SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Matko Ban

BEZUVJETNE BAZE BANACHOVIH PROSTORA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, veljača, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovome radu cilj nam je proučiti i opisati osnovna svojstva bezuvjetnih baza.
Na početku ćemo uvesti rezultate iz drugih područja koji su nam potrebni za opis problema, koje nećemo dokazivati.
Zatim ćemo opisati način promatranja baza na Banachovim prostorima i njihova svojstva, počevši od Hamelovih baza (koje, u konačnodimenzionalnim slučajevima nazivamo samo bazama), uz posebno pridodanu pažnju Schauderovim bazama i svojstvu ekvivalencije baza.
Nakon toga pozabaviti ćemo se svojstvima baza: definicijom, svojstvima minimalnosti i biortogonalnosti, te karakterizacijom Schauderovih baza.
Na kraju ćemo opisati bezuvjetne baze. Proučiti ćemo njihova osnovna svojstva i karakterizaciju, te uvjete primjene na Schauderov sustav.

Poglavlje 1

Uvodni pojmovi

U ovom poglavlju navesti ćemo rezultate koji će nam biti potrebni za naknadna promatranja i dokaze.

Teorem 1.0.1. *(Weierstrassov teorem o aproksimaciji)*
Ako je f neprekidna realna funkcija na $[a, b]$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljan, tada postoji polinom p na $[a, b]$ takav da vrijedi:

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

Drugim riječima, bilo koja neprekidna funkcija na zatvorenom i ograničenom intervalu može se proizvoljno dobro aproksimirati polinomima na tom intervalu.

Primjer 1.0.2. *Promatramo Banachov prostor $C[a, b]$ uz uniformnu normu. Po Weierstrassovom teoremu o aproksimaciji vrijedi da, ako je $f \in C[a, b]$ i $\varepsilon > 0$, tada postoji polinom $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ takav da vrijedi $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$. Ekvivalentno je reći da je niz monoma $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ fundamentalan u $C[a, b]$ (što pak povlači da je $C[a, b]$ separabilan). No, ne možemo svaku funkciju $f \in C[a, b]$ zapisati kao $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$, uz konvergenciju reda u uniformnoj normi. Ovako definiran red nazivamo redom potencija i, ako on konvergira za neki x, tada konvergira apsolutno za svaku točku t, uz $|t| < r$, gdje je $r = |x|$. Dodatno, tako definirana funkcija f je beskonačno diferencijabilna na $(-r, r)$. Na primjer, funkciju $f(x) = |x-c|$ gdje je $a < c < b$, ne možemo zapisati kao red potencija iako pripada zatvorenoj linearnoj ljusci od $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$. Izrazimo li ovaj rezultat u terminima koje ćemo kasnije koristiti možemo reći da, iako je $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ fundamentalan u $C[a, b]$, on ne čini bazu za $C[a, b]$.*
Dodatna činjenica koju treba navesti, a dokazana je u [1]*, je da je za $f \in C[a, b]$ moguće eksplicitno konstruirati polinome p_n takve da je $\|f - p_n\|_\infty \to 0$ za $n \to \infty$.*

Primjer 1.0.3. *(Standardna baza za c_0)*
$\forall n \in \mathbb{N}$, neka je δ_n niz $\delta_n = (\delta_{nk})_{k \in \mathbb{N}} = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$, gdje je 1 n-ti član. Linearna ljuska

od $\{\delta_n\}$ *je* $span\{\delta_n\} = c_{00}$. *Za* $x = (x_n) \in c_0$, *stavimo* $s_N = \sum_{n=1}^{N} x_n\delta_n$. *Tada, pošto je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, *imamo:*

$$\lim_{N\to\infty} \|x - s_N\|_{l^\infty} = \lim_{N\to\infty} \sup_{n>N} |x_n| = \limsup_{n\to\infty} |x_n| = 0.$$

Zato je:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\delta_n, \tag{1.1}$$

red konvergira s obziom na $\|\cdot\|_{l^\infty}$, *i* $c_0 \subseteq l^\infty$. *Nadalje, skalari* x_n *u jednadžbi (*1.1*) su jedinstveni. Dakle, svaki x je limes elemenata iz* $span\{\delta_n\}$, *pa je* $\{\delta_n\}$ *fundamentalan u* c_0. *No, vrijedi i više. Koristeći opet notaciju kojom ćemo se služiti kasnije, činjenica da svaki* $x \in c_0$ *ima jedinstvenu reprezentaciju danu u (*1.1*) povlači da* $\{\delta_n\}$ *tvori bazu za* c_0. *Ne samo da znamo da su konačne linearne kombinacije vektora* δ_n *guste u* c_0, *već možemo i zapisati svaki element iz* c_0 *kao jedinstvenu "beskonačnu linearnu kombinaciju" od* δ_n. *Stoga vrijedi:*

$$c_0 = \overline{span}\{\delta_n\} = \{\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\delta_n : c_n \in \mathbb{F} \text{ } i \lim_{n\to\infty} c_n = 0\}.$$

Dodatno, $\{\delta_n\}$ *nazivamo standardnom bazom za* c_0.

Lema 1.0.4. *Neka su M i N zatvoreni ortogonalni podprostori od Hilbertovog prostora H.*
a) $M \oplus N$ *je zatvoren podprostor od H.*
b) $M \oplus M^\perp = H$.

Teorem 1.0.5. *Ako je* $\{x_n\}$ *ortonormiran niz u Hilbertovom prostoru H, tada vrijede sljedeće tvrdnje:*
a) Besselova nejednakost: $\sum |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ *za svaki* $x \in H$.
b) Ako $x = \sum c_n x_n$ *konvergira, tada je* $c_n = \langle x, x_n\rangle$.
c) $\sum c_n x_n$ *konvergira* $\Leftrightarrow \sum |c_n|^2 < \infty$.
d) $x \in \overline{span}\{x_n\} \Leftrightarrow x = \sum\langle x, x_n\rangle x_n$.
e) Ako je $x \in H$, *tada je* $p = \sum\langle x, x_n\rangle x_n$ *ortogonalna projekcija od x na* $\overline{span}\{x_n\}$.

Napomena 1.0.6. *(Trigonometrijski sustav)*
Neka je $H = L^2(T)$ *prostor funkcija koje su 1-periodičke na* $\mathbb{R}$ *i integrabilne u smislu Lebesgueovog integrala na intervalu* $[0, 1]$. *Norma i skalarni produkt su definirani integriranjem po intervalu* $[0, 1]$, *tj.*

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt \quad i \quad \|f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |f(t)|^2dt.$$

Za svaki $n \in \mathbb{Z}$, *definiramo funkciju* e_n *kao*

$$e_n(t) = e^{2\pi int}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ nazivamo trigonometrijski sustav. Za cijele brojeve $m \neq n$,

$$\langle e_m, e_n\rangle = \int_0^1 e_m(t)\overline{e_n(t)}dt = \int_0^1 e^{-2\pi i(m-n)t}dt = \frac{e^{-2\pi i(m-n)}}{-2\pi i(m-n)} = 0.$$

Dakle, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je ortogonalan niz u $L^2(T)$, i može se pokazati da je ortonormiran. Dodatno, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je ortonormirana baza za $L^2(T)$.
Ako je $f \in L^2(T)$, tada $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f, e_n\rangle e_n$ nazivamo Fourierov red od f, a $(\langle f, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{Z}}$ je niz Fourierovih koeficijenata od f. Fourierove koeficijente označavamo s

$$\hat{f}(n) = \langle f, e_n\rangle = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Elementi prostora $L^2(T)$ su 1-periodičke realne funkcije. Nekad je praktičnije raditi sa prostorom $L^2[0,1]$ koji se sastoji od kompleksnih kvadratno integrabilnih funkcija čija je domena interval $[0,1]$. Sve navedene tvrdnje se jednako odnose na $L^2[0,1]$, tj. $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je ortonormirana baza za $L^2[0,1]$. Štoviše, radi periodičnosti, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je baza za bilo koji $L^2[I]$, gdje je I bilo koji interval u $\mathbb{R}$ duljine 1.

Napomena 1.0.7. *(Bilinearna forma)*
Koristiti ćemo X^* kao oznaku dualnog prostora od normiranog prostora X, te x^* kao oznaku za element prostora X^*. Napomenimo da je x^* samo funkcional na X, te nije dobiven iz specifičnog elementa $x \in X$. Dakle, x^* je preslikavanje iz X u $\mathbb{F}$, a vrijednost od x^* u proizvoljnoj točki $x \in X$ je $x^*(x)$.
Ako je dan linearni funkcional x^*, označiti ćemo djelovanje na element x iz domene kao

$$\langle x, x^*\rangle = x^*(x). \tag{1.2}$$

Primjetimo da ovime ne označavamo skalarni produkt, već vrijednost funkcionala x^* u točki x.
Uz ovakve oznake, linearnost od x^* zapisujemo kao:

$$\forall x, y \in X, \quad \forall a, b \in \mathbb{F}, \quad \langle ax + by, x^*\rangle = a\langle x, x^*\rangle + b\langle x, y^*\rangle,$$

Kao posljedicu neprekidnosti od x^* imamo:

$$x_n \to x \quad \Rightarrow \quad \langle x_n, x^*\rangle \to \langle x, x^*\rangle.$$

Kako je norma za skalarno polje $\mathbb{F}$ zapravo apsolutna vrijednost, operatorska norma linearnog funkcionala x^* dana je s

$$\|x^*\| = \sup_{\|x\|_X=1} |\langle x, x^*\rangle|.$$

Ponekad pišemo $\|x^*\|_{X^*}$ *kako bismo naglasili normu od* x^* *kao elementa od* X^*.
Oznaku $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *iz jednadžbe* (1.2) *nazivamo oznakom bilinearne forme, jer je ne samo linearna kao funkcija od* x, *već je linearna i kao funkcija* x^*. *Dakle, za fiksni* $x \in X$ *imamo:*

$$\forall x^*, y^* \in X^* \quad \forall a, v \in \mathbb{F}, \quad \langle x, ax^* + by^*\rangle = a\langle x, x^*\rangle + b\langle x, y^*\rangle.$$

Teorem 1.0.8. *(Dualni prostor za* l^p*)*
Neka je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Fiksirajmo $1 \leq p \leq \infty$. *Za svaki* $y \in l^q$, *neka je*

$$\mu_y(x) = \langle x, \mu_y\rangle = \textstyle\sum_n x_n y_n, \quad x \in l^p.$$

Tada je preslikavanje $T : l^q \to (l^q)^*$ *dano s* $T(y) = \mu_y$ *linearna izometrija s* l^q *u* $(l^q)^*$, *a ako vrijedi i* $p < \infty$, *ono je izometrički izomorfizam.*

Teorem 1.0.9. *(Rieszov teorem o reprezentaciji)*
Neka je H *Hilbertov prostor, te za svaki* $y \in H$ *definiramo* $\mu_y : H \to \mathbb{F}$ *kao:*

$$\mu_y(x) = \langle x, y\rangle, \quad x \in H.$$

Naglasimo da se tu zaista radi o skalarnom produktu. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:
a) $\mu_y \in H^*$ *i* $\|\mu_y\| = \|y\|$ *za svaki* $y \in H$.
b) Preslikavanje $y \mapsto \mu_y$ *je antilinearna bijektivna izometrija sa* H *u* H^*.

Teorem 1.0.10. *(Hahn-Banach)*
Neka je X *normirani prostor i neka je* M *pravi potprostor od* X. *Ako je* $\lambda \in M^*$, *tada postoji* $\Lambda \in X^*$ *takav da vrijedi*

$$\Lambda|_M = \lambda \quad i \quad \|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{M^*}.$$

Korolar 1.0.11. *(Hahn-Banach)*
Neka je X *normirani prostor. Ako vrijedi:*
a) M *je zatvoreni potprostor od* X.
b) $x_0 \in X \setminus M$.
Uz oznaku $d = d(x_0, M) = inf\{\|x_0 - m\| : m \in M\} > 0$, *tada postoji* $\Lambda \in X^*$ *takav da vrijedi:*

$$\langle x_0, \Lambda\rangle = 1, \quad \Lambda|_M = 0, \quad i\ \|\Lambda\|_{X^*} = \frac{1}{d}.$$

Korolar 1.0.12. *Neka je* X *Banachov prostor. Tada je* $\{x_n\} \subseteq X$ *fundamentalan ako i samo ako vrijedi:*

$$x^* \in X^*\ i\ \langle x_n, x^*\rangle = 0\ za\ svaki\ n \quad \Rightarrow \quad x^* = 0.$$

Definicija 1.0.13. *(Prirodno ulaganje od X u X^{**})*
Neka je X normirani prostor.
a) Preslikavanje $\pi : X \to X^{**}$ definirano na sljedeći način:

$$\text{Za } x \in X, \quad \pi(x) : X^* \to \mathbb{F}, \quad \langle x^*, \pi(x)\rangle = \langle x, x^*\rangle, \quad x^* \in X^*,$$

zovemo prirodno ulaganje ili kanonsko ulaganje s X u X^{**}.
b) Ako je prirodno ulaganje od X u X^{**} surjektivno, kažemo da je X refleksivan.

Vrijedi i: $\pi(x)$ je ograničeni linearni funkcional na X^*, uz operatorsku normu:

$$\|\pi(x)\|_{X^{**}} = \|x\|_X.$$

Također, Preslikavanje

$$\pi : X \to X^{**}$$

$$x \longmapsto \pi(x),$$

je linearna izometrija s X u X^{**}.

Teorem 1.0.14. *(Banach-Steinhaus)*
Neka su X i Y Banachovi prostori, a $\mathbb{B}(X, Y)$ skup svih ograničenih linearnih operatora s X u Y. Ako je $A_n \in \mathbb{B}(X, Y)$ za $n \in \mathbb{N}$ i $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$ postoji za svaki $x \in X$, tada je $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ i $\|A\| \leq \sup_n \|A_n\| < \infty$.

