

# Skin efekt u nehomogenim materijalima

---

Mudri, Eduard Luka

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:007793>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-10-04**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Eduard Luka Mudri

SKIN EFEKT U NEHOMOGENIM  
MATERIJALIMA

Diplomski rad

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA I INFORMATIKA; SMJER: NASTAVNIČKI

**Eduard Luka Mudri**

Diplomski rad

**Skin efekt u nehomogenim materijalima**

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Mario Basletić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2021.

Ovim povodom se zahvaljujem obitelji naročito majci, ocu, baki i djedu na novčanoj i moralnoj podršci tijekom studiranja. Posebno bih se zahvalio mentoru izv. prof. dr. sc. Mariju Basletiću na velikoj pomoći tijekom izrade ovog rada te također svim djelatnicima Fizičkog odsjeka u Zagrebu na susretljivosti i stručnosti.

## Sažetak

Kako u fizici tako i u elektronici često moramo raditi s izmjeničnim strujama vrlo visokih frekvencija, u području mikrovalova i više. Kako impedancija vodiča i sklopovlja raste s frekvencijom tako često imamo nezanemarive omske gubitke koji se žele ukloniti. U linearnim vodičima vrijedi mikroskopski Ohmov zakon, to jest da je struja proporcionalna električnom polju. Sama električna i magnetska polja u vodiču se računaju pomoću Maxwellovih jednadžbi te su ona oscilatorne prirode. Zbog oscilatorne prirode polja struja može lokalno teći i u suprotnom smjeru od ukupne, te je to zaslužno za povećanje efektivnog električnog otpora. Za potrebe ovog rada zanima nas možemo li bušenjem materijala te stavljanjem slitine lošije vodljivosti u predjelima gdje lokalno struja teče u suprotnom smjeru smanjiti efektivan električni otpor. U radu dokazujemo relaciju koja nam kaže da to nije moguće, to jest da je otpor tog nehomogenog materijala uvijek veći ili jednak homogenom. U nastavku su dani primjeri za homogeni i nehomogeni slučaj u jednoj i dvije dimenzije.

Ključne riječi: Mikroskopski Ohmov zakon, Maxwellove jednadžbe, modificirane Besselove funkcije, skin efekt, dubina prodiranja, električno polje, gustoća struje, električni otpor

# Skin effect of inhomogeneous materials

## Abstract

In both physics and electronics we often have to work with alternating currents of very high frequencies, in the microwave range and more. As the impedance of conductors and circuits increases with frequency so often we have negligible ohmic losses that we want to remove. In linear conductors, the microscopic Ohm's law applies, that is, the current is proportional to the electric field. The electric and magnetic fields in the conductor are calculated using Maxwell's equations and are of an oscillatory nature. Due to the oscillatory nature of the field, the current can flow locally in the opposite direction from the total current and this is responsible for increasing of the effective electrical resistance. For the purposes of this paper, we are interested in whether we can reduce the effective electrical resistance by drilling the material and placing an alloy of poorer conductivity in areas where the current flows locally in the opposite direction. In this paper, we prove a relation that tells us that this is not possible, that is, that the resistance of this inhomogeneous material is always greater than or equal to homogeneous. The following are examples for homogeneous and inhomogeneous cases in one and two dimensions.

Keywords: Microscopic Ohm's law, Maxwell's equations, modified Bessel functions, skin effect, skin depth, electric field, current density, electrical resistance

# Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	
1.1. Skin efekt .....	1
1.2. Ohmov zakon .....	2
1.3. Maxwelllove jednadžbe .....	4
1.4. Vrtložne struje .....	5
1.5. Dubina prodiranja .....	6
<b>2. Skin efekt</b>	
2.1. Glavna jednadžba za električno polje .....	8
2.2. Jednadžba za otpor .....	10
<b>3. Skin efekt u jednoj dimenziji</b>	
3.1. Izraz za otpor .....	12
3.2. Minimiziranje otpora .....	14
3.3. Primjer: homogeni slučaj .....	15
3.4. Primjer: nehomogeni slučaj .....	18
<b>4. Skin efekt u dvije dimenzije</b>	
4.1. Izraz za otpor .....	23
4.2. Minimiziranje otpora .....	25
4.3. Primjer: homogeni slučaj .....	26
4.4. Primjer: nehomogeni slučaj .....	29
<b>5. Zaključak</b> .....	35
<b>6. Metodički dio</b>	
6.1. Interaktivna istraživački usmjerena nastava fizike .....	36
6.2. Nastavna priprema: Električni otpor .....	37
<b>Literatura</b> .....	42

# 1. Uvod

## 1.1 Skin efekt

Skin efekt je tendencija izmjenične struje da se distribuira kroz presjek vodiča, tako da je gustoća struje najveća blizu površine vodiča te pada sa povećanjem dubine vodiča. Izmjenična struja teče najviše između površine vodiča i dubine koja se zove dubina prodiranja. Dubina prodiranja, kao i sama funkcija gustoće struje, imaju frekventnu ovisnost te se dubina prodiranja smanjuje s porastom frekvencije izmjenične struje. Skin efekt ima kao posljedicu smanjenje efektivnog presjeka vodiča, a sa time i porast efektivnog omskog otpora. Izmjenična struja stvara izmjenično magnetsko polje unutar vodiča koje po Faradayevom zakonu stvara elektromotornu silu čija su posljedica vrtložne struje unutar vodiča. Po Lenzovom zakonu, one se suprotstavljaju svojim magnetskim poljem promjeni prvotnog magnetskog polja te poništavaju prodiranje magnetskog polja unutar vodiča. One su ujedno zaslužne i za omske gubitke, to jest pretvaranje elektromagnetske energije u toplinu. Skin efekt kao posljedicu ima neuniformnu gustoću struje kroz presjek vodiča uniformne vodljivosti. Efekt je prvo opisao Horace Lamb za sferne vodiče 1883. g. dok ga je generalizirao 1885. g. Oliver Heaviside (H. Lamb).

Izolirani vodič poprečnog presjeka kroz koji teče izmjenična struja  $I(t)$  inducira vremenski promjenjivo magnetsko polje  $B(t)$  unutar i izvan vodiča. Amplituda magnetskog polja ovisi o kružnoj frekvenciji izmjenične struje i o radijalnoj udaljenosti  $s$  od centralne osi vodiča. Na niskim frekvencijama, gustoća struje je uniformna kroz presjek, a amplituda magnetskog polja unutar vodiča raste linearno s porastom radijalne udaljenosti  $s$ :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu I s}{2\pi R^2} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (1.1)$$

gdje je  $\mu$  relativna permeabilnost, a  $I$  je struja koja teče kroz žicu dok je  $s$  radijalna udaljenost točke gledanja od središnje osi žice.  $R$  je radijus žice.  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  je jedinični vektor u cilindričnome koordinatnom sustavu, te je uvijek tangencijalan na kružnicu oko  $z$  osi i okomit na  $z$  os. Smjer mu je određen pravilom desne ruke to jest ako stavimo palac desne ruke u smjeru  $z$  osi tada zatvoreni prsti šake daju smjer  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  vektora.



Izvan vodiča magnetsko polje pada sa s:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu I}{2\pi s} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (1.2)$$

Promjenjivo magnetsko polje  $B(t)$  koje postoji unutar vodiča inducira vrtložne struje  $I_v(t)$  koje imaju takav smjer da povećavaju gustoću struje blizu površine vodiča, a smanjuju je prema sredini. Gustoća struje postaje sve manje uniformna s povećanjem frekvencije struje. Vanjsko magnetsko polje ostaje nepromijenjeno i ovisi samo o ukupnoj struji kroz vodič. Na niskim frekvencijama struja ide putem najmanjeg otpora i općenito najmanjom impedancijom.

Značaj skin efekta je najčešće u visokofrekventnoj elektronici gdje su prisutne radio frekvencije i više. Tamo vodiči koji vode signal mogu biti šuplje cijevi ili tanak sloj bakra na plastičnoj pločici, jer zbog efekta struja teče najviše kroz sam sloj blizu površine.

## 1.2 Ohmov zakon

Da bistruja tekla, na naboje treba djelovati silom. Koliko se brzo nosioci naboja kreću to jest koliko ih prođe kroz presjek vodiča u jedinici vremena ovisi i o prirodi vodiča. Za većinu metala na sobnoj temperaturi volumna gustoća struje  $\mathbf{J}$  je proporcionalna sili po jediničnom naboju  $\mathbf{f}$  to jest polju.

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{f} \quad (1.3)$$

Takvi se vodiči nazivaju linearnim zbog same linearne ovisnosti. Za metale i većinu vodiča na sobnoj temperaturi ta ovisnost dovoljno točno opisuje sve fenomene. Faktor proporcionalnosti  $\sigma$  zove se vodljivost materijala te je izmjerena za različite materijale. Često govorimo i o otpornosti materijala  $\rho = 1/\sigma$ .

Sila koja pokreće naboj može biti bilo što, tako se u bateriji javlja sila zbog kemijskih procesa a u Van de Graffovom generatoru naboji se razdvajaju mehaničkim putem. U elektrodinamici je zaslužna Lorentzova sila  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ . Kada je magnetsko polje  $\mathbf{B} = 0$ , drugi se član može izostaviti. Tako imamo jednadžbu mikroskopskog Ohmovog zakona:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.4)$$

Treba napomenuti da u ioniziranim plinovima ili vodljivim otopinama treba uzeti u obzir i magnetsko polje.

Ovdje se više ne radi o elektrostatici pa nije  $\mathbf{E} = 0$  unutar vodiča. Kad teče stalna struja kroz vodič za potencijal vrijedi Laplaceova jednadžba. Za metale se može smatrati da je vodljivost beskonačna pa je samo polje zanemarivo. No kod preciznijih računa kao što je skin efekt polje se ne zanemaruje.

Algebarskom manipulacijom slijedi:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.5)$$

te uz

$$I = J A \quad (1.6)$$

slijedi

$$I = \frac{\sigma E l A}{l} = \frac{U A}{\rho l} \quad (1.7)$$

što daje

$$I = \frac{U}{R} \quad (1.8)$$

te dolazimo da makroskopskog Ohmovog zakona (taj oblik je poznatiji i uči se već u osnovnoj školi).

Mikroskopski Ohmov zakon se zove mikroskopski jer  $\sigma$  koju on obuhvaća može se izraziti mikroskopskim veličinama. On također vrijedi u svakoj točki prostora te tako često radimo sa strujom kroz infinitezimalne presjeke te poljem u točki. O makroskopskom Ohmovom zakonu govorimo jer jednadžba obuhvaća makroskopske veličine kao što su otpor, napon i struja, veličine koje je vrlo lako na svakodnevnoj skali izmjeriti i predstaviti.

Metal	Vodljivost [S/m]
Srebro	$6.30 \times 10^7$
Bakar	$5.96 \times 10^7$
Zlato	$4.11 \times 10^7$
Cink	$1.69 \times 10^7$
Čelik	$6.99 \times 10^6$
Željezo	$10^7$
Aluminij	$3.77 \times 10^7$

Tablica 1.1: Vodljivost nekih metala

### 1.3 Maxwellove jednadžbe

Maxwellove jednadžbe su sustav povezanih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje sa Lorentzovom silom i jednadžbom kontinuiteta, koja potječe iz Maxwellovih jednadžbi, čini osnovu matematičkog formalizma elektromagnetizma, optike i elektronike. One opisuju kako električno i magnetsko polje nastaju iz poznate raspodjele naboja i struja. Važna posljedica Maxwellovoga elektromagnetizma je propagacija izmjeničnog električnog i magnetskog polja brzinom svjetlosti kroz vakuum kao elektromagnetski val. Upravo je jednakost brzine EM valova sa brzinom svjetlosti ukazala na konceptualnu povezanost svjetlosti i EM valova. Tako imamo EM spektar koji seže od radiovalova do gama zračenja preko vidljive svjetlosti. Svi empirijski zakoni dobiveni u optici mogu se izvesti preko matematičkog formalizma elektromagnetizma.

Maxwellove jednadžbe imaju dvije formulacije: diferencijalni i integralni oblik. Diferencijalni oblik jednadžbi ima univerzalnu upotrebljivost povezujući električna i magnetska polja sa ukupnim nabojem i strujom. Diferencijalni oblik vrijedi u svakoj točki prostora. Integralni oblik je globalni te ga koristimo kada nam problem ima visok stupanj simetrije te pomoću njega lakše zaključujemo neke pretpostavke.

Postoji više varijanta Maxwellovih jednadžbi ovisno o vrsti materijala pa tako imamo Maxwellove jednadžbe u dielektricima, u vodičima itd. Maxwellove jednadžbe sa pripadnim rubnim uvjetima imaju kao rješenja pripadna električna i magnetska polja. Maxwellove

jednadžbe sastoje se od tri međusobno povezana fizikalna zakona i jedne relacije koja ukazuje na nepostojanje magnetskih monopola.

U diferencijalnom obliku Maxwellove jednadžbe su:

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{Gaussov zakon}) \quad (1.9)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (\text{nepostojanje magnetskih monopola}) \quad (1.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Faradayev zakon}) \quad (1.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Amperov zakon s Maxwellovim članom}) \quad (1.12)$$

Valja još nadodati Lorentzovu silu  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  te jednadžbu kontinuiteta  $\nabla \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  koja je ustvari zakon očuvanja naboja i time je elektromagnetizam matematički opisan.

U linearnim dielektricima koristimo pomoćna polja  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  i  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$  te Maxwellove jednadžbe poprimaju oblik:

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho \quad (1.13)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (1.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.16)$$

Radi se zapravo samo o zamjeni permitivnosti i permeabilnosti u vakuumu sa onom u mediju te su  $\mathbf{J}$  i  $\rho$  slobodna struja i gustoća slobodnih naboja jer ih treba razlikovati od vezanih struja i naboja.

#### 1.4 Vrtložne struje

Vrtložne struje je otkrio Foucault 1851. g. pa se zovu i Foucaultove struje. Vremenski promjenjivo magnetsko polje inducira električno polje po Faradayjevom zakonu:

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \mathbf{E}_v) = -\frac{\partial(\mathbf{B} + \mathbf{B}_v)}{\partial t} \quad (1.17)$$

gdje su  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  vanjska polja dok su  $\mathbf{E}_v$  i  $\mathbf{B}_v$  polja nastala vrtložnim strujama.

