAN u stanje KAPITALIZIRAN. Nakon kapitalizacije moguće su sljedeće opcije:
 - a. DOŽIVLJENJE kod kapitalizirane police. Ako osiguranik doživi ugovoreni broj godina, osiguratelj će korisniku isplatiti kapitalizirani iznos (kapitaliziranu vrijednost zarađenog udjela u imovini). Osiguranja uz kapitalizirani iznos obično isplaćuju i dio dobiti no za ovaj rad to nije relevantno, pa je ovdje samo spomenuto. Nakon doživljenja osiguranje prestaje.
 - b. SMRT kod kapitalizirane police. Ako osiguranik umre prilikom trajanja osiguranja, osiguratelj će korisniku isplatiti kapitalizirani iznos. Nakon smrti osiguranje prestaje.
 - c. OTKUP kod kapitalizirane police. Ugovaratelj može „otkupiti“ svoje osiguranje, odnosno povući svoja sredstva. Osiguranje nakon otkupa prestaje.

Svaka nabrojana opcija uz odgovarajući rizik nosi i odgovarajući trošak, te na taj način utječe na formiranje premije i matematičke pričuve. Iz tog razloga nas zanima kojim intenzitetom se ti događaji pojavljuju. Da li je vjerojatnost doživljenja veća od vjerojatnosti otkupa police? Taj problem riješit ćemo Markovljevim procesom skokova.

2.2 O podacima

Baza za procjenu je bilo neko osiguravajuće društvo koje je u trenutku izrade rada poslovalo u Republici Hrvatskoj. Podaci su odgovarajuće izmjenjeni nekom formulom i kao takvi korišteni za ilustraciju modela koji se opisuje.

Jedinica s kojom baratamo jest godina. Na primjer, od početka trajanja police od dana 1.9.1999. do kraja trajanja police do dana 31.8.2004. prošlo je 5 godina.

3 Modeli više smanjenja

3.1 Mješovito životno osiguranje kao Markovljev proces

Definicija 1. Neka je N prirodan broj. Matrica P tipa $N \times N$ je stohastička matrica ako njezini elementi $P = [p_{ij}] = P(i, j)$ zadovoljavaju uvjete:

$$0 \leq p_{ij} \leq 1 \quad \forall i, j$$

$$\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1 \quad \forall i.$$

Elementi p_{ij} definiraju vjerojatnosti prijelaza iz stanja i u stanje j Markovljevog lanca.

Definicija 2. Neka je $S = \{1, 2, \dots, N\}$ konačan skup i $P_{s,t}$ za svaki $s, t, s \leq t, s \geq 0$ stohastička matrica reda N . Markovljev proces sa skupom stanja S i matricom prijelaza $P_{s,t}$ je slučajan proces $(Y(t); t \geq 0)$ s vrijednostima u S , koje zadovoljavaju Markovljevo svojstvo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Y(s+t) = j \mid Y(s) = i, Y(s_{n-2}) = i_{n-2}, \dots, Y(s_0) = i_0\} = \\ = \mathbb{P}\{Y(s+t) = j \mid Y(s) = i\} = P_{s,t}(i, j) \end{aligned}$$

za svaki izbor vremena $0 \leq s_0 < s_1 < \dots < s_{n-2} < s < s+t \in \mathbb{R}_+$ i za svaki izbor $(i_0, i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, j)$ elemenata iz S . Raspodjela od $Y(0)$, koju označavamo s ν , zove se početna raspodjela lanca.

Markovljev proces $(Y(t), t \geq 0)$, s neprekidnim vremenima i diskretnim (odnosno konačnim ili prebrojivim) skupom stanja S naziva se Markovljev proces skokova. Ako za njegove prijelazne vjerojatnosti vrijedi $P_{s,t} \equiv P_{0,t-s}$ tada kažemo da je Markovljev proces vremenski homogen.

Kao što smo u prošlom poglavlju definirali naša polica mješovitog životnog osiguranja može biti u nekoliko stanja: $S := \{\text{AKTIVAN, DOŽIVLJENJE, SMRT, OTKUP, STORNO, KAPITALIZACIJA}\}$.

Mješovito životno osiguranje možemo gledati kao Markovljev proces sa 6 stanja koja zadovoljavaju sljedeće:

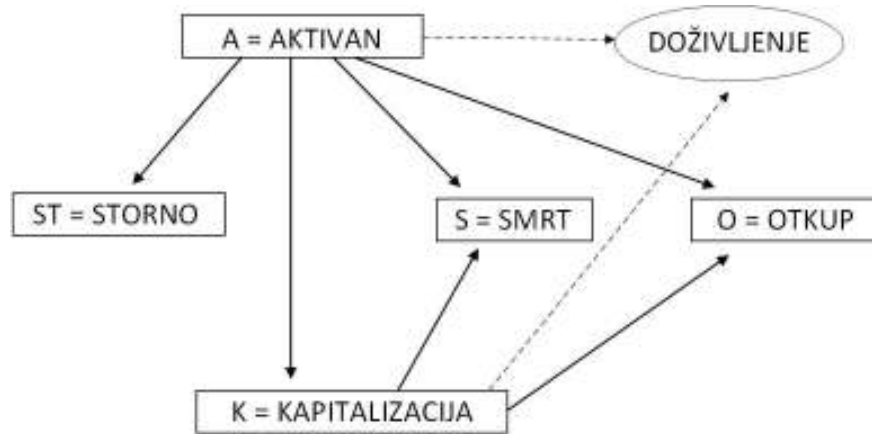
- Iz stanja AKTIVAN možemo prijeći u stanje DOŽIVLJENJE, SMRT, OTKUP, STORNO, KAPITALIZACIJA. Ostajanje u stanju AKTIVAN u trenutku isteka police smatra se DOŽIVLJENJEM.
- Iz stanja KAPITALIZACIJA možemo prijeći u stanje DOŽIVLJENJE, SMRT, OTKUP. Ostajanjem u stanju KAPITALIZACIJA u trenutku isteka police smatra se također DOŽIVLJENJEM.
- Iz stanja SMRT, OTKUP i STORNO ne možemo prijeći u niti jedno drugo stanje.
- Prijelaz u stanje DOŽIVLJENJE nije slučajan prijelaz, već je ugovaratelj prilikom sklapanja police unaprijed dogovorio kada će se dogoditi istek police kojeg nazivamo DOŽIVLJENJEM.

Pogledajmo grafički na slici 6.

Definicija 3. Stanje $i \in S$ je apsorbirajuće ako je $p_{ii} = 1$ (i onda nužno $p_{ij} = 0$ za sve $i \neq j$). Markovljev proces je apsorbirajući ako postoji, za svako stanje iz X , neko apsorbirajuće stanje dostižno iz tog stanja.

Pogledajmo na slici 6 grafički prikaz police mješovitog osiguranja kao Markovljevog lanca. Kao što se vidi na grafu 6 naš Markovljev proces ima 3 apsorbirajuća stanja: SMRT, OTKUP i STORNO. Kada jednom lanac prijeđe u jedno od tih stanja u njemu ostaje zavijek. Naš model je apsorbirajući Markovljev proces.

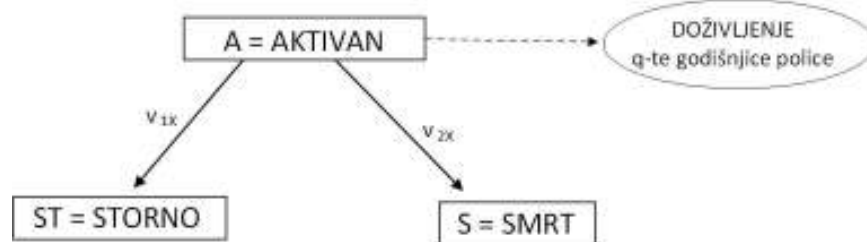
Prisjetimo se što se događa kada ugovaratelj ne plati jednu godišnju premiju. Ukoliko ugovaratelj ne plati jednu godišnju premiju unutar q godina



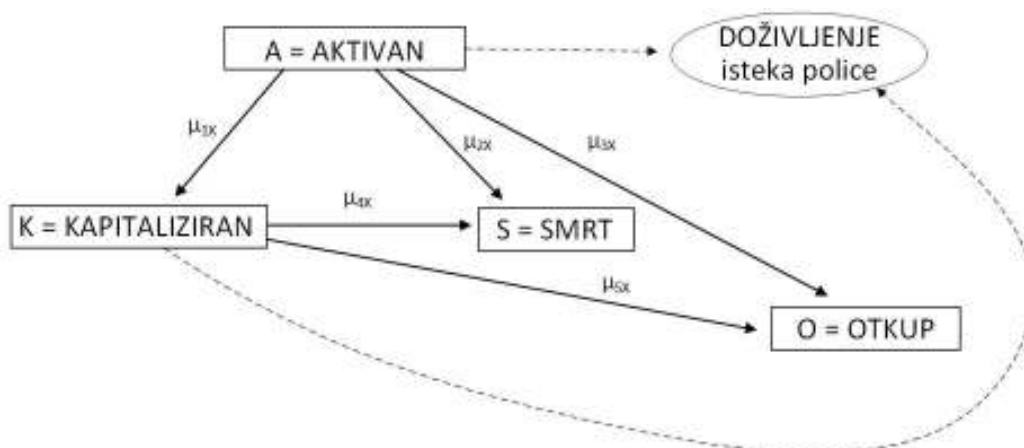
Slika 6: Grafički prikaz modela pomoću Markovljevog procesa

(kod nas $q = 3$) polica prijeđe u stanje STORNO. Ukoliko ugovaratelj ne plati jednu godišnju premiju nakon q godina polica prijeđe u stanje KAPITALIZACIJA. Uočimo da prije navršene q -te godine naš lanac ne može prijeći u stanje KAPITALIZACIJA (a niti u stanje OTKUP), a nakon navršene q -te godine naš lanac ne može prijeći u stanje STORNO. Slika 7 prikazuje Markovljev proces prije navršene q -te godišnjice police, a slika 8 prikazuje Markovljev proces nakon q -te godišnjice police. Dakle, naš proces $(Y(t), t \geq 0)$ nije vremenski homogen, ali se može dekomponirati na dva takva lanca, ovisno o duljini članstva (duljini trajanja osiguranja).

Neka je r indikator trajanja članstva osigurane osobe i u dobi od $[x, x+1]$. Ukoliko je $t < q = 3$ tada se i -ta polica nalazi u Markovljevom procesu sa slike 7 i definiramo da je $r := 1$. Ukoliko je $t \geq q$ tada se i -ta polica nalazi u Markovljevom procesu sa slike 8 i definiramo $r := 2$. To jest $r = \begin{cases} 1 & ; t < q, \\ 2 & ; t \geq q. \end{cases}$



Slika 7: Grafički prikaz modela pomoću Markovljevog procesa prije navršene q -te godišnjice police



Slika 8: Grafički prikaz modela pomoću Markovljevog procesa nakon navršene q -te godišnjice police

3.2 Statistike

Pogledajmo što se događa sa stanjem AKTIVAN. Ugovaratelj dobi x ugovori policu mješovitog životnog osiguranja. U tom trenutku polica poprimi status AKTIVAN. Neka je to i -ta polica koja je sklopljena. Polica i ostaje određen broj godina u stanju AKTIVAN i zatim prelazi u neko drugo stanje.

Ako i -ta polica osiguranja traje manje od $q = 3$ godina, tada je $r = 1$, a ako i -ta polica osiguranja traje barem $q = 3$ godina, tada je $r = 2$. Za dobni interval $[x, x + 1]$ definiramo:

$A_{ix,r} :=$ vrijeme i -te police provedene u stanju AKTIVAN

$K_{ix,r} :=$ vrijeme i -te police provedeno u stanju KAPITALIZIRAN

$AK_{ix,2} :=$ broj svih prelazaka i -te police iz stanja AKTIVAN u stanje KAPITALIZIRAN

$AO_{ix,2} :=$ broj svih prelazaka i -te police iz stanja AKTIVAN u stanje OTKUP

$AST_{ix,1} :=$ broj svih prelazaka i -te police iz stanja AKTIVAN u stanje STORNO

$AS_{ix,r} :=$ broj svih prelazaka i -te police iz stanja AKTIVAN u stanje SMRT

$KS_{ix,2} :=$ broj svih prelazaka i -te police iz stanja KAPITALIZIRAN u stanje SMRT

$KO_{ix,2} :=$ broj svih prelazaka i -te police iz stanja KAPITALIZIRAN u stanje OTKUP

Neka je

$AK_{x,2} = \sum_i^N AK_{ix,2} :=$ broj svih prelazaka iz stanja AKTIVAN u stanje KAPITALIZIRAN

$AO_{x,2} = \sum_i^N AO_{ix,2} :=$ broj svih prelazaka iz stanja AKTIVAN u stanje OTKUP

$AST_{x,1} = \sum_i^N AST_{ix,1} :=$ broj svih prelazaka iz stanja AKTIVAN u stanje STORNO

$AS_{x,r} = \sum_i^N AS_{ix,r} :=$ broj svih prelazaka iz stanja AKTIVAN u stanje SMRT

$KS_{x,2} = \sum_i^N KS_{ix,2} :=$ broj svih prelazaka iz stanja KAPITALIZIRAN u stanje SMRT

$KO_{x,2} = \sum_i^N KO_{ix,2} :=$ broj svih prelazaka iz stanja KAPITALIZIRAN u stanje OTKUP.

Neka je $A_{x,r} = \sum_i^N A_{ix,r}$ i neka je $K_{x,2} = \sum_i^N K_{ix,2}$ ukupno vrijeme svih polica provedenih u stranju AKTIVAN odnosno KAPITALIZIRAN unutar dobnog intervala $[x, x + 1]$. Za policu i imamo statistiku

$$(A_{i,x,r}, AST_{i,x,r}, AS_{i,x,r}, AK_{i,x,r}, AO_{i,x,r}, K_{i,x,r}, KS_{i,x,r}, KO_{i,x,r}, D_{i,x,r}).$$

Promotrimo sada dob $[x, x + 1]$ unutar vremena opažanja $[t_0, t_1]$. Neka je t_0 početno vrijeme opažanja, a t_1 završno vrijeme opažanja. Također pretpostavimo da su unutar dobi $[x, x + 1]$ intenziteti unutar svakog lanca konstantni. Imamo nekoliko scenarija.

Prvi scenarij

Pretpostavimo da je ugovaratelj sklopio policu u trenutku m , $t_0 < m < t_1$ i dobi $x + a$, $x < x + a < x + 1$ i neka je za e dijelova godine, $t_0 < m + e < t_1$ i $x < x + a + e < x + 1$, polica izašla iz stanja AKTIVAN. Naš lanac se nalazi u prvom periodu trajanja članstva, $r = 1$. Tada polica može prijeći samo u stanje STORNO ili SMRT. Pretpostavimo da je polica ušla u stanje SMRT. Imamo statistiku:

$$(A_{i,x,1} = e, AST_{i,x,1} = 0, AS_{i,x,1} = 1, A_{i,x,2} = 0, AK_{i,x,2} = 0, AS_{i,x,2} = 0, \\ AO_{i,x,2} = 0, K_{i,x,2} = 0, KS_{i,x,2} = 0, KO_{i,x,2} = 0, D_{i,x,1} = 0, D_{i,x,2} = 0).$$

odnosno

$$(e, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Grafički prikaz pomoću lexis dijagrama možemo vidjeti na slici 9.

Drugi scenarij

Pretpostavimo da je ugovaratelj sklopio policu u trenutku m , $t_0 < m < t_1$ i dobi $x + a$, $x < x + a < x + 1$ i neka smo za e dijelova godine, $t_0 < m + e = t_1$ i $x < x + a + e < x + 1$, prestali sa opažanjem odnosno $m + e = t_1$. Kažemo da se dogodilo desno cenzuriranje (to znači da znamo da je ugovaratelj ugovorio policu, ali nakon prestanka trenutka promatranja police ne znamo što se dogodilo sa policom).

Tada je naša statistika

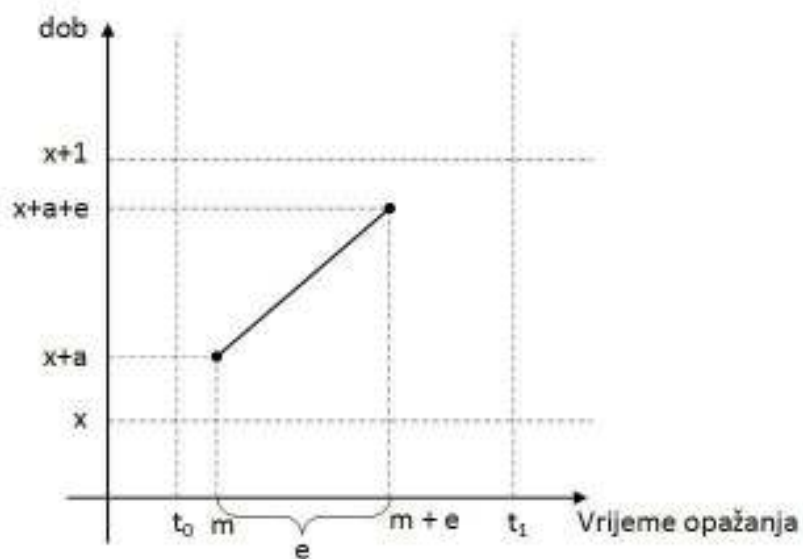
$$(A_{i,x,1} = e, AST_{i,x,1} = 0, AS_{i,x,1} = 0, A_{i,x,2} = 0, AK_{i,x,2} = 0, AS_{i,x,2} = 0, \\ AO_{i,x,2} = 0, K_{i,x,2} = 0, KS_{i,x,2} = 0, KO_{i,x,2} = 0, D_{i,x,1} = 0, D_{i,x,2} = 0).$$

odnosno

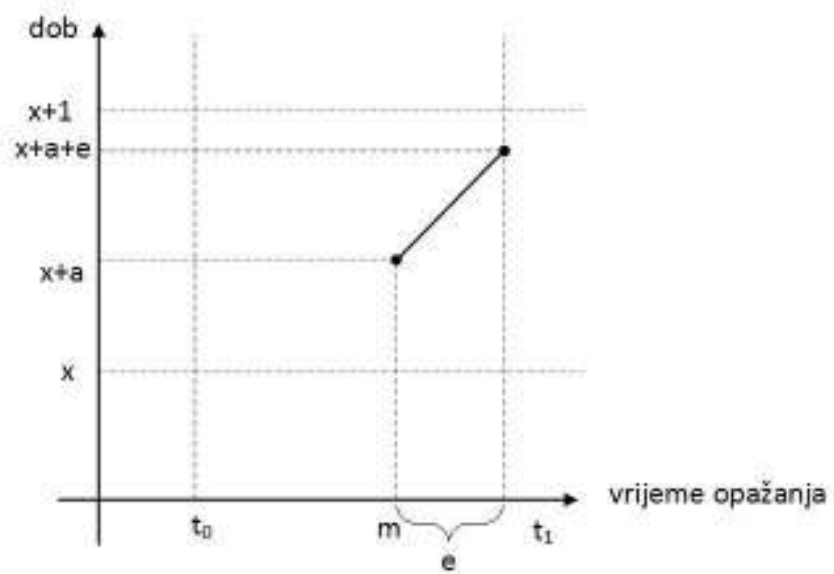
$$(e, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Grafički prikaz pomoću lexis dijagrama možemo vidjeti na slici 10.