Definicija 1.0.15. *Neka su X i Y normirani prostori.*
a) Linearni operator $T : X \to Y$ zovemo topološki izomorfizam ako je T bijekcija i ako su T i T^{-1} neprekidni.
b) Kažemo da su X i Y topološki izomorfni ako postoji topološki izomorfizam $T : X \to Y$.

Napomena 1.0.16. *Neka je X Banachov prostor. Za $T \in \mathbb{B}(X)$, definiramo $T^0 = I$.*
Ako vrijedi $\|T\| < 1$, tada je $I - T$ topološki izomorfizam sa X na samog sebe i vrijedi $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$, gdje red konvergira u operatorskoj normi.

Definicija 1.0.17. *(Bezuvjetna konvergencija)*
Neka je $(x_n)_n$ niz u normiranom prostoru X. Kažemo da red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira bezuvjetno u X ako red $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ konvergira (obično) u X za svaku permutaciju σ skupa $\mathbb{N}$.

Teorem 1.0.18. [2] *Označimo sa I skup svih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$: $I = \{F \subseteq \mathbb{N} : F$ je konačan$\}$.*
Za niz $\{x_n\}$ u Banachovom prostoru X, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:
a) $\sum x_n$ konvergira bezuvjetno.
b) $\lim_F \sum_{n\in F} x_n$ postoji.
c) Za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $N > 0$ takav da vrijedi:

$$\forall \text{ konačan } F \subseteq \mathbb{N}, \quad min(F) > N \Rightarrow \|\sum_{n\in F} x_n\| < \varepsilon.$$

d) $\sum x_{n_j}$ *konvergira za svaki rastući niz* $0 < n_1 < n_2 \dots$.
e) $\sum \varepsilon_n x_n$ *konvergira za svaki izbor predznaka, tj za* $\varepsilon_n = \pm 1$.
f) $\sum \lambda_n x_n$ *konvergira za svaki ograničen niz skalara* (λ_n).
g) $\sum |\langle x_n, x^*\rangle|$ *konvergira uniformno s obzirom na:*

$$\lim_{N\to\infty} \sup\{\sum_{n=N}^{\infty} |\langle x_n, x^*\rangle| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\} = 0.$$

Poglavlje 2

Baze u Banachovim prostorima

Kako je svaki Banachov prostor ujedno i vektorski prostor, to znači da ima algebarsku ili Hamelovu bazu. No, time smo se ograničili samo na konačne linearne kombinacije vektora, dok u bilo kojem normiranom prostoru ima smisla promatrati beskonačne redove. Restrikcija na konačne linearne kombinacije, dok radimo na beskonačnodimenzionalnom prostoru, nije nam dovoljno dobra.

2.1 Hamelove baze

Počinjemo sa Hamelovim bazama, s kojima smo se upoznali u linearnoj algebri.

Definicija 2.1.1. *(Hamelova baza)*
Neka je V vektorski prostor. Niz vektora $\{x_i\}_{i\in I}$ je Hamelova baza za V ako vrijedi:
a) Linearna ljuska od $\{x_i\}_{i\in I}$ je V, odnosno $span\{x_i\}_{i\in I} = V$, i
b) $\{x_i\}_{i\in I}$ je linearno nezavisan.

Uočimo da od indeksnog skupa I iz prethodne definicije ne očekujemo da bude prebrojiv. Također, ekvivalentne formulacije prethodnoj definiciji su sljedeće:
$\{x_i\}_{i\in I}$ je Hamelova baza za V ako i samo ako svaki nenul vektor $x \in V$ možemo zapisati kao $x = \sum_{k=1}^{N} c_k x_{i_k}$ za jedinstveni izbor indeksa $i_1, ..., i_N \in I$ i jedinstvene nenul skalare $c_1, ..., c_N$ ili, drugačije formulirano, da svaki $x \in V$ možemo na jedinstven način zapisati kao $x = \sum\limits_{i\in I} a_i(x)x_i$ za jedinstven odabir skalara $a_i(x)$ od kojih je najviše konačno mnogo nenul elemenata.
U linearnoj algebri, pojam baza se odnosi na Hamelovu bazu. No, mi ćemo termin baza koristiti za definiciju baze na Banachovim prostorima, iz kasnije definicije (2.2.2).
Nažalost, Hamelova baza za beskonačnodimenzionalan Banachov prostor mora biti neprebrojiva, a s takvim bazama je često nespretno za raditi, stoga ćemo u sljedećem poglavlju

uvesti pojam baze za Banachov prostor koja nam omogućava upotrebu "beskonačnih linearnih kombinacija", umjesto samo konačnih, na koje su Hamelove baze ograničene.

Primjer 2.1.2. *Neka je X beskonačnodimenzionalan Banachov prostor, i neka je* $\{x_i\}_{i\in I}$ *Hamelova baza za X. Podijelimo li svaki vektor s njegovom normom, možemo pretpostaviti da je* $\|x_i\| = 1$, *za svaki* $i \in I$. *Neka je* $J_0 = \{j_1, j_2, ...\}$ *neki prebrojivi podniz od I. Definiramo funkciju sa skalarnim vrijednostima* μ *na* $\{x_i\}_{i\in I}$ *tako da stavimo* $\mu(x_{j_n}) = n$ *za* $n \in \mathbb{N}$ *i* $\mu(x_i) = 0$ *za* $i \in I \setminus J_0$. *Tada proširimo* μ *linearno na cijeli X: svaki nenul vektor* $x \in X$ *ima jedinstvenu reprezentaciju* $x = \sum_{n=1}^{N} c_k x_{i_k}$, *za neke* $i_1, ..., i_N \in I$ *i nenul skalare* $c_1, ..., c_N$, *pa možemo definirati* $\mu(x) = \sum_{n=1}^{N} c_k \mu(x_{i_k})$. *Stavimo još* $\mu(0) = 0$. *Tada je* μ *linearni funkcional na X, ali kako je* $\|x_{j_n}\| = 1$, *a* $|\mu(x_{j_n})| = n$, *funkcional* μ *je neograničen.*

Primjer 2.1.3. *Neka je X beskonačnodimenzionalni Banachov prostor. Tada je svaka Hamelova baza za X neprebrojiva.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno da X ima prebrojivu bazu. Označimo sa X_n linearnu ljusku vektora $\{x_1, ..., x_n\}$. Tada vrijedi:
$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.
Svaki X_n je konačnodimenzionalan potprostor od X, pa je zatvoren.
Svaki X_n je pravi potprostor od X, pa je $IntX_n = \emptyset$, $\forall n$.
Dakle, vrijedi $Int\overline{X_n} = IntX_n = \emptyset$. To znači da je X_n nigdje gust skup, a X je prebrojiva unija nigdje gustih podskupova.
No, to je u kontradikciji sa Baire-ovim teoremom, koji tvrdi da neprazan potpun metrički prostor sa nepraznom unutrašnjosti nije prebrojiva unija nigdje gustih skupova.
Dakle, X nema prebrojivu Hamelovu bazu. □

2.2 Baze

Svaki vektorski prostor ima Hamelovu bazu koja je linearno nezavisna i čija linearna ljuska jest cijeli prostor. No, kada radimo sa normiranim prostorima, možemo promatrati beskonačne redove. Prisjetimo se definicije konvergencije:

Definicija 2.2.1. *Neka je* $\{x_n\}_n$ *niz u normiranom prostoru X. Red* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *konvergira k vektoru* $x \in X$ *ako je* $x = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ *gdje je* $\{s_n\}_n$ *niz parcijalnih suma;* $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.
Red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *u normiranom prostoru konvergira apsolutno ako konvergira red nenegativnih brojeva* $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.

Bazu u Banachovom prostoru definiramo na sljedeći način:

Definicija 2.2.2. *(Baza)*
Niz $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ u Banachovom prostoru X naziva se baza od X ako vrijedi:

$$\forall x \in X, \quad \exists \text{ jedinstveni skalari } a_n(x) \text{ takvi da vrijedi } x = \sum_n a_n(x) x_n \tag{2.1}$$

Red u jednadžbi (2.1) nazivamo prikazom vektora x u bazi $\{x_n\}$.

Napomena 2.2.3. *a) Ako je $\{x_n\}$ baza, tada, zbog jedinstvenosti reprezentacije svakog $x \in X$ kao $x = \sum a_n(x)x_n$, mora vrijediti $x_n \neq 0$, za svaki n. Zato je niz $\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\}$ baza za X koja se sastoji od jediničnih vektora. Takvu bazu nazivamo normaliziranom.*

b) Po definiciji baze, $\{x_n\}$ je niz. Ponekad možemo imati neprebrojiv sustav sa svojstvima poput baze, ali njih nećemo tako nazivati kako bi se izbjegle zabune.

c) Po definiciji baze, $x = \sum a_n(x)x_n$ konvergira u normi.

d) Ako je $\{x_n\}$ baza za X, tada je $\{x_n\}$ prebrojiv fundamentalan niz u X. To znači da skup svih konačnih linearnih kombinacija $\sum_{n=1}^{N} c_n x_n$ sa racionalnim koeficjentima c_n tvori prebrojiv gust podskup od X, što znači da je X separabilan. Može se pokazati da postoji separabilan, refleksivan Banachov prostor koji ne posjeduje niti jednu bazu, odnosno ne vrijedi tvrdnja da svi separabilni Banachovi prostori imaju bazu.

U sljedećoj definiciji promatramo određene tipove baza koje imaju dodatna zanimljiva svojstva:

Definicija 2.2.4. *Neka je $\{x_n\}$ baza za Banachov prostor X.*
a) $\{x_n\}$ je bezuvjetna baza ako red u jednadžbi (2.1) konvergira bezuvjetno za svaki x. Bazu koja nije bezuvjetna nazivamo uvjetna baza.
b) $\{x_n\}$ je apsolutno konvergentna baza ako red u jednadžbi (2.1) konvergira apsolutno, za svaki x.
c) $\{x_n\}$ je ograničena baza ako je $\{x_n\}$ ograničen u normi odozgo i odozdo, odnosno ako je $0 < inf\|x_n\| \leq sup\|x_n\| < \infty$
d) $\{x_n\}$ je normalizirana baza ako je $\|x_n\| = 1$, za svaki $n \in \mathbb{N}$

Rad sa bezuvjetnim bazama ima veliku prednost: poredak indeksnog skupa je nebitan. Zato bilo koji prebrojiv skup možemo koristiti kao indeksni skup za bezuvjetne baze, dok u radu s uvjetnim bazama kojima je indeksni skup bilo koji osim $\mathbb{N}$, moramo precizirati poredak indeksnog skupa.
Ponekad ćemo raditi s nizovima koji su baze za neki zatvoreni potprostor od X, a ne za cijeli X. Zato uvodimo sljedeću definiciju:

Definicija 2.2.5. *(Bazni niz)*
Neka je X Banachov prostor. Niz $\{x_n\}$ u X je bazni niz u X ako čini bazu za $\overline{span}\{x_n\}$.

Većina terminologije koju upotrebljavamo za baze vrijedi i za bazne nizove. Na primjer, $\{x_n\}$ je bezuvjetan bazni niz ako je također i bezuvjetna baza za $\overline{span}\{x_n\}$, itd.

Napomena 2.2.6. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$, definiramo $y_n = (1, ..., 1, 0, 0, ...)$, gdje se 1 ponavlja n puta. Tada je $\{y_n\}$ normalizirana uvjetna baza za c_0.*

2.3 Schauderove baze

Pretpostavimo da je $\{x_n\}$ baza za Banachov prostor X. Tada jedinstvenost u jednadžbi (2.1) jamči da su koeficjenti $a_n(x)$ linearne funkcije s varijablom x, te da je niz $\{a_n\}$ jedinstveno određen pomoću $\{x_n\}$.

Definicija 2.3.1. *(Koeficijentni funkcionali)*
Neka je $\{x_n\}$ baza za Banachov prostor X. Niz linearnih funkcionala $\{a_n\}$, definiran jednadžbom (2.1) naziva se pripadni niz koeficijentnih funkcionala ili jednostavnije, koeficijentni funkcionali, za $\{x_n\}$.

Intuitivno, od linearnih funkcionala očekujemo da su ”najjednostavnije” moguće funkcije na vektorskom prostoru, te intuitivno izgleda da nešto toliko jednostavno poput linearnih funkcionala mora biti neprekidno. Međutim, postoje neograničeni linearni funkcionali na svakom beskonačnodimenzionalnom normiranom prostoru, pa je prvo pitanje koje se trebamo zapitati o bazi: jesu li pripadni koeficijentni funkcionali neprekidni?

Definicija 2.3.2. *(Schauderova baza)*
Neka je $\{x_n\}$ baza za Banachov prostor X, te neka je $\{a_n\}$ pripadni niz koeficijentnih funkcionala. Tada za $\{x_n\}$ kažemo da je Schauderova baza za X ako je svaki koeficijentni funkcional a_n neprekidan.

Dakle, baza je Schauderova ako je $a_n \in X^*$, za svaki n. U teoremu (2.3.7), dokazati ćemo netrivijalnu činjenicu da je svaka baza u Banachovom prostoru ujedno i Schauderova baza.

Slijedi nekoliko primjera baza za koje već imamo eksplicitne izraze za koeficijentne funkcionale. U svakom slučaju možemo vidjeti da su koeficijentni funkcionali neprekidni.