Sama pojava električnog polja proizvodi vrtložne struje u sredstvu neke vodljivosti prema mikroskopskom Ohmovom zakonu:

$$\mathbf{J} + \mathbf{J}_v = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_v) \quad (1.18)$$

gdje je  $\mathbf{J}$  volumna gustoća struje a  $\mathbf{J}_v$  volumna gustoća vrtložne struje.

Novonastale struje stvaraju magnetsko polje po Amperovom zakonu:

$$\nabla \times (\mathbf{B} + \mathbf{B}_v) = \mu(\mathbf{J} + \mathbf{J}_v). \quad (1.19)$$

To znači da imamo ukupno polje čija je vremenska promjena manja od prvotnog polja jer prema Lenzovom pravilu novonastalo inducirano polje se protivi promjeni prvotnog polja pa je novonastalo električno polje manje i samim time je i manja inducirana struja. Otklanjanje utjecaja vrtložnih struja postiže se primjenom feritnih materijala jezgre ili sekcioniranjem željezne kotve na manje dijelove jer su vrtložne struje zaslužne za omske gubitke kod transformatora.

### *1.5 Dubina prodiranja*

Magnetsko i električno polje na visokim frekvencijama ne prodiru kompletno u unutrašnjost vodiča, već samo do neke dubine. Ta dubina vezana je s parametrom  $\delta$  koji je dan izrazom:

$$\delta \cong \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma_0}} \quad (1.20)$$

i najčešće tu veličinu poistovjećujemo s dubinom prodiranja.

Dubina prodiranja se smanjuje kad se frekvencija struje, permeabilnost ili vodljivost povećavaju. Dubina prodiranja opisuje stupanj prodiranja magnetskog polja i vrtložnih struja unutar vodiča. Drugim riječima, dubina prodiranja je udaljenost od površine vodiča na kojoj amplituda elektromagnetskog vala postaje  $1/e$  početne vrijednosti unutar materijala. Skin efekt je zanemariv samo ako je dubina prodiranja veličine debljine vodiča. Kroz sloj debljine 4 puta veći od dubine prodiranja teče gotovo 98% struje, te zato vodiči za visokofrekventne struje radio frekvencija i više mogu biti šuplji.

Metal	Dubina prodiranja [ $\mu\text{m}$ ]
Aluminij	0.820
Zlato	0.753
Bakar	0.652
Srebro	0.634

Tablica 1.2: Neke dubine prodiranja za mikrovalne frekvencije ( $f = 10 \text{ GHz}$ )

## 2. Skin efekt

### 2.1 Glavna jednažba za električno polje

Karakter vremenski promjenjivih elektromagnetskih polja u materijalima ovisi o njihovoj frekvenciji. U daljnjem radu ćemo promatrati pojave koje se događaju u masivnim vodičima s obzirom na valnu duljinu u promjenjivom elektromagnetskom polju. Pretpostavit ćemo da brzina promjene polja nije velika u usporedbi s vremenom slobodnog puta elektrona u sredstvu. Takva polja nazivamo kvazistacionarnim. Kvazistacionarnost vrijedi kada je frekvencija polja manja u usporedbi s recipročnim vremenom slobodnog puta elektrona. To je za većinu sredstva u infracrvenom dijelu spektra, pa za sve niže frekvencije vrijedi ta pretpostavka. Odlika kvazistacionarnih polja je da se sinkrono mijenjaju s promjenama svojih izvora, to jest da je polje proporcionalno gustoći struje što znači da vrijedi mikroskopski Ohmov zakon. Uzet ćemo da je valna duljina usporediva s dimenzijama tijela sredstva te tada možemo električno i magnetsko polje opisati Maxwellovim jednažbama, to jest zanemarujemo efekte koji su povezanosti s konačnosti brzine rasprostiranja elektromagnetskih poremećaja kao što su retardirani potencijali i pripadna retardirana polja.

Počinjemo s Maxwellovim jednažbama u linearnim medijima ( $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$  i  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$ ) bez slobodnih naboja ( $\rho = 0$ ):

$$\varepsilon \nabla \mathbf{E} = \rho = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Koristimo Ohmov zakon za linearne medije:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.5)$$

Primjenom rotacije na jednažbu (2.3) te koristeći izraz za pravila produkata uz pretpostavku da je  $\nabla \mathbf{E} = 0$  imamo:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} \quad (2.6)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_r \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

Ovdje još uvijek možemo uzeti nehomogenu vodljivost  $\sigma \rightarrow \sigma(\mathbf{r})$ .

Promatrat ćemo struju koja ima samo 1 mod titranja te ćemo uzeti da i za električno polje vrijedi:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (2.9)$$

S obzirom na to da ovdje koristim kompleksne funkcije, od gornjeg izraza uvijek treba uzeti samo realni dio,  $Re(\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t})$ .

Uvrštavanjem u jednadžbu (2.9) te dijeljenjem s  $e^{-i\omega t}$  dobivamo jednadžbu za  $\mathbf{E}$  koja ovisi samo o radij vektoru  $\mathbf{r}$ :

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -i\omega \mu_r \mu_0 \sigma \mathbf{E} + \frac{-\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0}{c^2} \mathbf{E} \quad (2.10)$$

što je:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \left( i\omega \mu_r \mu_0 \sigma + \frac{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0}{c^2} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (2.11)$$

Pretpostavimo da je vodljivost karakterizirana nekom karakterističnom konstantom za pripadni materijal  $\sigma_0$ . Sada imamo izraz za vodljivost:

$$\sigma \rightarrow \sigma(\mathbf{r})\sigma_0 \quad (2.12)$$

gdje je  $\sigma(\mathbf{r})$  neka bezdimenzionalna funkcija. Tipično  $\sigma(\mathbf{r})$  će biti 1 u nekoj točki ili intervalu te će ići u 0 u krajnjim segmentima prostora problema. Mi ćemo se u daljnjem radu pitati da li stavljanjem slitine lošije vodljivosti od osnovnog materijala možemo minimizirati otpor, to jest



omske gubitke jer zbog oscilatorne prirode električnog polja u medijima, struja može teći i u suprotnom smjeru od ukupne.

Od prije nam je poznat izraz (1.20) za dubinu prodiranja s čijim kvadratom množimo jednadžbu (2.12) te dobivamo:

$$\delta^2 \nabla^2 \mathbf{E} + 2 \left( i\sigma(\mathbf{r}) + \frac{\omega \epsilon_r}{c^2 \mu_0 \sigma_0} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (2.13)$$

Drugi član u zagradi je izraz za elektromagnetski val koji je zaslužan za propagaciju elektromagnetskog zračenja. Ako se ograničimo na područje od  $f = 10$  GHz (područje gdje i najčešće radimo) u vakumu ( $\epsilon_r \cong 1$ ) njegova numerička vrijednost je otprilike  $1/2\sigma_0$  za  $\sigma_0$  u simensima. Dokle god radimo s vodičima ( $\sigma_0 \cong 10^8$  S za bakar) taj se izraz može zanemariti. U našoj analizi pretpostavit ćemo da radimo s dobrim vodičima pa ćemo zanemariti taj član.

Kao što će se kasnije pokazati 2i je bolje zapisati kao  $-(1-i)^2$  pa naša jednadžba (2.14) postaje:

$$\delta^2 \nabla^2 \mathbf{E} - (1-i)^2 \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E} = 0 \quad (2.14)$$

## 2.2 Jednadžba za otpor

Jednadžba (2.14) će dati električno polje  $\mathbf{E}$  unutar vodiča. Pojava električnog polja će uzrokovati pojavu električne struje po mikroskopskom Ohmovom zakonu  $\mathbf{J} = \sigma_0 \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E}$ . Ta struja će se izgubiti jer će se pretvoriti u toplinu po Jouleovom zakonu.

Snagu možemo shvatiti kao brzinu pretvorbe energije ili rad po jedinici vremena. Koristeći izraz  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$  (Griffits str 212; izraz 5.26) te malom algebarskom manipulacijom i generalizacijom umnoška sa skalarnim umnoškom dolazimo do drugačijeg izraza za snagu:

$$P = \frac{dW}{dt} = F \frac{dl}{dt} = qE \frac{dl}{dt} = \rho V E v_d = JEV = \int_V \mathbf{J} \mathbf{E} dV \quad (2.15)$$

Izjednačavajući izraz za snagu te pretpostavljajući da su polja harmonijska, a zanemarujući zračenje dolazimo do izraza za otpor (Jackson 3. izdanje; str 264-267):

$$R \cong \frac{\int_V \mathbf{J} \mathbf{E} dV}{|I|^2} \quad (2.16)$$

Iz jednađbe (1.4) moŹemo doći do izraza za ukupnu struju koja teče vodičem:

$$I = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = \sigma_0 \int_S \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E} d\mathbf{S} \quad (2.17)$$

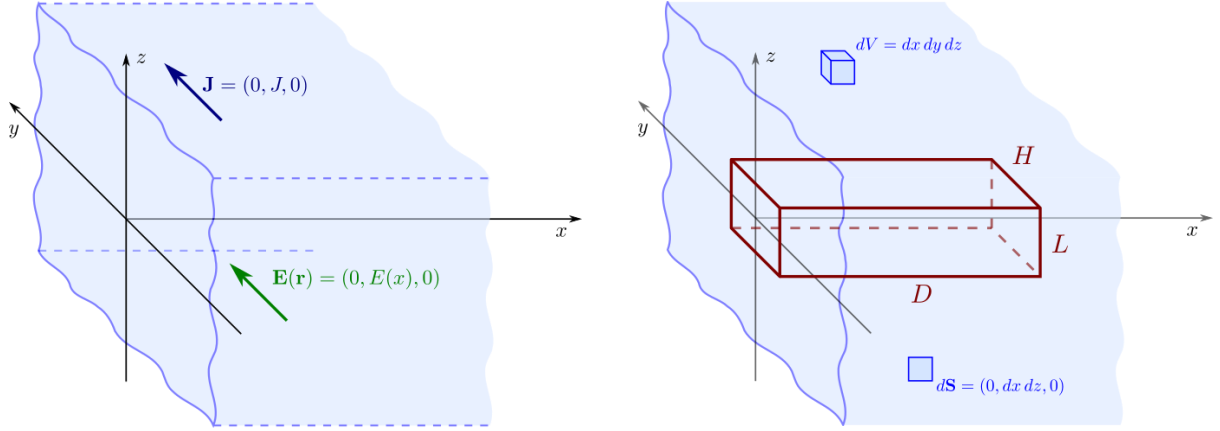
Tako dolazimo do konačnog izraza za otpor:

$$R = \frac{\int_V \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E}^* \mathbf{E} dV}{\sigma_0 \left( \int_S \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E}^* d\mathbf{S} \right) \left( \int_S \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E} d\mathbf{S} \right)} \quad (2.18)$$

### 3. Skin efekt u jednoj dimenziji

#### 3.1 Izraz za otpor

Ograničimo se sada na jednu dimenziju, to jest neka je vodič desna strana  $XY$  ravnine te neka struja ulazi na  $y = -\infty$ , a izlazi na  $y = +\infty$  kao na lijevoj strani slike 3.1. To odgovara vektoru gustoće struje  $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = (0, J(x), 0)$ . Ujedno ćemo staviti i da vodljivost vodiča ovisi samo o  $x$  koordinati,  $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma(x)$ .



Slika 3.1: Izgled vodiča u jednodimenzionalnom slučaju u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Lijevo: vodič se nalazi u dijelu prostora  $0 < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$  i  $-\infty < z < \infty$ . Desno: konačni vodič oblika kvadra, za potrebe računanja nekih integrala, nalazi se u dijelu prostora  $0 < x < D$ ,  $-H/2 < y < H/2$  i  $-L/2 < z < L/2$ .

Iz simetrije problema zaključujemo da je električno polje također paralelno  $y$  osi i ovisi samo o  $x$  koordinati, pa stoga vrijedi i  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (0, E(x), 0)$ . Tako u našoj geometriji problema iz jednadžbe (2.14) imamo jednadžbu:

$$\delta^2 \frac{d^2 E(x)}{dx^2} - (1 - i)^2 \sigma(x) E(x) = 0 \quad (3.1)$$

gdje je prirodna pretpostavka da  $E(x) \rightarrow 0$  kad  $x \rightarrow +\infty$  te  $E(0) = E_0$ .

Pri računanju integrala će nam se zbog beskonačnosti vodiča pojavljivati divergentni integrali; zbog toga ćemo se u međuračunima na pojedinim mjestima ograničavati na konačne dimenzije materijala (desna strana slike 3.1). Npr. umjesto čitave desne poluravnine  $x > 0$ ,  $-\infty < y < \infty$  i  $-\infty < z < \infty$ , privremeno ćemo uzeti da je vodič oblika kvadra  $0 < x < D$ ,  $-H/2 < y < H/2$  i  $-L/2 < z < L/2$ , gdje su  $D$ ,  $H$  i  $L$  puno veći od ostalih parametara u problemu, koje ćemo na kraju pustiti da odu u beskonačno (ako je moguće).

Neka  $\sigma(\mathbf{r}) \rightarrow \sigma(x)$  te izračunajmo prvo nazivnik:

$$\int_S \sigma(x) \mathbf{E} d\mathbf{S} = L \int_0^\infty \sigma(x) E(x) dx \quad (3.2)$$

gdje je  $L$  širina vodiča u smjeru  $Z$  osi.