Treći scenarij



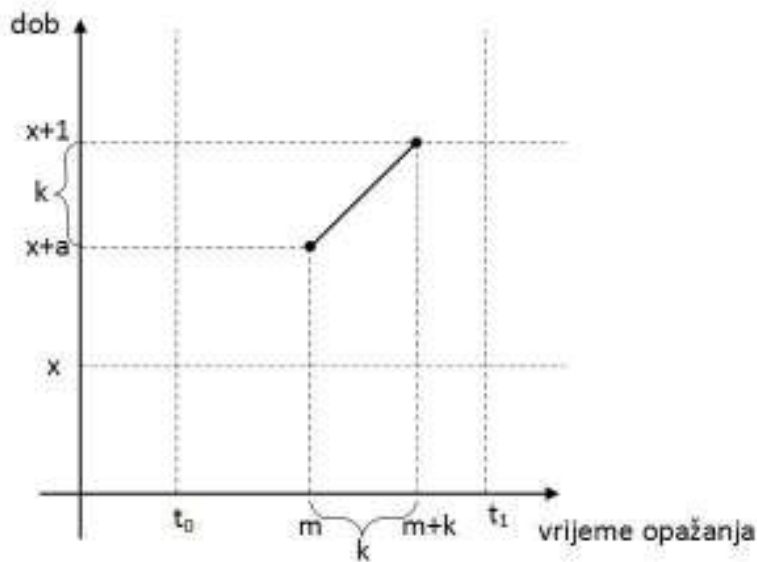
Slika 9: lexis dijagram za prvi scenarij



Slika 10: lexis dijagram za drugi scenarij

Pretpostavimo da je ugovaratelj sklopio policu u trenutku m , $t_0 < m < t_1$ i dobi $x+a$, $x < x+a < x+a+e$ i neka se za e godina, $x < x+a < x+a+e$ dogodio ili prijelaz u neko drugo stanje ili desno cenzuriranje. Neka je u dobi $[x, x+1]$ polica bila $k < e$ godina.

Grafički prikaz pomoću lexis dijagrama možemo vidjeti na slici 11.



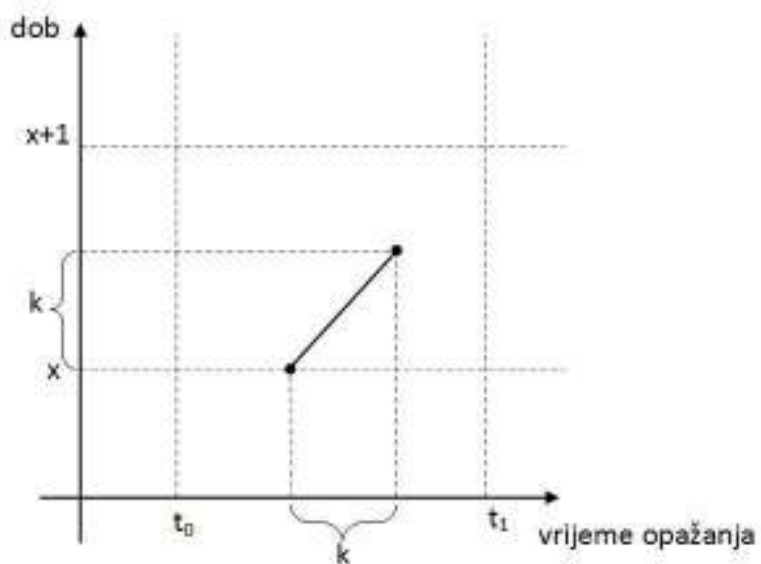
Slika 11: lexis dijagram za treći scenarij

Četvrti scenarij

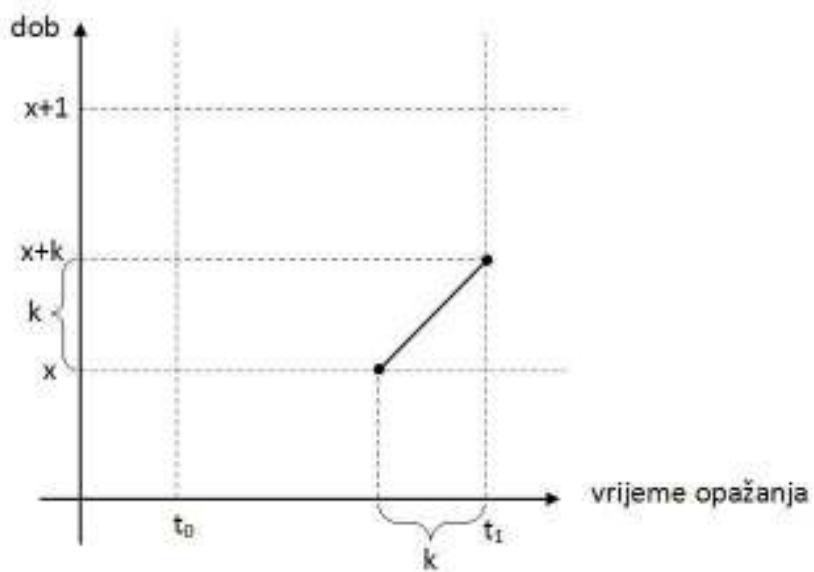
Pretpostavimo da je ugovaratelj sklopio policu u trenutku m , $t_0 < m < t_1$ i dobi $x-a$, $x-a < x < x+1$ i neka se za e godina, $x < x-a+e$, dogodio ili prijelaz u neko drugo stanje, drugi Markovljev proces ili desno cenzuriranje. Neka je u dobi $[x, x+1]$ polica bila k godina, $0 < k < e$.

Grafički prikaz pomoću lexis dijagrama ukoliko se dogodio prijelaz u neko drugo stanje ili se dogodilo doživljenje q -te godišnjice police vidimo na slici 12. Ukoliko se dogodilo doživljenje q -te godišnjice police, polica ostaje u stanju aktivan, ali se nalazi u drugom periodu trajanja članstva.

Grafički prikaz pomoću lexis dijagrama ukoliko se dogodilo desno cenzuriranje vidimo na slici 13.



Slika 12: lexis dijagram za četvrti scenarij - prijelaz u neko drugo stanje



Slika 13: lexis dijagram za četvrti scenarij - desno cenzuriranje

Sada pretpostavimo da kada smo unutar dobi $[x, x + 1]$ i da osiguranik ima policu kraće od q godina ($r = 1$) ili barem q godina ($r = 2$), da su naši intenziteti konstantni, $\mu_{x+t,r}^{gh} \equiv const$ za $t \in [0, 1]$. Uz tu pretpostavku u tom dobnom trenutku, Markovljev proces je vremenski homogen. Vrijedi:

$$\begin{aligned} \mu_{x+t,r}^{gh} &= \begin{cases} \nu_{1x} & ; gh = AST, r = 1 \\ 0 & ; gh = AST, r = 2, \end{cases} & \mu_{x+t,r}^{gh} &= \begin{cases} \nu_{2x} & ; gh = AS, r = 1 \\ \mu_{2x} & ; gh = AS, r = 2, \end{cases} \\ \mu_{x+t,r}^{gh} &= \begin{cases} 0 & ; gh = AK, r = 1 \\ \mu_{1x} & ; gh = AK, r = 2, \end{cases} & \mu_{x+t,r}^{gh} &= \begin{cases} 0 & ; gh = AO, r = 1 \\ \mu_{3x} & ; gh = AO, r = 2, \end{cases} \\ \mu_{x+t,r}^{gh} &= \begin{cases} 0 & ; gh = KS, r = 1 \\ \mu_{4x} & ; gh = KS, r = 2, \end{cases} & \mu_{x+t,r}^{gh} &= \begin{cases} 0 & ; gh = KO, r = 1 \\ \mu_{5x} & ; gh = KO, r = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Pogledajmo tablicu (vidi tablicu 2) za svaki dobni interval sa pripadajućim sumarnim statistikama. Stupac D označava doživljenje bilo q -te godišnjice police bilo isteka police.

Sredina intervala	Statistika										
	$A_{x,1}$	$AST_{x,1}$	$AS_{x,1}$	$A_{x,2}$	$AK_{x,2}$	$AS_{x,2}$	$AO_{x,2}$	$K_{x,2}$	$KS_{x,2}$	$KO_{x,2}$	D
17	3461,4	307	1	487,8	18	0	4	41	0	0	240
20,5	1051,8	226	0	307,1	15	0	5	34,8	0	4	126
21,5	1315,7	312	0	415,6	21	0	5	61,7	0	2	117
22,5	1483,3	405	1	592,3	38	1	9	98	0	1	233
23,5	1593,7	427	1	796,2	41	0	19	140,8	0	7	285
24,5	1618,8	478	0	978,9	78	0	26	213,8	0	8	361

Tablica 2: Pripadajuće sumarne statistike za svaki dobni interval

Za dob manju od 20 godina i za dob veću od 61 godinu smo zbog male količine podatke grupirali pa su dobni intervali dulji nego ostali intervali koji su oblika $[x, x + 1]$. Također pretpostavljamo da su unutar tih grupacija intenziteti konstantni.

U poglavlju (Prilog 1) na stranici 66 nalazi se potpuna tablica (tablica 2) sa pripadajućim sumarnim statistikama za svaki dobni interval.

3.3 Intenziteti prijelaza

Imamo diskretni skup stanja $S := \{\text{AKTIVAN, SMRT, OTKUP, STORNO, KAPITALIZACIJA}\}$ i neka su g i $h \in S$ bilo koja dva stanja. Označimo sa $\mu_{x+t,r}^{gh}$, za $g \neq h$ intenzitet prijelaza iz stanja g u trenutku x u stanje h u trenutku $x+t$ odnosno $x+q+t$.

U našem modelu, za $t \in [0, 1]$, vrijedi redom:

$$\begin{aligned} \mu_{x+t,1}^{AST} &= \nu_{1x}; & \mu_{x+t,1}^{AS} &= \nu_{2x}; \\ \mu_{x+t,2}^{AK} &= \mu_{1x}; & \mu_{x+t,2}^{AS} &= \mu_{2x}; & \mu_{x+t,2}^{AO} &= \mu_{3x}; & \mu_{x+t,2}^{KS} &= \mu_{4x}; & \mu_{x+t,2}^{KO} &= \mu_{5x}. \end{aligned}$$

Definirajmo prijelazne vjerojatnosti

$${}_t p_{x,r}^{gh} := \mathbb{P}(Y(x+t) = h | Y(x) = g) \quad \forall g, h \in S; \text{ te } x, t \geq 0. \quad (1)$$

Interpretiramo ih kao vjerojatnost da, ako je proces u trenutku x u stanju g , da u trenutku $x+t$ bude u stanju h .

U formuli (1) g i h ne moraju nužno biti različiti. Općenito je lanac mogao imati više prijelaza između vremena x i $x+t$. Proces može čitavo vrijeme ostati u stanju g ili može ući u neko drugo stanje $j \neq h$ i zatim se eventualno vratiti u stanje g .

Definirajmo sada neprekidno ostajanje u stanju g (slučaj kada je $g = h$ i proces nije u međuvremenu izlazio iz stanja g)

$${}_t p_x^{\overline{gg}} := \mathbb{P}(Y(x+s) = g, \forall 0 \leq s \leq t | Y(x) = g). \quad (2)$$

U ovom primjeru vrijedi ${}_t p_{x,r}^{\overline{gg}} = {}_t p_{x,r}^{gg}$ za svako stanje, a ukoliko je stanje apsorbirajuće, tada vrijedi ${}_t p_{x,r}^{\overline{gg}} = {}_t p_{x,r}^{gg} = 1$. Za naš model vrijedi da su

$$\begin{aligned} {}_t p_{x,1}^{\overline{STST}} &= {}_t p_{x,1}^{STST} = 1, & {}_t p_{x,1}^{\overline{SS}} &= {}_t p_{x,1}^{SS} = 1, \\ {}_t p_{x,2}^{\overline{OO}} &= {}_t p_{x,2}^{OO} = 1, & {}_t p_{x,2}^{\overline{SS}} &= {}_t p_{x,2}^{SS} = 1, \end{aligned}$$

jer su stanja STORNO, OTKUP i SMRT apsorbirajuća. S druge strane je

$${}_t p_{x,r}^{\overline{AA}} = {}_t p_{x,r}^{AA} \neq 1, \quad {}_t p_{x,2}^{\overline{KK}} = {}_t p_{x,2}^{KK} \neq 1.$$

Prema Markovljevom svojstvu i zakonu potpune vjerojatnosti u uvjetnom obliku slijedi: ako $A_1, A_2, \dots, A_K, \dots$ čine potpun sustav (disjunktnih) događaja pozitivne vjerojatnosti, to jest

$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega$, $A_k \cap A_j = \emptyset$, $k \neq j$ i $\mathbb{P}(A_k) > 0 \quad \forall k$,
tada za svaka dva događaja B i C takav da je $\mathbb{P}(C) > 0$, vrijedi

$$\mathbb{P}[B|C] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[B|C \cap A_k] \mathbb{P}[A_k|C]. \quad (3)$$

Slijedi za $x < x + u < x + t$

$${}_t p_x^{gh} = \mathbb{P}[Y(x+t) = h | Y(x) = g] =$$

$$= \sum_{k \in S} \mathbb{P}[Y(x+t) = h | Y(x) = g, Y(x+u) = k] \mathbb{P}[Y(x+u) = k | Y(x) = g] =$$

$$= \sum_{k \in S} \mathbb{P}[Y(x+t) = h | Y(x+u) = k] \mathbb{P}[Y(x+u) = k | Y(x) = g] =$$

$$= \sum_{k \in S} {}_{t-u} p_{u+x}^{kh} {}_u p_x^{gk} = {}_t p_x^{gh}.$$

Prema tome vrijedi Chapman-Kolmogoroljeva jednadžba

$${}_t p_x^{gh} = \sum_{k \in S} {}_{t-u} p_{u+x}^{kh} {}_u p_x^{gk}. \quad (4)$$

kao neposredna posljedica Markovljevog svojstva.

Označimo li sa ${}_t P_x$ matricu s elementima ${}_t p_x^{gh}$, jednadžba (4) se može zapisati

$${}_t P_x = {}_u P_x \cdot {}_{t-u} P_{u+x}, \quad \forall x < x + u < x + t \quad (5)$$

odnosno

$$P_{x,x+t}(g, h) = \sum_{k \in S} P_{x,x+u}(g, k) \cdot P_{x+u,x+t}(k, h).$$

Ukoliko znamo prijelaznu matricu ${}_t P_x$ i početnu distribuciju $q_i = \mathbb{P}[Y_0 = i]$, te koristeći Markovljevo svojstvo možemo naći razdiobu stanja za proces $(Y(t))$. Pretpostavimo da su funkcije ${}_t p_x^{gh}$ neprekidno diferencijalne u t za sve g, h te da vrijedi

$$\begin{aligned} {}_0p_x^{gh} &= 0, \text{ za } g \neq h \\ {}_0p_x^{gh} &= 1, \text{ za } g = h. \end{aligned}$$

Slijedi da postoje funkcije

$$\mu_x^{gh} = \frac{\partial}{\partial t} {}_t p_x^{gh} \Big|_{t=0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{{}_s p_x^{gh} - {}_0 p_x^{gh}}{s}, \quad (6)$$

takve da za $s \rightarrow 0$ i $s > 0$ vrijedi

$${}_s p_x^{gh} = s \cdot \mu_x^{gh} + o(s) \text{ za } g \neq h \quad (7)$$

$${}_s p_x^{gg} = 1 + s \cdot \mu_x^{gg} + o(s) \quad (8)$$

gdje tvrdnja da je $f(s) = o(s)$ za $s \rightarrow 0_+$ znači $\lim_{s \rightarrow 0_+} \frac{f(s)}{s} = 0$.

Vjerojatnost prijelaza iz g u h za vrijeme kratkog vremenskog intervala $[x, x + s]$ proporcionalno je sa s . Iz toga sledi da je μ_x^{gh} prijelazni intenzitet. Prijelazni intenziteti u potpunosti određuju Markovljev proces skokova.

Iz jednađbe (4) derivaciom po t dobijemo:

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_x^{gh} = \sum_{k \neq h} ({}_t p_x^{gk} \cdot \mu_{x+t}^{kh} - {}_t p_x^{gh} \cdot \mu_{x+t}^{hk}). \quad (9)$$

Za $g = h$ sledi da je

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_x^{\bar{h}\bar{h}} = - \sum_{k \neq h} {}_t p_x^{\bar{h}\bar{h}} \cdot \mu_{x+t}^{hk}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_x^{\bar{h}\bar{h}} = - {}_t p_x^{\bar{h}\bar{h}} \sum_{k \neq h} \mu_{x+t}^{hk}.$$

Napravimo supstituciju

$$y(t) = {}_t p_x^{\bar{h}\bar{h}}, \quad y'(t) = \frac{\partial}{\partial t} {}_t p_x^{\bar{h}\bar{h}}, \quad c(t) = \sum_{k \neq h} \mu_{x+t}^{hk}.$$

i računamo

$$y'(t) = y(t) \cdot c(t)$$

uz uvjet $y(0) = {}_0\bar{p}_x^{\bar{h}h} = 1$:

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = c(t) \quad | \int_0^t ds$$

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{y(s)} ds = \int_0^t c(s) ds.$$

Budući da vrijedi $\frac{d}{ds} \log(y(s)) = \frac{y'(s)}{y(s)}$ slijedi

$$\int_0^t \frac{d}{ds} (\log(y(s))) ds = \int_0^t c(s) ds$$

$$\log y(s) \Big|_0^t = \int_0^t c(s) ds$$

$$\log y(t) = \int_0^t c(s) ds \quad | e^x$$

$$y(t) = e^{\int_0^t c(s) ds}.$$

Uvrstimo nazad supstituirane izraze i dobijemo

$${}_t\bar{p}_x^{\bar{h}h} = e^{-\int_0^t \sum_{k \neq h} \mu_{x+s}^{hk} ds}. \quad (10)$$

Ranije smo vidjeli da vrijedi ${}_t p_{x,r}^{\overline{hh}} = 1$ za sva absorbirajuća stanja. Primjenimo li formulu na stanja lanca koja nisu absorbirajuća odnosno na stanja AKTIVAN i KAPITALIZIRAN dobijemo da vrijedi

$$\begin{aligned} {}_t p_{x,1}^{AA} &= {}_t p_{x,1}^{\overline{AA}} = e^{-\int_0^t (\nu_{1x} + \nu_{2x}) ds} = e^{-t(\nu_{1x} + \nu_{2x})} \\ {}_t p_{x,2}^{AA} &= {}_t p_{x,2}^{\overline{AA}} = e^{-\int_0^t (\mu_{1x} + \mu_{2x} + \mu_{3x}) ds} = e^{-t(\mu_{1x} + \mu_{2x} + \mu_{3x})} \\ {}_t p_{x,2}^{KK} &= {}_t p_{x,2}^{\overline{KK}} = e^{-\int_0^t (\mu_{4x} + \mu_{5x}) ds} = e^{-t(\mu_{4x} + \mu_{5x})}. \end{aligned}$$

Izračun je za $t \in [0, 1)$, što znači da gledamo dobni interval $[x, x + 1)$, a to povlači da niti ν niti μ ne ovisi o t ($\mu_{x+t} = \mu_x$, $\nu_{x+t} = \nu_x$).

Nadalje, izračunajmo ${}_t p_{x,1}^{AST}$, ${}_t p_{x,1}^{AS}$, ${}_t p_{x,2}^{AK}$, ${}_t p_{x,2}^{AS}$, ${}_t p_{x,2}^{AO}$, ${}_t p_{x,2}^{KS}$, ${}_t p_{x,2}^{KO}$.