Primjer 2.3.3. *a) Neka je $\{e_n\}$ ortonormirana baza za separabilan Hilbertov prostor H. Reprezentacija vektora $x \in H$ u bazi je $x = \sum \langle x, e_n \rangle e_n$, stoga su koeficijentni funkcionali: $a_n(x) = \langle x, e_n \rangle$, a oni su neprekidni u H. Uočimo da, u smislu identifikacije H^* sa H dane u Rieszovom teoremu o reprezentaciji (1.0.9) , imamo $a_n = e_n \in H = H^*$, za svaki n.*

b) Neka je $\{\delta_n\}$ standardna baza iz (1.0.3). Tada je $\{\delta_n\}$ baza za l^p, za svaki p takav da

je $1 \leq p < \infty$*, koju nazivamo standardna baza za* l^p*. Reprezentacija vektorima iz baze od* $x = (x_n) \in l^p$ *je* $x = \sum x_n \delta_n$*, stoga su koeficijentni funkcionali dani s* $a_n(x) = x_n$*. Ovi funkcionali su neprekidni na* l^p*, pa vrijedi* $a_n \in (l^p)^*$*. Po teoremu (*$1.0.8$*),* $(l^p)^*$ *se može poistovjetiti sa* l^q*, u smislu da se svaki neprekidan linearan funkcional* μ *iz* l^p *može zapisati kao* $\mu(x) = \langle x, y\rangle = \sum x_n y_n$*, za neki* $y \in l^q$*. Za funkcional* a_n*, imamo* $a_n(x) = x_n = \langle x, \delta_n\rangle$*, te obično* a_n *poistovjetimo sa* δ_n*, te pišemo* $a_n = \delta_n$*. Stoga je niz koeficijentnih funkcionala za bazu* $\{\delta_n\}$ *opet* $\{\delta_n\}$*. Primjetimo da u ovom primjeru* δ_n *pripada i prostoru* l^p *i prostoru* $(l^p)^* = l^q$*.*
Za $p = \infty$*, niz* $\{\delta_n\}$ *je baza za* c_0 *(vidi* 1.0.3*), i niz koeficijentnih funkcionala je ponovo* $\{\delta_n\}$*, koji je sadržan u* $c_0^* = l^1$*. Bazu* $\{\delta_n\}$ *nazivamo standardna baza za* c_0*.*

*c) U primjeru (*2.2.6*), ako uzmemo* $y_n = (1, ..., 1, 0, 0, ...)$*, tada je* $\{y_n\}$ *uvjetna baza za* c_0*. Koeficijentni funkcionali dani su s* $a_n(x) = x_n - x_{n+1} = \langle x, \delta_n\rangle - \langle x, \delta_{n+1}\rangle$ *za* $x = (x_n) \in c_0$*. Prema tome, koeficijentni funkcionali su neprekidni. Dodatno, u smislu poistovjećivanja, imamo:* $a_n = \delta_n - \delta_{n+1} \in l^1 = c_0^*$*.*

Kad pokažemo da su koeficijentni funkcionali za bazu nužno neprekidni, usvojiti ćemo notaciju bilinearne forme (1.0.7) i pisati $\langle x, a_n\rangle$ umjesto $a_n(x)$. No, prije dokaza neprekidnosti koeficijentnih funkcionala, moramo promotriti nekoliko činjenica. Prvo što trebamo promotriti je da, ako je $\{x_n\}$ baza, i fiksiramo $m \in \mathbb{N}$, tada x_m možemo napisati na dva načina:

$$x_m = \sum_n a_n(x_m) x_n \qquad i \qquad x_m = \sum_n \delta_{mn} x_n. \tag{2.2}$$

Stoga, zbog jedinstvenosti reprezentacije u bazi, moramo imati $a_n(x_m) = \delta_{mn}$, za svaki m i za svaki n.

Definicija 2.3.4. *(Biortogonalni nizovi)*
Za Banachov prostor X, te nizove $\{x_n\} \subseteq X$ *i* $\{a_n\} \subseteq X^*$*, kažemo da je* $\{a_n\}$ *biortogolan u odnosu na* $\{x_n\}$*, ako je* $\langle x_m, a_n\rangle = \delta_{mn}$*, za svaki* $m, n \in \mathbb{N}$*.* $\{a_n\}$ *nazivamo biortogonalan ili dualan niz od* $\{x_n\}$*.*

Još nismo pokazali da je $\{a_n\}$ sadržan u X^* - to ćemo dokazati u teoremu (2.3.7). Tada možemo koristiti terminologiju iz prethodne definicije i reći da su baza $\{x_n\}$ i njezin pripadni niz koeficijentnih funkcionala $\{a_n\}$ biortogonalni nizovi.
Sljedeća definicija će nam biti od velike važnosti za analizu:

Definicija 2.3.5. *(Operatori parcijalnih suma)*
Neka je $\{x_n\}$ *baza za Banachov prostor X, sa koeficijentnim funkcionalima* $\{a_n\}$*. Operator parcijalnih suma, odnosno prirodne projekcije u odnosu na* $\{x_n\}$*, su preslikavanja* $S_N : X \to X$ *definirana sa:*

$$S_N x = \sum_{n=1}^{N} a_n(x)x_n, \qquad x \in X.$$

Operator parcijalne sume S_N je linearan jer su funkcionali a_n linearni.
Tvrdimo: a_n je neprekidan za svaki n ako i samo ako je S_N neprekidan za svaki N.
Ako je a_n neprekidan, svakako je i S_N neprekidan. Za dokaz obrnute tvrdnje, uz $N \geq 2$, imamo:

$$a_N(x)x_N = \sum_{n=1}^{N} a_n(x)x_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n(x)x_n = S_N x - S_{N-1}x \tag{2.3}$$

Stoga, ako je svaki S_N neprekidan, neprekidan je i svaki a_n.
Primjetimo da, ako je $\{x_n\}$ baza, tada vrijedi:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n = \lim_{N\to\infty} S_N x.$$

Kako su svi konvergentni nizovi ograničeni, imamo $sup_N \|S_N x\| < \infty$, za svaki $x \in X$. Kada bismo znali da su S_N ograničeni, mogli bismo primijeniti princip uniformne ograničenosti kako bismo zaključili da je $C = sup_N \|S_N\| < \infty$. To ćemo kasnije i moći učiniti, a broj C ćemo nazivati baznom konstantom za $\{x_n\}$, no zasada ne smijemo implicitno pretpostaviti neprekidnost koeficijentnih funkcionala niti operatora parcijalnih suma. Sljedeći teorem biti će ključan za našu analizu. Tvrdi da, ako je $\{x_n\}$ baza, možemo promatrati prostor Y, koji sadrži sve nizove (c_n) takvima da $\sum c_n x_n$ konvergira u normi tako da postane Banachov prostor topološki izomorfan sa X. Općenito je teško ili nemoguće opisati eksplicitno takav prostor Y, ali zasad nam je dovoljno znati da je takav prostor Y izomorfan sa X. Primjer jedne situacije gdje možemo lako opisati takav Y je sljedeći:
Ako je $\{x_n\}$ ortonormirana baza za Hilbertov prostor H, tada $\sum c_n x_n$ konvergira ako i samo ako je $(c_n) \in l^2$.
Prisjetimo se: topološki izomorfizam između normiranih prostora X i Y je linearna bijekcija $T : X \to Y$ takva da su T i T^{-1} neprekidne. Po teoremu o inverznom preslikavanju, ako je T neprekidna linearna bijekcija sa Banachovog prostora X u Banachov prostor Y, tada je T^{-1} neprekidna, pa je T topološki izomorfizam.

Teorem 2.3.6. *Neka je $\{x_n\}$ niz u Banachovom prostoru X, te pretpostavimo da je $x_n \neq 0$, za svaki n. Neka je:*

$$Y = \Big\{(c_n) : \sum c_n x_n \textit{ konvergira u } X\Big\},$$

te stavimo:

$$\|(c_n)\|_Y = sup_N \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\|.$$

Tada vrijede sljedeće tvrdnje:
a) Y je Banachov prostor
b) Ako je $\{x_n\}$ baza za X, tada je Y topološki izomorfan sa X uz preslikavanje $T : (c_n) \mapsto \sum c_n x_n$.

Dokaz. a) Jasno je da je Y vektorski prostor. Ako je $c_n \in Y$, tada $\sum c_n x_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} c_n x_n$ konvergira. Kako su konvergentni nizovi i ograničeni, imamo $\|(c_n)\|_Y < \infty$, za svaki $(c_n) \in Y$. Zato je $\|\cdot\|_Y$ dobro definirana. Lako je provjeriti da vrijedi:

$$\|(c_n) + (d_n)\|_Y \leq \|(c_n)\|_Y + \|(d_n)\|_Y \qquad \text{i} \qquad \|t(c_n)\|_Y = |t|\|(c_n)\|_Y,$$

pa je $\|\cdot\|_Y$ barem polunorma na Y (dakle, u odnosu na normu, nedostaje joj uvjet $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$). Pretpostavimo da je $\|(c_n)\|_Y = 0$. Tada je $\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\| = 0$, za svaki N. Posebno je i $\|c_1 x_1\| = 0$, a kako je $x_1 \neq 0$, mora vrijediti i $c_1 = 0$. No, tada je $\|c_2 x_2\| = \|\sum_{n=1}^{2} c_n x_n\| = 0$, što znači da je $c_2 = 0$ itd. Zaključujemo da je $\|\cdot\|_Y$ norma na Y.
Sljedeće je potrebno dokazati da je Y potpun s obzirom na ovu normu. Pretpostavimo da je $A_N = (c_N(n))_{n\in\mathbb{N}} \in Y$ i da je $\{A_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ Cauchyev niz u Y. Tada za svaki fiksan $n \geq 2$, te $M, N \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} |c_M(n) - c_N(n)|\|x_n\| &= \|(c_M(n) - c_N(n))x_n\| \\ &\leq \Big\| \sum_{k=1}^{n} (c_M(k) - c_N(k))x_k \Big\| + \Big\| \sum_{k=1}^{n-1} (c_M(k) - c_N(k))x_k \Big\| \\ &\leq 2\|A_M - A_N\|_Y \end{aligned} \tag{2.4}$$

.

Također, za $n = 1$ imamo $|c_M(n) - c_N(n)|\|x_n\| \leq \|A_M - A_N\|_Y$. Kako je $\{A_N\}$ Cauchyev, te je $x_n \neq 0$, možemo zaključiti da je $(c_N(n))_{N\in\mathbb{N}}$ Cauchyev niz skalara, stoga mora konvergirati k nekom skalaru $c(n)$ za $N \to \infty$. Naš cilj je pokazati $A_N \to A = (c(n))_{n\in\mathbb{N}}$ u normi od Y za $N \to \infty$.
Uzmimo proizvoljan $\epsilon > 0$. Tada, pošto je $\{A_N\}$ Cauchyev u Y, postoji cijeli broj $N_0 > 0$ takav da je:

$$\forall M, N \geq N_0, \quad \|A_M - A_N\|_Y = \sup_L \Big\| \sum_{n=1}^{L} (c_M(n) - c_N(n))x_n \Big\| < \epsilon.$$

Fiksiramo $L > 0$, te definiramo:

$$y_{M,N} = \sum_{n=1}^{L} (c_M(n) - c_N(n))x_n \quad i \quad y_N = \sum_{n=1}^{L} (c(n) - c_N(n))x_n$$

Uočimo da je $\|y_{M,N}\| < \epsilon$, za svaki $M, N \geq N_0$. Također, zahvaljujući fiksiranom L, imamo:

$$\|y_{M,N} - y_N\| = \|\sum_{n=1}^{L}(c(n) - c_M(n))x_n\| \leq \sum_{n=1}^{L}|c(n) - c_M(n)|\|x_n\| \to 0, \quad za \quad M \to \infty.$$

Dakle, vrijedi $y_{M,N} \to y_M$ za $M \to \infty$. Kao posljedicu, za svaki $N \geq N_0$, imamo:

$$\|y_N\| = \lim_{M\to\infty} \|y_{M,N}\| \leq \epsilon$$

Uvrštavanjem y_N u prethodnu jednadžbu, te uzimanjem supremuma po L, dobivamo:

$$\forall N \geq N_0, \quad \sup_L \Big\| \sum_{n=1}^{L}(c(n) - c_N(n))x_n \Big\| \leq \epsilon \tag{2.5}$$

Sada vidimo da je $(c_{N_0}(n))_{n\in\mathbb{N}} \in Y$, pa red $\sum_n c_{N_0}(n)x_n$ konvergira po definiciji od Y. Dakle, postoji $M_0 > 0$ takav da vrijedi:

$$\forall N > M \geq M_0, \quad \Big\| \sum_{n=M+1}^{N} c_{N_0}(n)x_n \Big\| < \epsilon.$$

Stoga, ako je $N > M \geq M_0, N_0$, tada je:

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{n=M+1}^{N} c(n)x_n \Big\| &= \Big\| \sum_{n=1}^{N}(c(n) - c_{N_0}(n))x_n - \sum_{n=1}^{M}(c(n) - c_{N_0}(n))x_n + \sum_{n=M+1}^{N} c_{N_0}(n)x_n \Big\| \\ &\leq \Big\| \sum_{n=1}^{N}(c(n) - c_{N_0}(n))x_n \Big\| + \Big\| \sum_{n=1}^{M}(c(n) - c_{N_0}(n))x_n \Big\| + \Big\| \sum_{n=M+1}^{N} c_{N_0}(n)x_n \Big\| \\ &\leq \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Dakle, $\sum c(n)x_n$ konvergira u X, te vrijedi $A = (c(n)) \in Y$. Konačno, iz jednadžbe (2.5), imamo da $A_n \to A$ u normi od Y, pa je Y potpun.

b) Pretpostavimo sad da je $\{x_n\}$ baza za X. Tada $T(c_n) = \sum c_n x_n$ preslikava Y u X, po definiciji od Y. Nadalje, T je očito linearan, ali i bijektivan jer je $\{x_n\}$ baza. Ako je $(c_n) \in Y$, tada vrijedi:

$$\|T(c_n)\| = \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \Big\| = \lim_{N\to\infty} \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\| \leq \sup_N \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\| = \|(c_n)\|_Y,$$

što znači da je T ograničen. Iz teorema o inverznom preslikavanju slijedi da je T topološki izomorfizam iz Y u X. □

Sada ćemo pozazati da su operatori parcijalnih suma neprekidni, što također povlači da su koeficijentni funkcionali neprekidni. Ova činjenica bi zapravo trebala biti korolar vezan na prethodni teorem, no radi njegove važnosti ćemo ga označiti kao teorem:

Teorem 2.3.7. *Neka je $\{x_n\}$ baza za Banachov prostor X, sa koeficijentnim funkcionalima $\{a_n\}$. Neka je Y kao u prethodnom teoremu, dakle takav da je $T(c_n) = \sum c_n x_n$ topološki izomorfizam sa Y u X. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*
a) Operatori parcijalnih suma S_N su ograničeni, te vrijedi $\|S_N\| \leq \|T^{-1}\|$, za svaki $N \in \mathbb{N}$.
b) $C = \sup_N \|S_N\| < \infty$.
c) $|||x||| = \sup_N \|S_N x\|$ nam daje normu na X koja je ekvivalentna inicijalnoj normi $\|\cdot\|$, te imamo $\|\cdot\| \leq |||\cdot||| \leq C\|\cdot\|$.
d) Koeficijentni funkcionali a_n su neprekidni linearni funkcionali na X koji zadovoljavaju:

$$1 \leq \|a_n\|\|x_n\| \leq 2C, \qquad n \in \mathbb{N}$$

e) $\{x_n\}$ je Schauderova baza za X, a $\{a_n\}$ je jedinstveni niz u X^* koji je biortogonalan nizu $\{x_n\}$.