Pomoću jednadžbe (2.14) imamo:

$$\sigma(x)E(x) = -\frac{\delta^2}{2i} \frac{d^2 E(x)}{dx^2} \quad (3.3)$$

Iz čega slijedi:

$$\int_S \sigma(x) \mathbf{E} d\mathbf{S} = -L \frac{\delta^2}{2i} \int_0^\infty \frac{d^2 E(x)}{dx^2} dx = L \frac{\delta^2}{2i} E'(0) \quad (3.4)$$

Radeći kompleksnu konjugaciju dobivamo:

$$\int_S \sigma(x) \mathbf{E}^* d\mathbf{S} = -L \frac{\delta^2}{2i} E'^*(0) \quad (3.5)$$

Za brojnik jednadžbe (2.18) imamo:

$$\int_V \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E}^* \mathbf{E} dV = LH \int_0^\infty \sigma(x) E^*(x) E(x) dx \quad (3.6)$$

gdje je  $LH$  površina pravokutnika u  $ZY$  ravnini. Kako bi izračunali integral (3.6) koristimo formulu (3.1) i njen kompleksni konjugat pomnožen s pripadajućim  $E^*$  i  $E$ .

$$\delta^2 \frac{d^2 E^*(x)}{dx^2} E(x) + 2i\sigma(x)E(x)E^*(x) = 0 \quad (3.7)$$

$$\delta^2 \frac{d^2 E(x)}{dx^2} E^*(x) - 2i\sigma(x)E(x)E^*(x) = 0 \quad (3.8)$$

Oduzimajući drugu od prve jednadžbe dobivamo:

$$\begin{aligned} \sigma(x)E^*(x)E(x) &= \frac{\delta^2}{4i} \left[ E(x) \frac{d^2 E^*(x)}{dx^2} - E^*(x) \frac{d^2 E(x)}{dx^2} \right] \\ &= \frac{\delta^2}{4i} \frac{d}{dx} \left[ E(x) \frac{dE^*(x)}{dx} - E^*(x) \frac{dE(x)}{dx} \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Tako za integral (3.6) dobivamo:

$$\int_0^\infty \sigma(x) E^*(x) E(x) dx = \frac{\delta^2}{4i} \left[ -E(0) \frac{dE^*(0)}{dx} + E^*(0) \frac{dE(0)}{dx} \right] \quad (3.10)$$

Iz svega dobivamo konačan rezultat za otpor:

$$R = \frac{LH \frac{\delta^2}{4i} \left[ -E(0) \frac{dE^*(0)}{dx} + E^*(0) \frac{dE(0)}{dx} \right]}{\sigma_0 \left( L \frac{\delta^2}{2i} E'(0) \right) \left( -L \frac{\delta^2}{2i} E'^*(0) \right)} \quad (3.11)$$

Nakon algebarske manipulacije i kraćenja to izgleda:

$$R = -\frac{H}{L} \frac{2}{\sigma_0 \delta^2} \frac{1}{2i} \left[ \frac{E(0)}{E'(0)} - \frac{E^*(0)}{E'^*(0)} \right] \quad (3.12)$$

što je ekvivalentno s:

$$R = -\frac{H}{L} \frac{2}{\sigma_0 \delta^2} \operatorname{Im} \left[ \frac{E(0)}{E'(0)} \right] = -\frac{H}{L} \mu_r \mu_0 \omega \operatorname{Im} \left[ \frac{E(0)}{E'(0)} \right] \quad (3.13)$$

### 3.2 Minimiziranje otpora

Prirodno se nameće pitanje je li moguće smanjiti otpor na danjoj frekvenciji prikladnim odabirom normalizirane vodljivosti  $\sigma(x)$ ? Počnimo generalnim izrazom za otpor za 1D slučaj:

$$R = \frac{H}{\sigma_0 L} \frac{\int_0^\infty \sigma(x) E^*(x) E(x) dx}{\left( \int_0^\infty \sigma(x) E^*(x) dx \right) \left( \int_0^\infty \sigma(x) E(x) dx \right)} \quad (3.14)$$

Formula ima fizikalni smisao našeg problema ako je  $\sigma(x) \leq 1$ . Zapišimo izraz (3.14) rastavljajući realne i imaginarne dijelove električnog polja:

$$R = \frac{H}{\sigma_0 L} \frac{\int_0^\infty \sigma(x) [E_R(x)^2 + E_I(x)^2] dx}{\left( \int_0^\infty \sigma(x) E_R(x) dx \right)^2 + \left( \int_0^\infty \sigma(x) E_I(x) dx \right)^2} \quad (3.15)$$

Cauchy-Schwartzova nejednakost tvrdi:

$$\left| \int_{R^n} f(x) \overline{g(x)} dx \right|^2 \leq \left( \int_{R^n} |f(x)|^2 dx \right) \left( \int_{R^n} |g(x)|^2 dx \right) \quad (3.16)$$

Sada uzimamo da je  $f = \sqrt{\sigma}$  i  $g = \sqrt{\sigma} E_R$ . Zbog toga imamo:

$$\left( \int_0^\infty \sigma E_R dx \right)^2 \leq \left( \int_0^\infty \sigma dx \right) \left( \int_0^\infty \sigma E_R^2 dx \right) \leq D \left( \int_0^\infty \sigma E_R^2 dx \right) \quad (3.17)$$

Mi u suštini računamo integrale dubine D na  $x$  osi uvažavajući  $\sigma(x) \leq 1$  pa:

$$\int_0^\infty \sigma dx \leq \int_0^\infty dx \rightarrow \int_0^D dx = D \quad (3.18)$$

Konačno:

$$\left( \int_0^\infty \sigma E_R dx \right)^2 \leq D \left( \int_0^\infty \sigma E_R^2 dx \right) \quad (3.19)$$

Za kompleksni dio električnog polja analogno imamo:

$$\left( \int_0^\infty \sigma E_I dx \right)^2 \leq D \left( \int_0^\infty \sigma E_I^2 dx \right) \quad (3.20)$$

Zbrajajući te dvije nejednakosti dolazi:

$$\left( \int_0^\infty \sigma E_R dx \right)^2 + \left( \int_0^\infty \sigma E_I dx \right)^2 \leq D \left( \int_0^\infty \sigma (E_R^2 + E_I^2) dx \right) \quad (3.21)$$

$$\frac{\int_0^\infty \sigma (E_R^2 + E_I^2) dx}{\left( \int_0^\infty \sigma E_R dx \right)^2 + \left( \int_0^\infty \sigma E_I dx \right)^2} \geq \frac{1}{D} \quad (3.22)$$

Kombinirajući izraze (3.15) i (3.22) dolazimo do donje granice otpora (dokle god vrijedi  $\sigma(x) \leq 1$ ):

$$R \geq \frac{H}{\sigma_0 LD} \quad (3.23)$$

Gornja nejednakost može se zapisati kao:

$$\frac{R}{R_0} \geq 1 \quad (3.24)$$

gdje je  $R_0 = \frac{H}{\sigma_0 LD}$ . To je otpor nulte frekvencije za uzorak homogene vodljivosti  $\sigma_0$  i dimenzija  $H \times L \times D$ . Postojanje donje granice sugerira nemogućnost minimalizacije otpora jer je otpor uvijek veći ili jednak od onog kod homogenog slučaja.

### 3.3 Primjer: homogeni slučaj

Radimo sa slučajem gdje je vodič desna strana  $XY$  ravnine ( $x > 0$ ) i gdje je vodljivost funkcija jedino po  $x$ ,  $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma(x)$ . Ukupna struja  $I$  ulazi na  $y = -\infty$  i izlazi na  $y = +\infty$  tako da je gustoća struje  $\mathbf{J}$  paralelna y osi  $\mathbf{J} = (0, J, 0)$ .

Kod homogenog slučaja imamo  $\sigma(x) = 1$ , te tako naša jednačba (3.1) postaje linearna diferencijalna jednačba drugog reda sa kompleksnim koeficijentima. Zapisujemo jednačbu (3.1) kao:

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} - \frac{(1-i)^2}{\delta^2} E(x) = 0 \quad (3.25)$$

Rješenje diferencijalne jednačbe ima oblik:  $E(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$ . Uvrštavanjem rješenja u diferencijalnu jednačbu (3.25) i koristeći rubne uvjete dobivamo izraze za konstante  $A$  i  $B$ .

$$Ak^2 e^{kx} + Bk^2 e^{-kx} - \frac{(1-i)^2}{\delta^2} (Ae^{kx} + Be^{-kx}) = 0 \quad (3.26)$$

$$k_{1,2} = \pm \frac{(1-i)}{\delta} \quad (3.27)$$

$$E(x) = Ae^{\frac{(1-i)}{\delta}x} + Be^{-\frac{(1-i)}{\delta}x} \quad (3.28)$$

Uvažavajući drugi rubni uvjet  $E(0) = E_0$  imamo:

$$E_0 = Ae^0 + Be^0 \rightarrow A + B = E_0 \quad (3.29)$$

Uvrštavajući prvi rubni uvjet da  $E(x) \rightarrow 0$  kad  $x \rightarrow +\infty$ :

$$Ae^{+\infty}e^{-i\infty} + Be^{-\infty}e^{+i\infty} = 0 \quad (3.30)$$

Vidimo da je  $B$  proizvoljan, a  $A$  je 0. Tako iz rubnih uvjeta imamo rješenje:

$$E(x) = E_0e^{-\frac{(1-i)}{\delta}x} = E_0e^{\frac{(i-1)}{\delta}x} \quad (3.31)$$

Konačni izraz za električno polje je realni dio gornje jednadžbe:

$$E(x, t) = \text{Re} \left( E_0e^{\frac{(i-1)}{\delta}x} e^{-i\omega t} \right) = \text{Re} \left( E_0e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i\left(\frac{x}{\delta} - \omega t\right)} \right) \quad (3.32)$$

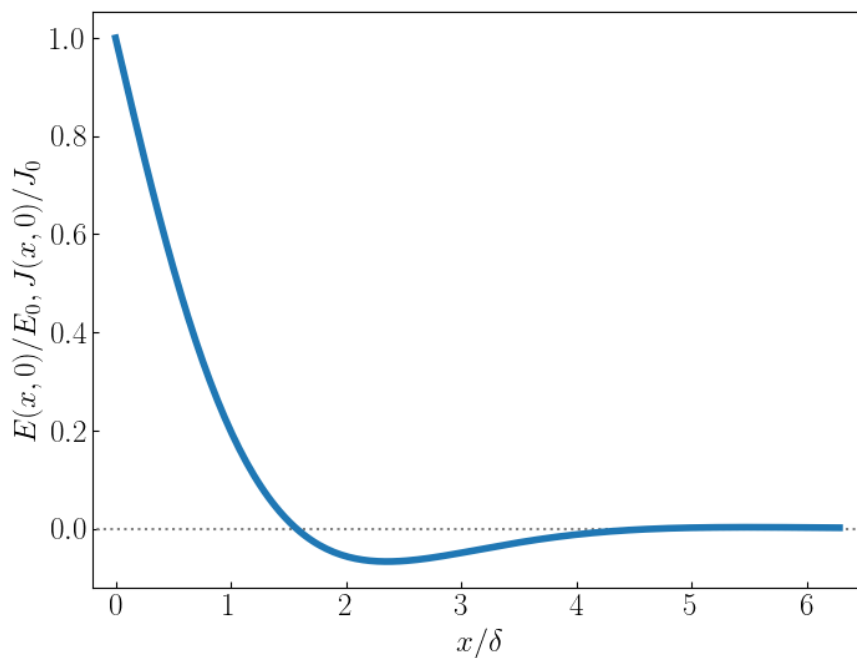
to jest:

$$E(x, t) = E_0e^{-x/\delta} \cos\left(\frac{x}{\delta} - \omega t\right) \quad (3.33)$$

Odatle slijedi i izraz za gustoću struje:

$$J(x, t) = \sigma_0\sigma(x)E(x, t) = J_0e^{-x/\delta} \cos\left(\frac{x}{\delta} - \omega t\right) \quad (3.34)$$

Na slici 3.2 je prikazana ovisnost električnog polja  $E(x, t = 0)/E_0$  i struje  $J(x, t = 0)/J_0$ , u ovisnosti o  $x/\delta$ . Primijetimo da struja u dijelovima materijala teče u suprotnom smjeru.



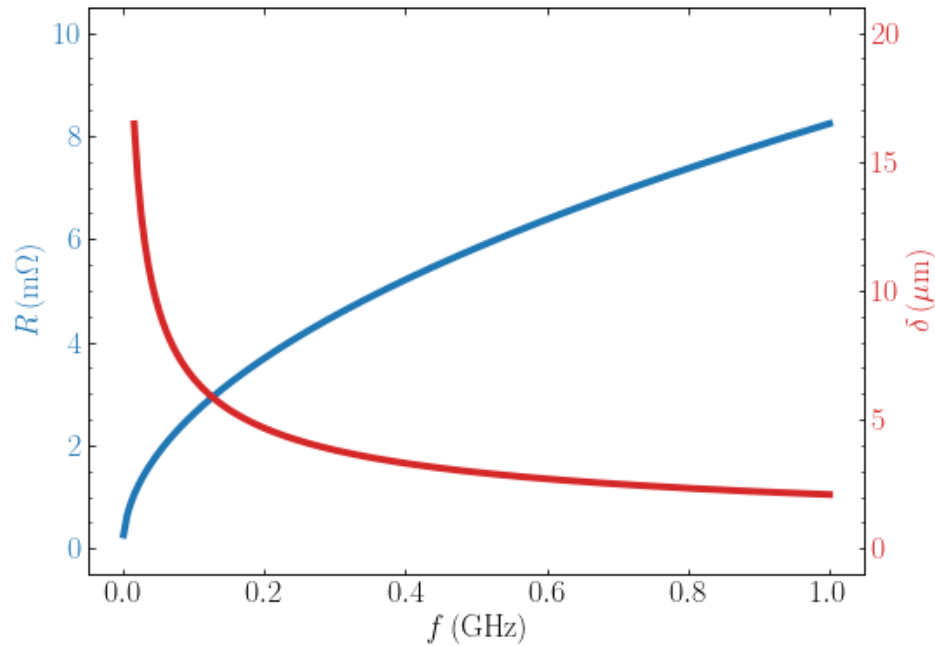
Slika 3.2: Ovisnost normaliziranog električnog polja i normalizirane struje o  $x/\delta$  u  $t = 0$ .

Po formuli (3.13) za otpor dobivamo:

$$\begin{aligned}
 R &= -\frac{H}{L} \mu_r \mu_0 \omega \operatorname{Im} \left[ \frac{E_0}{E_0 \frac{-(1-i)}{\delta}} \right] = \frac{H}{L} \mu_r \mu_0 \omega \operatorname{Im} \left[ \frac{(1+i)\delta}{2} \right] \\
 &= \frac{H}{2L} \mu_r \mu_0 \omega \delta = \frac{H}{2L} \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0 \omega}{\sigma_0}}
 \end{aligned} \tag{3.35}$$



Pripadna ovisnost o frekvenciji prikazana je na slici 3.3.



Slika 3.3: Plavo: ovisnost otpora homogenog 1D bakrenog vodiča, kvadratnog presjeka ( $H = L$ ), o frekvenciji  $f$ . Crveno: ovisnost dubine prodiranja  $\delta$  o frekvenciji, za bakar.