Suptituirajmo $\alpha_x = \nu_{1x} + \nu_{2x}$, $\beta_x = \mu_{1x} + \mu_{2x} + \mu_{3x}$ i $\gamma_x = \mu_{4x} + \mu_{5x}$.

$${}_t p_{x,1}^{AA} = e^{-\alpha_x t}$$

$${}_t p_{x,2}^{AA} = e^{-\beta_x t}$$

i

$${}_t p_{x,2}^{KK} = e^{-\gamma_x t}.$$

Izračunajmo za $r = 1$:

Izračun za ${}_t p_{x,1}^{AST}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} {}_t p_{x,1}^{AST} &= \sum_{g \neq ST} ({}_t p_{x,1}^{Ag} \mu_{x+t}^{gST} - {}_t p_{x,1}^{AST} \mu_{x+t}^{STg}) = \\ &= {}_t p_{x,1}^{AA} \mu_{x+t}^{AST} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_{x,1}^{AST} = {}_t p_{x,1}^{AA} \mu_{x+t}^{AST} \quad \Big| \int_0^t ds$$

$${}_t p_{x,1}^{AST} - {}_0 p_{x,1}^{AST} = \nu_{1x} \int_0^t {}_s p_{x,1}^{AA} ds = -\frac{\nu_{1x}}{\alpha_x} e^{-\alpha_x s} \quad \Big|_0^t$$

$${}_t p_{x,1}^{AST} = \frac{\nu_{1x}}{\alpha_x} (1 - e^{-\alpha_x t}).$$

Analogno,

$${}_t p_{x,1}^{AS} = \frac{\nu_{2x}}{\alpha_x} (1 - e^{-\alpha_x t}).$$

Izračunajmo za $r = 2$:

Izračun za ${}_t p_{x,2}^{AK}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} {}_t p_{x,2}^{AK} &= \sum_{g \neq K} ({}_t p_{x,2}^{Ag} \mu_{x+t}^{gK} - {}_t p_{x,2}^{AK} \mu_{x+t}^{Kg}) = \\ &= {}_t p_{x,2}^{AA} \mu_{x+t}^{AK} - {}_t p_{x,2}^{AK} (\mu_{x+t}^{KO} + \mu_{x+t}^{KS}). \end{aligned}$$

Supstituirajmo $y(t) = {}_t p_{x,2}^{AK}$, $y'(t) = \frac{\partial}{\partial t} {}_t p_{x,2}^{AK}$. Slijedi

$$y'(t) = e^{-\beta_x t} \mu_{1x} - y(t)(\mu_{5x} + \mu_{4x})$$

$$y'(t) = e^{-\beta_x t} \mu_{1x} - y(t)\gamma_x$$

$$y'(t) + \gamma_x y(t) = e^{-\beta_x t} \mu_{1x} \quad | e^{\gamma_x t}$$

Za slučaj kada je $\beta_x \neq \gamma_x$ vrijedi da je

$$y'(t)e^{\gamma_x t} + \gamma_x e^{\gamma_x t} y(t) = e^{-(\beta_x - \gamma_x)t} \mu_{1x}$$

$$\frac{d}{dt} (y(t)e^{\gamma_x t}) = \mu_{1x} e^{-(\beta_x - \gamma_x)t} \quad | \int_0^t ds$$

$$y(t)e^{\gamma_x t} - y(0)e^0 = \frac{\mu_{1x}}{\beta_x - \gamma_x} (-e^{-(\beta_x - \gamma_x)s}) \quad |_0^t$$

$$y(t)e^{\gamma_x t} = \frac{\mu_{1x}}{\beta_x - \gamma_x} (1 - e^{-(\beta_x - \gamma_x)t}) \quad | : e^{\gamma_x t}$$

$$y(t) = \frac{\mu_{1x}}{\beta_x - \gamma_x} (e^{-\gamma_x t} - e^{-\beta_x t})$$

$${}_t p_{x,2}^{AK} = \frac{\mu_{1x}}{\beta_x - \gamma_x} (e^{-\gamma_x t} - e^{-\beta_x t}).$$

Za slučaj da je $\beta_x = \gamma_x$ vrijedi

$$y'(t)e^{\gamma_x t} + \gamma_x e^{\gamma_x t} y(t) = \mu_{1x}$$

$$\frac{d}{dt} (y(t)e^{\gamma_x t}) = \mu_{1x} \quad | \int_0^t ds$$

$$\begin{aligned}
y(t)e^{\gamma x t} - y(0)e^0 &= \mu_{1x}t \quad | : e^{\gamma x t} \\
y(t) &= \mu_{1x}te^{-\gamma x t} \\
{}_t p_{x,2}^{AK} &= \mu_{1x}te^{-\gamma x t}.
\end{aligned}$$

Izračun za ${}_t p_{x,2}^{AS}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_{x,2}^{AS} &= \sum_{g \neq S} ({}_t p_{x,2}^{Ag} \mu_{x+t}^{gS} - {}_t p_{x,2}^{AS} \mu_{x+t}^{Sg}) = \\
&= {}_t p_{x,2}^{AA} \mu_{x+t}^{AS} + {}_t p_{x,2}^{AK} \mu_{x+t}^{KS}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_{x,2}^{AS} = {}_t p_{x,2}^{AA} \mu_{x+t}^{AS} + {}_t p_{x,2}^{AK} \mu_{x+t}^{KS} \quad | \int_0^t ds$$

$${}_t p_{x,2}^{AS} - {}_0 p_{x,2}^{AS} = \mu_{2x} \int_0^t {}_s p_{x,2}^{AA} ds + \mu_{4x} \int_0^t {}_s p_{x,2}^{AK} ds$$

$${}_t p_{x,2}^{AS} = \mu_{2x} \int_0^t e^{-\beta_x s} ds + \mu_{4x} \int_0^t \frac{\mu_{1x}}{\beta_x - \gamma_x} (e^{-\gamma_x s} - e^{-\beta_x s}) ds$$

$${}_t p_{x,2}^{AS} = \frac{-\mu_{2x}}{\beta_x} e^{-\beta_x s} \quad | \int_0^t + \frac{\mu_{1x}\mu_{4x}}{\beta_x - \gamma_x} \left(\frac{-1}{\gamma_x} e^{-\gamma_x s} \quad | \int_0^t + \frac{1}{\beta_x} e^{-\beta_x s} \quad | \int_0^t \right) ds$$

$${}_t p_{x,2}^{AS} = \frac{\mu_{2x}}{\beta_x} (1 - e^{-\beta_x t}) + \frac{\mu_{1x}\mu_{4x}}{(\beta_x - \gamma_x)\gamma_x} (1 - e^{-\gamma_x t}) - \frac{\mu_{1x}\mu_{4x}}{(\beta_x - \gamma_x)\beta_x} (1 - e^{-\beta_x t})$$

$${}_t p_{x,2}^{AS} = \left(\frac{\mu_{2x}}{\beta_x} - \frac{\mu_{1x}\mu_{4x}}{(\beta_x - \gamma_x)\beta_x} \right) (1 - e^{-\beta_x t}) + \frac{\mu_{1x}\mu_{4x}}{(\beta_x - \gamma_x)\gamma_x} (1 - e^{-\gamma_x t}).$$

Za slučaj kada vrijedi $\beta_x = \gamma_x$ tada je

$${}_t p_{x,2}^{AS} = \frac{\mu_{2x}}{\beta_x} (1 - e^{-\beta_x t}) + \mu_{1x}\mu_{4x} \frac{1}{\beta_x^2} (1 - (1 + \beta_x t)e^{-\beta_x t}).$$

Izračun za ${}_t p_{x,2}^{AO}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_{x,2}^{AO} &= \sum_{g \neq O} ({}_t p_{x,2}^{Ag} \mu_{x+t}^{gO} - {}_t p_{x,2}^{AO} \mu_{x+t}^{Og}) = \\ &= {}_t p_{x,2}^{AA} \mu_{x+t}^{AO} + {}_t p_{x,2}^{AK} \mu_{x+t}^{KO}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_{x,2}^{AO} = {}_t p_{x,2}^{AA} \mu_{x+t}^{AO} + {}_t p_{x,2}^{AK} \mu_{x+t}^{KO} \quad \Big| \int_0^t ds$$

$${}_t p_{x,2}^{AO} - {}_0 p_{x,2}^{AO} = \mu_{3x} \int_0^t {}_s p_{x,2}^{AA} ds + \mu_{5x} \int_0^t {}_s p_{x,2}^{AK} ds$$

$${}_t p_{x,2}^{AO} - {}_0 p_{x,2}^{AO} = \mu_{3x} \int_0^t e^{-\beta_x s} ds + \mu_{5x} \int_0^t \frac{\mu_{1x}}{\beta_x - \gamma_x} (e^{-\gamma_x s} - e^{-\beta_x s}) ds$$

$${}_t p_{x,2}^{AO} = \mu_{3x} \int_0^t e^{-\beta_x s} ds + \frac{\mu_{5x} \mu_{1x}}{\beta_x - \gamma_x} \int_0^t (e^{-\gamma_x s} - e^{-\beta_x s}) ds$$

$${}_t p_{x,2}^{AO} = -\mu_{3x} \frac{1}{\beta_x} e^{-\beta_x s} \quad \Big|_0^t + \frac{\mu_{5x} \mu_{1x}}{\beta_x - \gamma_x} \left(-\frac{1}{\gamma_x} e^{-\gamma_x s} \quad \Big|_0^t + \frac{1}{\beta_x} e^{-\beta_x s} \quad \Big|_0^t \right)$$

$${}_t p_{x,2}^{AO} = \frac{\mu_{3x}}{\beta_x} (1 - e^{-\beta_x t}) + \frac{\mu_{1x} \mu_{5x}}{(\beta_x - \gamma_x) \gamma_x} \left(\frac{1}{\gamma_x} (1 - e^{-\gamma_x t}) - \frac{1}{\beta_x} (1 - e^{-\beta_x t}) \right)$$

$${}_t p_{x,2}^{AO} = \left(\frac{\mu_{3x}}{\beta_x} - \frac{\mu_{1x} \mu_{5x}}{\beta_x (\beta_x - \gamma_x)} \right) (1 - e^{-\beta_x t}) + \frac{\mu_{1x} \mu_{5x}}{\gamma_x (\beta_x - \gamma_x)} (1 - e^{-\gamma_x t}).$$

Za slučaj kada vrijedi $\beta_x = \gamma_x$ tada je

$${}_t p_{x,2}^{AO} = \frac{\mu_{3x}}{\beta_x} (1 - e^{-\beta_x t}) + \mu_{1x} \mu_{5x} \frac{1}{\beta_x^2} (1 - (1 + \beta_x t) e^{-\beta_x t}).$$

Izračun za ${}_t p_{x,2}^{KS}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_{x,2}^{KS} = \sum_{g \neq S} ({}_t p_{x,2}^{Kg} \mu_{x+t}^{gS} - {}_t p_{x,2}^{KS} \mu_{x+t}^{Sg}) = {}_t p_{x,2}^{KK} \mu_{x+t}^{KS}$$

Supstituirajmo $y(t) = {}_t p_{x,2}^{KS}$. Slijedi

$$y'(t) = e^{-\gamma_x t} \mu_{x+t}^{KS} \quad \Big| \int_0^t ds$$

$$y(t) - y(0) = -\frac{1}{\gamma_x} \mu_{4x} e^{-\gamma_x s} \quad \Big|_0^t$$

$${}_t p_{x,2}^{KS} = \frac{\mu_{4x}}{\gamma_x} (1 - e^{-\gamma_x t}).$$

Izračun za ${}_t p_{x,2}^{KO}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_{x,2}^{KO} = \sum_{g \neq O} ({}_t p_{x,2}^{Kg} \mu_{x+t}^{gO} - {}_t p_{x,2}^{KO} \mu_{x+t}^{Og}) = {}_t p_{x,2}^{KK} \mu_{x+t}^{KO}$$

Supstituirajmo $y(t) = {}_t p_{x,2}^{KO}$. Slijedi

$$y'(t) = e^{-\gamma_x t} \mu_{5x} \quad \Big| \int_0^t ds$$

$$y(t) - y(0) = -\frac{1}{\gamma_x} \mu_{5x} e^{-\gamma_x s} \quad \Big|_0^t$$

$${}_t p_{x,2}^{KO} = \frac{\mu_{5x}}{\gamma_x} (1 - e^{-\gamma_x t}).$$

3.4 Procjena intenziteta prijelaza

Za procjenjivanje na osnovi velikih uzoraka opcionalnom općom metodom za nalaženje dobrih procjenitelja populacijskih parametara smatra se metoda maksimalne vjerodostojnosti.

Neka je $\hat{y} = (y_1, \dots, y_n)$ opaženi uzorak za varijablu Y s populacijskom gustoćom $f(x|\Theta)$, te neka je $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ višedimenzionalan parametar. Tada je vjerodostojnost parametra Θ funkcija

$$L(\Theta) = L(\theta_1, \dots, \theta_N) := \prod_{i=1}^n f(y_i|\Theta). \quad (11)$$

Funkcija $L(\Theta)$ je funkcija nepoznatog populacijskog parametra i predstavlja vjerojatnost da se dogodi realizacija opaženog uzorka ukoliko je populacijska distribucija diskretna.

Vrijednost $\tilde{\Theta} = \tilde{\Theta}(\hat{y}) = (\tilde{\theta}_1 \dots \tilde{\theta}_N)$ u kojoj funkcija $\Theta \mapsto L(\Theta)$ poprima maksimalnu vrijednost $L(\tilde{\Theta}) = \max_{\Theta} L(\Theta)$ jest procjena maksimalne vjerodostojnosti parametra $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$. A procjenitelj koji dobijemo metodom maksimalne vjerodostojnosti, MLE (maximum likelihood estimator), parametra $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ je statistika $\hat{\Theta}(\hat{Y})$.

Funkcije (11) i

$$l(\Theta) = \log L(\Theta) \quad (12)$$

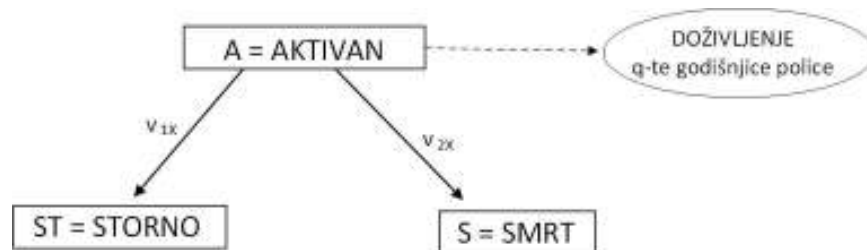
postiču maksimum u istoj vrijednosti $\tilde{\Theta} = (\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_N)$ i češće je jednostavnije izračunati maksimum funkcije (12). Tako se traženje maksimuma svodi na sustav jednadžbi s više nepoznanica.

Ako je $\Theta \mapsto l(\Theta)$ diferencijabilna funkcija, tada je *MLE* za Θ jedno od rješenja stacionarne jednadžbe $l'(\Theta) = 0$.

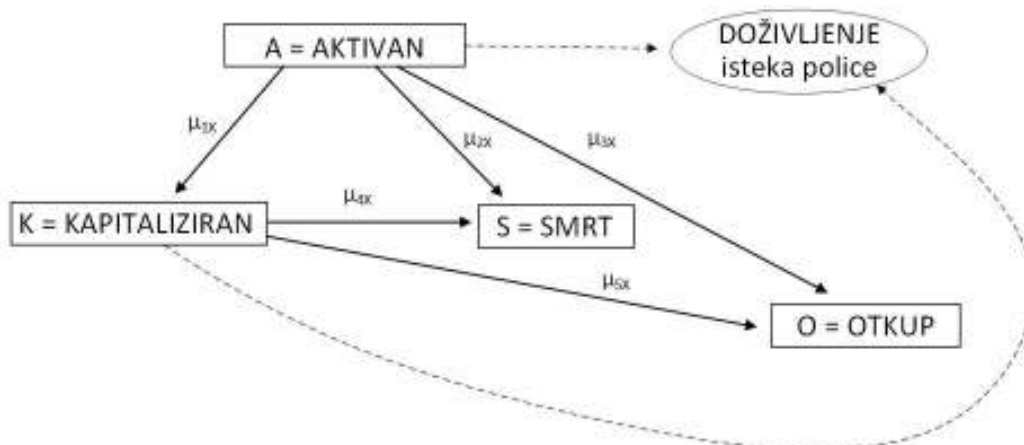
Za naš slučaj vrijedi

$$\begin{aligned} L(\Theta) &= L(\nu_{1x}, \nu_{2x}, \mu_{1x}, \mu_{2x}, \mu_{3x}, \mu_{4x}, \mu_{5x}) = \\ &= e^{-A_{x,1}\alpha_x} e^{-A_{x,2}\beta_x} e^{-K_{x,2}\gamma_x} \nu_{1x}^{AST_{x,1}} \nu_{2x}^{AS_{x,1}} \mu_{1x}^{AK_{x,2}} \mu_{2x}^{AS_{x,2}} \mu_{3x}^{AO_{x,2}} \mu_{4x}^{KS_{x,2}} \mu_{5x}^{KO_{x,2}}. \end{aligned}$$

Pogledajmo još jednom naše grafove:



Slika 14: Grafički prikaz modela pomoću Markovljevog procesa prije navršene q -te godišnjice police



Slika 15: Grafički prikaz modela pomoću Markovljevog procesa nakon navršene q -te godišnjice police

Pogledajmo za dobni interval $[x, x + 1]$. Intenziteti prijelaska koje želimo procijeniti za prvi proces ($r = 1$) su:

$$\nu_{1x} \rightsquigarrow \text{A (AKTIVAN)} \longrightarrow \text{ST (STORNO)};$$

$$\nu_{2x} \rightsquigarrow \text{A (AKTIVAN)} \longrightarrow \text{S (SMRT)};$$

Intenziteti prijelaska koje želimo procijeniti za drugi proces ($r = 2$) su:

$$\mu_{1x} \rightsquigarrow \text{A (AKTIVAN)} \longrightarrow \text{K (KAPITALIZIRAN)};$$

$$\mu_{2x} \rightsquigarrow \text{A (AKTIVAN)} \longrightarrow \text{S (SMRT)};$$

$$\mu_{3x} \rightsquigarrow \text{A (AKTIVAN)} \longrightarrow \text{O (OTKUP)};$$

$$\mu_{4x} \rightsquigarrow \text{K (KAPITALIZIRAN)} \longrightarrow \text{S (SMRT)};$$

$$\mu_{5x} \rightsquigarrow \text{K (KAPITALIZIRAN)} \longrightarrow \text{O (OTKUP)};$$

Prema tome za naš $\Theta = (\nu_{1x}, \nu_{2x}, \mu_{1x}, \mu_{2x}, \mu_{3x}, \mu_{4x}, \mu_{5x})$ tražimo procjenu $\tilde{\Theta} = (\tilde{\nu}_{1x}, \tilde{\nu}_{2x}, \tilde{\mu}_{1x}, \tilde{\mu}_{2x}, \tilde{\mu}_{3x}, \tilde{\mu}_{4x}, \tilde{\mu}_{5x})$.

$$\begin{aligned} L(\Theta) &= L(\nu_{1x}, \nu_{2x}, \mu_{1x}, \mu_{2x}, \mu_{3x}, \mu_{4x}, \mu_{5x}) = \\ &= e^{-A_{x,1}\alpha_x} e^{-A_{x,2}\beta_x} e^{-K_{x,2}\gamma_x} \nu_{1x}^{AST_{x,1}} \nu_{2x}^{AS_{x,1}} \mu_{1x}^{AK_{x,2}} \mu_{2x}^{AS_{x,2}} \mu_{3x}^{AO_{x,2}} \mu_{4x}^{KS_{x,2}} \mu_{5x}^{KO_{x,2}}. \end{aligned}$$

Računamo

$$l = \log(L).$$

$$\implies l(\Theta) = \log(e^{-A_{x,1}\alpha_x} e^{-A_{x,2}\beta_x} e^{-K_{x,2}\gamma_x} \nu_{1x}^{AST_{x,1}} \nu_{2x}^{AS_{x,1}} \mu_{1x}^{AK_{x,2}} \mu_{2x}^{AS_{x,2}} \mu_{3x}^{AO_{x,2}} \mu_{4x}^{KS_{x,2}} \mu_{5x}^{KO_{x,2}}) =$$

$$\begin{aligned} &= -A_{x,1}\alpha_x - A_{x,2}\beta_x - K_{x,2}\gamma_x + AST_{x,1} \log(\nu_{1x}) + AS_{x,1} \log(\nu_{2x}) + AK_{x,2} \log(\mu_{1x}) + \\ &\quad + AS_{x,2} \log(\mu_{2x}) + AO_{x,2} \log(\mu_{3x}) + KS_{x,2} \log(\mu_{4x}) + KO_{x,2} \log(\mu_{5x}) \end{aligned}$$

Riješavamo sustav jednačbi s više nepoznanica.

$$\frac{\partial l}{\partial \nu_{1x}} = -A_{x,1} + AST_{x,1} \frac{1}{\nu_{1x}} = 0 \implies \frac{AST_{x,1}}{\nu_{1x}} = A_x \implies \hat{\nu}_{1x} = \frac{AST_{x,1}}{A_{x,1}};$$

$$\frac{\partial l}{\partial \nu_{2x}} = -A_{x,1} + AS_{x,1} \frac{1}{\nu_{2x}} = 0 \implies \frac{AS_{x,1}}{\nu_{2x}} = A_{x,1} \implies \hat{\nu}_{2x} = \frac{AS_{x,1}}{A_{x,1}};$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_{1x}} = -A_{x,2} + AK_{x,2} \frac{1}{\mu_{1x}} = 0 \implies \frac{AK_{x,2}}{\mu_{1x}} = A_{x,2} \implies \hat{\mu}_{1x} = \frac{AK_{x,2}}{A_{x,2}};$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_{2x}} = -A_{x,2} + AS_{x,2} \frac{1}{\mu_{2x}} = 0 \implies \frac{AS_{x,2}}{\mu_{2x}} = A_{x,2} \implies \hat{\mu}_{2x} = \frac{AS_{x,2}}{A_{x,2}};$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_{3x}} = -A_{x,2} + AO_{x,2} \frac{1}{\mu_{3x}} = 0 \implies \frac{AO_{x,2}}{\mu_{3x}} = A_{x,2} \implies \hat{\mu}_{3x} = \frac{AO_{x,2}}{A_{x,2}};$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_{4x}} = -K_{x,2} + KS_{x,2} \frac{1}{\mu_{4x}} = 0 \implies \frac{KS_{x,2}}{\mu_{4x}} = K_{x,2} \implies \hat{\mu}_{4x} = \frac{KS_{x,2}}{K_{x,2}};$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_{5x}} = -K_{x,2} + KO_{x,2} \frac{1}{\mu_{5x}} = 0 \implies \frac{KO_{x,2}}{\mu_{5x}} = K_{x,2} \implies \hat{\mu}_{5x} = \frac{KO_{x,2}}{K_{x,2}};$$

Proširimo tablicu 2 iz poglavlja 3.2..