Dokaz. a) Fiksirajmo bilo koji $x \in X$. Po definiciji imamo $x = \sum a_n(x) x_n$. Skalari a_n su jedinstveni, pa je T^{-1} dan s $T^{-1}x = (a_n(x))$. Slijedi:

$$\sup_N \|S_N x\| = \sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n(x) x_n \right\| = \|(a_n(x))\|_Y = \|T^{-1}x\|_Y \leq \|T^{-1}\|\|x\|$$

Zaključujemo da je S_n ograničen, te njegova operatorska norma zadovoljava $\|S_N\| \leq \|T^{-1}\|$.
b) Iz a) dijela, imamo $C = \sup_N \|S_N\| \leq \|T^{-1}\| < \infty$.
c) Lako vidimo da $|||\cdot|||$ ima barem svojstvo polunorme. Uz $x \in X$ imamo:

$$|||x||| = \sup_N \|S_N x\| \leq \sup_N \|S_N\|\|x\| = C\|x\|.$$

Dodatno, kako vrijedi $S_N x \to x$ u normi od X, imamo:

$$\|x\| = \lim_{N\to\infty} \|S_N x\| \leq \sup_N \|S_N x\| = |||x|||.$$

Iz navedene dvije ocjene slijedi da je $|||\cdot|||$ norma koja je ekvivalentna normi $\|x\|$.
d) Kao u jednadžbi (2.3), za $n \geq 2$ imamo $a_n(x)x_n = S_n x - S_{n-1}x$.
Stoga je:

$$|a_n(x)|\|x_n\| = \|a_n(x)x_n\| \leq \|S_n x\| + \|S_{n-1}x\| \leq 2C\|x\|.$$

Kako vrijedi $x_n \neq 0$, za svaki n, možemo zaključiti da je $\|a_n\| \leq \frac{2C}{\|x_n\|} < \infty$. Kako je $a_1(x)x_1 = S_1 x$, ista procjena vrijedi i za $n = 1$. Kao posljedicu imamo da je svaki a_n ograničen, te da je $\|a_n\|\|x_n\| \leq 2C$, za svaki n. Kao i u raspravi nakon (2.2), zbog jedinstvenosti imamo $a_m(x_n) = \delta_{mn}$, pa su $\{a_n\}$ i $\{x_n\}$ biortogonalni, što pak znači $1 = a_n(x_n) \leq \|a_n\|\|x_n\|$.

e) Kako su koeficijentni funkcionali neprekidni, $\{x_n\}$ je Schauderova baza, a već smo vidjeli da je $\{a_n\}$ biortogonalan niz u X^*. Ovaj biortogonalni niz je jedinstven jer je $\{x_n\}$ fundamentalan. □

Zahvaljujući prethodnom teoremu, često se poistovjećuje pojmove baze i Schauderove baze. Nadalje, pripadni niz koeficijentnih funkcionala $\{a_n\} \subset X^*$ možemo nazivati i biortogonalnim nizom ili dualnim nizom od $\{x_n\}$.
Broj C iz prethodnog teorema nam je važan, nazivamo ga bazna konstanta, te ga definiramo na sljedeći način:

Definicija 2.3.8. *(Bazna konstanta)*
Ako je $\{x_n\}$ baza za Banachov prostor X, tada je njegova bazna konstanta konačan broj $C = \sup_N \|S_N\|$. Bazna konstanta nalazi se u rasponu $1 \leq C < \infty$. Ako je bazna konstanta $C = 1$, tada za bazu kažemo da je monotona.

Bazna konstanta ovisi o izboru norme. Ako nije drugačije naglašeno, baznu konstantu uzimamo s obzirom na originalnu normu na X. Prelaženjem na ekvivalentnu normu za X nećemo promijeniti činjenicu da je $\{x_n\}$ baza, ali možemo promijeniti baznu konstantu za $\{x_n\}$. Preciznije, u nastavku ćemo pokazati da bazna konstanta s obzirom na ekvivalentnu normu $|||\cdot|||$ uvijek iznosi 1.

Teorem 2.3.9. *Svaka baza $\{x_n\}$ je monotona u odnosu na ekvivalentnu normu $|||x||| = \sup_N \|S_N x\|$.*

Dokaz. Primjetimo da kompozicija operatora parcijalnih suma S_M i S_N zadovoljava:

$$S_M S_N = S_{min\{M,N\}}.$$

Stoga vrijedi:

$$|||S_N x||| = \sup_M \|S_M S_N x\| = \sup\{\|S_1 x\|, ..., \|S_N x\|\}$$

i

$$\sup_N |||S_N x||| = \sup_N \|S_N x\| = |||x|||.$$

Iz ovoga slijedi da je $\sup_N |||S_N||| = 1$. □

Napomena 2.3.10. *Umjesto izmjene normi na X, uzmimo u obzir sve moguće baze za X u odnosu na fiksiranu normu $\|\cdot\|$. Može se pokazati da niti jedna od ovih baza ne mora biti monotona. Štoviše, pokazano je da postoji Banachov prostor $(X, \|\cdot\|)$, takav da je $\inf\{C_{\mathcal{B}} : \mathcal{B}$ je baza za $X\} > 1$, gdje nam $C_{\mathcal{B}}$ označava baznu konstantu baze $\mathcal{B}$ za X u odnosu na fiksiranu normu $\|\cdot\|$ za X.*

Pošto sada znamo da su koeficijentni funkcionali a_n za bazu elementi od X^*, možemo koristiti dvije notacije: notaciju (1.0.7) i notaciju $a_n(x) = \langle x, a_n \rangle$. Zapravo će nam odsad nadalje notacija po izboru biti $\langle x, a_n \rangle$, iako je nekad zgodnije pisati $a_n(x)$.

Napomena 2.3.11. *Neki od navedenih slučajeva biti će nam posebno zanimljivi:*
*a) Ako je $\{x_n\}$ baza za Hilbertov prostor H, tada se pripadni koeficijentni funkcionali nalaze u H^*, koji je izometrički izomorfan sa H, po Rieszovom teoremu o reprezentaciji (*1.0.9*). Stoga svaki koeficijentni funkcional a_n možemo odrediti pomoću jedinstveno određenog vektora iz H: u tom smislu ovdje je dualni niz također niz u polaznom prostoru H, tj. svaki $x \in H$ možemo na jedinstven način zapisati kao $x = \sum \langle x, a_n \rangle x_n$.*
b) Na sličan način, u drugim slučajevima gdje imamo eksplicitnu identifikaciju dualnog prostora X^*, držimo se uobičajenih oznaka. Na primjer, ako je $\{x_n\}$ baza za l^p, gdje je $1 \leq p < \infty$, tada je svaki koeficijentni funkcional a_n određen pomoću elementa iz l^q, i određujemo funkcional a_n pomoću ovog vektora u l^q.

Niz koeficijentnih funkcionala $\{a_n\}$ je sadržan u dualnom prostoru X^*, koji je Banachov prostor, ali općenito mu nije baza. Na primjer, standardna baza $\{\delta_n\}$ je baza za $X = l^1$, njegov niz koeficijentnih funkcionala je opet $\{\delta_n\}$, koji je sadržan u $X^* = l^\infty$ ali nije baza za l^∞. Umjesto toga, s obzirom na normu l^∞, $\{\delta_n\}$ je baza za prostor c_0. Pokazati će se da je ovaj primjer tipičan: ako je $\{x_n\}$ baza za Banachov prostor X, tada je njegov niz koeficijentnih funkcionala $\{a_n\}$ baza za $\overline{span}\{a_n\}$ koji, općenito, može biti pravi potprostor od X^*. No, pokazati ćemo da vrijedi: ako je X refleksivan prostor, tada je $\{a_n\}$ baza za X^*, po korolaru (3.5.4).

2.4 Ekvivalentne baze

U ovom poglavlju pokazati ćemo nekoliko rezultata vezanih za invarijantnost baza u odnosu na topološke izomorfizme. Počinjemo sa jednostavnom činjenicom da topološki izomorfizmi čuvaju svojstvo baze.

Lema 2.4.1. *Neka su X i Y Banachovi prostori. Ako je $\{x_n\}$ baza za X i ako je $T : X \to Y$ topološki izomorfizam, tada je $\{Tx_n\}$ baza za Y.*

Dokaz. Za y element iz Y vrijedi $T^{-1}y \in X$, pa postoje jedinstveni skalari (c_n) takvi da je $T^{-1}y = \sum c_n x_n$. Neprekidnost od T povlači da je $y = T(T^{-1}y) = \sum c_n T x_n$. Pretpostavimo da je $y = \sum b_n T x_n$ neka druga reprezentacija od y. Tada, kako je T^{-1} neprekidna, imamo $T^{-1}y = \sum b_n x_n$, pa je $b_n = c_n$ za svaki n, pošto je $\{x_n\}$ baza za X. Dakle, $\{Tx_n\}$ je baza za Y. □

Prethodni rezultat vodi do sljedeće definicije:

Definicija 2.4.2. *(Ekvivalencija baza)*
Neka su X i Y Banachovi prostori. Kažemo da je baza $\{x_n\}$ od X ekvivalentna bazi $\{y_n\}$ od Y ako postoji topološki izomorfizam $T : X \to Y$ takav da je $Tx_n = y_n$, za svaki n. Ako je $X = Y$, tada pišemo $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, čime označavamo da su $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ ekvivalentne baze za X.

Uočimo da je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu svih baza za Banachov prostor X. Možemo opisati ekvivalentne baze i u obliku konvergencije reda:

Teorem 2.4.3. *Neka su X i Y Banachovi prostori. Ako je $\{x_n\}$ baza za X i $\{y_n\}$ baza za Y, tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*
a) $\{x_n\}$ je ekvivalentan sa $\{y_n\}$.
b) $\sum c_n x_n$ konvergira u X ako i samo ako $\sum c_n y_n$ konvergira u Y.

Dokaz. a) $\Rightarrow$ b). Pretpostavimo da su $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ ekvivalentne baze. To znači da postoji topološki izomorfizam $T : X \to Y$ takav da je $Tx_n = y_n$. T je linearni operator, pa imamo:

$$T(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n.$$

Ako $a_n x_n$ konvergira u $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ tada, zbog neprekidnosti od T, konvergira i $a_n y_n$, i to u $y = T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$.
Obrnuti smjer možemo dokazati koristeći T^{-1}, pošto je T neprekidna bijekcija.
b) $\Rightarrow$ a). Pretpostavimo da vrijedi b). Neka je $\{a_n\} \subseteq X^*$ niz koeficijentnih funkcionala za bazu $\{x_n\}$, te neka je $\{b_n\} \subseteq Y^*$ niz koeficijentnih funkcionala za bazu $\{y_n\}$. Pretpostavimo da je dan $x \in X$. Tada $x = \sum \langle x, a_n \rangle x_n$ konvergira u X, pa onda $Tx = \sum \langle x.a_n \rangle y_n$ konvergira u Y. Prikaz $x = \sum \langle x, a_n \rangle x_n$ je jedinstven, pa je T dobro definiran, a lako se pokaže da je i linearan.
Ako je $Tx = 0$, tada vrijedi:

$$\sum 0 y_n = 0 = Tx = \sum \langle x, a_n \rangle y_n,$$

pa je $\langle x, a_n \rangle = 0$, za svaki n, pošto je $\{y_n\}$ baza. Stoga je $x = \sum \langle x, a_n \rangle x_n = 0$, pa je T injekcija.
U sljedećem koraku biramo bilo koji element $y \in Y$. Tada red $y = \sum \langle y, b_n \rangle y_n$ konvergira u Y, pa $x = \sum \langle y, b_n \rangle x_n$ konvergira u X. Kako je $x = \sum \langle x, a_n \rangle x_n$ i $\{x_n\}$ je baza, to povlači da je $\langle y, b_n \rangle = \langle x, a_n \rangle$, za svaki n. Dakle, vrijedi $Tx = y$, pa je T surjekcija.
Preostaje pokazati neprekidnost od T. Za svaki N, definiramo $T_N : X \to Y$ kao $T_N x = \sum_{n=1}^{N} \langle x, a_n \rangle y_n$. Kako je svaki funkcional a_n neprekidan, to povlači da je svaki operator T_N neprekidan. Kako vrijedi $T_N x \to Tx$, po Banach-Steinhausovom teoremu (1.0.14) slijedi da je T ograničen. □

Primjer 2.4.4. *Ako su $\{e_n\}$ i $\{f_n\}$ dvije ortonormirane baze za Hilbertov prostor H, tada, po teoremu (*1.0.5*) vrijedi:*

$$\sum_n c_n e_n \text{ konvergira} \Leftrightarrow \sum_n |c_n|^2 < \infty \Leftrightarrow \sum_n c_n f_n \text{ konvergira.}$$

Dakle, po teoremu (2.4.3) vrijedi $\{e_n\} \sim \{f_n\}$. Zaključujemo da su sve ortonormirane baze na H ekvivalentne.