### 3.4 Primjer: nehomogeni slučaj

Kao primjer nehomogenog slučaja imamo  $\sigma(x) = e^{-\frac{x}{l}}$  gdje je  $l$  parametar koji opisuje kako brzo vodljivost iščezava u odnosu na  $x = 0$ , te tako jednačba (3.1) postaje diferencijalna jednačba drugog reda s promjenjivim koeficijentima:

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} - \frac{(1-i)^2}{\delta^2} e^{-\frac{x}{l}} E(x) = 0 \quad (3.36)$$

Jednačbu rješavamo koristeći supstituciju:

$$y = \frac{2l}{\delta} (1-i) e^{-\frac{x}{2l}}; \quad x = -2l \ln \left( \frac{\delta y}{2l(1-i)} \right) \quad (3.37)$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy} = -\frac{1}{2l} y \frac{d}{dy} \quad (3.38)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy} \left( \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy} \right) = \frac{1}{4l^2} \left( y \frac{d}{dy} + y^2 \frac{d^2}{dy^2} \right) \quad (3.39)$$

$$z(y) = E \left( -2l \ln \left( \frac{\delta y}{2l(1-i)} \right) \right) \quad (3.40)$$

Uz dane supstitucije jednačba (3.36) postaje:

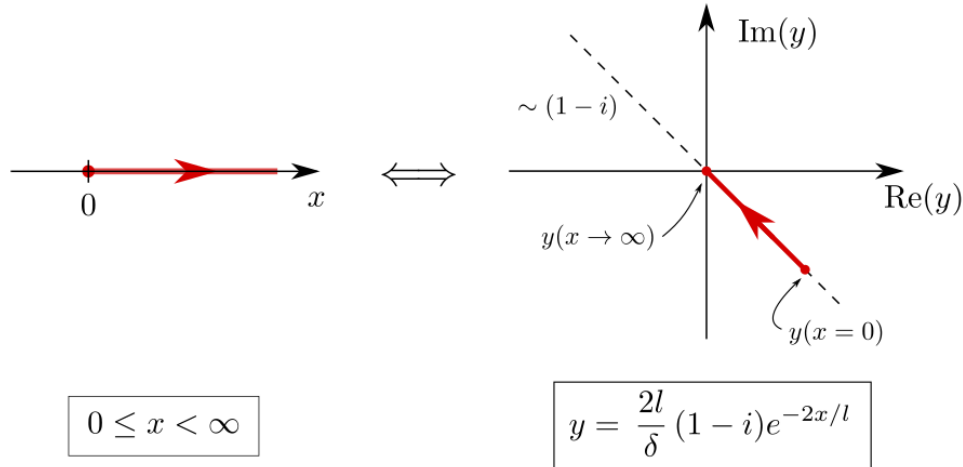
$$\frac{1}{4l^2} \left( y \frac{dz}{dy} + y^2 \frac{d^2z}{dy^2} \right) - \frac{(1-i)^2}{\delta^2} e^{2 \ln \left( \frac{\delta y}{2l(1-i)} \right)} z = 0 \quad (3.41)$$

$$y^2 \frac{d^2z}{dy^2} + y \frac{dz}{dy} - y^2 z = 0 \quad (3.42)$$

To je modificirana Besselova diferencijalna jednačba s pripadnim modificiranim Besselovim funkcijama prve i druge vrste kao rješenjima:

$$z(y) = AI_0(y) + BK_0(y) \quad (3.43)$$

S obzirom na to da je područje (realne) varijable  $x \in [0, \infty)$  imamo  $y \in \left[ \frac{2l}{\delta} (1-i), 0 \right]$  (vidi sliku 3.4), no  $K_0(y) \sim \ln(y)$  pa to drugo rješenje u 0 teži u beskonačnost. Stoga uzimamo da je  $B = 0$ .



Slika 3.4: Prikaz ovisnosti funkcije  $y$  o  $x$  koordinati u kompleksnoj ravnini.

Iz svega toga za električno polje dobivamo izraz:

$$E(x) = AI_0 \left( \frac{2l}{\delta} (1-i) e^{-\frac{x}{2l}} \right) \quad (3.44)$$

Pomoću prvog rubnog uvjeta  $x \rightarrow +\infty$  što povlači  $E(x) = 0$ :

$$0 = AI_0(0), \quad (3.45)$$

iz čega vidimo da je  $A$  proizvoljan. Pomoću drugog rubnog uvjeta  $x = 0 \rightarrow E(x) = E_0$  imamo određen  $A$ :

$$E_0 = AI_0\left(\frac{2l}{\delta}(1-i)\right) \rightarrow A = \frac{E_0}{I_0\left(\frac{2l}{\delta}(1-i)\right)} \quad (3.46)$$

Što nam daje za rješenje:

$$E(x) = E_0 \frac{I_0\left(\frac{2l}{\delta}(1-i)e^{-\frac{x}{2l}}\right)}{I_0\left(\frac{2l}{\delta}(1-i)\right)} \quad (3.47)$$

Konačni izraz za električno polje je realni dio gornje jednadžbe:

$$E(x, t) = E_0 \operatorname{Re} \left( \frac{I_0\left(\frac{2l}{\delta}(1-i)e^{-\frac{x}{2l}}\right)}{I_0\left(\frac{2l}{\delta}(1-i)\right)} e^{-i\omega t} \right) \quad (3.48)$$

Ova se formula može izraziti i pomoću realnih funkcija, tzv. Kelvinove  $ber(x)$  i  $bei(x)$  funkcije:

$$I_\nu\left(xe^{\frac{3\pi i}{4}}\right) = I_\nu((i-1)x) = i^{-\nu} ber_\nu(\sqrt{2}x) + i^{1-\nu} bei_\nu(\sqrt{2}x), \quad (3.49)$$

ali pripadni izrazi postaju nezgrapni, pa ćemo za numeričko računanje koristiti direktno izraz (3.48).

Iz ovoga slijedi i izraz za gustoću struje:

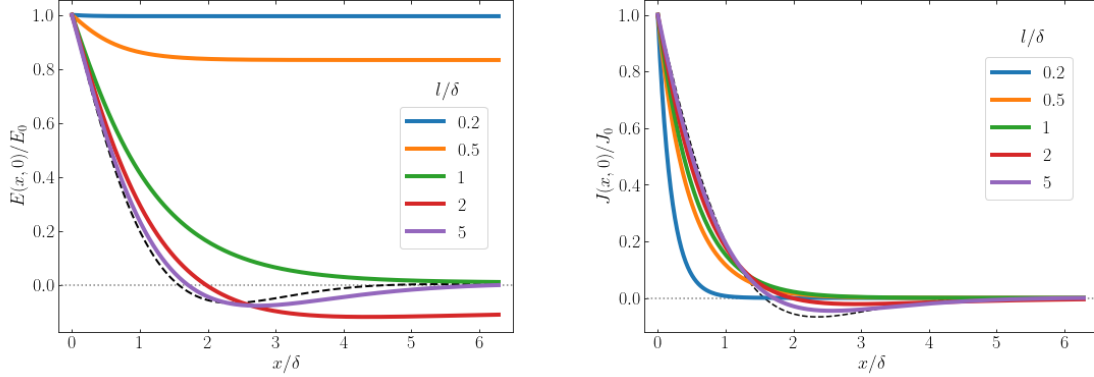
$$J(x, t) = \sigma_0 \sigma(x) E(x, t) = J_0 e^{-x/l} \operatorname{Re} \left( \frac{I_0\left(\frac{2l}{\delta}(1-i)e^{-\frac{x}{2l}}\right)}{I_0\left(\frac{2l}{\delta}(1-i)\right)} \right) \quad (3.50)$$

Na slici 3.5 je prikazana ovisnost električnog polja  $E(x, t=0)/E_0$  i struje  $J(x, t=0)/J_0$ , u ovisnosti o  $x/\delta$  za nekoliko vrijednosti omjera  $l/\delta$ . Pri tom smo član u zagradi izraza (3.50) prilagodili na oblik:

$$\frac{I_0\left(\frac{2l}{\delta}(1-i)e^{-\frac{x}{2l}}\right)}{I_0\left(\frac{2l}{\delta}(1-i)\right)} = \frac{I_0\left(\frac{2l}{\delta}(1-i)e^{-\frac{1\delta x}{2l\delta}}\right)}{I_0\left(\frac{2l}{\delta}(1-i)\right)} \quad (3.51)$$

kako bismo ga lakše mogli usporediti s homogenim slučajem.

Primijetimo da i opet za određene vrijednosti omjera  $l/\delta$  struja u dijelovima materijala teče u suprotnom smjeru. Osim toga, za  $l \gg \delta$ , vrijednosti odgovaraju približno homogenom slučaju, kao što se i očekivalo.



Slika 3.5: Ovisnost normaliziranog električnog polja (lijevo) i normalizirane struje (desno) o  $x/\delta$ , za nekoliko vrijednosti omjera  $l/\delta$ . Crtkanom linijom je označena ovisnost u homogenom slučaju.

Da bismo dobili izraz za otpor nehomogenog slučaja počinjemo izrazom (3.13) za otpor:

$$R = -\frac{H}{L} \frac{2}{\sigma_0 \delta^2} \operatorname{Im} \left[ \frac{E(0)}{E'(0)} \right]. \quad (3.52)$$

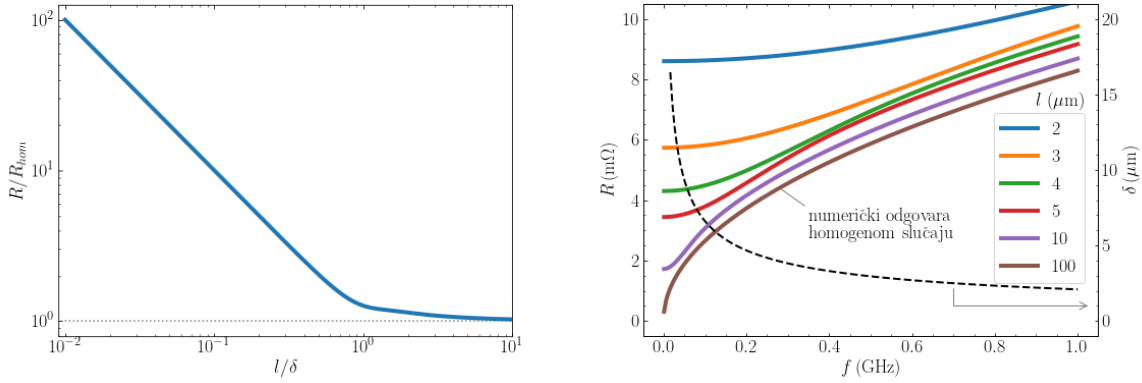
Tu se lako uočava da nam za izračun otpora treba derivacija modificirane Besselove funkcije.

$$I'_0 \left( ke^{-\frac{x}{2l}} \right) = \frac{-ke^{-\frac{x}{2l}}}{2l} I_1 \left( ke^{-\frac{x}{2l}} \right) \quad (3.53)$$

Pomoću prethodnog izvoda za otpor dobivamo izraz:

$$R = \frac{H}{L} \frac{2}{\sigma_0 \delta^2} \operatorname{Im} \left[ \frac{I_0 \left( \frac{2l}{\delta} (1-i) \right)}{\left( \frac{1-i}{\delta} \right) I_1 \left( \frac{2l}{\delta} (1-i) \right)} \right] \quad (3.54)$$

Pripadna ovisnost otpora o frekvenciji za nekoliko vrijednosti omjera  $l/\delta$  prikazana je na slici 3.6. Uočimo da je u skladu s diskusijom u poglavlju 3.2, otpor u nehomogenom slučaju uvijek veći u odnosu na homogeni slučaj. Na desnoj strani slike 3.6 prikazana je ovisnost otpora  $R$  o frekvenciji za bakar, za nekoliko vrijednosti  $l$ , zajedno s ovisnošću dubine prodiranja o frekvenciji za homogeni slučaj. Kada je  $l \gg \delta$ , vrijednosti otpora  $R$  odgovaraju homogenom slučaju. S druge strane, kada je  $l$  usporediv ili manji od 'homogene' dubine prodiranja  $\delta$ , otpor je znatno veći, ali je i utjecaj frekvencije na njega manji.



Slika 3.6: Lijevo: ovisnost  $R/R_{hom}$  o omjeru  $l/\delta$ . (Za  $l/\delta \ll 1$ ,  $R/R_{hom} \cong 1/(l/\delta)$ .) Desno: ovisnost otpora 1D bakrenog vodiča, kvadratnog presjeka ( $H = L$ ), o frekvenciji  $f$  za nekoliko vrijednosti  $l$  (lijeva Y-os). Numeričke vrijednosti za  $l=100 \mu m$  su praktički iste kao i u homogenom slučaju. Crtkano: ovisnost dubine prodiranja  $\delta$  o  $f$ , za bakar, u homogenom slučaju (desna Y-os).