Sredina intervala	Statistika										
	$A_{x,1}$	$AST_{x,1}$	$AS_{x,1}$	$A_{x,2}$	$AK_{x,2}$	$AS_{x,2}$	$AO_{x,2}$	$K_{x,2}$	$KS_{x,2}$	$KO_{x,2}$	D
17	3461,4	307	1	487,8	18	0	4	41	0	0	240
20,5	1051,8	226	0	307,1	15	0	5	34,8	0	4	126
21,5	1315,7	312	0	415,6	21	0	5	61,7	0	2	117
22,5	1483,3	405	1	592,3	38	1	9	98	0	1	233
23,5	1593,7	427	1	796,2	41	0	19	140,8	0	7	285
24,5	1618,8	478	0	978,9	78	0	26	213,8	0	8	361

Tablica 3: Pripadajuće statistike za svaki dobni interval

U poglavlju (Prilog 2) na stranici 68 nalazi se potpuna tablica sa pripadajućim procjene intenziteta prijelaza za svaki dobni interval.

Sredina intervala	Statistika						
	ν_{1x}	ν_{2x}	μ_{1x}	μ_{2x}	μ_{3x}	μ_{4x}	μ_{5x}
17	0,09	0,00	0,04	0,00	0,01	0,00	0,00
20,5	0,21	0,00	0,05	0,00	0,02	0,00	0,12
21,5	0,24	0,00	0,05	0,00	0,01	0,00	0,03
22,5	0,27	0,00	0,06	0,00	0,02	0,00	0,01
23,5	0,27	0,00	0,05	0,00	0,02	0,00	0,05
24,5	0,30	0,00	0,08	0,00	0,03	0,00	0,04

Tablica 4: Pripadajuće procjene intenziteta prijelaza za svaki dobni interval

Primjer nekoliko polica sa njihovim podacima.

Polica	Datum rođenja	Datum početka	Datum kraja police	Datum otkupa
Broj 1	1.10.1964.	1.4.2003.	31.3.2019.	
Broj 2	2.6.1947.	1.9.1999.	31.8.2004.	
Broj 3	3.10.1969.	1.3.2005.	28.2.2019.	
Broj 4	4.6.1961.	1.3.1999.	29.2.2004.	
Broj 5	5.4.1966.	1.8.2000.	31.7.2005.	1.3.2005.
Broj 6	6.12.1965.	1.7.2000.	30.6.2010.	
Broj 7	7.2.1939.	1.6.2003.	31.5.2014.	1.7.2007.
Broj 8	8.9.1969.	1.2.2003.	31.1.2028.	
Broj 9	9.5.1969.	1.6.2013.	31.5.2039.	

Tablica 5: Primjer polica sa podacima - 1. dio

Pogledajmo redom navedene primjere.

Polica broj 1 je ušla u statistiku na datum 1.4.2003. u 58. godini života osigurane osobe, kraj police je 31.3.2019., a naši podaci su obrađivani na datum 1.2.2019.. Polica je na datum obrade cenzurirana. Navedena polica je boravila u stanju AKTIVAN 5,83 godina i dalje se ne zna što se s njome događa.

Polica broj 2 je ušla u statistiku na datum 1.9.1999. u 52. godini života osigurane osobe, kraj police je 31.8.2004.. Navedena polica je boravila u stanju AKTIVAN 5 godina i zatim je nastupio prijelaz u stanje DOŽIVLJENJE.

Polica broj 3 je ušla u statistiku na datum 1.3.2004. u 54. godini života

Polica	Datum smrti	Datum doživljenja	Datum storna	Datum kapitalizacije
Broj 1				
Broj 2		1.9.2004.		
Broj 3				1.1.2008.
Broj 4		1.3.2004.		1.5.2002.
Broj 5				1.12.2001.
Broj 6	10.10.2004.			1.12.2003.
Broj 7				
Broj 8	11.7.2003.			
Broj 9			1.10.2013.	

Tablica 6: Primjer polica sa podacima - 2. dio

$[x, x+1]$	$A_{x,1}$	$AST_{x,1}$	$AS_{x,1}$	$A_{x,2}$	$AS_{x,2}$	$AK_{x,2}$	$AO_{x,2}$	$K_{x,2}$	$KS_{x,2}$	$KO_{x,2}$	D
[58, 59]	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[59, 60]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[60, 61]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[61, 62]	0,5	0	0	0,5	0	0	0	0	0	0	0
[62, 63]	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
[63, 64]	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
[64, 65]	0	0	0	0,33	0	0	0	0	0	0	0

Tablica 7: Primjer police broj 1

$[x, x+1]$	$A_{x,1}$	$AST_{x,1}$	$AS_{x,1}$	$A_{x,2}$	$AS_{x,2}$	$AK_{x,2}$	$AO_{x,2}$	$K_{x,2}$	$KS_{x,2}$	$KO_{x,2}$	D
[52, 53]	0,75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[53, 54]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[54, 55]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[55, 56]	0,25	0	0	0,75	0	0	0	0	0	0	0
[56, 57]	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
[57, 58]	0	0	0	0,25	0	0	0	0	0	0	1

Tablica 8: Primjer police broj 2

osigurane osobe, na dan 1.1.2008. je ušla u stanje KAPITALIZIRAN. Kraj police je 28.2.2019., a naši podaci su obrađivani na datum 1.2.2019. Navedena polica je boravila u stanju AKTIVAN 3,61 godina, zatim se dogodio prijelaz u stanje KAPITALIZIRAN u kojem je provela 1,08 godina nakon čega se dogodilo cenzuriranje.

Polica broj 4 je ušla u statistiku na datum 1.3.1999. u 37. godini života

$[x, x+1]$	$A_{x,1}$	$AST_{x,1}$	$AS_{x,1}$	$A_{x,2}$	$AS_{x,2}$	$AK_{x,2}$	$AO_{x,2}$	$K_{x,2}$	$KS_{x,2}$	$KO_{x,2}$	D
[54, 55]	0,41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[55, 56]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[56, 57]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[57, 58]	0,59	0	0	0,41	0	0	0	0	0	0	0
[58, 59]	0	0	0	0,25	0	0	0	0,75	0	0	0
[59, 60]	0	0	0	0	0	0	0	0,33	0	0	0

Tablica 9: Primjer police broj 3

osigurane osobe, na dan 1.5.2002. je ušla u stanje KAPITALIZIRAN. Kraj police je 29.2.2004. kada je polica ušla u stanje DOŽIVLJENJE. Navedena polica je boravila u stanju AKTIVAN 3,17 godina, zatim se dogodio prijelaz u stanje KAPITALIZIRAN u kojem je provela 1,83 godina nakon čega se dogodio prijelaz u stanje DOŽIVLJENJE.

$[x, x+1]$	$A_{x,1}$	$AST_{x,1}$	$AS_{x,1}$	$A_{x,2}$	$AS_{x,2}$	$AK_{x,2}$	$AO_{x,2}$	$K_{x,2}$	$KS_{x,2}$	$KO_{x,2}$	D
[37, 38]	0,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[38, 39]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[39, 40]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[40, 41]	0,75	0	0	0,17	0	0	0	0,08	0	0	0
[41, 42]	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
[42, 43]	0	0	0	0	0	0	0	0,75	0	0	1

Tablica 10: Primjer police broj 4

Polica broj 5 je ušla u statistiku na datum 1.8.2000. u 34. godini života osigurane osobe, na dan 1.12.2003. je ušla u stanje KAPITALIZIRAN. Zatim je na dan 1.3.2005. ušla u stanje OTKUP. Navedena polica je boravila u stanju AKTIVAN 3,33 godina, zatim se dogodio prijelaz u stanje KAPITALIZIRAN u kojem je provela 1,26 godina nakon čega se dogodio prijelaz u stanje OTKUP.

$[x, x+1]$	$A_{x,1}$	$AST_{x,1}$	$AS_{x,1}$	$A_{x,2}$	$AS_{x,2}$	$AK_{x,2}$	$AO_{x,2}$	$K_{x,2}$	$KS_{x,2}$	$KO_{x,2}$	D
[34, 35]	0,67	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[35, 36]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[36, 37]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[37, 38]	0,33	0	0	0,33	0	0	0	0,34	0	0	0
[38, 39]	0	0	0	0	0	0	0	0,92	0	1	0

Tablica 11: Primjer police broj 5

Polica broj 6 je ušla u statistiku na datum 1.7.2000. u 34. godini života

osigurane osobe, na dan 1.12.2003. je ušla u stanje KAPITALIZIRAN. Zatim je na dan 10.10.2004. ušla u stanje SMRT. Navedena policia je boravila u stanju AKTIVAN 3,42 godina, zatim se dogodio prijelaz u stanje KAPITALIZIRAN u kojem je provela 0,84 godina nakon čega se dogodio prijelaz u stanje SMRT.

$[x, x+1]$	$A_{x,1}$	$AST_{x,1}$	$AS_{x,1}$	$A_{x,2}$	$AS_{x,2}$	$AK_{x,2}$	$AO_{x,2}$	$K_{x,2}$	$KS_{x,2}$	$KO_{x,2}$	D
[34, 35]	0,34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[35, 36]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[36, 37]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[37, 38]	0,66	0	0	0,34	0	0	0	0	0	0	0
[38, 39]	0	0	0	0,08	0	0	0	0,84	1	0	0

Tablica 12: Primjer police broj 6

Policia broj 7 je ušla u statistiku na datum 1.6.2003. u 34. godini života osigurane osobe, na dan 1.7.2007. je ušla u stanje OTKUP. Navedena policia je boravila u stanju AKTIVAN 3,32 godina nakon čega se dogodio prijelaz u stanje OTKUP.

$[x, x+1]$	$A_{x,1}$	$AST_{x,1}$	$AS_{x,1}$	$A_{x,2}$	$AS_{x,2}$	$AK_{x,2}$	$AO_{x,2}$	$K_{x,2}$	$KS_{x,2}$	$KO_{x,2}$	D
[34, 35]	0,34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[35, 36]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[36, 37]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[37, 38]	0,66	0	0	0,34	0	0	0	0	0	0	0
[38, 39]	0	0	0	0,08	0	0	1	0	0	0	0

Tablica 13: Primjer police broj 7

Policia broj 8 je ušla u statistiku na datum 1.2.2003. u 33. godini života osigurane osobe, na dan 1.7.2003. je ušla u stanje SMRT. Navedena policia je boravila u stanju AKTIVAN 0,41 godina nakon čega se dogodio prijelaz u stanje SMRT.

$[x, x+1]$	$A_{x,1}$	$AST_{x,1}$	$AS_{x,1}$	$A_{x,2}$	$AS_{x,2}$	$AK_{x,2}$	$AO_{x,2}$	$K_{x,2}$	$KS_{x,2}$	$KO_{x,2}$	D
[33, 34]	0,41	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Tablica 14: Primjer police broj 8

Policia broj 9 je ušla u statistiku na datum 1.6.2013. u 34. godini života osigurane osobe, na dan 1.10.2013. je ušla u stanje STORNO. Navedena policia je boravila u stanju AKTIVAN 0,33 godina nakon čega se dogodio prijelaz u stanje STORNO.

$[x, x+1]$	$A_{x,1}$	$AST_{x,1}$	$AS_{x,1}$	$A_{x,2}$	$AS_{x,2}$	$AK_{x,2}$	$AO_{x,2}$	$K_{x,2}$	$KS_{x,2}$	$KO_{x,2}$	D
[44, 45]	0,33	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tablica 15: Primjer police broj 9

MLE su redom:

$$\hat{\nu}_{1x} = \frac{AST_{x,1}}{A_{x,1}}; \quad \hat{\nu}_{2x} = \frac{AS_{x,1}}{A_{x,1}}; \quad \hat{\mu}_{1x} = \frac{AK_{x,2}}{A_{x,2}};$$

$$\hat{\mu}_{2x} = \frac{AS_{x,2}}{A_{x,2}}; \quad \hat{\mu}_{3x} = \frac{AO_{x,2}}{A_{x,2}}; \quad \hat{\mu}_{4x} = \frac{KS_{x,2}}{K_{x,2}}; \quad \hat{\mu}_{5x} = \frac{KO_{x,2}}{K_{x,2}}.$$

3.5 Standardna pogreška procjenitelja

Neka je $AST_{ix,1}$ prijelaz police i u trenutku t za dobni interval $[x, x + 1]$ iz stanja AKTIVAN u stanje STORNO. Prijelaz $AST_{ix,1}$ je Bernoullieva slučajna varijabla jer za svaki prijelaz iz stanja A u stanje ST moguća su dva ishoda - "prijelaz" (1) i "nema prijelaza" (0), a intenzitet prijelaza da se dogodi slučaj "prijelaz" jednaka je $\frac{\partial}{\partial t} \log \frac{1}{t p_{x,1}^{AST}} = \nu_{1x(x+t)}$. Tada je $AST_{x,1} = \sum_{i=1}^N AST_{ix,1}$ broj svih prelazaka iz stanja AKTIVAN u stanje STORNO za dobni interval $[x, x + 1]$.

Također su i $AS_{x,1}, AK_{x,2}, AS_{x,2}, AO_{x,2}, KS_{x,2}, KO_{x,2}$ Bernoullieve slučajne varijable sa intenzitetom prijelaza redom $\nu_{2x}, \mu_{2x}, \mu_{3x}, \mu_{4x}, \mu_{5x}$ za dobni interval $[x, x + 1]$.

Definicija 4. Kažemo da je model za X zadan funkcijom gustoće $f(x|\theta), \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ regularan ako je:

$$(R1) \text{ Im}X = \{x : f(x|\theta) > 0\} \text{ ne ovisi o } \theta.$$

$$(R2) \Theta \text{ je otvoren skup.}$$

$$(R3) (\forall x) \theta \mapsto f(x|\theta) \text{ je diferencijalna funkcija.}$$

$$(R4) (\forall i, \theta) \mathbb{E}[(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log f(X|\theta))^2] < +\infty \text{ i kovarijacijska matrica } I(\theta) \text{ s.ve. } \nabla_{\theta} \log f(X|\theta) \text{ je pozitivno definitna.}$$

$$(R5) (\forall \theta) \int \nabla_{\theta} f(x|\theta) dx = 0.$$

$I(\theta)$ zovemo Fisherovom informacijskom matricom.

Teorem 1. Neka je X_1, \dots, X_n , slučajan uzorak za X iz regularnog modela $f(x|\theta)$, i neka je $\hat{\theta}$ MLE za θ log-vjerodostojnosti $l_n(\hat{\theta})$. Pretpostavimo još da vrijedi:

$$(R6) (\forall x, i) \theta \mapsto \frac{\partial}{\partial \theta_i} f(x|\theta) \text{ je diferencijalna funkcija.}$$

$$(R7) (\forall \theta_0) (\exists r > 0 \text{ i funkcija } x \mapsto K(x, \theta_0)) (\forall x, i, j) \sup_{\{\theta : |\theta - \theta_0| < r\}} |\frac{\partial}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log f(x|\theta)| \leq K(x, \theta_0) \text{ i } \mathbb{E}_{\theta_0}[K(X, \theta_0)] < +\infty.$$

$$(R8) (\forall \theta) \int \nabla_{\theta}^2 f(x|\theta) dx = 0.$$

$$(R9) f(x|\theta_1) = f(x|\theta_2) \text{ s.s. } \Rightarrow \theta_1 = \theta_2.$$

Tada je $\hat{\theta}$ konzistentan procjenitelj za θ . Nadalje,

$$\sqrt{nI(\hat{\theta})}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, I), \quad n \rightarrow \infty$$

i

$$\sqrt{(-\nabla^2 \log L(\hat{\theta}))}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} N(0, I), \quad n \rightarrow \infty.$$

Izračunajmo drugu derivaciju za $l(\hat{\theta})$. Izračun pokazuje da je druga derivacija dijagonalna matrica sa pripadnim elementima na dijagonali kako slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \partial l}{\partial \nu_{1x} \partial \nu_{1x}} &= -AST_{x,1} \frac{1}{\nu_{1x}^2}; & \frac{\partial \partial l}{\partial \nu_{2x} \partial \nu_{2x}} &= -AS_{x,1} \frac{1}{\nu_{2x}^2}; \\ \frac{\partial \partial l}{\partial \mu_{1x} \partial \mu_{1x}} &= -AK_{x,2} \frac{1}{\mu_{1x}^2}; & \frac{\partial \partial l}{\partial \mu_{2x} \partial \mu_{2x}} &= -AS_{x,2} \frac{1}{\mu_{2x}^2}; \\ \frac{\partial \partial l}{\partial \mu_{3x} \partial \mu_{3x}} &= -AO_{x,2} \frac{1}{\mu_{3x}^2}; & \frac{\partial \partial l}{\partial \mu_{4x} \partial \mu_{4x}} &= -KS_{x,2} \frac{1}{\mu_{4x}^2}; \\ & & \frac{\partial \partial l}{\partial \mu_{5x} \partial \mu_{5x}} &= -KO_{x,2} \frac{1}{\mu_{5x}^2}; \end{aligned}$$

Teorem 1 koristi se za konstrukciju pouzdanog intervala parametara i funkcija parametara regularnog modela približno zadane pouzdanosti za velike n .