Može se pokazati i da su sve ograničene bezuvjetne baze u Hilbertovom prostoru ekvivalentne. Posebno, kako je svaka ortonormirana baza zapravo ograničena bezuvjetna baza, to povlači da je svaka ograničena bezuvjetna baza u Hilbertovom prostoru ekvivalentna ortonormiranoj bazi.

2.5 Schauderove baze za $C[0,1]$

U ovome poglavlju promatramo konstrukciju Schauderove baze za prostor $C[0,1]$, odnosno prostor neprekidnih funkcija na intervalu $[0,1]$.

Definicija 2.5.1. *(Schauderov sustav)*
Schauderov sustav na $C[0,1]$ je:

$$\{\mathcal{X}, l\} \cup \{s_{n,k}\}_{n\geq 0, k=0,\ldots,2^n-1},$$

gdje je $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{[0,1]}$, $l(t) = t$, a $s_{n,k}$ je neprekidna funkcija dana s:

$$s_{n,k}(t) = \begin{cases} 1 & t = \frac{k+1/2}{2^n}, \\ linearna & na\ [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1/2}{2^n}]\ i\ na\ [\frac{k+1/2}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \\ 0 & ina\check{c}e; \end{cases}$$

Ilustracija je na slici (2.1).

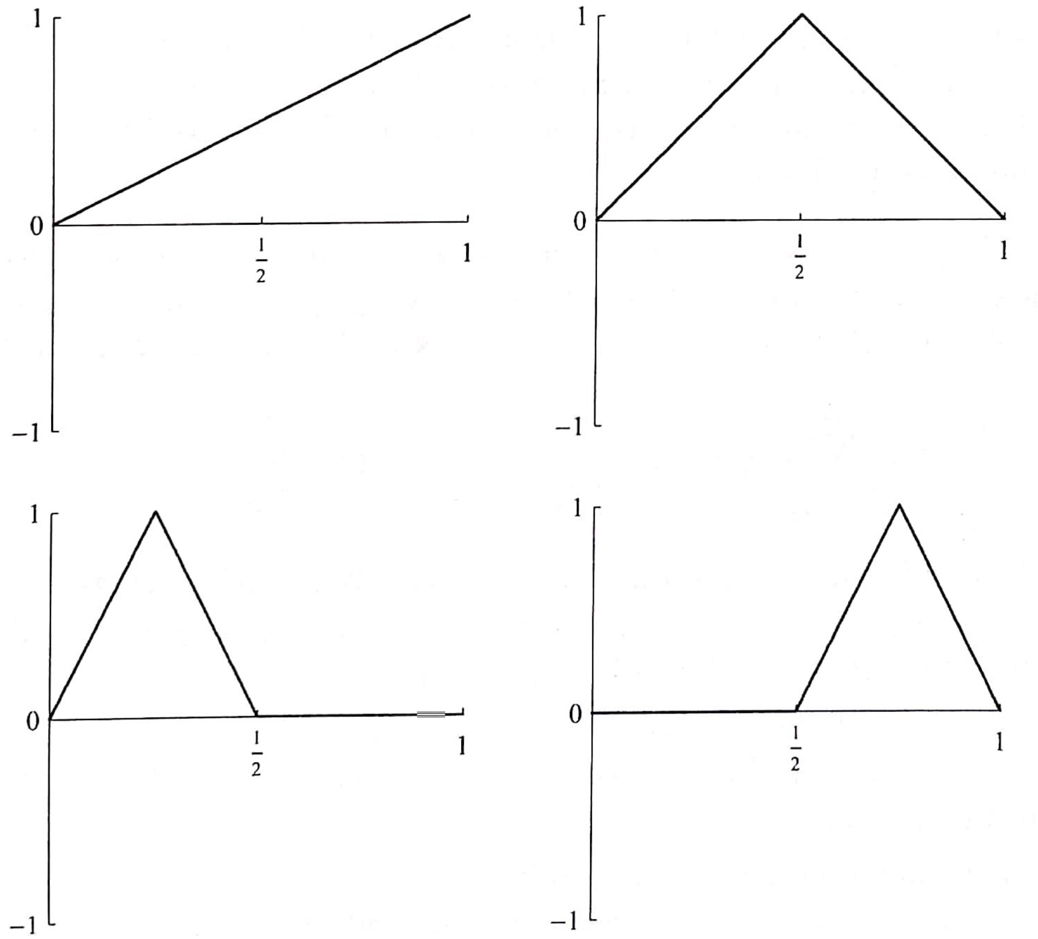
Ekvivalentno, ako je

$$W(t) = s_{0,0}(t) = max\{1 - |2t-1|, 0\}$$

"kapa-funkcija" na $[0,1]$, tada je $s_{n,k}$ dilatirana i translatirana takva funkcija

$$s_{n,k}(t) = W(2^n t - k),$$

suportirana na intervalu $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$.
Fiksirajmo bilo koji $f \in C[0,1]$. Tada možemo odabrati skalare a i b takve da funkcija $g = f - a\mathcal{X} - bl$ zadovoljava $g(0) = g(1) = 0$. Prvi cilj nam je pokazati da postoje skalari takvi da je



Slika 2.1: Elementi Schauderovog sustava: na vrhu su redom l, $s_{0,0}$, a na dnu su $s_{1,0}$, $s_{1,1}$

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} c_{n,k} s_{n,k},$$

uz uniformnu konvergenciju reda. Odaberimo

$$h_0 = g(\tfrac{1}{2}) s_{0,0}.$$

Tada je h_0 neprekidna funkcija sa po dijelovima linearnim grafom koji se podudara s g u točkama $0, \frac{1}{2}, 1$. Neka je $g_0 = g - h_0$. Primjetimo da g_0 iščezava u točkama $0, \frac{1}{2}, 1$. Sada definiramo

$$h_1 = g_0(\tfrac{1}{4}) s_{1,0} + g_0(\tfrac{3}{4}) s_{1,1}.$$

Tada je h_1 neprekidna funkcija sa po dijelovima linearnim grafom koji se podudara sa g_0 u točkama $0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1$. Kao posljedicu toga imamo da je $h_0 + h_1$ neprekidna sa po dijelovima linearnim grafom koji se podudara sa g u točkama $0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1$. Na isti način možemo konstruirati funkcije

$$h_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_{n,k} s_{n,k}$$

takve da je $k_n = h_o + ... + h_n$ linearna aproksimacija funkcije g na pripadnim podintervalima oblika $[\frac{j}{2^{n+1}}, \frac{j+1}{2^{n+1}}]$. Kako je g uniformno neprekidna, slijedi da k_n konvergira uniformno prema g. Stoga je $g = \lim\limits_{n\to\infty} k_n = \sum_{n=1}^{\infty} h_n$, pa vrijedi:

$$f = a\mathcal{X} + bl + g = a\mathcal{X} + bl + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^n-1} c_{n,k} s_{n,k}, \tag{2.7}$$

gdje red konvergira uniformno u odabranoj normi. Nadalje, ovakva reprezentacija je jedinstvena, iz čega slijedi da je Schauderov sustav baza za $C[0,1]$.
Naknadno ćemo pokazati da je Schauderov sustav uvjetna baza za $C[0,1]$. Dapače, može se pokazati i da $C[0,1]$ ne sadrži niti jednu bezuvjetnu bazu. Još jedan prostor koji ne sadrži bezuvjetne baze je $L^1[0,1]$.
Franklinov sustav je ortonormirana baza za $L^2[0,1]$ dobivena primjenom Gramm-Schmidtove ortogonalizacije na Schauderov sustav. Franklinov sustav je bezuvjetna baza za $L^p[0,1]$, za svaki $1 < p < \infty$.

2.6 Trigonometrijski sustav

U ovome poglavlju promatramo trigonometrijski sustav $\{e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Navedimo za početak neke činjenice o trigonometrijskom sustavu.
Počinjemo s tehničkim detaljima:

Napomena 2.6.1. *Zbog 1-periodičnosti funkcija $e^{2\pi int}$ na $\mathbb{R}$, često postavljamo restrikciju domene na $[0,1]$ (ili neki drugi interval duljine 1), te ih promatramo kao elemente iz $L^p[0,1]$. Ipak, u nekim slučajevima, pogotovo kada imamo neprekidnost, jednostavnije je raditi sa prostorima 1-periodičkih funkcija u $\mathbb{R}$ nego funkcija na $[0,1]$. Na primjer, za $p = \infty$, uniformni limesi 1-periodičkih funkcija su 1-periodički, pa je $\overline{span}\{e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sadržana u*

$$C(T) = \{f \in C(\mathbb{R}) : f \textit{ je 1-periodična}\}.$$

Restrikcijom funkcija na domenu $[0,1]$, požemo poistovjetiti $C(T)$ sa

$$C_{per}[0,1] = \{f \in C[0,1] : f(0) = f(1)\}.$$

Kako je $C_{per}[0,1]$ pravi zatvoreni potprostor od $C[0,1]$, trigonometrijski sustav ne može biti fundamentalan u $C[0,1]$. Umjesto toga vidimo da je trigonometrijski sustav fundamentalan u $C(T)$ i u $C_{per}[0,1]$, stoga su nam to prikladni prostori neprekidnih funkcija kada radimo sa $\{e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.
Za konačan p definiramo

$$L^p(T) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ je 1-periodična i } \int_0^1 |f(t)|^p dt < \infty\},$$

a kako su funkcije u L^p definirane gotovo svugdje, razlika između $L^p[0,1]$ i $L^p(T)$ je obično zanemariva. Stoga često koristimo naizmjence ta dva simbola, iako su oni ekvivalentni samo u smislu identifikacije. Za $p = \infty$, prostor $L^\infty(T)$ sastoji se od 1-periodičnih esencijalno omeđenih funkcija, koje poistovjećujemo s $L^\infty[0,1]$.

Sada kad smo definirali odgovarajuće funkcijske prostore, promatramo svojstva trigonometrijskog sustava u njima. Za početak primjetimo da je trigonometrijski sustav ortonormirani niz u $L^2(T)$. Također, iz (1.0.6), znamo da je $\{e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ fundamentalan u $L^2(T)$, stoga je i ortonormirana baza za taj prostor. Svojstva baze nećemo dokazivati, već ćemo ih samo navesti u sljedećoj definiciji i teoremu:

Definicija 2.6.2. *(Fourierovi koeficijenti)*
Za $f \in L^1(T)$, definiramo pripadne Fourierove koeficijente kao:

$$\hat{f}(n) = \langle f, e^{2\pi int}\rangle = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

uz oznaku:

$$\hat{f} = (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Niz $\hat{f}$ nazivamo Fourierovom transformacijom od f.

Teorem 2.6.3. *(Trigonometrijski sustav u $L^p(T)$ i $C(T)$)*
a) $\{e^{-2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je ortonormirana baza za $L^2(T)$, stoga svaki $f \in L^2(T)$ možemo na jedinstven način zapisati kao:

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{-2\pi int},$$

gdje red konvergira bezuvjetno u L^2-normi, i imamo:

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2.$$

b) $\{e^{-2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *je uvjetna baza za* $L^p(T)$*, za svaki* $1 < p < 2$ *i* $2 < p < \infty$ *u odnosu na*

$$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, ...\} = \{k_1, k_2, ...\}.$$

Preciznije, za takve p, svaki $f \in L^p(T)$ *možemo na jedinstven način zapisati kao:*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(k_n)e^{-2\pi i k_n t},$$

gdje red konvergira u L^p*-normi, ali je uvjetno konvergentan za neke* $f \in L^p(T)$*.*
c) $\{e^{-2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *je fundamentalan, ali nije baza niti za* $L^1(T)$ *niti* $C(T)$*. Usprkos tome, svaka funkcija* $f \in L^1(T)$ *je jedinstveno određena pomoću svoje Fourierove transformacije* $\hat{f}$*, npr. Ako je* $f \in L^1(T)$*, tada je*

$$\hat{f}(n) = 0 \text{ za svaki } n \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad f = 0.$$

Dokaz. Nećemo dokazivati. □

Napomena 2.6.4. *a)* $C(T)$ *je Banachov prostor s obzirom na uniformnu normu.*
b) $C_{per}[0, 1]$ *je pravi zatvoreni podprostor od* $C[0, 1]$*, i on je izometrički izomorfan sa* $C(T)$*.*
c) $L^p(T)$ *je izometrički izomorfan sa* $L^p[0, 1]$ *za svaki* $1 \leq p \leq \infty$*.*
d) Ako je $1 \leq p < q \leq \infty$*, tada je* $L^q(T) \subsetneq L^p(T)$*.*

Dokaz. Nećemo dokazivati. □

Poglavlje 3

Biortogonalnost, minimalnost i više o bazama

U ovome poglavlju baviti ćemo se nezavisnosti u radu s beskonačnodimenzionalnim Banachovim prostorima, te ćemo primijeniti rezultate na Schauderove baze.

3.1 Veza minimalnosti i biortogonalnosti

Ako je $\{x_n\}$ Schauderova baza s pripadnim koeficijentnim funkcionalima $\{a_n\}$, tada imamo uvjet biortogonalnosti $\langle x_m, a_n\rangle = \delta_{mn}$. Nažalost, kao što ćemo pokazati u sljedećem primjeru, postojanje biortogonalnog niza samo po sebi nije dovoljno da bismo imali Schauderovu bazu, čak ni uz fundamentalnost.