Pokažimo sada kako se ponaša otpor kada  $l \rightarrow \infty$  to jest kada je  $l$  puno veći od dubine prodiranja  $\delta$ . Kako ne možemo analitički odrediti limes omjera dviju modificiranih Besselovih funkcija poslužiti ćemo se asimptotskim razvojem za velike argumente koje je razvio Hankel. Primijetimo da vrijedi:

$$I_\nu(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left( 1 - \frac{4\nu^2-1}{8x} + \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{2!(8x)^2} + \dots \right) \quad \text{za } |\arg x| \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.55)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} e^{\frac{-x}{2l}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{x}{2l} + \dots \right) = 1 \quad (3.56)$$

Za električno polje tada dobivamo:

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} E(x) &= \lim_{l \rightarrow \infty} E_0 \frac{I_0\left(\frac{2l}{\delta}(1-i)e^{-\frac{x}{2l}}\right)}{I_0\left(\frac{2l}{\delta}(1-i)\right)} \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{\frac{2l}{\delta}(1-i)e^{-\frac{x}{2l}}}}{\sqrt{2\pi \frac{2l}{\delta}(1-i)e^{-\frac{x}{2l}}}} \right) \left( \frac{\sqrt{2\pi \frac{2l}{\delta}(1-i)}}{e^{\frac{2l}{\delta}(1-i)}} \right) \\ &= E_0 e^{(1-i)\frac{2l}{\delta}\left(\frac{-x}{2l}\right)} = E_0 e^{(i-1)\frac{x}{\delta}} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Iz izraza za električno polje za velike  $l$  ( $x$ ) vidimo da je isti kao i izraz (3.35) za homogeni slučaj. Analogno slijedi i izraz za otpor kada  $l \rightarrow \infty$ :

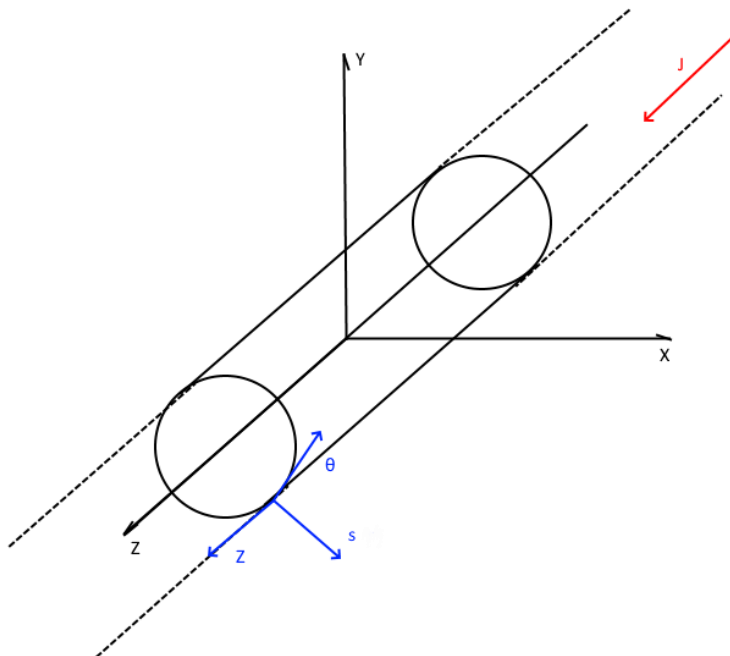
$$R = \frac{H}{2L} \mu_r \mu_0 \omega \delta = \frac{H}{2L} \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0 \omega}{\sigma_0}} \quad (3.58)$$

te stoga možemo zaključiti da i on odgovara homogenom slučaju.

## 4. Skin efekt u dvije dimenzije

### 4.1 Izraz za otpor

Radimo sa slučajem beskonačne cilindrične žice radijusa  $a$  gdje je centralna os žice paralelna sa  $z$  osi u cilindričnom koordinatnom sustavu (vidi sliku 4.1). Struja ulazi u  $z = -\infty$ , a izlazi u  $z = +\infty$ .



Slika 4.1: Prikaz struje kroz žicu s pripadnim jediničnim vektorima u Kartezijevom i cilindričnom koordinatnom sustavu

Koristeći izraz za Helmholtzovu jednadžbu (Smolić str 277) u cilindričnom koordinatnom sustavu jednadžba (2.15) glasi:

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial s} \right) + \frac{1}{s} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{(1-i)^2}{\delta^2} \sigma(s) \mathbf{E} = 0 \quad (4.1)$$

Kako iz smjera struje znamo smjer polja tako u vodiču jedino postoji  $z$  komponenta električnog polja, te ona iz simetrije problema ovisi samo o koordinati  $s$ . Iz tog zaključka imamo iz jednadžbe (4.1) jednadžbu:

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial E(s)}{\partial s} \right) - \frac{(1-i)^2}{\delta^2} \sigma(s) E(s) = 0 \quad (4.2)$$

Do izraza za otpor dolazimo preko jednadžbe (2.18). Počnimo prvo s nazivnikom:

$$\int_S \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a s\sigma(s)E(s)ds = 2\pi \int_0^a s\sigma(s)E(s)ds \quad (4.3)$$

Iz jednadžbe (4.2) imamo:

$$\begin{aligned} \sigma(s)E(s) &= -\frac{\delta^2}{2i} \frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left( s \frac{dE(s)}{ds} \right) \rightarrow s\sigma(s)E(s) \\ &= -\frac{\delta^2}{2i} \frac{d}{ds} \left( s \frac{dE(s)}{ds} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Slijedi:

$$\int_S \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E} d\mathbf{S} = \pi i \delta^2 \int_0^a \frac{d}{ds} \left( s \frac{dE(s)}{ds} \right) ds = \pi i \delta^2 a \frac{dE(a)}{ds} \quad (4.5)$$

gdje smo pretpostavili da  $s \frac{dE(s)}{ds} \rightarrow 0$  kada  $s \rightarrow 0$ . Radeći kompleksni konjugat dobivamo:

$$\int_S \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E}^* d\mathbf{S} = -\pi i \delta^2 a \frac{dE^*(a)}{ds} \quad (4.6)$$

Za brojnik imamo:

$$\begin{aligned} \int_V \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E}^* \mathbf{E} dV &= \\ &= L \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a s\sigma(s)E^*(s)E(s)ds \\ &= 2\pi L \int_0^a s\sigma(s)E^*(s)E(s)ds \end{aligned} \quad (4.7)$$

gdje je  $L$  duljina žice po kojoj integriramo. Sad jednadžbu (4.2) i njen kompleksni konjugat množimo s  $E^*(s)$  i  $E(s)$  te dobivamo:

$$\delta^2 \frac{1}{s} E^*(s) \frac{d}{ds} \left( s \frac{dE(s)}{ds} \right) + 2i\sigma(s)E^*(s)E(s) = 0 \quad (4.8)$$

$$\delta^2 \frac{1}{s} E(s) \frac{d}{ds} \left( s \frac{dE^*(s)}{ds} \right) - 2i\sigma(s)E^*(s)E(s) = 0 \quad (4.9)$$

Oduzimajući jednađbu (4.9) od (4.8) dobivamo:

$$\begin{aligned}
\sigma(s)E^*(s)E(s) &= \frac{\delta^2}{4i} \frac{1}{s} \left( E(s) \frac{d}{ds} \left( s \frac{dE^*(s)}{ds} \right) - E^*(s) \frac{d}{ds} \left( s \frac{dE(s)}{ds} \right) \right) \\
&= \frac{\delta^2}{4i} \frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left( E(s) s \frac{dE^*(s)}{ds} - E^*(s) s \frac{dE(s)}{ds} \right) \\
&= \frac{\delta^2}{4i} \frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left[ s \left( E(s) \frac{dE^*(s)}{ds} - E^*(s) \frac{dE(s)}{ds} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Uvrštavajući prethodni rezultat u integral (4.7) dobivamo:

$$\int_V \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E}^* \mathbf{E} dV = \pi L a \frac{\delta^2}{2i} \left( E(s) \frac{dE^*(s)}{ds} - E^*(s) \frac{dE(s)}{ds} \right) \tag{4.11}$$

gdje pretpostavljamo da  $sE^*(s) \frac{dE(s)}{ds} \rightarrow 0$  kada  $s \rightarrow 0$ .

Ukupan otpor je:

$$R = \frac{\pi L a \frac{\delta^2}{2i} \left( E(s) \frac{dE^*(s)}{ds} - E^*(s) \frac{dE(s)}{ds} \right)}{\sigma_0 \left( -\pi i \delta^2 a \frac{dE^*(a)}{ds} \right) \left( \pi i \delta^2 a \frac{dE(a)}{ds} \right)} \tag{4.12}$$

što nakon kraćenja postaje:

$$R = \frac{L}{a} \frac{1}{\pi \sigma_0 \delta^2} \frac{1}{2i} \left( \frac{E(a)}{E'(a)} - \frac{E^*(a)}{E'^*(a)} \right) \tag{4.13}$$

Zapisano na drugačiji način:

$$R = \frac{L}{a} \frac{1}{\pi \sigma_0 \delta^2} \text{Im} \left( \frac{E(a)}{E'(a)} \right) = \frac{L}{a} \frac{\mu_r \mu_0 \omega}{2\pi} \text{Im} \left( \frac{E(a)}{E'(a)} \right) \tag{4.14}$$

#### 4.2 Minimiziranje otpora

Ovdje se opet pitamo da li je moguće smanjiti otpor na danoj frekvenciji pogodnim odabirom radialne ovisnosti vodljivosti  $\sigma(s)$ ? Počinjemo s izrazom za otpor za 2D slučaj:

$$\frac{R}{R_0} = \frac{a^2}{2} \frac{\int_0^a s \sigma(s) E^*(s) E(s) ds}{\left( \int_0^a s \sigma(s) E(s) ds \right) \left( \int_0^a s \sigma(s) E^*(s) ds \right)} \tag{4.15}$$

gdje je  $R_0 = \frac{1}{\sigma_0} \frac{L}{\pi a^2}$ . Gornje pitanje ima smisla ako zahtijevamo da  $\sigma(s) \leq 1$ . Gornju jednađbu ćemo raspisati preko realnog i imaginarnog djela električnog polja  $E_R$  i  $E_I$ . Pritom mijenjamo integracijsku varijablu  $s \rightarrow s/a$ .



$$\frac{R}{R_0} = \frac{1}{2} \frac{\int_0^1 s\sigma(E_R^2 + E_I^2)ds}{\left(\int_0^1 s\sigma E_R ds\right)^2 + \left(\int_0^1 s\sigma E_I ds\right)^2} \quad (4.16)$$

Prema Cauchy-Schwartzovoj nejednakosti ( $f = \sqrt{s\sigma}$ ,  $g = \sqrt{s\sigma}E_R$ ) imamo:

$$\left(\int_0^1 s\sigma E_R ds\right)^2 \leq \left(\int_0^1 s\sigma ds\right) \left(\int_0^1 s\sigma E_R^2 ds\right) \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^1 s\sigma E_R^2 ds\right) \quad (4.17)$$

jer:

$$\int_0^1 s\sigma ds \leq \int_0^1 s ds = \frac{1}{2} \quad (4.18)$$

Iz toga slijedi:

$$\left(\int_0^1 s\sigma E_R ds\right)^2 \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^1 s\sigma E_R^2 ds\right) \quad (4.19)$$

Slično vrijedi i za imaginaran dio:

$$\left(\int_0^1 s\sigma E_I ds\right)^2 \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^1 s\sigma E_I^2 ds\right) \quad (4.20)$$

Zbrajajući zadnje dvije nejednakosti dolazimo do:

$$\left(\int_0^1 s\sigma E_R ds\right)^2 + \left(\int_0^1 s\sigma E_I ds\right)^2 \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^1 s\sigma(E_R^2 + E_I^2) ds\right) \quad (4.21)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\int_0^1 s\sigma(E_R^2 + E_I^2) ds}{\left(\int_0^1 s\sigma E_R ds\right)^2 + \left(\int_0^1 s\sigma E_I ds\right)^2} \geq 1 \quad (4.22)$$

Tako smo došli do donje granice za  $R/R_0$ :

$$\frac{R}{R_0} \geq 1 \quad (4.23)$$

dokle god  $\sigma(s) \leq 1$ . Ovo nam opet govori da nije moguće smanjiti otpor jer je otpor uvijek veći ili jednak onom kod homogenog slučaja.

#### 4.3 Primjer: homogeni slučaj

Počinjemo sa jednadžbom (4.2):

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial E(s)}{\partial s} \right) - \frac{(1-i)^2}{\delta^2} \sigma(s) E(s) = 0 \quad (4.24)$$

Kod homogenog slučaja  $\sigma(s) = 1$  te jednažba (4.24) postaje:

$$\frac{\partial^2 E(s)}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial E(s)}{\partial s} - \frac{(1-i)^2}{\delta^2} E(s) = 0 \quad (4.25)$$

Radi se o modificiranoj Besselovoj diferencijalnoj jednažbi:

$$s^2 \frac{\partial^2 E(s)}{\partial s^2} + s \frac{\partial E(s)}{\partial s} - (k^2 s^2 + v^2) E(s) = 0 \quad (4.26)$$

$$k^2 = \frac{(1-i)^2}{\delta^2} \quad (4.27)$$

$$v^2 = 0 \quad (4.28)$$

Prvo rješenje te jednažbe za red  $v = 0$  je modificirana Besselova funkcija prve vrste reda 0 a drugo je Besselova funkcija druge vrste reda 0.

$$E(s) = AI_0(ks) + BK_0(ks) \quad (4.29)$$

Drugo rješenje teži u  $-\infty$  u  $s = 0$  pa nam nije od fizikalnog značaja to jest  $B = 0$  jer  $K_0(ks) \sim \ln(s)$ .

Stoga je opće rješenje dano izrazom:

$$E(s) = AI_0(ks) \quad (4.30)$$

Uvrštavajući rubne uvjet za električno polje:  $E(a) = E_a$  dobivamo konstantu  $A$ .

$$A = \frac{E_a}{I_0\left(\frac{(1-i)a}{\delta}\right)} \quad (4.31)$$

Tako je tada rješenje:

$$E(s) = E_a \frac{I_0\left(\frac{(1-i)s}{\delta}\right)}{I_0\left(\frac{(1-i)a}{\delta}\right)} \quad (4.32)$$

Konačni izraz za električno polje je realni dio gornje jednažbe:

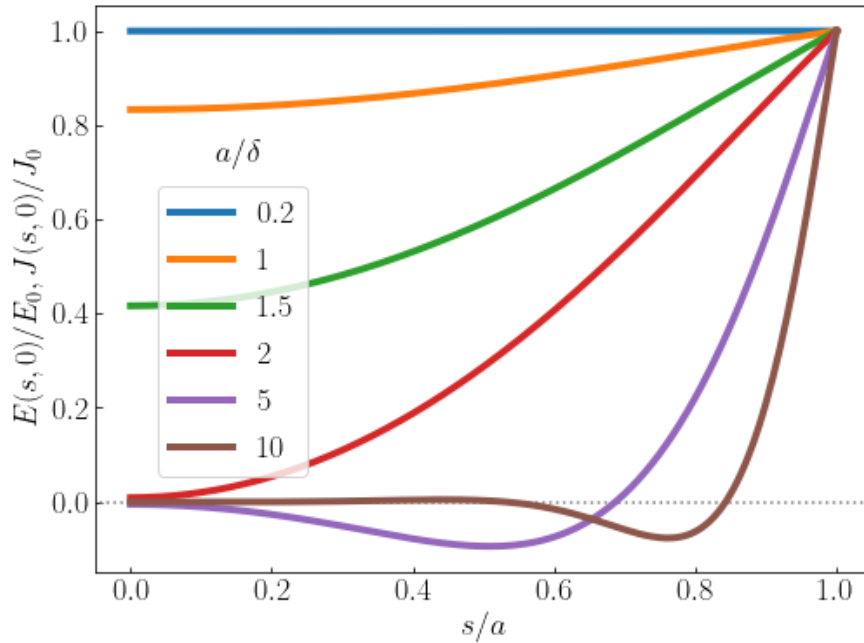
$$E(s, t) = E_a \operatorname{Re} \left[ \frac{I_0\left(\frac{(1-i)s}{\delta}\right)}{I_0\left(\frac{(1-i)a}{\delta}\right)} e^{-i\omega t} \right] \quad (4.33)$$

(I ovaj izraz bismo mogli izraziti pomoću realnih funkcija  $ber(x)$  i  $bei(x)$ .)