Želimo izračunati procjenu aproksimativnog 95% pouzdanog intervala za ν_{1x} , ν_{2x} , μ_{1x} , μ_{2x} , μ_{3x} , μ_{4x} , μ_{5x} .

$$\begin{aligned} & \left[\hat{\nu}_{1x} - z_{0,025} \frac{1}{\sqrt{AST_{x,1} \frac{1}{(\hat{\nu}_{1x}^2)}}}, \quad \hat{\nu}_{1x} + z_{0,025} \frac{1}{\sqrt{AST_{x,1} \frac{1}{(\hat{\nu}_{1x}^2)}}} \right]. \\ & \left[\hat{\nu}_{2x} - z_{0,025} \frac{1}{\sqrt{AS_{x,1} \frac{1}{(\hat{\nu}_{2x}^2)}}}, \quad \hat{\nu}_{2x} + z_{0,025} \frac{1}{\sqrt{AS_{x,1} \frac{1}{(\hat{\nu}_{2x}^2)}}} \right]. \\ & \left[\hat{\mu}_{1x} - z_{0,025} \frac{1}{\sqrt{AK_{x,2} \frac{1}{(\hat{\mu}_{1x}^2)}}}, \quad \hat{\mu}_{1x} + z_{0,025} \frac{1}{\sqrt{AK_{x,2} \frac{1}{(\hat{\mu}_{1x}^2)}}} \right]. \\ & \left[\hat{\mu}_{2x} - z_{0,025} \frac{1}{\sqrt{AS_{x,2} \frac{1}{(\hat{\mu}_{2x}^2)}}}, \quad \hat{\mu}_{2x} + z_{0,025} \frac{1}{\sqrt{AS_{x,2} \frac{1}{(\hat{\mu}_{2x}^2)}}} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\hat{\mu}_{3x} - z_{0,025} \frac{1}{\sqrt{AO_{x,2}(\hat{\mu}_{3x}^2)}}, \quad \hat{\mu}_{3x} + z_{0,025} \frac{1}{\sqrt{AO_{x,2}(\hat{\mu}_{3x}^2)}} \right]. \\ & \left[\hat{\mu}_{4x} - z_{0,025} \frac{1}{\sqrt{KS_{x,2}(\hat{\mu}_{4x}^2)}}, \quad \hat{\mu}_{4x} + z_{0,025} \frac{1}{\sqrt{KS_{x,2}(\hat{\mu}_{4x}^2)}} \right]. \\ & \left[\hat{\mu}_{5x} - z_{0,025} \frac{1}{\sqrt{KO_{x,2}(\hat{\mu}_{5x}^2)}}, \quad \hat{\mu}_{5x} + z_{0,025} \frac{1}{\sqrt{KO_{x,2}(\hat{\mu}_{5x}^2)}} \right]. \end{aligned}$$

Iz statističke tablice isčitavamo da je $z_{0,025} = 1,96$ i za svaki dobní interval uvrstimo parametre u jednadžbu. Dobijemo tablicu:

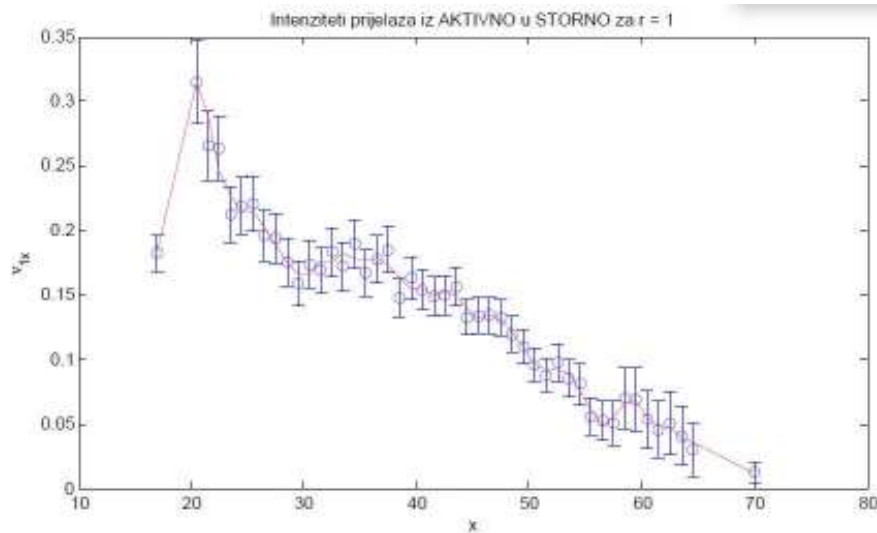
Sredina intervala	ν_{1x}	95% - pouzdan interval za ν_{1x}	ν_{2x}	95% - pouzdan interval za ν_{2x}	μ_{1x}	95% - pouzdan interval za μ_{1x}
17	0,08869	[0,08, 0,10]	0,00029	[0,000, 0,001]	0,03690	[0,02, 0,05]
20,5	0,21488	[0,19, 0,24]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,04885	[0,02, 0,07]
21,5	0,23714	[0,21, 0,26]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,05053	[0,03, 0,07]
22,5	0,27303	[0,25, 0,30]	0,00067	[-0,001, 0,002]	0,06415	[0,04, 0,08]
23,5	0,26794	[0,24, 0,29]	0,00063	[-0,001, 0,002]	0,05150	[0,04, 0,07]
24,5	0,29529	[0,27, 0,32]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,07968	[0,06, 0,10]
25,5	0,24560	[0,22, 0,27]	0,00059	[-0,001, 0,002]	0,08529	[0,07, 0,10]
26,5	0,24490	[0,22, 0,27]	0,00170	[0,000, 0,004]	0,07680	[0,06, 0,09]
27,5	0,25339	[0,23, 0,28]	0,00056	[-0,001, 0,002]	0,07940	[0,07, 0,09]
28,5	0,23544	[0,21, 0,26]	0,00056	[-0,001, 0,002]	0,07676	[0,06, 0,09]
29,5	0,23931	[0,22, 0,26]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,08064	[0,07, 0,09]
30,5	0,21757	[0,20, 0,24]	0,00056	[-0,001, 0,002]	0,07478	[0,06, 0,09]

Tablica 16: Procjena ν_{1x} , ν_{2x} , μ_{1x} i njihovih 95% pouzdanih intervala

U poglavlju (Prilog 3) na stranici 70 nalazi se potpuna tablica sa procjenom μ_{2x} , μ_{3x} , μ_{4x} , μ_{5x} i njihovih 95% pouzdanih intervala.

Naše izračunate intenzitete ne možemo direktno koristiti za daljni račun već ih trebamo izgladiti odgovarajućim funkcijama da bi se maknuli eventualno oštećeni, iskrivljeni ili nepravilno dokumentirani podaci. Naši podaci su odgovarajuće izgladjeni bilo linearnim filterom kroz 5 točaka, pravcem ili parabolom. (vidjeti [14]) Kako to grafički izgleda vidi se na grafovima (slika 16), (slika 17), (slika 18), (slika 19), (slika 20), (slika 21) i (slika 23).

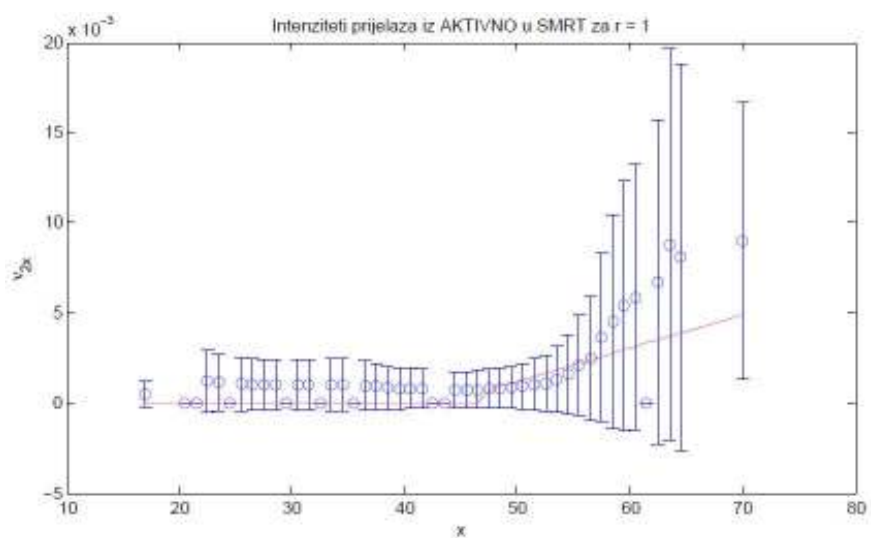
Sredina intervala	95% - pouzdan interval za μ_2		95% - pouzdan interval za μ_3		95% - pouzdan interval za μ_4		95% - pouzdan interval za μ_5	
	μ_2		μ_3		μ_4		μ_5	
17	0,00000	[0,000, 0,000]	0,00820	[0,00, 0,02]	0,0000	[0,000, 0,000]	0,00000	[0,00, 0,00]
20,5	0,00000	[0,000, 0,000]	0,01628	[0,00, 0,03]	0,0000	[0,000, 0,000]	0,11511	[0,00, 0,23]
21,5	0,00000	[0,000, 0,000]	0,01203	[0,00, 0,02]	0,0000	[0,000, 0,000]	0,03243	[-0,01, 0,08]
22,5	0,00169	[-0,002, 0,005]	0,01519	[0,01, 0,03]	0,0000	[0,000, 0,000]	0,01020	[-0,01, 0,03]
23,5	0,00000	[0,000, 0,000]	0,02386	[0,01, 0,03]	0,0000	[0,000, 0,000]	0,04973	[0,01, 0,09]
24,5	0,00000	[0,000, 0,000]	0,02656	[0,02, 0,04]	0,0000	[0,000, 0,000]	0,03741	[0,01, 0,06]
25,5	0,00086	[-0,001, 0,003]	0,03101	[0,02, 0,04]	0,0000	[0,000, 0,000]	0,04144	[0,02, 0,06]
26,5	0,00000	[0,000, 0,000]	0,02560	[0,02, 0,03]	0,0000	[0,000, 0,000]	0,04355	[0,02, 0,06]
27,5	0,00000	[0,000, 0,000]	0,02278	[0,02, 0,03]	0,0000	[0,000, 0,000]	0,05262	[0,03, 0,07]
28,5	0,00059	[-0,001, 0,002]	0,02303	[0,02, 0,03]	0,0000	[0,000, 0,000]	0,03820	[0,02, 0,05]
29,5	0,00108	[0,000, 0,003]	0,02527	[0,02, 0,03]	0,0000	[0,000, 0,000]	0,03102	[0,02, 0,04]
30,5	0,00000	[0,000, 0,000]	0,02526	[0,02, 0,03]	0,0028	[-0,001, 0,007]	0,04615	[0,03, 0,06]

Tablica 17: Procjena μ_{2x} , μ_{3x} , μ_{4x} , μ_{5x} i njihovih 95% pouzdanih intervalaSlika 16: Procjena ν_1 sa pripadnim intervalom pouzdanosti i izglađenim vrijednostima

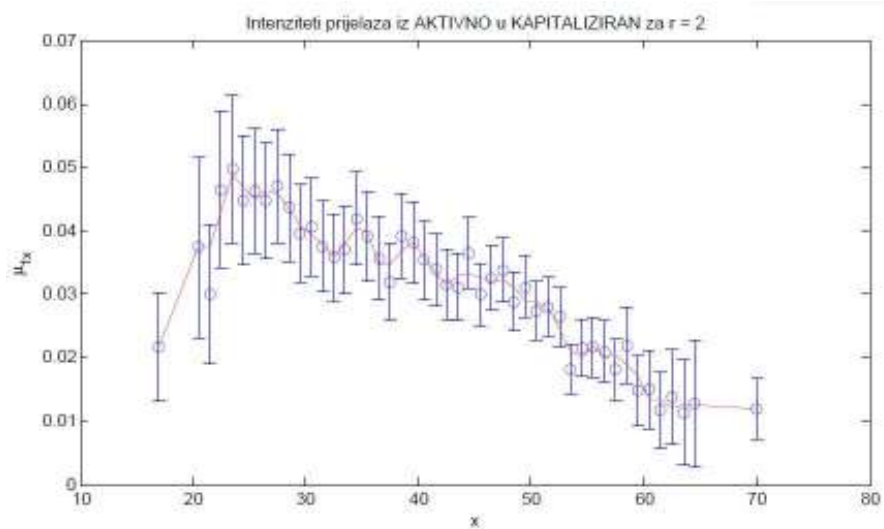
3.6 Očekivano vrijeme boravka u pojedinom stanju

Sada nas zanima koliko je očekivano vrijeme boravka u stanju AKTIVAN i KAPITALIZIRAN. Označimo s T_0, T_1, T_2, \dots uzastopna vremena događaja (odnosno boravka u stanju). Vjerojatnosna distribucija vremena T_i koje proces provede u stanju i

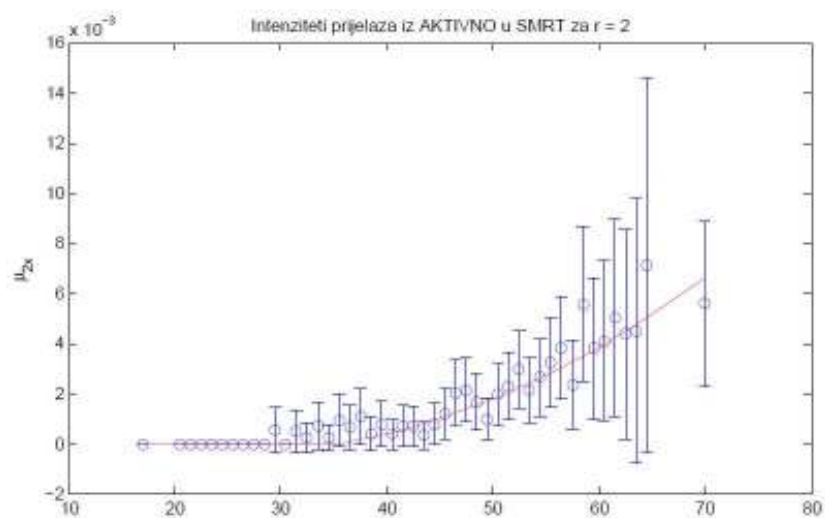
$$\mathbb{P}[T_0 > t | Y(0) = 0] = \mathbb{P}[Y(t) = 0 | Y(0) = 0] = e^{-\lambda t}.$$



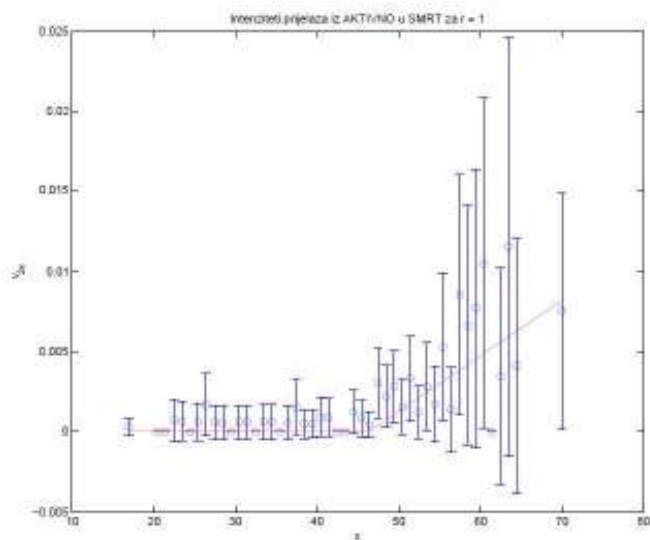
Slika 17: Procjena ν_2 sa pripadnim intervalom pouzdanosti i izglađenim vrijednostima



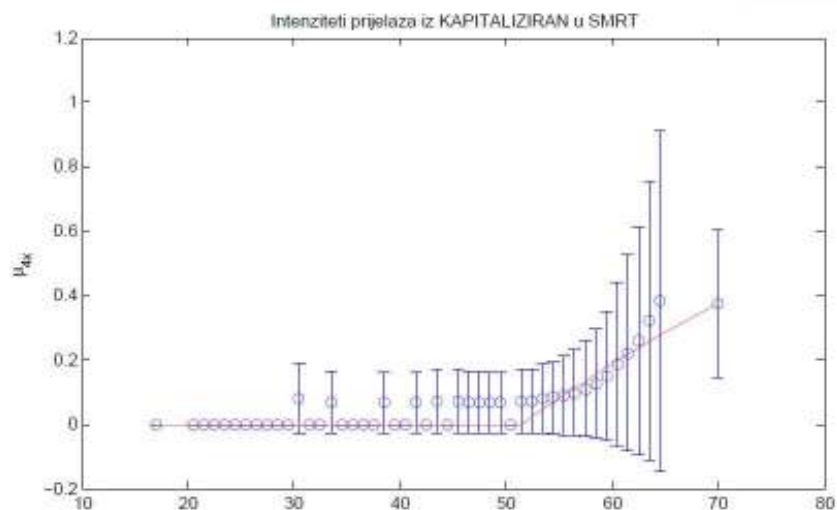
Slika 18: Procjena μ_1 sa pripadnim intervalom pouzdanosti i izglađenim vrijednostima



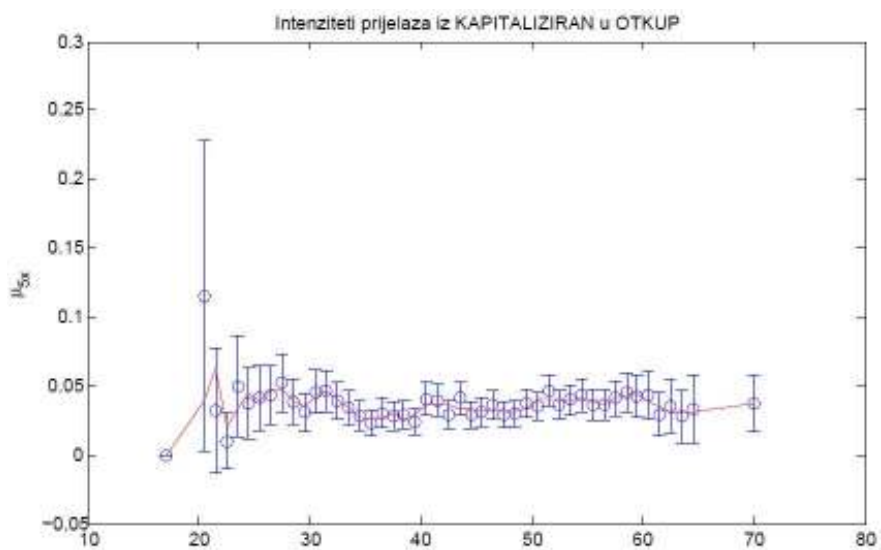
Slika 19: Procjena μ_2 sa pripadnim intervalom pouzdanosti i izgladenim vrijednostima



Slika 20: Procjena μ_3 sa pripadnim intervalom pouzdanosti i izgladenim vrijednostima



Slika 21: Procjena μ_4 sa pripadnim intervalom pouzdanosti i izgladenim vrijednostima



Slika 22: Procjena μ_5 sa pripadnim intervalom pouzdanosti i izgladenim vrijednostima

$T_0, T_1, T_2, \dots, T_i, \dots$ je niz nezavisnih eksponencijalno distribuiranih slučajnih varijabli s parametrom λ za koje vrijedi

$$\mathbb{P}(x+t, x+t+s; g, h) = \mathbb{P}(Y(x+t+s) = h | Y(x+t) = g) = {}_s p_{x+t}^{gh}$$

Ako je u dobi x osiguranik bio u prvom periodu trajanja članstva ($r = 1$), tada je vrijeme boravka u stanju AKTIVAN

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_x^A] &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_x > t) dt \int_0^{+\infty} {}_t p_x^{AA} dt = \\ &= \int_0^1 {}_t p_{x,1}^{AA} dt + \int_1^{+\infty} {}_t p_x^{AA} dt = \\ &= \int_0^1 e^{-\alpha_x t} dt + \int_1^{+\infty} {}_1 p_{x,1}^{AA} {}_{t-1} p_{x+1}^{AA} dt = \\ &= \frac{1 - e^{-\alpha_x}}{\alpha_x} + e^{-\alpha_x} \int_0^{+\infty} {}_s p_{x+1}^{AA} ds \\ &= \frac{1 - e^{-\alpha_x}}{\alpha_x} + e^{-\alpha_x} \mathbb{E}[T_{x+1}^A]. \end{aligned}$$

Za izračun koristimo izgladene stope prijelaza $\overset{\circ}{\alpha}_x = \overset{\circ}{\nu}_{1x} + \overset{\circ}{\nu}_{2x}$.

Ako je u dobi x osiguranik u drugom periodu trajanja članstva ($r = 2$), tada je vrijeme boravka u stanju AKTIVAN

$$\mathbb{E}[T_x^A] = \frac{1 - e^{-\beta_x}}{\beta_x} + e^{-\beta_x} \mathbb{E}[T_{x+1}^A].$$

Za izračun koristimo izgladene stope prijelaza $\overset{\circ}{\beta}_x = \overset{\circ}{\mu}_{1x} + \overset{\circ}{\mu}_{2x} + \overset{\circ}{\mu}_{3x}$.

Analogno se napravi izračun za vrijeme boravka u stanju KAPITALIZI-

RAN.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_x^K] &= \int_0^\infty t f_{T_x^K}(t) dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(T_x^K > t) dt = \int_0^{+\infty} {}_t p_{x,2}^{KK} dt = \\
&= \int_0^1 {}_t p_{x,2}^{KK} dt + \int_1^{+\infty} {}_t p_{x,2}^{KK} dt = \\
&= \int_0^1 e^{-\gamma_x t} dt + \int_0^{+\infty} {}_1 p_{x,2}^{KK} {}_{t-1} p_{x+1,2}^{KK} dt = \\
&= \int_0^1 e^{-\gamma_x t} dt + {}_1 p_{x,2}^{KK} \int_0^{+\infty} {}_{t-1} p_{x+1,2}^{KK} dt = \\
&= \int_0^1 e^{-\gamma_x t} dt + e^{-\gamma_x} \int_0^{+\infty} {}_t p_{x+1,2}^{KK} dt = \\
&= \frac{1 - e^{-\gamma_x}}{\gamma_x} + e^{-\gamma_x} \mathbb{E}[T_{x+1}^K]
\end{aligned} \tag{13}$$

Prema tome vrijedi da je i $\mathbb{E}[T_x^K]$ rekurzivna funkcija.

$$\mathbb{E}[T_x^K] = \frac{1 - e^{-\gamma_x}}{\gamma_x} + e^{-\gamma_x} \mathbb{E}[T_{x+1}^K].$$

Za izračun koristimo izgladene stope prijelaza $\overset{\circ}{\gamma}_x = \overset{\circ}{\mu}_{4x} + \overset{\circ}{\mu}_{5x}$.