Primjer 3.1.1. *Fundamentalnost i biortogonalnost niza $\not\Rightarrow$ baza*
Prisjetimo se da je prostor $C(T)$, koji se sastoji od kompleksnih, neprekidnih, 1-periodičkih funkcija na $\mathbb{R}$, u stvari Banachov prostor s obzirom na uniformnu normu $\|\cdot\|_\infty$ (2.6.4). Definiramo $e_n(t) = e^{2\pi int}$, za $n \in \mathbb{Z}$. Ove funkcije su elementi iz $C(T)$, i definiraju neprekidne linearne funkcionale na $C(T)$ formulom

$$\langle f, e_n\rangle = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}dt, \qquad f \in C(T), \tag{3.1}$$

jer je

$$|\langle f, e_n\rangle| \le \int_0^1 |f(t)|dt \le \|f\|_\infty.$$

Stoga e_n možemo razmatrati kao element iz $C(T)^*$ u smislu da poistovjetimo funkciju e_n s funkcionalom na $C(T)$ koji određuje. Nadalje, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je sam sebi biortogonalni niz jer je $\langle e_m, e_n\rangle = \delta_{mn}$. Weierstrassov teorem o aproksimaciji trigonometrijskim polinomima kaže da, ako je $f \in C(T)$, tada postoji cijeli broj N i skalari c_n takvi da vrijedi $\|f - \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e_n\|_\infty < \epsilon$. Ekvivalentno je reći da je $span\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ gust u $C(T)$, stoga je $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ fundamentalan u $C(T)$.
Dakle, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je fundamentalan u $C(T)$ i postoji njemu biortogonalni niz u $C(T)^*$. Ipak će se pokazati da on nije baza za $C(T)$. Kako ovaj niz indeksiramo cijelim, a ne prirodnim brojevima, za raspravu o konvergenciji prvo moramo odrediti redoslijed indeksa. Odabrali smo "prirodan" redoslijed $\{0, -1, 1, -2, 2, ...\}$, što znači da promatramo nizove parcijalnih suma $\sum_{n=0}^{0}$, $\sum_{n=-1}^{0}$, $\sum_{n=-1}^{1}$, $\sum_{n=-2}^{1}$, $\sum_{n=-2}^{2}$, itd. Pretpostavimo da je $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ baza za $C(T)$ s obzirom na ovakav poredak od $\mathbb{Z}$. Tada, za $f \in C(T)$ imamo

$$f = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \langle f, e_n\rangle e_n, \tag{3.2}$$

pri čemu ovaj niz konvergira u normi $\|\cdot\|_\infty$. Kada limes u prethodnoj jednadžbi postoji, uobičajeno je pisati $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f, e_n\rangle e_n$. Takav prikaz zovemo Fourierovim redom f. Međutim, postoje neprekidne funkcije za koje (3.2) ne vrijedi, i zato niz $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ nije baza za $C(T)$ u odnosu na poredak koji smo definirali.

Definicija 3.1.2. *(Minimalni nizovi)*
Kažemo da je niz $\{x_n\}$ u Banachovom prostoru X minimalan ako ne postoji vektor x_m koji leži u zatvorenoj ljusci ostalih vektora x_n, odnosno ako vrijedi:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad x_m \notin \overline{span}\{x_n\}_{n\neq m}.$$

Niz koji je minimalan i fundamentalan nazivamo egzaktan.

Pokazati ćemo da je minimalnost ekvivalentna postojanju biortogonalnog niza:

Lema 3.1.3. *Neka je $\{x_n\}$ niz u Banachovom prostoru X.*
a) $\exists\{a_n\} \subseteq X^*$ biortogonalan nizu $\{x_n\} \Leftrightarrow \{x_n\}$ je minimalan.
b) $\exists$ jedinstven $\{a_n\} \subseteq X^*$ biortogonalan nizu $\{x_n\} \Leftrightarrow \{x_n\}$ je egzaktan.

Dokaz. a) $\Rightarrow$. Pretpostavimo da je $\{a_n\} \subseteq X^*$ biortogonalan nizu $\{x_n\}$. Fiksiramo bilo koji $m \in \mathbb{N}$, te odaberemo $z \in span\{x_n\}_{n\neq m}$, na primjer $z = \sum_{j=1}^{N} c_{n_j} x_{n_j}$. Tada je

$$\langle z, a_m\rangle = \sum_{j=1}^{N} c_{n_j}\langle x_{n_j}, a_m\rangle = 0,$$

pošto vrijedi $x_{n_j} \neq x_m$, za svaki j. Zato je $a_m = 0$ na $span\{x_n\}_{n\neq m}$, a kako je a_m neprekidna, imamo $\langle z, a_m\rangle = 0$ za svaki $z \in \overline{span}\{x_n\}_{n\neq m}$. No, kako je $\langle x_m, a_m\rangle = 1$, moramo imati $x_m \notin \overline{span}\{x_n\}_{n\neq m}$. Dakle, $\{x_n\}$ je minimalan.
$\Leftarrow$. Pretpostavimo da je $\{x_n\}$ minimalan. Fiksiramo m, i definiramo $E = \overline{span}\{x_n\}_{n\neq m}$. Ovo je zatvoren podprostor od X koji ne sadrži x_m. Po Hahn-Banachovom teoremu (1.0.11), postoji funkcional $a_m \in X^*$ takav da je

$$\langle x_m, a_m\rangle = 1 \quad \text{i} \quad \langle x, a_m\rangle = 0 \quad \text{za} \quad x \in E.$$

Ponavljanjem postupka za svaki $m \in N$ dobivamo niz $\{a_n\}$ koji je biortogonalan nizu $\{x_n\}$.
b) Nećemo dokazivati. □

Primjer 3.1.4. *Po Weierstrassovom teoremu u aproksimaciji (*1.0.1*), niz monoma* $\{x^k\}_{k\geq 0}$ *je fundamentalan u* $C[0,1]$*. No, njegov pravi podniz* $\{x^{2k}\}_{k\geq 0}$ *je također fundamentalan u* $C[0,1]$*. Stoga je* $x \in \overline{span}\{x^{2k}\}_{k\geq 0}$*, pa* $\{x^k\}_{k\geq 0}$ *nije minimalan, što znači da ne posjeduje biortogonalan niz.*

Sljedeći rezltat nam daje karakterizaciju nizova monoma koji su fundamentalni u $C[0,1]$, ili $C[a,b]$. U sljedećem zapisu implicitno izbacujemo sve izraze oblika $\frac{1}{0}$.

Teorem 3.1.5. *(Muntz-Szasz)*
Neka je $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq ...$ *rastući niz prirodnih brojeva.*
a) $\{x^{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *je fundamentalan u* $C[0,1]$ *ako i samo ako je* $n_1 = 0$ *i* $\sum \frac{1}{n_k} = \infty$.
b) Ako je $0 < a < b < \infty$ *tada je* $\{x^{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *fundamentalan u* $C[a,b]$ *ako i samo ako je* $\sum \frac{1}{n_k} = \infty$.

Dokaz. Nećemo dokazivati. □

3.2 Nezavisnost

U konačnim dimenzijama, niz $\{x_1, ..., x_n\}$ je minimalan ako i samo ako je linearno nezavisan. Ova jednostavna činjenica ne vrijedi za beskonačne nizove i beskonačnodimenzionalne prostore. U ovom poglavlju ćemo razmatrati "sive zone" u smislu nezavisnosti u beskonačnim dimenzijama. Prisjetimo se pojmova koje ćemo koristiti:

Definicija 3.2.1. *Niz* $\{x_n\}$ *u Banachovom prostoru X je:*
a) Linearno nezavisan ako $\sum_{n=1}^{N} c_n x_n = 0 \Rightarrow c_1 = ... = c_N = 0$.
b) ω*-nezavisan ako vrijedi* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ *konvergira i jednaka je* $0 \Rightarrow c_n = 0$ *za svaki n,*
c) Minimalan ako vrijedi $x_m \notin \overline{span}\{x_n\}_{n\neq m}$*, za svaki m,*
d) Bazni niz ako je Schauderova baza za $\overline{span}\{x_n\}$.

Konkretnije, Schauderova baza za X je bazni niz koji je fundamentalan. U nastavku ćemo se usredotočiti na bazne nizove umjesto na baze.
Sljedeće implikacije slijede iz prethodne definicije:

Teorem 3.2.2. *Neka je $\{x_n\}$ niz u Banachovom prostoru X. Tada vrijedi:*
a) $\{x_n\}$ je bazni niz $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ je minimalan.
b) $\{x_n\}$ je minimalan $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ je ω-nezavisan.
c) $\{x_n\}$ je ω-nezavisan $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ je konačno nezavisan.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\{x_n\}$ bazni niz u X. Tada je $\{x_n\}$ baza za $M = \overline{span}\{x_n\}$, pa postoji niz $\{a_n\} \subseteq M^*$ biortogonalan nizu $\{x_n\}$.
Fiksiramo $m \in \mathbb{N}$ i definiramo $E_m = span\{x_n\}_{n\neq m}$. Tada, kako su $\{x_n\}$ i $\{a_n\}$ biortogonalni, imamo $\langle x, a_m\rangle = 0$, za svaki $x \in E_m$. Kako je a_m neprekidna na M, vrijedi $\langle x, a_m\rangle = 0$, za svaki $x \in \overline{E_m} = \overline{span}\{x_n\}_{n\neq m}$. No, kako znamo da je $\langle x_m, a_m\rangle = 1$, zaključujemo da vrijedi $x_m \notin \overline{E_m}$. Dakle, $\{x_n\}$ je minimalan.
b) Pretpostavimo da je $\{x_n\}$ minimalan i da $\sum c_n x_n$ konvergira i iznosi 0. Pretpostavimo da postoji neki m takav da je $c_m \neq 0$. Tada vrijedi

$$x_m = -\frac{1}{c_m}\sum_{n\neq m} c_n x_n \quad \in \quad \overline{span}\{x_n\}_{n\neq m},$$

što je kontradikcija sa definicijom minimalnosti. Dakle, niz $\{x_n\}$ je ω-nezavisan.
c) Slijedi direktno. □

U sljedećim primjerima ćemo promatrati svojstva fundamentalnosti, minimalnosti i baze u Hilbertovim prostorima.

Primjer 3.2.3. *Minimalnost i fundamentalnost $\not\Rightarrow$ baza*
a) U primjeru (3.1.1) *smo pokazali da je niz $\{e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ minimalan i fundamentalan u $C(T)$, ali nije baza za $C(T)$.*
b) Dati ćemo primjer niza u Hilbertovm prostoru koji je minimalan i fundamentalan, ali nije baza. Neka je $\{e_n\}$ ortonormirana baza za separabilan Hilbertov prostor H, te neka je $x_n = e_n + e_1$ za $n \geq 2$. Promotrimo niz $\{x_n\}_{n\geq 2}$. Uzmemo li $m, n \geq 2$, imamo

$$\langle x_m, e_n\rangle = \langle e_m, e_n\rangle + \langle e_1, e_n\rangle = \delta_{mn} + 0.$$

Zaključujemo da je niz $\{e_n\}_{n\geq 2}$ biortogonalan nizu $\{x_n\}_{n\geq 2}$, pa je $\{x_n\}_{n\geq 2}$ minimalan.
Ako $x \in H$ zadovoljava $\langle x, x_n\rangle = 0$ za svaki $n \geq 2$, tada je $\langle x, e_n\rangle = -\langle x, e_1\rangle$ za svaki $n \geq 2$. Stoga, po Parsevalovoj jednakosti [2], *vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_1\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|^2 < \infty,$$

pa mora vrijediti $\langle x, e_1 \rangle = 0$. *No, tada je* $\langle x, e_n \rangle = 0$ *za svaki* n, *pa je* $x = 0$ *i* $\{x_n\}_{n\geq 2}$ *je fundamentalan. Već smo prije pokazali da je niz* $\{x_n\}_{n\geq 2}$ *minimalan, pa zaključujemo da je i egzaktan.*
Pokažimo da $\{x_n\}_{n\geq 2}$ *nije baza za H. Kako se niz* $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ *nalazi u* l^2, *niz* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$ *konvergira u H. Pretpostavimo da možemo pisati* $x = \sum_{n=2}^{\infty} c_n x_n$, *uz konvergenciju reda u normi od H. Tada za svaki* $m \geq 2$ *imamo*

$$\frac{1}{m} = \langle x, e_m \rangle = \langle \sum_{n=2}^{\infty} c_n x_n, e_m \rangle = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \langle e_n + e_1, e_m \rangle = c_m.$$

No, tada je

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n x_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} x_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}(e_n + e_1),$$

što je kontradikcija s činjenicom da ovaj red ne konvergira (uzevši u obzir norme parcijalnih suma). Stoga vektor x ne možemo zapisati u formi $\sum_{n=2}^{\infty} c_n x_n$, *i zato* $\{x_n\}_{n\geq 2}$ *nije baza.*
Kod ovog primjera je zanimljivo da, iako je $\{x_n\}_{n\geq 2}$ *egzaktan (minimalan i fundamentalan), njegov biortogonalni niz* $\{e_n\}_{n\geq 2}$ *nije fundamentalan. Za usporedbu, u kasnijem korolaru (*3.5.4*) ćemo pokazati da biogortonalan niz u odnosu na Schauderovu bazu u Hilbertovom prostoru(ili refleksivnom Banachovom prostoru) mora biti fundamentalan.*
c) Sljedeći primjer je niz u Hilbertovom prostoru koji je egzaktan ali nije baza. Promatramo trigonometrijski sustav $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, *gdje je* $e_n(t) = e^{2\pi i n t}$, *koji čini ortonormiranu bazu za* $L^2(T)$.
Definiramo funkcije $f_n \in L^2(T)$ *kao:*

$$f_n(t) = te_n(t) = te^{2\pi i n t} \quad , n \neq 0.$$

Preciznije, definiramo $f_n(t) = te_n(t)$ *za* $t \in [0, 1)$, *te proširimo* f_n *1-periodički do* $\mathbb{R}$. *Također definiramo:*

$$g_n(t) = \frac{e_n(t) - 1}{t} = \frac{e_n(t) - e_0(t)}{t} \quad , n \neq 0.$$

Direktnim računom pokaže se da je

$$||g_n||_{L^2}^2 = \int_0^1 |g_n(t)|^2 dt = 4\pi n \int_0^{\pi n} \frac{sin^2 u}{u^2} du < \infty, \tag{3.3}$$

pa je $g_n \in L^2(T)$. *Nadalje, za cijele brojeve* $m, n \neq 0$ *imamo*

$$\langle f_m, g_n \rangle = \int_0^1 te_m(t)\overline{\frac{e_n(t) - e_0(t)}{t}} dt = \langle e_m, e_n \rangle - \langle e_m, e_0 \rangle = \delta_{mn} - 0.$$