Iz ovoga slijedi i izraz za gustoću struje:

$$J(s, t) = \sigma_0 \sigma(s) E(s, t) = J_0 \operatorname{Re} \left[ \frac{I_0 \left( \frac{(1-i)s}{\delta} \right)}{I_0 \left( \frac{(1-i)a}{\delta} \right)} e^{-i\omega t} \right] \quad (4.34)$$

Na slici 4.2 je prikazana ovisnost električnog polja  $E(x, t = 0)/E_0$  i struje  $J(x, t = 0)/J_0$ , u ovisnosti o  $s/\delta$  za nekoliko vrijednosti omjera  $a/\delta$ . Primijetimo da u slučaju kada je  $\delta$  nešto veći od polumjera žice, u dijelu vodiča struja teče u suprotnom smjeru.



Slika 4.2: Ovisnost normaliziranog električnog polja i normalizirane struje o omjeru  $s/a$ , za nekoliko vrijednosti omjera  $a/\delta$ .

Za otpor u homogenom slučaju nam treba derivacija Besselove funkcije.

$$E(s) = E_a \frac{I_0 \left( \frac{(1-i)s}{\delta} \right)}{I_0 \left( \frac{(1-i)a}{\delta} \right)} \rightarrow E'(a) = E_a \frac{I_0' \left( \frac{(1-i)a}{\delta} \right)}{I_0 \left( \frac{(1-i)a}{\delta} \right)} \quad (4.35)$$

$$I_0'(ks) = kI_1(ks) \quad (4.36)$$

$$E'(a) = E_a \frac{I_0' \left( \frac{(1-i)a}{\delta} \right)}{I_0 \left( \frac{(1-i)a}{\delta} \right)} = E_a \frac{(1-i) I_1 \left( \frac{(1-i)a}{\delta} \right)}{\delta I_0 \left( \frac{(1-i)a}{\delta} \right)} \quad (4.37)$$

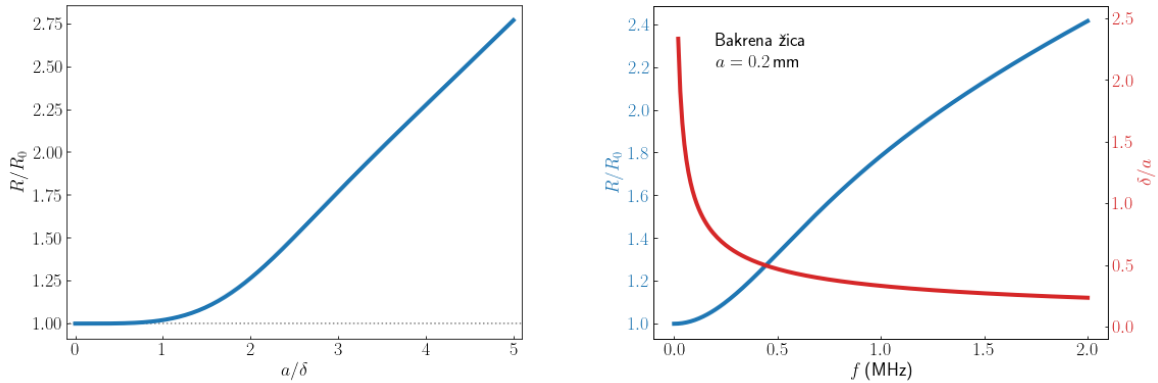
Iz toga dobivamo izraz za ukupan otpor kod homogenog slučaja:

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{L}{a} \frac{1}{\pi \sigma_0 \delta^2} \operatorname{Im} \left( \frac{E(a)}{E'(a)} \right) = \frac{L}{a} \frac{1}{\pi \sigma_0 \delta^2} \operatorname{Im} \left( \frac{\delta I_0 \left( \frac{(1-i)a}{\delta} \right)}{(1-i) I_1 \left( \frac{(1-i)a}{\delta} \right)} \right) \\
 &= \frac{L}{a} \frac{1}{\pi \sigma_0 \delta^2} \operatorname{Im} \left( \frac{\delta I_0 \left( \frac{(1-i)a}{\delta} \right)}{(1-i) I_1 \left( \frac{(1-i)a}{\delta} \right)} \right) \\
 &= \frac{L}{a} \frac{1}{\pi \sigma_0 \delta} \operatorname{Im} \left( \frac{I_0 \left( \frac{(1-i)a}{\delta} \right)}{(1-i) I_1 \left( \frac{(1-i)a}{\delta} \right)} \right) \quad (4.38)
 \end{aligned}$$

S obzirom da je otpor žice duljine  $L$  i polumjera  $a$ , kada nema skin efekta (ili pri frekvenciji  $f = 0$  Hz), jednak  $R_0 = (1/\sigma_0)(L/\pi a^2)$ , gornji izraz možemo pisati:

$$R = R_0 \frac{a}{\delta} \operatorname{Im} \left( \frac{I_0 \left( \frac{(1-i)a}{\delta} \right) (1+i)}{I_1 \left( \frac{(1-i)a}{\delta} \right)} \right) \quad (4.39)$$

Ovisnost normaliziranog otpora  $R/R_0$  o omjeru  $a/\delta$  i frekvenciji  $f$  prikazana je na slici 4.3.



Slika 4.3: Lijevo: ovisnost normaliziranog otpora  $R/R_0$  o omjeru  $a/\delta$ . Desno: ovisnost normaliziranog otpora  $R/R_0$  (plavo) i omjera  $\delta/a$  (crveno) o frekvenciji za bakrenu žicu polumjera 0.2 mm.

#### 4.4 Primjer: nehomogeni slučaj

Uzmimo opet beskonačnu cilindričnu žicu radijusa  $a$  gdje je centralna os žice paralelna sa  $z$  osi, sa strujom u  $z$  smjeru, ali s vodljivošću koja nije više konstantna već ovisi o  $s$ :

$$\sigma(s) = \left( \frac{s}{a} \right)^m ; m = 1, 2, 3 \dots \quad (4.40)$$

Treba uočiti da za  $m = 0$  to odgovara homogenom slučaju iz prethodnog poglavlja.

Jednadžba (4.2) time postaje:

$$\frac{\partial^2 E(s)}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial E(s)}{\partial s} - \frac{(1-i)^2}{\delta^2} \left(\frac{s}{a}\right)^m E(s) = 0 \quad (4.41)$$

Ako napravimo supstituciju:

$$x = \frac{1-i}{m/2+1} \frac{a}{\delta} \left(\frac{s}{a}\right)^{m/2+1} \quad (4.42)$$

dobivamo modificiranu Besselovu diferencijalnu jednadžbu:

$$x^2 y'' + x y' - x^2 y = 0 \quad (4.43)$$

koja ima za rješenje modificirane Besselove funkcije:

$$E(s) = A I_0(x) + B K_0(x) \quad (4.44)$$

Drugo rješenje  $K(x)$  ima logaritamski singularitet u  $x \rightarrow 0$  pa je  $B = 0$ .

Time dobivamo rješenje:

$$E(s) = E_a \frac{I_0\left(\frac{1-i}{m/2+1} \frac{a}{\delta} \left(\frac{s}{a}\right)^{m/2+1}\right)}{I_0\left(\frac{1-i}{m/2+1} \frac{a}{\delta}\right)} \quad (4.45)$$

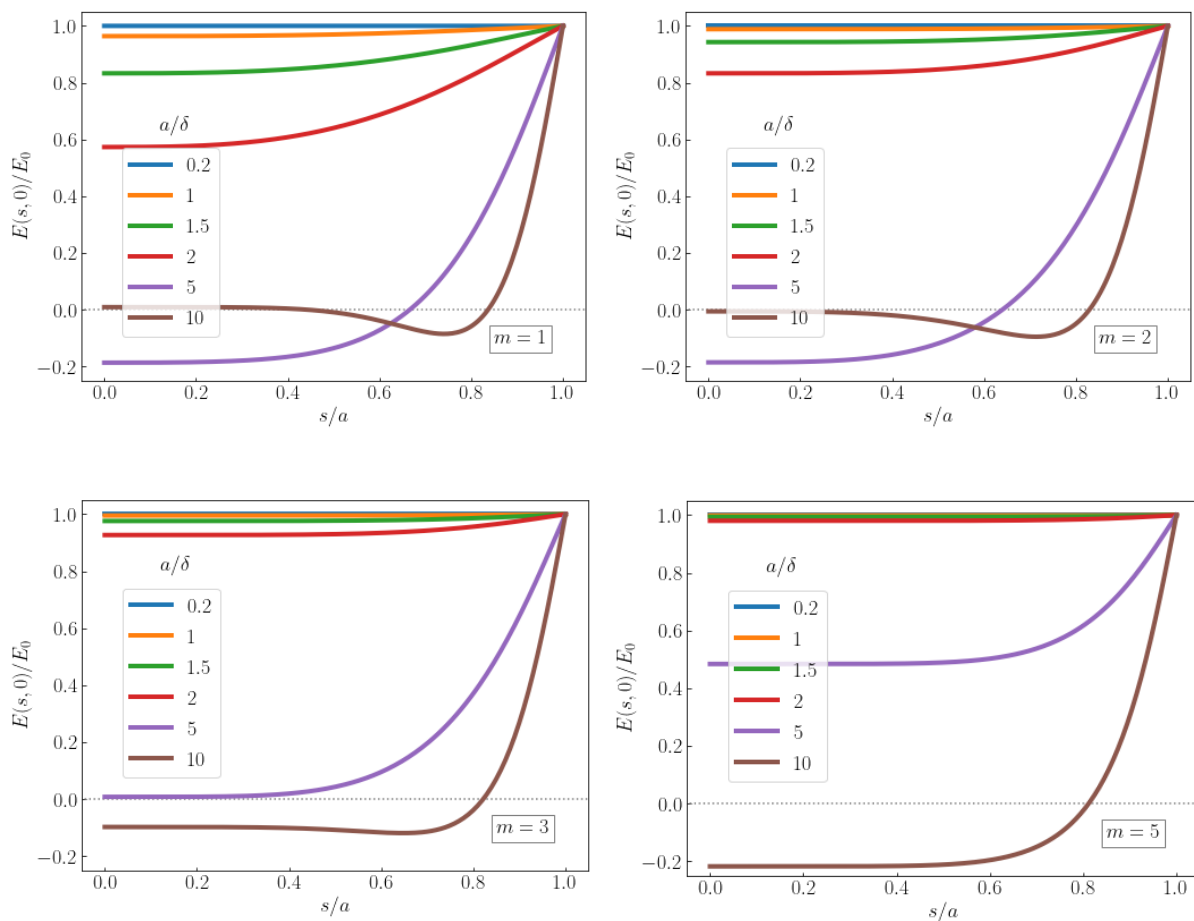
s rubnim uvjetom  $E(a) = E_a$ . Konačni izraz za električno polje je realni dio od

$$E(s) = E_a \operatorname{Re} \left[ \frac{I_0\left(\frac{1-i}{m/2+1} \frac{a}{\delta} \left(\frac{s}{a}\right)^{m/2+1}\right)}{I_0\left(\frac{1-i}{m/2+1} \frac{a}{\delta}\right)} e^{-i\omega t} \right] \quad (4.46)$$

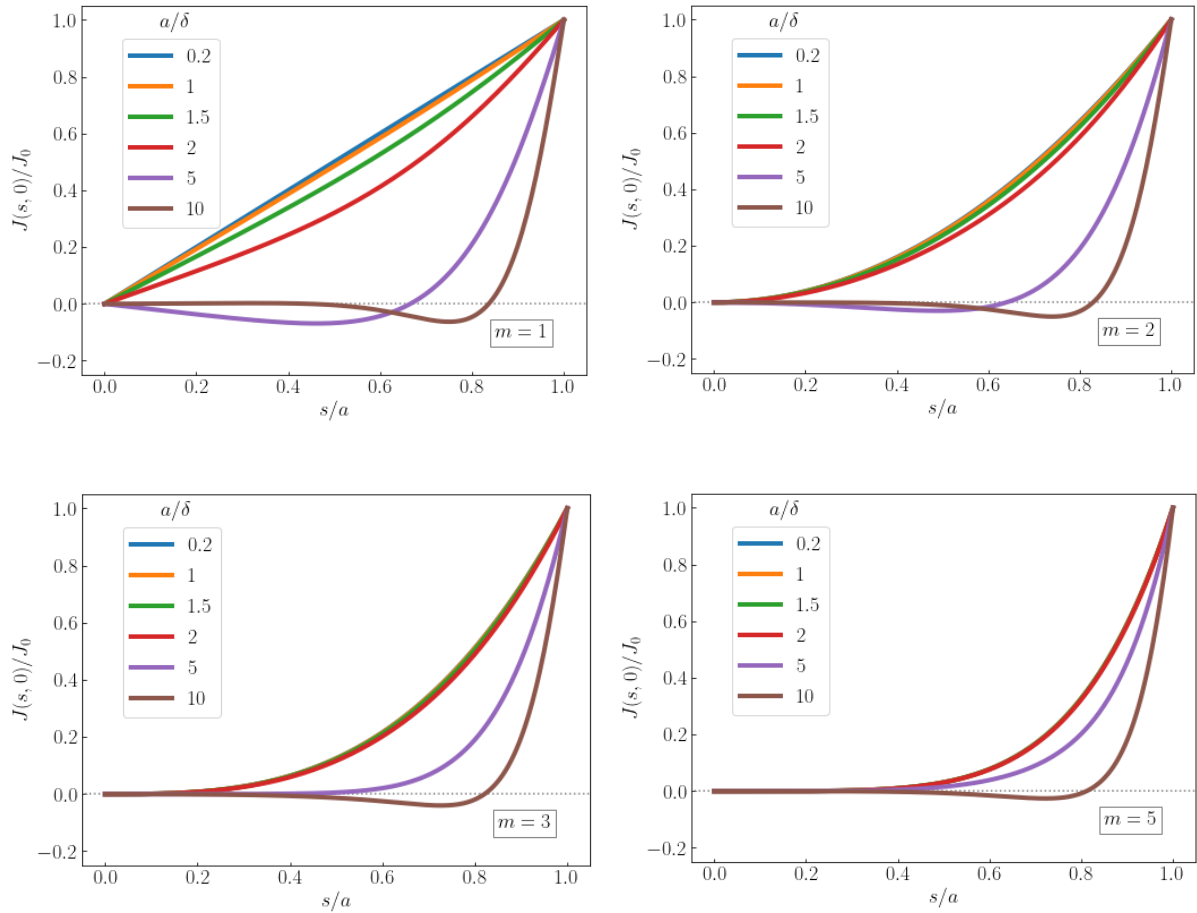
Iz ovoga slijedi i izraz za gustoću struje:

$$\begin{aligned} J(s, t) &= \sigma_0 \sigma(s) E(s, t) \\ &= J_0 \left(\frac{s}{a}\right)^m \operatorname{Re} \left[ \frac{I_0\left(\frac{1-i}{m/2+1} \frac{a}{\delta} \left(\frac{s}{a}\right)^{m/2+1}\right)}{I_0\left(\frac{1-i}{m/2+1} \frac{a}{\delta}\right)} e^{-i\omega t} \right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