U poglavlju (Prilog 4) na stranici 74 nalazi se potpuna tablica vremena boravka u stanju AKTIVAN ovisno o trajanju police i u stanju KAPITALIZIRAN.

x	0	1	2	3 ili više	KAP
14	12,71				
15	12,39	12,84			
16	12,06	12,49	12,99		
17	11,71	12,13	12,61	13,15	0
18	10,42	11,75	12,21	12,73	0
19	9,06	10,34	11,79	12,29	0
20	7,72	8,85	10,26	11,84	24,75
21	7,36	8,46	9,86	11,60	24,74
22	7,28	8,25	9,64	11,42	25,33
23	7,40	8,32	9,57	11,39	24,83
24	7,74	8,67	9,89	11,55	24,67
25	8,08	9,05	10,26	11,88	24,78
26	8,36	9,34	10,59	12,16	24,75
27	8,58	9,54	10,79	12,39	24,92
28	8,93	9,85	11,07	12,67	25,10
29	9,38	10,26	11,43	13,00	25,09
30	9,75	10,71	11,83	13,31	24,98

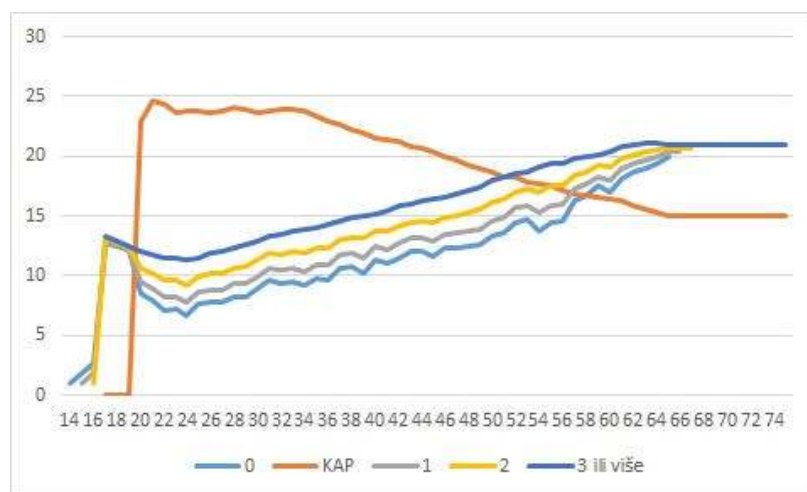
Tablica 18: Očekivano vrijeme boravka u stanju AKTIVAN ovisno o trajanju police i u stanju KAPITALIZIRAN

3.7 Vrednovanje police

Prvo da objasnimo pojmove koje ćemo koristiti. Neke smo do sada spomenuli pa ćemo ih samo ponoviti.

Osigurani iznos je svota koju ugovaratelj ugovori prilikom sklapanja police osiguranja, a koja će biti isplaćena korisniku osiguranja ukoliko osigurana osoba prijeđe iz stanja AKTIVAN u stanje SMRT ili u stanje DOŽIVLJENJE. Polica je aktivna ukoliko se nije dogodio niti jedan od prijelaza u stanja KAPITALIZIRAN, OTKUP, SMRT, STORNO ili DOŽIVLJENJE.

Kapitaliziran iznos je svota koja će biti isplaćena korisniku osiguranja ukoliko osigurana osoba prijeđe iz stanja KAPITALIZIRAN u stanje SMRT ili u stanje DOŽIVLJENJE. Isti se računa u trenutku kapitalizacije na način da se izračuna kolika je vrijednost matematičke pričuve ${}_{k+j}L_x$ u trenutku prijelaza u stanje KAPITALIZIRAN ukamačen do trenutka isteka dogovo-



Slika 23: Očekivano vrijeme boravka u stanju AKTIVAN ovisno o trajanju police i u stanju KAPITALIZIRAN

renog trajanja police. Kapitalizacija nastaje u trenutku kada ugovaratelj ne plati jednu godišnju premiju nakon isteka prvih q godina. Nakon kapitalizacije osiguranje i dalje traje.

DOŽIVLJENJE: Ako osiguranik doživi ugovoreni broj godina osiguratelj će korisniku isplatiti ugovoreni iznos ukoliko je polica čitavo vrijeme boravila u stanju AKTIVAN ili kapitalizirani iznos ukoliko je polica pred kraj doživljenja boravila u stanju KAPITALIZIRAN. Nakon doživljenja osiguranje prestaje.

SMRT: Ako osiguranik umre prilikom trajanja osiguranja, osiguratelj će korisniku isplatiti ugovoreni iznos ukoliko je polica čitavo vrijeme boravila u stanju AKTIVAN ili kapitalizirani iznos ukoliko je polica pred kraj doživljenja boravila u stanju KAPITALIZIRAN. Nakon smrti osiguranje prestaje.

OTKUP: Ugovaratelj ima pravo povući dio svojih sredstva prikupljenih tijekom plaćanja premije najčešće u određenom postotku (nazovimo taj postotak ψ) od do tada prikupljene matematičke pričuve. Pritom je nužno zadovoljiti minimalne uvjete za otkup police. Na primjer, plaćanje barem q godišnje premije. U trenutku otkupa, ugovaratelj više nije dužan plaćati premiju osiguranja, a osiguranje nakon otkupa prestaje.

STORNO: Storno nastaje u trenutku kada ugovaratelj ne plati jednu godišnju premiju unutar prvih q godina. Nema pravo na povrat dijela uložениh sredstava. Osiguranje nakon storna prestaje.

Izračunajmo vrijednost police sklopljene u dobi x u trenutku k . Za $k < T_x < n$ to jest ($K_x \geq k$) vrijedi da je slučajna sadašnja vrijednost police u trenutku $x+k$ koja je sklopljena u trenutku x jednaka ${}_k C_x$. Pogledajmo za osigurani iznos S i premiju P :

$$\begin{aligned}
{}_k C_x &= (S \cdot v^{K_{x+k}+1} - P \cdot \ddot{a}_{\overline{K_{x+k}+1}|}) \cdot \mathbb{1}_{\{k+T_{x+k} < n, Y(k+T_{x+k})=SMRT\}} + \\
&+ (0 - P \cdot \ddot{a}_{\overline{K_{x+k}+1}|}) \cdot \mathbb{1}_{\{k+T_{x+k} < q, Y(k+T_{x+k})=STORNO\}} + \\
&+ (S \cdot v^{n-k} - P \cdot \ddot{a}_{\overline{n-k}|}) \cdot \mathbb{1}_{\{k+T_{x+k} \geq n\}} + \\
&+ (\psi \cdot {}_{k+K_{x+k}} L_x - P \cdot \ddot{a}_{\overline{K_{x+k}+1}|}) \cdot \mathbb{1}_{\{q \leq k+T_{x+k} < n, Y(k+T_{x+k})=OTKUP\}} + \\
&+ \cdot \mathbb{1}_{\{q \leq k+T_{x+k} \leq n, Y(k+T_{x+k})=KAPITALIZIRAN\}} \cdot \\
&\cdot [(k+K_{x+k}) L_x \cdot r^{n-k-K_{x+k}} \cdot v^{K_{x+k}+K_{x+k}^{KAP}+1} - P \cdot \ddot{a}_{\overline{K_{x+k}+1}|}) \cdot \\
&\cdot \mathbb{1}_{\{k+T_{x+k}+T_{x+k}^{KAP} < n, Y(k+T_{x+k}+T_{x+k}^{KAP})=SMRT\}} + \\
&+ (\psi \cdot {}_{k+K_{x+k}} L_x \cdot r^{K_{x+k}+K_{x+k}^{KAP}} \cdot v^{K_{x+k}+K_{x+k}^{KAP}+1} - P \cdot \ddot{a}_{\overline{K_{x+k}+1}|}) \cdot \\
&\cdot \mathbb{1}_{\{k+T_{x+k}+T_{x+k}^{KAP} < n, Y(k+T_{x+k}+T_{x+k}^{KAP})=OTKUP\}} + \\
&+ ({}_{k+K_{x+k}} L_x \cdot r^{n-k-K_{x+k}} \cdot v^{n-k-K_{x+k}} - P \cdot \ddot{a}_{\overline{K_{x+k}+1}|}) \cdot \mathbb{1}_{\{k+T_{x+k}+T_{x+k}^{KAP} \geq n\}}]
\end{aligned} \tag{14}$$

Očekivana sadašnja vrijednost police u trenutku $x+k$ koja je sklopljena u trenutku x jest

$${}_k V_x = \mathbb{E}[{}_k C_x | k < T_x < n]. \tag{15}$$

Iznos kojim raspolaže osiguranik u trenutku prelaska u stanje KAPITALIZACIJA jest ${}_{k+j} L_x = \max\{{}_{k+j} V_k, 0\}$.

Pogledamo li bolje sve izraze uz vrijednost premije P u izrazu (15) možemo uočiti da je riječ o potpunim disjunktним događajima čija suma se može zapisati kao

$$\mathbb{E}[\ddot{a}_{\overline{K_{x+k}+1}|} \cdot (\mathbb{1}_{\{k+T_{x+k}\}}) + \ddot{a}_{\overline{n-k}|} \cdot (\mathbb{1}_{\{k+T_{x+k} \geq n\}})]. \tag{16}$$

Također izraz (16) možemo rastaviti na period prije q godina i nakon q godina

$$\mathbb{E}[\overline{a_{K_{x+k}+1}} \cdot (\mathbb{1}_{\{k+T_{x+k}<q\}} + \mathbb{1}_{\{q \leq k+T_{x+k}<n\}}) + \overline{a_{n-k}} \cdot (\mathbb{1}_{\{k+T_{x+k} \geq n\}})]. \quad (17)$$

Pokazat ćemo kako se u izrazu 14 računa očekivanje dijela izraza za slučaj SMRT.

Primjer izračuna ukoliko u stanje SMRT prelazimo iz stanja AKTIVAN. Prvo trebamo razdijeliti na slučajeve koje ovise o periodu trajanja članstva pa tek potom izračunati.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(S \cdot v^{K_{x+k}+1} \cdot \mathbb{1}_{\{k+T_{x+k}<n, Y(k+T_{x+k})=SMRT\}}) = \\ = & \mathbb{E}(S \cdot v^{K_{x+k}+1} \cdot \mathbb{1}_{\{k+T_{x+k}<q, Y(k+T_{x+k})=SMRT\}}) + \\ + & \mathbb{E}(S \cdot v^{K_{x+k}+1} \cdot \mathbb{1}_{\{q \leq k+T_{x+k}<n, Y(k+T_{x+k})=SMRT\}}) = \\ = & S \cdot \sum_{j=0, k+j < q}^{q-k-1} v^{j+1} \cdot {}_j p_{x+k} \cdot {}_1 q_{x+k+j} \cdot \frac{\nu_{x+k+j,2}}{\alpha_{x+k+j}} + \\ + & S \cdot \sum_{j=0, k+j \geq q}^{q-k-1} v^{j+1} \cdot {}_j p_{x+k} \cdot {}_1 q_{x+k+j} \cdot \frac{\mu_{x+k+j,2}}{\alpha_{x+k+j}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Vrijedi da je

$$\begin{aligned} {}_j p_{x+k} &= p_{x+k} \cdot p_{x+k+1} \cdots p_{x+k+j-1} \\ &= e^{-Z_{x+k}} \cdot e^{-Z_{x+k+1}} \cdots e^{-Z_{x+k+j-1}} \end{aligned} \quad (19)$$

i

$$\begin{aligned} q_{x+k+j} &= 1 - p_{x+k+j} \\ &= 1 - e^{-Z_{x+k+j}}, \end{aligned} \quad (20)$$

gdje je

$$Z_j = \begin{cases} \alpha_j & ; j < q, \\ \beta_j & ; j \geq q. \end{cases}$$

Primjer izračuna ukoliko u stanje SMRT prelazimo iz stanja KAPITALIZIRAN. Ovdje ne trebamo razdijeliti na slučajeve koje ovise o periodu trajanja članstva zato što u stanje KAPITALIZIRAN polica može doći nakon barem q godina.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[{}_{k+K_{x+k}}L_x \cdot r^{n-k-K_{x+k}} \cdot v^{K_{x+k}+K_{x+k}^{KAP}+1}] \\ & \cdot \mathbb{1}_{\{q \leq k+T_{x+k} \leq n, Y(k+T_{x+k})=KAP, k+T_{x+k}+T_{x+k}^{KAP} < n, Y(k+T_{x+k}+T_{x+k}^{KAP})=SMRT\}}] = \\ & = \sum_{j=\max(q-k,0)}^{n-k-1} \mathbb{E}[{}_{k+j}L_x \cdot r^{n-k-j} \cdot v^{j+K_{x+k+j}^{KAP}+1} \cdot \mathbb{1}_{k+j+T_{x+k+j}^{KAP} < n, Y(k+j+T_{x+k+j}^{KAP})=SMRT}] \cdot \\ & \cdot [{}_jP_{x+k}^{AKT} \cdot q_{x+k+j}^{AKT} \cdot \frac{\mu_{x+k+j,1}}{\beta_{x+k+j}}] = \\ & = \sum_{j=\max(q-k,0)}^{n-k-1} {}_{k+j}L_x \cdot r^{n-k-j} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-k-j-1} v^{j+i+1} \cdot {}_iP_{x+k+j}^{KAP} \cdot q_{x+k+j+i}^{KAP} \cdot \frac{\mu_{x+k+j+i,4}}{\gamma_{x+k+j+i}} \right) \\ & \cdot [{}_jP_{x+k}^{AKT} \cdot q_{x+k+j}^{AKT} \cdot \frac{\mu_{x+k+j,1}}{\beta_{x+k+j}}]. \end{aligned} \tag{21}$$

Konačna formula za ${}_kV_x$ izgleda ovako:

$$\begin{aligned}
{}_kV_x &= S \cdot \sum_{j=0, k+j < q}^{q-k-1} v^{j+1} \cdot {}_jP_{x+k} \cdot q_{x+k+j} \cdot \frac{\nu_{x+k+j,2}}{\alpha_{x+k+j}} + \\
&+ S \cdot \sum_{j=0, k+j \geq q}^{n-k-1} v^{j+1} \cdot {}_jP_{x+k} \cdot q_{x+k+j} \cdot \frac{\mu_{x+k+j,2}}{\beta_{x+k+j}} + \\
&+ S \cdot v^{n-k} \cdot {}_{n-k}P_{x+k} + \\
&+ \sum_{j=0, k+j \geq q}^{n-k-1} \psi \cdot {}_{k+j}L_x \cdot {}_jP_{x+k} \cdot q_{x+k+j} \cdot \frac{\mu_{x+k+j,3}}{\beta_{x+k+j}} + \\
&+ \sum_{j=\max(q-k,0)}^{n-k-1} {}_{k+j}L_x \cdot r^{n-k-j} \cdot {}_jP_{x+k}^{AKT} \cdot q_{x+k+j}^{AKT} \cdot \frac{\mu_{x+k+j,1}}{\beta_{x+k+j}} \cdot \\
&\cdot \left(\sum_{i=0}^{n-k-j-1} v^{j+i+1} \cdot {}_iP_{x+k+j}^{KAP} \cdot q_{x+k+j+i}^{KAP} \cdot \frac{\mu_{x+k+j+i,4}}{\gamma_{x+k+j+i}} \right) + \\
&+ \sum_{j=\max(q-k,0)}^{n-k-1} \psi \cdot {}_{k+j}L_x \cdot r^{n-k-j} \cdot {}_jP_{x+k}^{AKT} \cdot q_{x+k+j}^{AKT} \cdot \frac{\mu_{x+k+j,1}}{\beta_{x+k+j}} \cdot \\
&\cdot \left(\sum_{i=0}^{n-k-j-1} r^i \cdot v^{j+i+1} \cdot {}_iP_{x+k+j}^{KAP} \cdot q_{x+k+j+i}^{KAP} \cdot \frac{\mu_{x+k+j+i,5}}{\gamma_{x+k+j+i}} \right) + \\
&+ \sum_{j=\max(q-k,0)}^{n-k-1} {}_{k+j}L_x \cdot r^{n-k-j} \cdot v^{n-k-j} \cdot {}_jP_{x+k}^{AKT} \cdot q_{x+k+j}^{AKT} \cdot \frac{\mu_{x+k+j,1}}{\beta_{x+k+j}} \cdot {}_{n-k-j}P_{x+k+j} \\
&- P \cdot \left(\sum_{j=0}^{q-k-1} \ddot{a}_{\overline{j+1}|} \cdot {}_jP_{x+k} \cdot q_{x+k+j} + \sum_{j=\max(q-k,0)}^{n-k-1} {}_jP_{x+k} \cdot q_{x+k+j} \cdot \ddot{a}_{\overline{j+1}|} + \right. \\
&\left. + \sum_{j=0}^{n-k} \ddot{a}_{\overline{n-k|}} \cdot {}_jP_{x+k} \cdot q_{x+k+j} \right).
\end{aligned} \tag{22}$$

U poglavlju (Prilog 5) na stranici 77 u tabeli se nalazi primjer izračuna očekivane slučajne sadašnje vrijednosti police u trenutku $x+k$ koja je sklopljena u trenutku $x=20$ na $n=5$ godina. U drugom stupcu tablice se nalazi izračun slučajne sadašnje vrijednosti police i premije za osnovni model koji ima samo stanja AKTIVAN, DOŽIVLJENJE i SMRT. Od trećeg do osmog stupca nalazi se izračun sadašnje vrijednosti police i premije za naš model.

Izračun ovisi o dva parametra (o ψ i premiji). Za svaki ψ izračunata je sadašnja vrijednost police ovisna o premiji. Premija se izračunala iterativnom metodom na 6 decimala. Primjetimo da kod osnovnog modela (modela samo sa stanjima AKTIVAN, DOŽIVLJENJE i SMRT) sadašnja vrijednost police kontinuirano raste. Kod našeg modela očekivana sadašnja vrijednost police raste od $k = 0$ do $k = 2$ i onda u trenutku $k = 3$ drastično pada da bi opet krenula rasti. Prisjetimo se da u trećoj godini prelazimo iz lanca 1 u lanac 2.

3.8 Primjer izračuna bruto premije

Bruto premija životnih osiguranja je iznos koji je ugovaratelj dužan uplatiti jednokratno prilikom sklapanja osiguranja ili višekratno u jednakim ratama (može biti godišnje, tromjesečno, mjesečno). Bruto premija se sastoji od neto premije i premije za troškove osiguranja.

Neto premija je iznos koji služi za podmirenje obveza (jedan dio je riziko premija koja je za slučaj SMRT, a drugi dio je premija koja ulazi u matematičku pričuvu za slučaj DOŽIVLJENJE). Tehnička kamatna stopa i je stopa po kojoj se kamati matematička pričuva do trenutka isplate. Prema Pravilniku o minimalnim standardima, načinu obračuna i mjerilima za izračun tehničkih pričuva prema računovodstvenim propisima (Temeljem članka 173., stavka 5 Zakona o Osiguranju - Poglavlje III. Metode obračuna matematičke pričuve i posebne pričuve / V. Kamatna stopa) najviša kamatna stopa za obračun matematičke pričuve za period ugovaranja od uključujući 1.1.2018. iznosi 1% za ugovore o osiguranju i 1,75% za ugovore o osiguranju do najviše 5 godina trajanja.

Troškove koje imamo djelimo na početne troškove, troškove obrade osiguranja i troškove upravljanja.

- Početne troškove α kao udio u osiguranom iznosu
- Troškove obrade osiguranja β kao udio u bruto premiji
- Troškove upravljanja γ kao udio u bruto premiji. Iznos troškova upravljanja meže biti različit za policu koja je u statusu AKTIVAN i KAPITALIZIRAN no mi ćemo uzeti da su iznosi troškova jednaki.