Dakle, $\{g_n\}_{n\neq 0}$ *je biortogonalan nizu* $\{f_n\}_{n\neq 0}$*, iz čega slijedi da su oba niza minimalni u* $L^2(T)$*.*
Pretpostavimo sada da je $f \in L^2(T)$ *takav da je* $\langle f, f_n\rangle = 0$ *za svaki* $n \neq 0$*. Funkcija* $g(t) = tf(t)$ *je iz* $L^2(T)$*, i za svaki* $n \neq 0$ *imamo*

$$\langle g, e_n\rangle = \int_0^1 tf(t)e^{-2\pi int}dt = \int_0^1 f(t)\overline{f_n(t)}dt = \langle f, f_n\rangle = 0$$

Kako je $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *ortonormirana baza za* $L^2(T)$*, to znači da je*

$$g = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle g, e_n\rangle e_n = \langle g, e_0\rangle e_0. \tag{3.4}$$

Kako je e_0 *konstantna funkcija jednaka 1, imamo*

$$f(t) = \tfrac{g(t)}{t} = \tfrac{\langle g,e_0\rangle e_0(t)}{t} = \tfrac{c}{t} \text{ gotovo svuda,}$$

gdje je c konstanta $\langle g, e_0\rangle$*. Za* $c \neq 0$ *je* $f(t) = \frac{c}{t} \notin L^2(T)$*, što je kontradikcija.*
Dakle, $c = 0$*, pa je* $f = 0$ *gotovo svuda. Zaključujemo da je* $\{f_n\}_{n\neq 0}$ *fundamentalan u* $L^2(T)$*.*
Sada imamo minimalnost i fundamentalnost za $\{f_n\}_{n\neq 0}$*, što znači da je i egzaktan u* $L^2(T)$*.*
Pretpostavimo sada da je baza za $L^2(T)$*. Tada će imati i konačnu baznu konstantu* C*. Kako je* $\{g_n\}_{n\neq 0}$ *biortogonalan niz, po teoremu (2.3.7 d)) vrijedi*

$$1 \leq \|f_n\|_{L^2(T)}\|g_n\|_{L^2(T)} \leq 2C, \quad n \neq 0.$$

Kako sve funkcije f_n *imaju identičnu normu, imamo* $sup\|g_n\|_{L^2} < \infty$*. No, kako je*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi n}\tfrac{sin^2 u}{u^2}du = \tfrac{\pi}{2},$$

po jednadžbi (3.3) imamo da je $\lim_{n\to\infty}\|g_n\|_{L^2} = \infty$*. To je kontradikcija, pa* $\{f_n\}_{n\neq 0}$ *ne može biti baza za* $L^2(T)$*, bez obzira na odabir poretka* $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$*.*
Pokazati ćemo da je ovaj biortogolan niz $\{g_n\}_{n\neq 0}$ *fundamentalan u* $L^2(T)$*. Pretpostavimo da za* $h \in L^2(T)$ *vrijedi* $\langle h, g_n\rangle = 0$ *za* $n \neq 0$*. Ako definiramo* $g_0(t) = \frac{e^{-2\pi i0t}-1}{t} = 0$*, tada je* $\langle h, g_n\rangle = 0$ *za svaki* $n \in \mathbb{Z}$*. Stavimo* $g(t) = h(t)\frac{e^{2\pi it}-1}{t} \in L^2(T)$*. Tada za svaki* $m \in \mathbb{Z}$ *imamo*

$$\langle g, e_m\rangle = \int_0^1 g(t)e^{-2\pi imt}dt = \int_0^1 h(t)\frac{e^{-2\pi i(m-1)t}-1+1-e^{-2\pi imt}}{t}dt = \langle h, g_{m-1}\rangle - \langle h, g_m\rangle = 0.$$

Dakle, $g = 0$ *g.s., što povlači da je* $h = 0$ *g.s., pa možemo zaključiti da je* $\{g_n\}_{n\neq 0}$ *fundamentalan.*

Primjer 3.2.4. *ω-nezavisnost i fundamentalnost $\nRightarrow$ minimalnost*
a) Neka je X Banachov prostor koji sadrži egzaktan niz koji nije baza za X (pokazali smo u primjeru (3.2.3) da takav postoji). Tada, po teoremu (3.3.1), koji ćemo ubrzo navesti, postoji $y \in X$ takav da red $\sum_{n=1}^{\infty}\langle y, a_n\rangle x_n$ ne konvergira, a niz $\{a_n\}$ je biortogonalan nizu $\{x_n\}$. Promotrimo sada niz $\{y\} \cup \{x_n\}$. Taj niz je fundamentalan, ali pošto je $y \in X = \overline{span}\{x_n\}$, ne može biti minimalan. No, pokazati ćemo da je $\{y\} \cup \{x_n\}$ ω-nezavisan.
Pretpostavimo da je $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = 0$, tj. red konvergira i suma mu je 0. Ako je $c_0 \neq 0$, tada vrijedi $y = -\frac{1}{c_0}\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = 0$. U ovom slučaju, biortogonalnost od $\{x_n\}$ i $\{a_n\}$ povlači da je $\langle y, a_n\rangle = -\frac{c_n}{c_0}$. Ali tada $\sum_{n=1}^{\infty}\langle y, a_n\rangle x_n$ konvergira, što je kontradikcija. Stoga mora vrijediti $c_0 = 0$, pa i $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = 0$. Ipak, pošto je $\{x_n\}$ minimalan, pa onda i ω-nezavisan, znači da je svaki c_n jednak nuli. Dakle, $\{y\} \cup \{x_n\}$ je ω-nezavisan i fundamentalan, ali nije minimalan.
b) Promotrimo još jedan primjer fundamentalnog ω-nezavisnog niza koji nije minimalan. Po Weierstrassovom teoremu o aproksimaciji (1.0.1), skup monoma $\{x^k\}_{k\geq 0}$ je fundamentalan u prostoru $C[0,1]$ neprekidnih funkcija na $[0,1]$. No, niz $\{x^{2k}\}_{k\geq 0}$ je također fundamentalan na $C[0,1]$, te zato niz $\{x^k\}_{k\geq 0}$ ne može biti minimalan. Ova činjenica na drugi način slijedi iz Muntz-Szaszovog teorema (3.1.5). Ipak, pokazati ćemo da je $\{x^k\}_{k\geq 0}$ ω-nezavisan. Pretpostavimo da je $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$, gdje red konvergira uniformno na $[0,1]$. Tada je funkcija $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ dobro definirana i beskonačno diferencijabilna na $(-1,1)$, te po pretpostavci imamo $f = 0$ na $[0,1)$. Gledamo li limes zdesna, vidimo da je $f^{(n)} = 0$, za svaki $n \geq 0$. Uzmemo li $n = 0$, vidimo da je $c_0 = f(0) = 0$. Pošto se red potencija može derivirati član po član, imamo $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$, te je zato $c_1 = f'(0) = 0$. Nastavimo li na ovaj način, dobiti ćemo $c_k = 0$, za svaki k. Dakle, $\{x^k\}_{k\geq 0}$ je ω-nezavisan.
Zanimljivo je da niz $\{x^k\}_{k\geq 0}$ ne sadrži niti jedan minimalan podniz. Zaista, po Muntz-Szaszovom teoremu (3.1.5), ako je $\{x^{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ fundamentalan u $C[0,1]$, tada možemo izbaciti bilo koji monom x^{n_j} (osim konstante $x^0 = 1$), te ćemo i dalje imati fundamentalan niz.

Primjer 3.2.5. *Konačna nezavisnost i fundamentalnost $\nRightarrow$ ω-nezavisnost*
a) Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ fiksni skalari različiti od 0 takvi da je $|\frac{\alpha}{\beta}| > 1$. Neka je $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ standardna baza za l^2, te definiramo $x_0 = \delta_1$ i $x_n = \alpha\delta_n + \beta\delta_{n+1}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi da je $\{x_n\}_{n\geq 0}$ fundamentalan i konačno nezavisan u l^2, ali nije ω-nezavisan.
b) Pogledajmo sljedeći slučaj fundamentalnog, konačno nezavisnog niza koji nije ω-nezavisan. Neka je X Banachov prostor koji ima bazu, i neka je $\{x_n\}$ baza za X. Neka je $\{a_n\} \subseteq X^*$ njemu biortogonalan niz, te neka je $x \in X$ bilo koji element takav da je $\langle x, a_n\rangle \neq 0$ za svaki n, kao na primjer

$$x = \sum_n \frac{x_n}{2^n \|x_n\|}.$$

Primjetimo da za x ne možemo uzeti niti jedan x_n jer je $\langle x_n, a_m\rangle = 0$ kada je $m \neq n$. Promotrimo novi niz $\{x\} \cup \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. On je očito fundamentalan, a zbog $-x + \sum\langle x, a_n\rangle x_n =$

0 *nije ω-nezavisan. No, tvrdimo da je konačno nezavisan. Pretpostavimo da je* $c_0x + \sum_{n=1}^{N} c_nx_n = 0$*. Stavimo li* $x = \sum\langle x, a_n\rangle x_n$*, slijedi da je*

$$\sum_{n=1}^{N}(c_0\langle x, a_n\rangle + c_n)x_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_0\langle x, a_n\rangle x_n = 0.$$

No, $\{x_n\}$ *je baza, a to je moguće jedino ako je* $c_0\langle x, a_n\rangle + c_n = 0$ *za* $n = 1, ..., N$ *i* $c_0\langle x, a_n\rangle = 0$ *za* $n > N$*. Kako niti jedan* $\langle x, a_n\rangle$ *nije jednak* 0*, vrijedi* $c_0 = 0$*. No, tada je* $c_1 = ... = c_N = 0$*, pa je* $\{x\} \cup \{x_n\}$ *konačno nezavisan.*

3.3 Karakterizacija Schauderovih baza

Ako je $\{x_n\}$ minimalan niz u Banachovom prostoru X, tada postoji njemu biortogonalni niz $\{a_n\} \subseteq X^*$. Stoga, iako ne znamo je li $\{x_n\}$ baza, možemo definirati operatore parcijalnih suma kao

$$S_Nx = \sum_{n=1}^{N}\langle x, a_n\rangle x_n, \quad x \in X. \tag{3.5}$$

Svaki S_N je ograničeni operator na X pošto je, po pretpostavci, svaki a_n neprekidan. Niz $\{x_n\}$ je baza ako i samo ako je $S_Nx \to x$, za svaki $x \in X$. U sljedećem teoremu vidjet ćemo da je Schauderova baza upravo egzaktni niz čija je bazna konstanta $C = sup_N\|S_N\|$ konačna.

Teorem 3.3.1. *Za niz* $\{x_n\}$ *u Banachovom prostoru X, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
a) $\{x_n\}$ *je baza za X*
b) Postoji biortogonalan niz $\{a_n\} \subseteq X^*$ *takav da vrijedi:*

$$\forall x \in X, \quad x = \lim_{N\to\infty} S_Nx = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, a_n\rangle x_n.$$

c) $\{x_n\}$ *je fundamentalan i postoji njemu biortogonalan niz* $\{a_n\} \subseteq X^*$ *takav da red* $\sum\langle x, a_n\rangle x_n$ *konvergira za svaki* $x \in X$*.*
d) $\{x_n\}$ *je egzaktan i vrijedi* $\sup_N \|S_Nx\| < \infty$*, za svaki* $x \in X$*.*
e) $\{x_n\}$ *je egzaktan i vrijedi* $sup_N\|S_N\| < \infty$*.*

Dokaz. e) $\Rightarrow$ b). Pretpostavimo da e) vrijedi, i odaberemo bilo koji $x \in span\{x_n\}$, recimo $x = \sum_{n=1}^{M} c_nx_n$. Tada, pošto je S_N linearan, a $\{x_n\}$ i $\{a_n\}$ su biortogonalni, za svaki $N \geq M$ imamo:

$$S_Nx = S_N(\sum_{m=1}^{M} c_mx_m) = \sum_{m=1}^{M} c_mS_Nx_m = \sum_{m=1}^{M} c_mx_m = x.$$

Dakle, imamo $x = \lim_{N\to\infty} S_N x = \sum\langle x, a_n\rangle x_n$ za x koji se nalazi u gustom potprostoru $span\{x_n\}$.
Neka je $C = sup_N\|S_N\|$, te neka je x bilo koji element od X. Kako je $span\{x_n\}$ gust u X, za $\epsilon > 0$ možemo pronaći $y \in span\{x_n\}$ takav da je $\|x - y\| < \frac{\epsilon}{(1+C)}$. Označimo takav element $y = \sum_{m=1}^{M} c_m x_m$. Tada za $N \geq M$ imamo:

$$\begin{aligned} \|x - S_N x\| &\leq \|x - y\| + \|y - S_N y\| + \|S_N y - S_N x\| \\ &\leq \|x - y\| + 0 + \|S_N\|\|x - y\| \\ &\leq (1 + C)\|x - y\| \\ &< \epsilon. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Stoga je $x = \lim_{N\to\infty} S_N x = \sum\langle x, a_n\rangle x_n$.
Ostale implikacije nećemo dokazivati. □

Nažalost, kad imamo egzaktan niz $\{x_n\}$, može biti vrlo teško odrediti vrijedi li ikoja od hipoteza iz prethodnog teorema.