Na slikama 4.4 i 4.5 prikazana je ovisnost električnog polja  $E(x, t=0)/E_0$  i struje  $J(x, t=0)/J_0$ , u ovisnosti o  $s/\delta$  za nekoliko vrijednosti omjera  $a/\delta$  i eksponente  $m = 1, 2, 3$  i  $5$ . (Vrijednost  $m = 0$  odgovara homogenom slučaju, vidi prethodno poglavlje.) Primijetimo da u dijelu vodiča struja teče u suprotnom smjeru, kada je  $\delta$  manji po polumjera žice, ili drugim riječima kada je frekvencije dovoljno visoka.



Slika 4.4: Ovisnost normaliziranog električnog polja o omjeru  $s/a$ , za nekoliko vrijednosti omjera  $a/\delta$  i za  $m = 1, 2, 3$  i  $5$ .



Slika 4.5: Ovisnost normalizirane struje o omjeru  $s/a$ , za nekoliko vrijednosti omjera  $a/\delta$  i za  $m = 1, 2, 3$  i  $5$ .

Kod izračuna otpora koristimo se već dobivenom relacijom:

$$R = \frac{L}{a} \frac{1}{\pi \sigma_0 \delta^2} \operatorname{Im} \left( \frac{E(a)}{E'(a)} \right) \quad (4.48)$$

S obzirom na izraz za električno polje na površini žice, slijedi:

$$\begin{aligned} E'(s) &= E_a \frac{I_0' \left( \frac{1-i}{m/2+1} \frac{a}{\delta} \left( \frac{s}{a} \right)^{m/2+1} \right)}{I_0 \left( \frac{1-i}{m/2+1} \frac{a}{\delta} \right)} \\ &= E_a \frac{I_1 \left( \frac{1-i}{m/2+1} \frac{a}{\delta} \left( \frac{s}{a} \right)^{m/2+1} \right) \frac{(1-i)a}{\delta} \left( \frac{s}{a} \right)^{m/2} \frac{1}{a}}{I_0 \left( \frac{1-i}{m/2+1} \frac{a}{\delta} \right)} \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$E'(a) = E_a \frac{I_1\left(\frac{1-i}{m/2+1} \frac{a}{\delta}\right) \frac{(1-i)}{\delta}}{I_0\left(\frac{1-i}{m/2+1} \frac{a}{\delta}\right)} \quad (4.50)$$

pa je otpor

$$\begin{aligned} R &= \frac{L}{a \pi \sigma_0 \delta^2} \operatorname{Im} \left( \frac{I_0\left(\frac{1-i}{m/2+1} \frac{a}{\delta}\right)}{I_1\left(\frac{1-i}{m/2+1} \frac{a}{\delta}\right) \frac{(1-i)}{\delta}} \right) \\ &= \frac{L}{a \pi \sigma_0 \delta} \operatorname{Im} \left( \frac{I_0\left(\frac{1-i}{m/2+1} \frac{a}{\delta}\right)}{I_1\left(\frac{1-i}{m/2+1} \frac{a}{\delta}\right) (1-i)} \right) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Prikladno je ovaj prikaz prikazati pomoću otpora bez skin efekta,  $R_0$ , tj. otpora za  $f = 0$ :

$$\begin{aligned} R_0^{(m)} &= \lim_{f \rightarrow 0} R = \lim_{a/\delta \rightarrow 0} R \\ &= \frac{L}{\pi a^2 \sigma_0} \lim_{a/\delta \rightarrow 0} \frac{a}{\delta} \operatorname{Im} \left( \frac{I_0\left(\frac{1-i}{m/2+1} \frac{a}{\delta}\right)}{I_1\left(\frac{1-i}{m/2+1} \frac{a}{\delta}\right) (1-i)} \right) \\ &= \frac{L}{\pi a^2 \sigma_0} \lim_{a/\delta \rightarrow 0} \frac{a}{\delta} \operatorname{Im} \left( \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{(1-i)^2}{m/2+1} \frac{a}{\delta}} \right) \\ &= \frac{L}{\pi a^2 \sigma_0} \left(\frac{m}{2} + 1\right) \operatorname{Im} \left( \frac{2}{(1-i)^2} \right) = \frac{L}{\pi a^2 \sigma_0} \left(\frac{m}{2} + 1\right) \\ &= R_0 \left(\frac{m}{2} + 1\right) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Ovdje smo iskoristili asimptotske izraze za modificirane Besselove funkcije za male vrijednosti argumenta:

$$I_\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \quad (4.53)$$

Slijedi izraz za otpor:

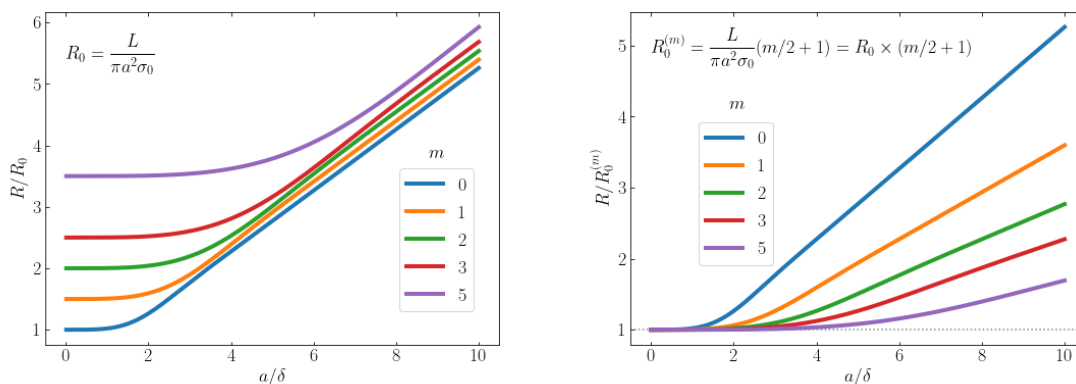
$$R = R_0^{(m)} \frac{a}{\delta} \operatorname{Im} \left[ \frac{I_0\left(\frac{1-i}{m/2+1} \frac{a}{\delta}\right)}{I_1\left(\frac{1-i}{m/2+1} \frac{a}{\delta}\right) (1-i)} \right] \quad (4.54)$$

Zanimljivo je da ovaj izraz podsjeća na izraz za otpor u homogenom slučaju, gdje debljinu skina  $\delta$  treba povećati za faktor  $(m/2 + 1)$ . Drugim riječima, ovisnost otpora o frekvenciji u ovom



modelu odgovara homogenom slučaju, to jest slijedi istu ovisnost, ali sa reskaliranom frekvencijom,  $f \rightarrow f/\sqrt{m/2 + 1}$ .

Na slici 4.6 prikazana je ovisnost otpora o omjeru  $a/\delta$  za  $m = 0$  (homogeni slučaj), 1, 2, 3 i 5. Primijetimo da što je nehomogenost veća (veći 'm'), to je utjecaj frekvencije na otpor manji. Razlog tome je što nehomogenost u našem modelu znači smanjivanje vodljivosti prema centru vodiča, a time i smanjivanje utjecaja područja s negativnom gustoćom struje.



Slika 4.6. Ovisnost normaliziranih otpora  $R/R_0$  (lijevo) i  $R/R_0^{(m)}$  (desno), o omjeru  $a/\delta$ , za  $m = 1, 2, 3$  i 5. Slučaj  $m = 0$  odgovara homogenom slučaju.

## 5. Zaključak

Skin efekt je pojava kod izmjenične struje da se ona raspodjeli kroz presjek vodiča tako da je gustoća struje najveća blizu površine. Magnetsko i električno polje na visokim frekvencijama ne prodiru kompletno u unutrašnjost vodiča, već samo do neke dubine koja se zove dubina prodiranja. Izmjenična struja teče najviše između površine vodiča i te dubine. Dubina prodiranja kao i sama funkcija gustoće struje imaju frekventnu ovisnost te se dubina prodiranja smanjuje s porastom frekvencije izmjenične struje, permeabilnosti i vodljivosti vodiča. Pojave koje smo razmatrali smo opisivali za kvazistacionarna električna i magnetska polja, to jest za polja koja sinkrono prate promjene struje (pobude). Za takva polja vrijedi mikroskopski Ohmov zakon, te je to za većinu materijala u frekventnom rasponu do infracrvenog zračenja. Znači radili smo sa dovoljno visokim frekvencijama, da efekt ima značaj, no ne preko infracrvenog spektra. Sve elektromagnetske pojave su u cijelosti opisane Maxwellovim jednažbama gdje smo u dobivenim diferencijalnim jednažbama drugog reda, koja su se svele na Besselove, odbacili valni član kako ne bismo morali raditi s pojavama koje su posljedica konačnosti brzine elektromagnetskih poremećaja kao što su retardirani potencijali i pripadna polja. Svrha našeg rada se može sažeti u pitanje: „Možemo li bušiti rupe u nekom vodiču i ispuniti ih sa slitinom lošije vodljivosti jer zbog oscilatorne prirode elektromagnetskih valova struja lokalno može teći kroz vodič i u suprotnom smjeru od ukupne kako bismo minimizirali ukupni Ohmski otpor?“.

Razmatrali smo jedno i dvodimenzionalne slučajeve, kako homogene tako i nehomogene vodljivosti. Za jedno i dvodimenzionalne slučajeve dokazali smo da ta minimizacija nije moguća, to jest da je otpor nehomogenog slučaja uvijek veći ili jednak onom homogenom.

Kod homogenog i nehomogenog jednodimenzionalnog slučaja dobivamo da su električno polje i gustoća struje po dijelovima suprotno orijentirani od onih ukupnih. Kod nehomogenog slučaja povećanjem  $l$  to jest omjera  $l/\delta$  krivulja na grafu teži homogenom slučaju što je i dokazano za otpor da se u limesu za beskonačni  $l$  dobiva točno isti izraz za otpor kao i kod homogenog slučaja.

Kod dvodimenzionalnog homogenog i nehomogenog slučaja, električno polje i gustoća struje su također po dijelovima suprotne orijentacije od one ukupne za određene omjere  $a/\delta$ . Dokazano je da otpor nehomogenog slučaja za frekvenciju  $f = 0$  težio k homogenom slučaju, to jest slijedi istu ovisnost samo sa reskaliranom frekvencijom  $f \rightarrow f/\sqrt{m/2 + 1}$ . Što je nehomogenost veća, to je utjecaj frekvencije na otpor manji jer je manja vodljivost prema centru žice, pa je i utjecaj struja suprotnog smjera također manji.

## 6. Metodički dio

### 6.1 Interaktivna istraživački usmjerena nastava fizike

Možemo reći da je obrazovanje u interesu i bitna odrednica neke države. Jedna od internacionalnih mjera kvalitete obrazovanja je i PISA test kojeg pišu petnaestogodišnjaci. PISA test određuje matematičke, prirodoslovne i čitalačke kompetencije učenika. Po rezultatima PISA testa za 2012 godinu Hrvatska je ispodprosječno pozicionirana (<https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-overview.pdf>, slajd 5). Također istraživanja provedena na rezultatima mature iz predmeta fizike ukazuju da učenicima nedostaje konceptualno znanje (M.Planinić; Uvodno.pdf; slajd 14; <http://metodika.phy.hr/claroline/>). To sve može ukazivati na zastarjelost školskog sustava. Fizika zbog svoje prirode gradiva prednjači kao dobar poligon za razvoj novih obrazovnih tehnika kao što je istraživački usmjerena nastava koja se od nedavno primjenjuje u školama te je vrsta interaktivne nastave.

Nastava fizike u hrvatskim školama često je ona tradicionalna. To je predavački stil nastave gdje je fokus na nastavnika koji reproducira gradivo. Od učenika se ne očekuje nikakav mentalni angažman već su oni pasivni sudionici nastave. Učenje se temelji na reprodukciji nastavnog sadržaja a ne na dubljem shvaćanju i stvaranju koncepta (M.Planinić; Uvodno.pdf; slajd 22; <http://metodika.phy.hr/claroline/>). Ideja nastave je razviti sposobnost znanstvenog zaključivanja (M. Planinić; Istraživački\_usmjerena\_nastava\_i\_interaktivne\_metode\_1.pdf;slajd3; <http://metodika.phy.hr/claroline/>). Da bi se ono ostvarilo treba potaknuti visok intelektualni angažman učenika a to se postiže interaktivnim metodama koje potiču aktivno učenje. Aktivno učenje je učenje gdje učenik sam sebi postavlja pitanja, istražuje pojavu i formira hipoteze (M.Planinić; Uvodno.pdf; slajd 23, 24; <http://metodika.phy.hr/claroline/>). Interaktivne metode osim što aktiviraju učenike služe nastavniku i za evaluaciju znanja učenika. Interaktivne metode u nastavi fizike su:

- Razredna rasprava
- Interaktivno izvođenje pokusa
- Konceptualna pitanja s karticama
- Računalne simulacije
- Kooperativno rješavanje zadataka

Upravo kombinacija razredne rasprave i interaktivnih pokusa bilo frontalnih ili učeničkih vođenih od strane nastavnika su temelj istraživački usmjerene nastave fizike.