Bruto premija mora zadovoljavati sljedeću jednadžbu:

$$\alpha \cdot OI + \gamma \cdot OI \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + OI \cdot A_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \cdot BP_{x:n} \cdot (1 - \beta) = 0$$

$$BP_{x:n} = \frac{(\alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|})}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \cdot (1 - \beta)} \cdot OI$$

Gdje su

- OI = osigurani iznos

- $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ = očekivana sadašnja vrijednost isplate u trenutku sklapanja osiguranja prenumerando godišnje premija za trajanje osiguranja n godina odnosno do smrti ukoliko ona nastupi ranije.

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x \cdot v^k$$

- $A_{x:\overline{n}|}$ = očekivana sadašnja vrijednost isplate u slučaju smrti ili doživljenja u trenutku sklapanja osiguranja za trajanje osiguranja n godina

$$A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^{\overline{1}}$$

- $A_{x:\overline{n}|}^1$ = očekivana sadašnja vrijednost isplate osiguranog iznosa za slučaj smrti u trenutku sklapanja osiguranja za trajanje osiguranja n godina

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1}$$

- $A_{x:\overline{n}|}^{\overline{1}}$ = očekivana sadašnja vrijednost isplate osiguranog iznosa za slučaj doživljenja

$$A_{x:\overline{n}|}^{\overline{1}} = {}_n p_x \cdot v^n$$

Za $A_{x:\overline{n}|}$ se može uzeti i vrijednost police ${}_0V_x$ izračunata u poglavlju 3.7 i dana formulom (15)

Primjer izračuna napravljen je za osobu starosti $x = 20$ godina, trajanje osiguranja $n = 5$ godina, osiguran iznos $OI = 1$ i korištena je tehnička kamatna stopa $i = 1\%$. $v = \frac{1}{1+i}$.

k	${}_1 p_x$	${}_k p_x$	q_{x+k}	v^k	v^{k+1}	v^{k+1}
0	0,915127	0,915127	0,084873	1,000000	0,990099	0,000000
1	0,806638	0,738176	0,193362	0,990099	0,980296	0,143662
2	0,785215	0,579627	0,214785	0,980296	0,970590	0,404793
3	0,931332	0,539825	0,068668	0,970590	0,960980	0,000000
4	0,918602	0,495885	0,081398	0,960980	0,951466	0,274208
5	0,903267	0,447916	0,096733	0,951466	0,942045	1,000000

Izračunamo

Stavimo li $\alpha = \beta = \gamma = 0$ tada je $BP_{20:5} = 0,260635$.

Stavimo li $\alpha = \beta = \gamma = 5\%$ tada je $BP_{20:5} = 0,343357$.

$a_{x:n}$	$A_{x:\overline{n}}^1$	$A_{x:\overline{n}}^{\overline{1}}$	$A_{x:n}$
3,214685	0,411684	0,426177	0,837861

3.9 Diskusija

U primjeru iz ovog rada uzeto je da su intenziteti prijelaza konstantni unutar dobi $[x, x + 1]$. Konstantnost unutar dobi koriste i Tablice mortaliteta Republike Hrvatske izdane od strane Državnog zavoda za statistiku Republike Hrvatske. Konstantnost bi se mogla gledati i na razini mjeseca ili dana, pa bi se rad mogao proširiti na taj način. U struci nema smisla gledati obračun na dan zato što se svi ulazni i izlazni parametri gledaju na mjesečnoj razini. Ovdje nije uzeto niti na mjesečnoj razini jer isto ne mijenja model, a broj podataka se znatno povećava.

Zbog uvjeta za storno i kapitalizaciju smo morali imati Markovljev proces ovisan o indikatoru vremena ($r = 1$ ili 2).

U prvom periodu trajanja ($r = 1$) uz stanje AKTIVAN postoji samo stanje SMRT i STORNO. Intenzitet smrtnosti je jako mali, što bi značilo da osiguranici koji kupuju osiguranje imaju manju stopu smrtnosti nego unutar čitave populacije. S druge strane intenzitet storna je jako visok. Očekivalo bi se da je intenzitet storna puno niži jer za prvih 35 osiguranih mjesečnih premija koje osiguranik uplati, prilikom odustanka od daljnjeg plaćanja premije osiguranik ne dobije nikakav povrat. Jedan od razloga bi moglo biti nedovoljno razumijevanje osigurateljnog proizvoda od strane osiguranika. Dio osiguranika ne razumije da je primarni posao osiguratelja osiguranje rizika već očekuje povrat na sveukupnu uplaćenu premiju. Mješovito osiguranje o kojem je ovdje riječ dio populacije uspoređuje sa štednjom u bankarskom sustavu. Zbog nerazumijevanja osigurateljskih proizvoda dolazi do nezadovoljstva i nepovjerenja u osigurateljne kuće. Potencijalne osiguranike bi trebalo bolje educirati i bolje informirati da bi se odnos između osiguranika i osiguratelja mogao učvrstiti povjerenjem.

U Markovljevom procesu u drugom periodu trajanja ($r = 2$) uz stanje AKTIVAN postoje stanja SMRT, KAPITALIZACIJA i OTKUP. Kao i za $r = 1$ intenzitet smrtnosti je mali i osiguranici imaju manju stopu smrtnosti nego unutar čitave populacije. Bilo bi zanimljivo vidjeti da li prelazak u stanje KAPITALIZACIJA i OTKUP korelira, i ako da u kojoj mjeri, o stopi inflacije. Da li postoji minimalan iznos inflacije za koji osiguranici značajno

prestaju s plaćanjem premije?

Zanimljivo bi bilo pogledati kako bi se ponašali rezultati razdjeljeni po spolu. Znamo da osobe ženskog spola žive dulje, tako da bi sigurno bilo utjecaja na intenzitet prijelaza za smrtnost. No da li možda osobe muškog spola manje odustaju jednom kada ugovore policu životnog osiguranja!? Također kako bi se moglo pogledati ponašanje rezultata podataka razdjeljenih po spolu tako bi se moglo pogledati ponašanje rezultata podataka razdjeljenih po profesiji i/ili po nekim zdravstvenim navikama. Možda bi se moglo zaključiti da možemo ponuditi vrlo dobre uvjete osiguranja osobama profesije X i sa Y zdravstvenim navikama.

Literatura

- [1] Bohk-Ewald, Christina; M. Muszynska, Magdalena; Rau, Roland; W. Vaupel, James, *Visualizing Mortality Dynamics in the Lexis Diagram*, Springer, 2018.
- [2] Cramér, H, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, 1946.
- [3] Gerber, Hans U., *Life Insurance Mathematics*, Springer, 1990.
- [4] E.L.Lehmann George Casella, *Theory of Point Estimation*, Second Edition, Springer, 1998.
- [5] Norris, James Robert, *Markov Chain*, Cambridge University Press, 1998.
- [6] Sarapa, Nikola, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga d.d., 1986
- [7] Račić Žlibar, Tatjana (2019) *Životno osiguranje*, [Powerpoint prezentacija s predavanja kolegija Životno osiguranje održanog u akademskoj godini 2018/2019 na PMF-Matematičkom odsjeku Sveučilišta u Zagrebu], Zagreb, Poslijediplomski specijalistički studij aktuarske matematike
- [8] Hrvatski ured za osiguranje (2018) *Kretanja na tržištu osiguranja*. Preuzeto s <http://www.huo.hr/hrv/publikacije-i-statistika/18/publikacije-arhiva/2018> (17.11.2019.)
- [9] Narodne novine (2018). *Zakon o obveznim odnosima*, pročišćeni tekst zakona (NN 35/05, 41/08, 125/11, 78/15 29/18). Preuzeto s <https://www.zakon.hr/z/75/Zakon-o-obveznim-odnosima> (17.11.2019.)
- [10] Narodne novine (2015). *Zakon o osiguranju* (NN, br. 30/15). Preuzeto s https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2015_03_30_611.html (17.11.2019.)
- [11] Narodne novine (2016). *Pravilnik o rasporedu vrsta rizika po skupinama i vrstama osiguranja odnosno reosiguranja* -

neslužbeni pročišćeni tekst (NN, br. 23/16 i 27/16). Preuzeto s https://www.hanfa.hr/getfile/43532/Pravilnik%20o%20rasporedu%20vrsta%20rizika%20osiguranja_prociscena%20verzija.pdf (17.11.2019.)

- [12] Stohastičko modeliranje. Preuzeto s <http://aktuari.math.pmf.unizg.hr/docs/sm.pdf>
- [13] Aktuarska matematika II. Preuzeto s <http://aktuari.math.pmf.unizg.hr/docs/am.pdf>
- [14] On Mortality and Life Expectancy, English version of AG report Over sterfte en Overleven, Actuarieel Genootschap, April 2007
- [15] Huzak M., Modeli doživljenja. Preuzeto s <http://aktuari.math.pmf.unizg.hr/docs/slidesmd1234.pdf>

Životopis

Rođena 25. srpnja 1983. godine u Zagrebu. Odrasla u Krapini gdje je pohađala prirodoslovno matematičku gimnaziju. Nakon gimnazije upisuje Matematički odjel Prirodoslovno matematičkog fakulteta smjer matematička statistika i računarstvo, koji završava radom na temu "Robusne mjere lokacije" pod mentorstvom prof.dr.sc. Miljenka Huzaka. Još kao student zapošljava se u aktuarskom odjelu u Triglav osiguranja d.d. kao aktuar za životna osiguranja. Trenutno radi u Hrvatskoj agenciji za nadzor financijskih usluga kao akturka specijalist. Nakon diplomskog studija upisuje Poslijediplomski specijalistički studij aktuarske matematike i 2015. godine stječe aktuarsko ovlaštenje.

Sažetak

Rad opisuje model mješovitog životnog osiguranja pomoću Markovljevog procesa skokova $(Y(t), t \geq 0)$ sa stanjima $S := \{\text{AKTIVAN}, \text{DOŽIVLJENJE}, \text{SMRT}, \text{OTKUP}, \text{STORNO}, \text{KAPITALIZACIJA}\}$ koji ovisno o trajanju članstva može prijeći u neka od navedenih stanja iz skupa stanja S . Opisani proces $(Y(t), t \geq 0)$ nije vremenski homogen, ali se može dekomponirati na dva takva lanca, ovisno o duljini trajanja članstva.

U radu je opisana statistika za policu i unutar dobnog intervala $[x, x + 1]$ i unutar vremena opažanja $[t_0, t_1]$ s pretpostavkom da su intenziteti prijelaza unutar dobnog intervala $[x, x + 1]$ konstantni. Prikazani su svi mogući scenariji sa pripadajućim lexis dijagramima.

Dan je primjer od 9 polica sa opisom na koji način su police obrađene za statistiku.

Procijenjeni su intenziteti prijelaza pomoću metode maksimalne vjerodostojnosti. Pomoću Markovljevog svojstva nađena razdioba stanja za proces.

Izračunate su procjene aproksimativnog 95% pouzdanog intervala za sve intenzitete prijelaza. Pomoću njih intenziteti prijelaza su izglađeni odgovarajućim funkcijama (linearni filter kroz 5 točaka, pravac, parabola). Grafički je prikazana procjena svakog pojedinog intenziteta prijelaza sa pripadnim intervalom pouzdanosti i izglađenim vrijednostima.

Izračunato je očekivano vrijeme boravka u stanju AKTIVAN i KAPITALIZIRAN sa izglađenim stopama prijelaza za prvi odnosno drugi period trajanja članstva.

Na kraju je izračunata sadašnja vrijednost police u trenutku $x + k$ koja je sklopljena u trenutku x (${}_kV_x$) kao očekivanje od slučajne sadašnje vrijednosti police u trenutku $x + k$ koja je sklopljena u trenutku x (${}_kL_x$). U poglavlju (3.9) na stranici 77 nalazi se primjer izračuna očekivane slučajne sadašnje vrijednosti police u trenutku $x + k$ koja je sklopljena u trenutku $x = 20$ na $n = 5$ godina.

Summary

The thesis describes a model of life insurance model in case of death or endowment using a Markov Jump Process $(Y(t), t \geq 0)$ with states $S := \{ \text{ACTIVE, ENDOWMENT, DEATH, WITHDRAWAL, CANCELLATION, CAPITALIZATION} \}$ which depending on the duration of membership may exceed one of the specified S states. The process $(Y(t), t \geq 0)$ described is not time-homogeneous, but can be decomposed into two such chains, depending on the length of membership.

The thesis describes statistics for contract i within the age interval $[x, x + 1]$ and within the observation time $[t_0, t_1]$ with the assumption that the transition intensities are within the age interval $[x, x + 1]$ constant. All possible scenarios with associated lexis diagrams are shown.

An example of 9 contracts is given, describing how the contracts are processed for statistics.

The transition intensities were estimated using the maximum likelihood method. The distribution of states for the process was found using the Markov property.

Estimates of the approximate 95% confidence interval for all transition intensities were calculated. With these transitions, the intensities of the transitions are smoothed by appropriate functions (linear filter through 5 points, direction, parabola). An estimate of each individual transition intensity with the associated confidence interval and smoothed values is shown graphically.

The expected residence time in the state ACTIVE and CAPITALIZATION was calculated with smoothed transition rates for the first and second membership periods, respectively.

Finally, the present value of the contract at time $x + k$, which was concluded at time x (${}_kV_x$), was calculated as the expectation of the random present value of the contract at time $x + k$ which was concluded at time x (${}_kL_x$). The section (3.9) on page 77 provides an example of calculating the expected random present value of a contract at time $x + k$ that was entered at the age $x = 20$ for $n = 10$ years.

Prilog 1

Sredina intervala	Statistika										
	$A_{x,1}$	$AST_{x,1}$	$AS_{x,1}$	$A_{x,2}$	$AK_{x,2}$	$AS_{x,2}$	$AO_{x,2}$	$K_{x,2}$	$KS_{x,2}$	$KO_{x,2}$	D
17	3461,4	307	1	487,8	18	0	4	41,0	0	0	240
20,5	1051,8	226	0	307,1	15	0	5	34,8	0	4	126
21,5	1315,7	312	0	415,6	21	0	5	61,7	0	2	117
22,5	1483,3	405	1	592,3	38	1	9	98,0	0	1	233
23,5	1593,7	427	1	796,2	41	0	19	140,8	0	7	285
24,5	1618,8	478	0	978,9	78	0	26	213,8	0	8	361
25,5	1681,6	413	1	1160,8	99	1	36	289,6	0	12	404
26,5	1768,1	433	3	1367,2	105	0	35	367,4	0	16	451
27,5	1787,8	453	1	1536,5	122	0	35	456,1	0	24	455
28,5	1800,9	424	1	1693,6	130	1	39	549,8	0	21	451
29,5	1771,8	424	0	1860,2	150	2	47	644,8	0	20	524
30,5	1778,8	387	1	1979,2	148	0	50	715,1	2	33	495
31,5	1790,2	345	1	2120,2	144	2	49	778,7	0	36	514
32,5	1791,3	377	0	2225,8	155	1	48	853,2	0	34	535
33,5	1765,4	370	1	2345,4	151	2	53	895,8	1	31	559
34,5	1750,2	402	1	2427,1	149	1	43	950,4	0	27	546
35,5	1805,3	371	0	2472,5	157	3	54	990,3	0	23	563
36,5	1860,1	405	1	2504,1	180	1	49	1019,3	0	31	511
37,5	2011,8	369	3	2560,8	172	4	42	1049,0	0	30	520
38,5	2138,7	404	1	2629,0	161	3	49	1070,7	2	31	542
39,5	2169,2	455	1	2737,8	150	5	49	1091,2	0	26	580
40,5	2239,0	387	2	2836,5	190	2	47	1102,5	0	45	627
41,5	2267,8	432	2	2959,8	193	4	57	1129,8	2	45	652
42,5	2326,9	421	0	3105,0	188	2	43	1125,3	0	33	676
43,5	2445,8	412	0	3221,8	187	4	50	1141,7	2	47	657
44,5	2492,2	426	3	3385,5	183	4	55	1168,8	0	34	694
45,5	2471,9	468	2	3540,4	189	2	60	1203,1	2	38	711
46,5	2385,7	405	1	3742,0	234	5	53	1235,6	1	45	783
47,5	2330,7	405	7	3899,5	200	8	72	1280,1	1	37	773
48,5	2263,8	391	5	3996,6	223	14	71	1331,4	1	40	727
49,5	2160,0	378	6	4083,7	237	15	95	1366,3	3	51	760
50,5	2015,1	331	3	4172,9	206	12	72	1373,2	0	49	731
51,5	1829,5	291	6	4205,1	224	7	73	1347,8	3	63	726
52,5	1660,4	236	2	4170,6	196	14	61	1356,8	1	49	675
53,5	1419,8	196	4	4060,3	195	16	88	1312,2	7	53	658
54,5	1161,3	198	2	3956,1	179	20	71	1245,1	4	54	574
55,5	950,9	148	5	3829,3	119	14	63	1144,5	2	42	552

Tablica 19: Pripadajuće sumarne statistike za svaki dobni interval

Sredina	Statistika										
intervala	$A_{x,1}$	$AST_{x,1}$	$AS_{x,1}$	$A_{x,2}$	$AK_{x,2}$	$AS_{x,2}$	$AO_{x,2}$	$K_{x,2}$	$KS_{x,2}$	$KO_{x,2}$	D
56,5	746,8	115	1	3542,5	131	16	88	1062,1	4	39	464
57,5	585,5	65	5	3234,7	120	18	52	967,7	6	40	395
58,5	454,3	48	3	2892,8	104	19	56	860,0	8	39	349
59,5	390,7	36	3	2470,3	77	10	55	726,8	8	31	333
60,5	381,2	39	4	1887,9	71	18	49	554,3	6	24	441
61,5	337,8	33	0	1538,8	39	10	33	439,3	2	13	541
62,5	290,7	25	1	1282,0	33	9	28	363,0	2	13	268
63,5	260,6	19	3	1044,7	21	9	18	287,0	7	8	267
64,5	246,2	18	1	800,9	19	6	9	208,9	1	7	201
70	532,0	30	4	2600,2	53	26	45	343,8	10	13	1191

Tablica 20: Pripadajuće sumarne statistike za svaki dobni interval

Prilog 2

Sredina intervala	Statistika						
	ν_{1x}	ν_{2x}	μ_{1x}	μ_{2x}	μ_{3x}	μ_{4x}	μ_{5x}
17	0,09	0,00	0,04	0,00	0,01	0,00	0,00
20,5	0,21	0,00	0,05	0,00	0,02	0,00	0,12
21,5	0,24	0,00	0,05	0,00	0,01	0,00	0,03
22,5	0,27	0,00	0,06	0,00	0,02	0,00	0,01
23,5	0,27	0,00	0,05	0,00	0,02	0,00	0,05
24,5	0,30	0,00	0,08	0,00	0,03	0,00	0,04
25,5	0,25	0,00	0,09	0,00	0,03	0,00	0,04
26,5	0,24	0,00	0,08	0,00	0,03	0,00	0,04
27,5	0,25	0,00	0,08	0,00	0,02	0,00	0,05
28,5	0,24	0,00	0,08	0,00	0,02	0,00	0,04
29,5	0,24	0,00	0,08	0,00	0,03	0,00	0,03
30,5	0,22	0,00	0,07	0,00	0,03	0,00	0,05
31,5	0,19	0,00	0,07	0,00	0,02	0,00	0,05
32,5	0,21	0,00	0,07	0,00	0,02	0,00	0,04
33,5	0,21	0,00	0,06	0,00	0,02	0,00	0,03
34,5	0,23	0,00	0,06	0,00	0,02	0,00	0,03
35,5	0,21	0,00	0,06	0,00	0,02	0,00	0,02
36,5	0,22	0,00	0,07	0,00	0,02	0,00	0,03
37,5	0,18	0,00	0,07	0,00	0,02	0,00	0,03
38,5	0,19	0,00	0,06	0,00	0,02	0,00	0,03
39,5	0,21	0,00	0,05	0,00	0,02	0,00	0,02
40,5	0,17	0,00	0,07	0,00	0,02	0,00	0,04

Tablica 21: Pripadajuće procjene intenziteta prijelaza za svaki dobni interval

Sredina intervala	Statistika						
	ν_{1x}	ν_{2x}	μ_{1x}	μ_{2x}	μ_{3x}	μ_{4x}	μ_{5x}
41,5	0,19	0,00	0,07	0,00	0,02	0,00	0,04
42,5	0,18	0,00	0,06	0,00	0,01	0,00	0,03
43,5	0,17	0,00	0,06	0,00	0,02	0,00	0,04
44,5	0,17	0,00	0,05	0,00	0,02	0,00	0,03
45,5	0,19	0,00	0,05	0,00	0,02	0,00	0,03
46,5	0,17	0,00	0,06	0,00	0,01	0,00	0,04
47,5	0,17	0,00	0,05	0,00	0,02	0,00	0,03
48,5	0,17	0,00	0,06	0,00	0,02	0,00	0,03
49,5	0,18	0,00	0,06	0,00	0,02	0,00	0,04
50,5	0,16	0,00	0,05	0,00	0,02	0,00	0,04
51,5	0,16	0,00	0,05	0,00	0,02	0,00	0,05
52,5	0,14	0,00	0,05	0,00	0,01	0,00	0,04
53,5	0,14	0,00	0,05	0,00	0,02	0,01	0,04
54,5	0,17	0,00	0,05	0,01	0,02	0,00	0,04
55,5	0,16	0,01	0,03	0,00	0,02	0,00	0,04
56,5	0,15	0,00	0,04	0,00	0,02	0,00	0,04
57,5	0,11	0,01	0,04	0,01	0,02	0,01	0,04
58,5	0,11	0,01	0,04	0,01	0,02	0,01	0,05
59,5	0,09	0,01	0,03	0,00	0,02	0,01	0,04
60,5	0,10	0,01	0,04	0,01	0,03	0,01	0,04
61,5	0,10	0,00	0,03	0,01	0,02	0,00	0,03
62,5	0,09	0,00	0,03	0,01	0,02	0,01	0,04
63,5	0,07	0,01	0,02	0,01	0,02	0,02	0,03
64,5	0,07	0,00	0,02	0,01	0,01	0,00	0,03
70	0,06	0,01	0,02	0,01	0,02	0,03	0,04

Tablica 22: Pripadajuće procjene intenziteta prijelaza za svaki dobni interval

Prilog 3

Sredina intervala	ν_{1x}	95% - pouzdan interval za ν_{1x}	ν_{2x}	95% - pouzdan interval za ν_{2x}	μ_{1x}	95% - pouzdan interval za μ_{1x}
17,0	0,08869	[0,08, 0,10]	0,00029	[0,000, 0,001]	0,03690	[0,02, 0,05]
20,5	0,21488	[0,19, 0,24]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,04885	[0,02, 0,07]
21,5	0,23714	[0,21, 0,26]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,05053	[0,03, 0,07]
22,5	0,27303	[0,25, 0,30]	0,00067	[-0,001, 0,002]	0,06415	[0,04, 0,08]
23,5	0,26794	[0,24, 0,29]	0,00063	[-0,001, 0,002]	0,05150	[0,04, 0,07]
24,5	0,29529	[0,27, 0,32]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,07968	[0,06, 0,10]
25,5	0,24560	[0,22, 0,27]	0,00059	[-0,001, 0,002]	0,08529	[0,07, 0,10]
26,5	0,24490	[0,22, 0,27]	0,00170	[0,000, 0,004]	0,07680	[0,06, 0,09]
27,5	0,25339	[0,23, 0,28]	0,00056	[-0,001, 0,002]	0,07940	[0,07, 0,09]
28,5	0,23544	[0,21, 0,26]	0,00056	[-0,001, 0,002]	0,07676	[0,06, 0,09]
29,5	0,23931	[0,22, 0,26]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,08064	[0,07, 0,09]
30,5	0,21757	[0,20, 0,24]	0,00056	[-0,001, 0,002]	0,07478	[0,06, 0,09]
31,5	0,19272	[0,17, 0,21]	0,00056	[-0,001, 0,002]	0,06792	[0,06, 0,08]
32,5	0,21047	[0,19, 0,23]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,06964	[0,06, 0,08]
33,5	0,20958	[0,19, 0,23]	0,00057	[-0,001, 0,002]	0,06438	[0,05, 0,07]
34,5	0,22969	[0,21, 0,25]	0,00057	[-0,001, 0,002]	0,06139	[0,05, 0,07]
35,5	0,20551	[0,18, 0,23]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,06350	[0,05, 0,07]
36,5	0,21773	[0,20, 0,24]	0,00054	[-0,001, 0,002]	0,07188	[0,06, 0,08]
37,5	0,18342	[0,16, 0,20]	0,00149	[0,000, 0,003]	0,06717	[0,06, 0,08]
38,5	0,18890	[0,17, 0,21]	0,00047	[0,000, 0,001]	0,06124	[0,05, 0,07]
39,5	0,20976	[0,19, 0,23]	0,00046	[0,000, 0,001]	0,05479	[0,05, 0,06]
40,5	0,17285	[0,16, 0,19]	0,00089	[0,000, 0,002]	0,06698	[0,06, 0,08]
41,5	0,19050	[0,17, 0,21]	0,00088	[0,000, 0,002]	0,06521	[0,06, 0,07]
42,5	0,18093	[0,16, 0,20]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,06055	[0,05, 0,07]
43,5	0,16846	[0,15, 0,18]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,05804	[0,05, 0,07]
44,5	0,17094	[0,15, 0,19]	0,00120	[0,000, 0,003]	0,05405	[0,05, 0,06]
45,5	0,18933	[0,17, 0,21]	0,00081	[0,000, 0,002]	0,05338	[0,05, 0,06]
46,5	0,16976	[0,15, 0,19]	0,00042	[0,000, 0,001]	0,06253	[0,05, 0,07]
47,5	0,17377	[0,16, 0,19]	0,00300	[0,001, 0,005]	0,05129	[0,04, 0,06]
48,5	0,17272	[0,16, 0,19]	0,00221	[0,000, 0,004]	0,05580	[0,05, 0,06]
49,5	0,17500	[0,16, 0,19]	0,00278	[0,001, 0,005]	0,05804	[0,05, 0,07]
50,5	0,16426	[0,15, 0,18]	0,00149	[0,000, 0,003]	0,04937	[0,04, 0,06]

Tablica 23: Procjena ν_{1x} , ν_{2x} , μ_{1x} i njihovih 95% pouzdanih intervala

Sredina intervala	ν_{1x}	95% - pouzdan interval za ν_{1x}	ν_{2x}	95% - pouzdan interval za ν_{2x}	μ_{1x}	95% - pouzdan interval za μ_{1x}
51,5	0,15906	[0,14, 0,18]	0,00328	[0,001, 0,006]	0,05327	[0,05, 0,06]
52,5	0,14213	[0,12, 0,16]	0,00120	[0,000, 0,003]	0,04700	[0,04, 0,05]
53,5	0,13804	[0,12, 0,16]	0,00282	[0,000, 0,006]	0,04803	[0,04, 0,05]
54,5	0,17049	[0,15, 0,19]	0,00172	[-0,001, 0,004]	0,04525	[0,04, 0,05]
55,5	0,15564	[0,13, 0,18]	0,00526	[0,001, 0,010]	0,03108	[0,03, 0,04]
56,5	0,15400	[0,13, 0,18]	0,00134	[-0,001, 0,004]	0,03698	[0,03, 0,04]
57,5	0,11102	[0,08, 0,14]	0,00854	[0,001, 0,016]	0,03710	[0,03, 0,04]
58,5	0,10567	[0,08, 0,14]	0,00660	[-0,001, 0,014]	0,03595	[0,03, 0,04]
59,5	0,09215	[0,06, 0,12]	0,00768	[-0,001, 0,016]	0,03117	[0,02, 0,04]
60,5	0,10232	[0,07, 0,13]	0,01049	[0,000, 0,021]	0,03761	[0,03, 0,05]
61,5	0,09771	[0,06, 0,13]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,02535	[0,02, 0,03]
62,5	0,08601	[0,05, 0,12]	0,00344	[-0,003, 0,010]	0,02574	[0,02, 0,03]
63,5	0,07291	[0,04, 0,11]	0,01151	[-0,002, 0,025]	0,02010	[0,01, 0,03]
64,5	0,07312	[0,04, 0,11]	0,00406	[-0,004, 0,012]	0,02372	[0,01, 0,03]
70,0	0,05639	[0,04, 0,08]	0,00752	[0,000, 0,015]	0,02038	[0,01, 0,03]

Tablica 24: Procjena ν_{1x} , ν_{2x} , μ_{1x} i njihovih 95% pouzdanih intervala

Sredina intervala	μ_{2x}	95% - pouzdan interval za μ_{2x}	μ_{3x}	95% - pouzdan interval za μ_{3x}	μ_{4x}	95% - pouzdan interval za μ_{4x}	μ_{5x}	95% - pouzdan interval za μ_{5x}
17,0	0,00000	[0,000, 0,000]	0,00820	[0,000, 0,020]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,00000	[0,000, 0,000]
20,5	0,00000	[0,000, 0,000]	0,01628	[0,000, 0,030]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,11511	[0,000, 0,230]
21,5	0,00000	[0,000, 0,000]	0,01203	[0,000, 0,020]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,03243	[-0,010, 0,080]
22,5	0,00169	[-0,002, 0,005]	0,01519	[0,010, 0,030]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,01020	[-0,010, 0,030]
23,5	0,00000	[0,000, 0,000]	0,02386	[0,010, 0,030]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,04973	[0,010, 0,090]
24,5	0,00000	[0,000, 0,000]	0,02656	[0,020, 0,040]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,03741	[0,010, 0,060]
25,5	0,00086	[-0,001, 0,003]	0,03101	[0,020, 0,040]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,04144	[0,020, 0,060]
26,5	0,00000	[0,000, 0,000]	0,02560	[0,020, 0,030]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,04355	[0,020, 0,060]
27,5	0,00000	[0,000, 0,000]	0,02278	[0,020, 0,030]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,05262	[0,030, 0,070]
28,5	0,00059	[-0,001, 0,002]	0,02303	[0,020, 0,030]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,03820	[0,020, 0,050]
29,5	0,00108	[0,000, 0,003]	0,02527	[0,020, 0,030]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,03102	[0,020, 0,040]
30,5	0,00000	[0,000, 0,000]	0,02526	[0,020, 0,030]	0,00280	[-0,001, 0,007]	0,04615	[0,030, 0,060]
31,5	0,00094	[0,000, 0,002]	0,02311	[0,020, 0,030]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,04623	[0,030, 0,060]
32,5	0,00045	[0,000, 0,001]	0,02157	[0,020, 0,030]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,03985	[0,030, 0,050]
33,5	0,00085	[0,000, 0,002]	0,02260	[0,020, 0,030]	0,00112	[-0,001, 0,003]	0,03461	[0,020, 0,050]
34,5	0,00041	[0,000, 0,001]	0,01772	[0,010, 0,020]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,02841	[0,020, 0,040]
35,5	0,00121	[0,000, 0,003]	0,02184	[0,020, 0,030]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,02323	[0,010, 0,030]
36,5	0,00040	[0,000, 0,001]	0,01957	[0,010, 0,030]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,03041	[0,020, 0,040]
37,5	0,00156	[0,000, 0,003]	0,01640	[0,010, 0,020]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,02860	[0,020, 0,040]
38,5	0,00114	[0,000, 0,002]	0,01864	[0,010, 0,020]	0,00187	[-0,001, 0,004]	0,02895	[0,020, 0,040]
39,5	0,00183	[0,000, 0,003]	0,01790	[0,010, 0,020]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,02383	[0,010, 0,030]
40,5	0,00071	[0,000, 0,002]	0,01657	[0,010, 0,020]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,04082	[0,030, 0,050]
41,5	0,00135	[0,000, 0,003]	0,01926	[0,010, 0,020]	0,00177	[-0,001, 0,004]	0,03983	[0,030, 0,050]
42,5	0,00064	[0,000, 0,002]	0,01385	[0,010, 0,020]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,02933	[0,020, 0,040]
43,5	0,00124	[0,000, 0,002]	0,01552	[0,010, 0,020]	0,00175	[-0,001, 0,004]	0,04117	[0,030, 0,050]
44,5	0,00118	[0,000, 0,002]	0,01625	[0,010, 0,020]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,02909	[0,020, 0,040]
45,5	0,00056	[0,000, 0,001]	0,01695	[0,010, 0,020]	0,00166	[-0,001, 0,004]	0,03159	[0,020, 0,040]
46,5	0,00134	[0,000, 0,003]	0,01416	[0,010, 0,020]	0,00081	[-0,001, 0,002]	0,03642	[0,030, 0,050]
47,5	0,00205	[0,001, 0,003]	0,01846	[0,010, 0,020]	0,00078	[-0,001, 0,002]	0,0289	[0,020, 0,040]
48,5	0,00350	[0,002, 0,005]	0,01777	[0,010, 0,020]	0,00075	[-0,001, 0,002]	0,03004	[0,020, 0,040]
49,5	0,00367	[0,002, 0,006]	0,02326	[0,020, 0,030]	0,00220	[0,000, 0,005]	0,03733	[0,030, 0,050]
50,5	0,00288	[0,001, 0,005]	0,01725	[0,010, 0,020]	0,00000	[0,000, 0,000]	0,03568	[0,030, 0,050]

Tablica 25: Procjena μ_{2x} , μ_{3x} , μ_{4x} , μ_{5x} i njihovih 95% pouzdanih intervala

Sredina intervala	μ_{2x}	95% - pouzdan interval za μ_{2x}	μ_{3x}	95% - pouzdan interval za μ_{3x}	μ_{4x}	95% - pouzdan interval za μ_{4x}	μ_{5x}	95% - pouzdan interval za μ_{5x}
51,5	0,00166	[0,000, 0,003]	0,01736	[0,010, 0,020]	0,00223	[0,000, 0,005]	0,04674	[0,040, 0,060]
52,5	0,00336	[0,002, 0,005]	0,01463	[0,010, 0,020]	0,00074	[-0,001, 0,002]	0,03612	[0,030, 0,050]
53,5	0,00394	[0,002, 0,006]	0,02167	[0,020, 0,030]	0,00533	[0,001, 0,009]	0,04039	[0,030, 0,050]
54,5	0,00506	[0,003, 0,007]	0,01795	[0,010, 0,020]	0,00321	[0,000, 0,006]	0,04337	[0,030, 0,050]
55,5	0,00366	[0,002, 0,006]	0,01645	[0,010, 0,020]	0,00175	[-0,001, 0,004]	0,03670	[0,030, 0,050]
56,5	0,00452	[0,002, 0,007]	0,02484	[0,020, 0,030]	0,00377	[0,000, 0,007]	0,03672	[0,030, 0,050]
57,5	0,00556	[0,003, 0,008]	0,01608	[0,010, 0,020]	0,00620	[0,001, 0,011]	0,04133	[0,030, 0,050]
58,5	0,00657	[0,004, 0,010]	0,01936	[0,010, 0,020]	0,00930	[0,003, 0,016]	0,04535	[0,030, 0,060]
59,5	0,00405	[0,002, 0,007]	0,02226	[0,020, 0,030]	0,01101	[0,003, 0,019]	0,04266	[0,030, 0,060]
60,5	0,00953	[0,005, 0,014]	0,02595	[0,020, 0,030]	0,01083	[0,002, 0,019]	0,04330	[0,030, 0,060]
61,5	0,00650	[0,002, 0,011]	0,02145	[0,010, 0,030]	0,00455	[-0,002, 0,011]	0,02959	[0,010, 0,050]
62,5	0,00702	[0,002, 0,012]	0,02184	[0,010, 0,030]	0,00551	[-0,002, 0,013]	0,03581	[0,020, 0,060]
63,5	0,00862	[0,003, 0,014]	0,01723	[0,010, 0,030]	0,02439	[0,006, 0,042]	0,02787	[0,010, 0,050]
64,5	0,00749	[0,001, 0,013]	0,01124	[0,000, 0,020]	0,00479	[-0,005, 0,014]	0,03351	[0,010, 0,060]
70,0	0,01000	[0,006, 0,014]	0,01731	[0,010, 0,020]	0,02908	[0,011, 0,047]	0,03781	[0,020, 0,060]

Tablica 26: Procjena μ_{2x} , μ_{3x} , μ_{4x} , μ_{5x} i njihovih 95% pouzdanih intervala

Prilog 4

x	0	1	2	3 ili više	KAP
14	12,71				
15	12,39	12,84			
16	12,06	12,49	12,99		
17	11,71	12,13	12,61	13,15	
18	10,42	11,75	12,21	12,73	
19	9,06	10,34	11,79	12,29	
20	7,72	8,85	10,26	11,84	24,75
21	7,36	8,46	9,86	11,60	24,74
22	7,28	8,25	9,64	11,42	25,33
23	7,40	8,32	9,57	11,39	24,83
24	7,74	8,67	9,89	11,55	24,67
25	8,08	9,05	10,26	11,88	24,78
26	8,36	9,34	10,59	12,16	24,75
27	8,58	9,54	10,79	12,39	24,92
28	8,93	9,85	11,07	12,67	25,10
29	9,38	10,26	11,43	13,00	25,09
30	9,75	10,71	11,83	13,31	24,98
31	9,83	10,98	12,18	13,56	25,04
32	9,81	10,92	12,33	13,79	25,20
33	9,80	10,90	12,25	13,98	25,23
34	10,06	11,08	12,44	14,13	25,09
35	10,36	11,39	12,65	14,35	24,78
36	10,71	11,78	13,07	14,63	24,42
37	10,95	12,02	13,33	14,90	24,09
38	11,15	12,18	13,47	15,06	23,81
39	11,40	12,43	13,67	15,24	23,43
40	11,63	12,73	13,98	15,49	23,11
41	11,93	12,96	14,29	15,80	22,96
42	12,13	13,21	14,44	16,04	22,83
43	12,31	13,44	14,74	16,22	22,64
44	12,37	13,50	14,84	16,38	22,41
45	12,61	13,65	15,00	16,60	22,15

Tablica 27: Vrijeme boravka u stanju AKTIVAN ovisno o trajanju police i u stanju KAPITALIZIRAN

x	0	1	2	3 ili više	KAP
46	12,87	13,99	15,24	16,85	21,85
47	13,13	14,27	15,61	17,11	21,58
48	13,30	14,50	15,86	17,44	21,24
49	13,70	14,77	16,20	17,82	20,89
50	14,26	15,21	16,48	18,18	20,60
51	14,68	15,80	16,92	18,42	20,43
52	14,75	16,10	17,42	18,73	20,26
53	14,52	15,96	17,52	19,05	20,10
54	14,69	15,79	17,47	19,28	19,92
55	15,25	16,17	17,46	19,43	19,79
56	16,39	16,96	18,05	19,58	19,61
57	17,27	17,89	18,55	19,81	19,41
58	17,83	18,52	19,21	19,96	19,31
59	17,87	18,70	19,47	20,24	19,27
60	18,03	18,74	19,67	20,51	19,26
61	18,27	18,92	19,71	20,74	19,15
62	18,66	19,19	19,91	20,79	18,99
63	19,12	19,38	19,96	20,75	18,75
64	19,46	19,72	20,00	20,63	18,53
65	19,78	20,05	20,33	20,63	18,31
66		20,05	20,33	20,63	18,31
67			20,33	20,63	18,31
68				20,63	18,31
69				20,63	18,31
70				20,63	18,31
71				20,63	18,31
72				20,63	18,31
73				20,63	18,31
74				20,63	18,31
75				20,63	18,31

Tablica 28: Vrijeme boravka u stanju AKTIVAN ovisno o trajanju police i u stanju KAPITALIZIRAN

Prilog 5

Parametri korišteni za izračun

$$S = 1,$$

$$i = 0,01,$$

$$r = 1,01,$$

$$v = 0,99009900990099.$$

	Model sa stanjima AKT, DOZ i SMRT	$\psi = 0,5$	$\psi = 0,6$	$\psi = 0,7$	$\psi = 0,8$	$\psi = 0,9$	$\psi = 1$
k	${}_kV_5$	${}_kV_5$	${}_kV_5$	${}_kV_5$	${}_kV_5$	${}_kV_5$	${}_kV_5$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,481766	0,141933	0,142296	0,142649	0,142995	0,143332	0,143661
2	0,619682	0,402878	0,403280	0,403672	0,404055	0,404428	0,404793
3	0,813393	0	0	0	0	0	0
4	0,894323	0,291335	0,287740	0,284234	0,280811	0,277470	0,274208
5	1	1	1	1	1	1	1
Premija	0,1386954	0,1197666	0,1197176	0,1196698	0,1196231	0,1195775	0,1195331

Tablica 29: Iznos očekivane sadašnje vrijednosti police u trenucima $k = 0, \dots, 5$ ovisno o premiji i vrijednosti ψ