Sam nastavni sat istraživački usmjerene nastave fizike se može podijeliti na tri djela: Uvod, središnji dio i završetak. U uvodnom djelu je cilj postići interakciju sa učenicima te im podići motivaciju. To se često postiže nekim uvodnim problemom iz stvarnog života ili demonstracijskim pokusom nove pojave. Uvodni dio završava pisanjem naslova na ploču nakon što se raspravom prođu ideje učenika. Središnji dio počinje glavnim istraživačkim pitanjem sata (ili pitanjima). Radi se frontalni pokus, više puta da učenici bolje uoče sastavnice ili se razred podijeli u grupe od po četiri učenika te se rade vođena istraživanja. Tada slijedi razvoj modela, bilo matematički ili konceptualan. Završni dio služi za učeničko utvrđivanje gradiva te povezivanje gradiva s njihovim životima. Također se mogu dati konceptualna pitanja s karticama čime nastavnik evaluira konceptualno shvaćanje gradiva od strane učenika (M. Planinić; Istraživački\_usmjerena\_nastava\_i\_interaktivne\_metode\_1.pdf; slajd 10; <http://metodika.phy.hr/claroline/>).

Po Rudolfu Krsniku nastavni sat se može podijeliti na pet faza:

1. Početno identificiranje učeničkih pretkonceptija
2. Uvodno postavljanje problemske situacije
3. Definiranje i konkretiziranje problema
4. Izvedba eksperimenata u funkciji rješavanja problema
5. Zaključna rasprava

U fazi „Početno identificiranje učeničkih pretkonceptija“ poželjno je identificirati neke ključne intuitivne učeničke ideje. To se može učiniti kratkim, kreativnim i kružnim test pitanjem. U srednjoj školi je to pitanje lakše formirati nego u osnovnoj školi pa je ova faza opcionalna u osnovnoj. U drugoj fazi je poželjno postaviti šire formuliran problem koji čak i nije do kraja formuliran. Ne treba navoditi koji koncept ili fizikalni zakon će se obrađivati. Najbolje je da se kao problem navede neka fizikalna pojava koju treba istražiti. Tu pojavu je potrebno prikazati demonstracijskim pokusom kad god je moguće. Od učenika se treba tražiti da predvide ishod eksperimenta podižući im tako pažnju i motivaciju. Pri tom im ne treba servirati koji su to parametri i fizikalne veličine u igri nego to tražiti da učenici prepoznaju. U trećoj fazi je bitno da učenici aktivno sudjeluju. Oni identificiraju fizikalne veličine koje su bitne za opisivanje promatrane pojave. Trebaju osmisliti koje će međuovisnosti istraživati i voditi računa o kontrolnim varijablama. Na kraju je dobro da nastavnik predoči pribor za vršenje eksperimenta te učenici sami pokušaju dizajnirati eksperiment. U četvrtoj fazi prije izvedbe eksperimenta učenici moraju sami predvidjeti ishod eksperimenta. To će im podići motivaciju i udubiti ih u problem. Također mogu na površinu isplivati pogrešne učeničke pretkonceptije koje nastavnik razrješuje. Idealno bi bilo kad bi eksperiment bio rađen u grupama od do četiri učenika vođen od strane nastavnika. Ako škole ne posjeduju dovoljno eksperimentalnih postava tada se pokus radi frontalno, ponavljajući više puta kako bi učenici bolje uočili međudjelovanja i stvorili poveznice. U zadnjoj petoj fazi se vodi razredna rasprava. Učenici daju različite prijedloge i formulacije a nastavnik potpitanjima usmjeruje raspravu. Zakon se formulira verbalno i formulom a konačnu formulaciju daju učenici koju zapisuju u bilježnicu. Tu učenici imaju pravu priliku divergentno razmišljati. Nastavnik mora voditi raspravu mnoštvom potpitanja no konačnu formulaciju daju učenici (R. Krsnik; Suvremene ideje u metodici nastave fizike; str 248.).

Istraživački usmjerena nastava fizike je ponovo ugledala svijetlo dana u našem školstvu i ona svojim načinom parira međunarodnim zahtjevima te je cilj postupne reforme Hrvatskog školstva.

## 6.2 Nastavna priprema: Električni otpor

STUDENT: Eduard Luka Mudri

ŠKOLA: Opća gimnazija

RAZRED: 2.

NASTAVNA JEDINICA: Električni otpor

PREDVIĐENI BROJ SATI: 1 školski sat

### OBRAZOVNI ISHODI

- FIZ SŠ C.2.7. Primjenjuje zakone elektrodinamike u električnom strujnom krugu.
- Objašnjava električni otpor.
- Tumači izraz za električni otpor vodiča.
- Objašnjava električnu otpornost kao svojstvo materijala.

## MEĐUPREDMETNE TEME

- uku A.4/5.4. Učenik samostalno kritički promišlja i vrednuje ideje
- uku A.4/5.3. Učenik kreativno djeluje u različitim područjima učenja
- uku B.4/5.4. Učenik samovrednuje proces učenja i svoje rezultate, procjenjuje ostvareni napredak te na temelju toga planira buduće učenje

## VRSTA NASTAVE: INTERAKTIVNA ISTRAŽIVAČKI USMJERENA NASTAVA

### NASTAVNE METODE (odabrati)

1. *Demonstracija pokusa*
2. *Učeničko izvođenje pokusa /mjerjenja u skupinama*
3. *Metoda razgovora - usmjerena rasprava*
4. *Konceptualna pitanja s karticama*

### OBLICI RADA

1. *Frontalni*
2. *Rad u skupinama*

### KORELACIJA S DRUGIM PREDMETIMA

### NASTAVNA POMAGALA I SREDSTVA

Ploča, kreda, projektor, unimetar (ako nije dostupan tada voltmetar i ampermetar), žice različitih svojstava (mogu se upotrijebiti i žice za izradu grijača elektroničkih cigareta jer su istih dimenzija a različitih materijala), pomična mjerka, baterija, otpornik

### LITERATURA

Fizika 2; Jakov Labor; Alfa

Fizika oko nas 2; V. Paar, A. Hrlec, K. V. Rešetar, M. Sambolek; Školska knjiga

Suvremene ideje u metodici nastave fizike: R. Krsnik: Školska knjiga 2008

University Physics with Modern Physics 14th edition; Young i Freedman;

## TIJEK NASTAVNOG SATA

- 1) Uvodni dio:

UVODNI PROBLEM: Često kada zimski dani postaju sve hladniji i hladniji posežemo za električnim grijalicama. One rade na principu da se električna energija pretvara u toplinu. Količina topline koju grijalica po vremenu stvori direktno ovisi o jačini struje koja prolazi kroz grijač. Sam grijač je neki namotani vodič koji se grije prolaskom struje a nalazi se ispred ventilatora. Kako ne možemo mijenjati napon utičnice kojim to svojstvom vodiča moramo regulirati jačinu struje koja prolazi grijacom?

- Očekujem da će se učenici sjetiti Ohmovog zakona i prisjetiti se električnog otpora

Na ploču zapisujem naslov: „Električni otpor“

2) Središnji dio: konstrukcija modela - fizikalni i matematički opis pojave

ISTRAŽIVAČKO PITANJE: O čemu ovisi električni otpor nekog vodiča?

- Prikupljam učeničke ideje
- Očekujem dosta ispravnih tvrdnji

Sada se razred podjeli u skupine po 4 učenika. Svaka grupa dobiva unimetar, različite žice i pomičnu mjerku te ravnalo. Ako škola nema unimetre tada se daju baterije, voltmetar i ampermetar te se sami učenički pokusi prilagode.

Pokus 1: Kako otpor ovisi o vrsti materijala vodiča?

Učenici mjere otpore različitih žica iste duljine i presjeka. Napravi se tablica:

Vrsta materijala	Otpor
Bakar	
Čelik	
Kantal	

Nastavnik obilazi grupe te ih pita:

Ovisi li otpor materijala o vrsti materijala? Kako su tvari građene? Jeli vam lakše kretati se razredom kada ima ili kada nema školskih klupa? Sudaraju li se elektroni s atomima vodiča?

- Slušam učenička razmišljanja i ideje
- Očekujem da će gotovo svi ispravno odgovoriti
- Očekujem da će učenici vođenom raspravom doći do zaključka da svaki materijal ima različitu atomsku strukturu i da upravo zbog toga imaju različite otpore

Nakon što se obidu sve grupe na ploču se napiše:

$\rho$  = otpornost

$$R \sim \rho$$

Pokus 2: Kako otpor ovisi o duljini vodiča?

Učenici mjere otpore žicama istog materijala i presjeka no različitih duljina. Napravi se tablica:

Duljina	Otpor

Nastavnik obilazi grupe te vodi raspravu s učenicima

Ovisi li otpor o duljini vodiča? Što se događa s otporom ako povećamo duljinu vodiča?

- -Prikupljam učenička razmišljanja
- -Očekujem da će većina ispravno uočiti

Za koju radnju trebate uložiti više energije, kada se gibate u duljem razredu zakrčenom klupama s jednog kraja na drugi ili u kraćem? Je li otpor proporcionalan o duljini vodiča ili obrnuto proporcionalan?

- Slušam učenička razmišljanja
- Sokratskim dijalogom vodim učenike kroz ideju slobodnih elektrona i njihovih gibanja u metalu
- Očekujem da će većina doći na ideju da je proporcionalno jer tada slobodni elektroni moraju proći kroz više prepreka i sudara s atomima metala

Nakon što se obiđu sve grupe na ploču se ispisiuje:

$l$  = duljina vodiča

$$R \sim l$$

Pokus 3: Kako otpor ovisi o površini presjeka vodiča?

Učenici mjere otpor žicama iste duljine i materijala. Mjeri se i promjer žice pomičnom mjerkom te se računa površina presjeka. Sve se bilježi u tablicu:

Promjer	Površina presjeka	Otpor

Obilaze se grupe.

Povećanjem površine presjeka, raste li ili pada otpor vodiča?

- Provjeravam učenička opažanja
- Očekujem da će većina dobro uočiti

Da li može više ili manje učenika istovremeno ići prema kraju razreda kad je on širi tj. veća mu je površina presjeka? Je li otpor proporcionalan ili obrnuto proporcionalan s površinom presjeka?

- Prikupljam učeničke ideje
- Očekujem da će većina ispravno uočiti
- Očekujem da će neki učenici doći vođenom raspravom do zaključka da je obrnuto proporcionalno jer većom površinom elektroni imaju više mjesta za usmjereno gibanje

Kad se obiđu sve grupe tada se na ploču ispisiše:

$S$  = površina presjeka

$$R \sim \frac{1}{S}$$

Sada učenici sami probaju u bilježnicu 3 prethodne relacije povezati u jednu formulu. Nakon nekog vremena pozove se jedan od učenika da na ploču zapiše svoju formulu te se traži od učenika da argumentira svoj zaključak. Ako je formula kriva prozove se još nekoliko učenika da zapišu svoje dok se ne dobije točna formula:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Sada se ponovi istraživačko pitanje na koje učenici daju odgovor te se učenicima ponovi još jednom da je električni otpor proporcionalan duljini vodiča i otpornosti koja je svojstvo materijala te obrnuto proporcionalan površini presjeka.

### 3) Završni dio : primjena modela

Na prezentaciji su konceptualna pitanja s karticama. Primjer pitanja je dolje.

1. Ako povećamo duljinu žice 2 puta dok presjek i materijal ostavljamo istim koliko se promjeni otpor?
  - a) Poveća se 2 puta
  - b) Smanji se 2 puta
  - c) Ostane isti
  
2. Ako povećamo duljinu 2 puta a presjek smanjimo 2 puta dok je materijal isti, koliko se promjeni otpor žice?
  - a) Poveća se 4 puta
  - b) Smanji se 8 puta
  - c) Poveća se 8 puta

## PLAN PLOČE

### Električni otpor

R – električni otpor, mjeri se u omima [ $\Omega$ ]

- Svojstvo svih materijala
- Posljedica nečistoća i defekata u kristalno rešetci materijala

$\rho$  = otpornost

$$R \sim \rho$$

l = duljina vodiča

$$R \sim l$$

S = površina presjeka

$$R \sim \frac{1}{S}$$

Električni otpor je proporcionalan otpornosti materijala te duljini vodiča a obrnuto proporcionalan površini poprečnoga presjeka

$$R = \rho \frac{l}{S}$$



## Literatura

- [1] Smolić, I.: Matematičke metode fizike. Zagreb: Prirodoslovno-matematički fakultet, 2018
- [2] Butkov, E.: Mathematical physics. New York: St. John's university, 1973
- [3] Abramowitz, M., Stegun, I.: Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. Tenth printing, 1972
- [4] Griffiths, D. J.: Introduction to electrodynamics. Reed college, 1999
- [5] Jackson, David J.: Classical Electrodynamics third edition. New Jersey, Wiley and Sons, 1998
- [6] Landau, L. D., Lifšic, E. M.: Elektromagnetika kontinualnih sredina. Univerzitet u Beogradu, 1961
- [7] Kazimierczuk, M. K.: High-frequency magnetic components second edition. Wiley, 2014
- [8] Purcell, E. M.: Elektricitet i magnetizam, Zagreb: Tehnička knjiga, 1988
- [9] Young, H.D., Freedman, R. A., Ford, L.: University physics 12th edition, Pearson, 2008
- [10] Labor, J.: Fizika 2, Zagreb: Alfa, 2008
- [11] Paar, V., Hrlec, A., Rešetar, K. V., Sambolek, M.: Fizika oko nas 2, Zagreb: Školska knjiga, 2020
- [12] Krsnik, R.: Suvremene ideje u metodici nastave fizike. Zagreb: Školska knjiga, 2008
- [13] Bessel functions, Wikipedia, [https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function)
- [14] Derivation of skin effect, Brandeis university, [http://www.bndhep.net/Lab/Derivations/Skin\\_Effect.html](http://www.bndhep.net/Lab/Derivations/Skin_Effect.html)
- [15] Lamb, H.: On electrical motions in spherical conductor. Cambridge: Trinity college, 1883