Primjer 3.3.2. *Fiksirajmo $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, te stavimo $\varphi(t) = |t - \frac{1}{2}|^{\alpha}$ za $t \in [0, 1]$. Primjetimo da se φ i njemu recipročni $\tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{\varphi(t)} = |t - \frac{1}{2}|^{-\alpha}$ nalaze u $L^2(T)$. Stavimo $e_n(t) = e^{2\pi int}$, i prisjetimo se da je $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ortonormirana baza za $L^2(T)$. Promotrimo sada niz*

$$\{e_n\varphi\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{e^{2\pi int}\varphi(t)\}_{n\in\mathbb{Z}},$$

koji ćemo nazivati nizom težinskih eksponencijalnih funkcija. Za $m, n \in \mathbb{Z}$ imamo

$$\langle e_m\varphi, e_n\tilde{\varphi}\rangle = \int_0^1 e_m(t)\varphi(t)\overline{e_n(t)\tilde{\varphi}(t)}dt = \int_0^1 e_m(t)\overline{e_n(t)}dt = \langle e_m, e_n\rangle = \delta_{mn}.$$

Dakle, $\{e_n\tilde{\varphi}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je biortogonalan na $\{e_n\varphi\}_{n\in\mathbb{Z}}$, te su oba niza minimalna u $L^2(T)$. Po (3.3.5) su ti nizovi također fundamentalni, što povlači egzaktnost. Također, $\{e_n\varphi\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je uvjetna baza za $L^2(T)$, no tu tvrdnju nećemo dokazivati.

U prethodnom primjeru smo vidjeli da red

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f, e_n\tilde{\varphi}\rangle e_n\varphi$$

konvergira za svaku funkciju $f \in L^2(T)$. Konvergencija je uvjetna s obzirom na "prirodni" poredak $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, ...\}$. Dodatno, vrijedi i da funkciju φ iz prošlog primjera možemo zamijeniti bilo kojom funkcijom φ takvom da $|\varphi|^2$ pripada familiji $\mathcal{A}_2$ težina na T, koju definiramo na sljedeći način:

Definicija 3.3.3. *($\mathcal{A}_2$ težina)*
Nenegativna funkcija $w \in L^1(T)$ je $\mathcal{A}_2$ težina ako vrijedi

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|}\int_I w(t)dt\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I \frac{1}{w(t)}dt\right) < \infty,$$

gdje supremum uzimamo po svim intervalima $I \subseteq \mathbb{R}$ (prisjetimo se da su funkcije u $L^2(T)$ 1-periodičke na $\mathbb{R}$). Familiju $\mathcal{A}_2$ težina na T označavamo s $\mathcal{A}_2(T)$.

Dakle, nužan uvjet da bi w bila $\mathcal{A}_2$ težina je da je $\frac{1}{w}$ integrabilna.

Teorem 3.3.4. *Za $\varphi \in L^2(T)$, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
a) $\{e^{2\pi int}\varphi(t)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je Schauderova baza za $L^2(T)$, s obzirom na poredak $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, ...\}$.
b) $|\varphi|^2 \in \mathcal{A}_2(T)$.

Napomena 3.3.5. *Fiksirajmo $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, i neka je $\varphi(t) = |t - \frac{1}{2}|^\alpha$ kao u (3.3.2). Tada vrijedi:*
a) Niz $\{e^{2\pi int}\varphi(t)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je egzaktan u $L^2(T)$, i njemu biortogonalan niz $\{e^{2\pi int}\tilde{\varphi}(t)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je također egzaktan.
b) $|\varphi|^2 \in \mathcal{A}_2(T)$

Ako stavimo $\varphi(t) = |t - \frac{1}{2}|^\alpha$, uz $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, tada je $|\varphi|^2$ primjer $\mathcal{A}_2$ težine (3.3.5). Naknadno ćemo pokazati da je $\{e^{2\pi int}\varphi(t)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ bezuvjetna baza ako i samo ako postoje konstante $A, B > 0$ takve da je $A \leq |\varphi(t)|^2 \leq B$ g.s.

3.4 Karakterizacija minimalnih nizova i Schauderovih baza

Po teoremu (3.3.1) znamo da minimalan niz $\{x_n\}$ ne mora nužno biti baza. Ipak, često je korisno razmatrati odgovarajuće operatore parcijalnih suma S_N definirane u (3.5). Pretpostavimo da je $\{x_n\}$ baza sa pripadnom baznom konstantom C. Tada za bilo koji $N \geq M$ i skalare $c_1, c_2, ..., c_N$, imamo:

$$\left\|\sum_{n=1}^{M} c_n x_n\right\| = \left\|S_M\left(\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\right)\right\| \leq \|S_M\|\left\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\right\| \leq C\left\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\right\|. \tag{3.7}$$

Sljedeće ćemo pokazati karakterizaciju minimalnih nizova sa sličnom procjenom. No, za razliku od (3.7), karakterizacija minimalnih nizova omogućuje nam da konstante C_M ovise o M.

Teorem 3.4.1. *Neka je $\{x_n\}$ niz u Banachovom prostoru X kojemu su svi vektori x_n različiti od 0. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*
a) $\{x_n\}$ je minimalan.
b) $\forall M, \exists C_M \geq 1$ takav da je

$$\forall N \geq M, \quad \forall c_o, ..., c_N, \quad \Big\| \sum_{n=1}^{M} c_n x_n \Big\| \leq C_M \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\|.$$

Dokaz. a)⇒ b). Pretpostavimo da je $\{x_n\}$ minimalan. Po lemi (3.1.3), postoji niz $\{a_n\} \subseteq X^*$ biortogonalan nizu $\{x_n\}$. Zato, uz $N \geq M$ i skalare $c_0, ..., c_N$, imamo:

$$\Big\| \sum_{n=1}^{M} c_n x_n \Big\| = \Big\| S_M \big(\sum_{n=1}^{M} c_n x_n \big) \Big\| \leq \Big\| S_M \Big\| \Big\| \sum_{n=1}^{M} c_n x_n \Big\|.$$

Dakle, tvrdnja b) vrijedi uz $C_M = \|S_M\|$.
b) ⇒ a). Pretpostavimo da b) vrijedi, te neka je $E = span\{x_n\}$. Stavimo $C_0 = 0$. Tada, uz $x = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \in E$ i $1 \leq M \leq N$, imamo:

$$\begin{aligned} |c_M| \|x_M\| = \|c_M x_M\| &\leq \Big\| \sum_{n=1}^{M} c_n x_n \Big\| + \Big\| \sum_{n=1}^{M-1} c_n x_n \Big\| \\ &\leq C_M \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\| + C_{M-1} \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\| \\ &= (C_M + C_{M-1}) \|x\|. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Kako je $x_M \neq 0$, imamo

$$|c_M| \leq \frac{C_M + C_{M-1}}{\|x_M\|} \|x\|, \quad 1 \leq M \leq N. \tag{3.9}$$

Posebno, za $x = 0$ je $c_1 = ... = c_N = 0$, pa je $\{x_n\}$ konačno linearno nezavisan. Kako je E konačna linearna ljuska od $\{x_n\}$, onda je $\{x_n\}$ Hamelova baza za E. Dakle, svaki element $x \in E$ ima jedinstvenu reprezentaciju oblika $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n$, gdje je samo konačno mnogo nenul skalara $a_n(x)$. Po jednadžbi (3.9) vrijedi

$$|a_n(x)| \leq \tfrac{C_n + C_n - 1}{\|x_n\|} \|x\|, \quad x \in E,$$

pa je a_n neprekidna u potprostoru E. Po Hahn-Banachovom teoremu (1.0.10), postoji neprekidno proširenje od a_n na cijeli X, koje ćemo također označavati sa a_n. Kao posljedicu možemo zaključiti da je $\{x_n\}$ minimalan, pošto je $\{a_n\} \subseteq X^*$ biortogonalan nizu $\{x_n\} \subseteq X$. □

Promatramo li egzaktan niz $\{x_n\}$, sljedeći rezultat kaže da su konstante C_N iz teorema (3.4.1) uniformno ograničene u M ako i samo ako je $\{x_n\}$ baza za X.

Teorem 3.4.2. *Ako je $\{x_n\}$ niz u Banachovom prostoru X, tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*
a) $\{x_n\}$ je baza za X.
b) $\{x_n\}$ je fundamentalan, $x_n \neq 0$ za svaki n, i postoji $C \geq 1$ takav da vrijedi:

$$\forall N \geq M, \quad \forall c_1, ..., c_N, \quad \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\| \leq C \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\|. \tag{3.10}$$

Nadalje, ako gornje tvrdnje vrijede, najbolji odabir konstante u jednadžbi (3.10) *je bazna konstanta $C = C = \sup_N \|S_N\|$.*

Dokaz. a)$\Rightarrow$ b). Slijedi iz jednadžbe (3.7).
b)$\Rightarrow$ a). Pretpostavimo da vrijedi b). Po teoremu (3.4.1) znamo da je $\{x_n\}$ minimalan, stoga postoji njemu biortogonalan niz $\{a_n\} \subseteq X^*$. Kako je $\{x_n\}$ fundamentalan, po teoremu (3.3.1) je dovoljno pokazati da je $sup_N \|S_N\| < \infty$.
Pretpostavimo da je $x = \sum_{n=1}^{M} c_n x_n \in span\{x_n\}$. Tada je:

$$N \leq M \quad \Rightarrow \quad \|S_N x\| = \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\| \leq C \Big\| \sum_{n=1}^{M} c_n x_n \Big\| = C\|x\|,$$

$$N > M \quad \Rightarrow \quad \|S_N x\| = \Big\| \sum_{n=1}^{M} c_n x_n \Big\| = \|x\|,$$

Stoga, radi ≥ 1 imamo:

$$\forall x \in span\{x_n\}, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \|S_N x\| \leq C\|x\|.$$

No, kako je svaki S_N je neprekidan i $span\{x_n\}$ je gust u X, imamo $\|S_N x\| \leq C\|x\|$ za svaki $x \in X$ i $N \in \mathbb{N}$. Dakle, vrijedi $\sup_N \|S_N\| \leq C < \infty$, što nam također pokazuje da je najmanja moguća vrijednost za C upravo $C = C = \sup_N \|S_N\|$. □

3.5 Dualnost baza

Neka je π kanonsko umetanje Banachovog prostora X u svoj dvostruki dual X^{**} odnosno, ako je $x \in X$, tada je $\pi(x) \in X^{**}$ neprekidan linearni funkcional na X^* definiran sa $\langle x^*, \pi(x) \rangle = \langle x, x^* \rangle$ za $x^* \in X^*$ (definicija (1.0.13)).
Pretpostavimo da je $\{x_n\}$ minimalan niz u X. Tada, po lemi (3.1.3), postoji njemu biortogonalan niz $\{a_n\} \subseteq X^*$. Promotrimo niz $\{\pi(x_n)\} \subseteq X^{**}$. Za $m, n \in \mathbb{N}$ imamo:

$$\langle a_m, \pi(x_n) \rangle = \langle x_n, a_m \rangle = \delta_{mn}.$$

Stoga je $\{\pi(x_n)\}$ niz u X^{**} biortogonalan nizu $\{a_n\}$ u X^*. Dakle, $\{a_n\}$ je minimalan niz u X^*. Time smo dokazali sljedeći rezultat:

Lema 3.5.1. *Ako je $\{x_n\}$ minimalni niz u Banachovom prostoru X, te ako je niz $\{a_n\} \subseteq X^*$ biortogonalan nizu $\{x_n\}$, tada je $\{a_n\}$ minimalan u X^* i $\{\pi(x_n)\}$ je biortogonalan niz u X^{**}.*

Napomenimo da u prethodnoj lemi ne možemo zamijeniti minimalnost sa egzaktnošću. Kad je X^* neseparabilan, prebrojiv niz $\{a_n\}$ ne može biti fundamentalan u X^*. Na primjer, standardna baza $\{\delta_n\}$ je baza za $X = l^1$ (pa je i egzaktna na l^1), ali njezin biortogonalni niz, koji je također $\{\delta_n\}$, nije fundamentalan u $X^* = l^\infty$. Manje je trivijalna činjenica da, čak i ako je X^* separabilan, ne vrijedi da dual egzaktnog niza mora biti egzaktan.

Primjer 3.5.2. *Ako imamo ortonormiranu bazu $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ za separabilan Hilbertov prostor H, u primjeru (3.2.3 b)) smo konstruirali niz $\{x_n\}_{n\geq 2}$ koji je egzaktan, ali čiji biortogonalni niz je $\{e_n\}_{n\geq 2}$, koji nije fundamentalan.*

Pretpostavimo sada da je $\{x_n\}$ baza za X. Prisjetimo se, ako X^* nije separabilan, tada njemu biortogonalan niz ne može biti baza za X^*. S druge strane, $\{a_n\}$ je minimalan, pa je i egzaktan kao podskup njemu zatvorene linearne ljuske. Zanima nas hoće li tada $\{a_n\}$ biti baza za $\overline{span}\{a_n\}$? U sljedećem teoremu ćemo pokazati da je odgovor potvrdan.

Teorem 3.5.3. *Neka je X Banachov prostor. Ako je $\{x_n\}$ baza za X, tada je njemu biortogonalni niz $\{a_n\}$ baza za $\overline{span}\{a_n\}$ u X^*.*

Dokaz. Po lemi (3.5.1), $\{a_n\}$ je egzaktan u $\overline{span}\{a_n\}$, i $\{\pi(x_n)\}$ mu je biortogonalan niz u X^{**}. Stoga je, po teoremu (3.3.1), potrebno pokazati da je operator parcijalnih suma T_N (vezan uz niz $\{a_n\}$) uniformno ograničen u operatorskoj normi. Navedeni operatori parcijalnih suma su oblika:

$$T_N(x^*) = \sum_{n=1}^{N} \langle x^*, \pi(x_n)\rangle a_n = \sum_{n=1}^{N} \langle x_n, x^*\rangle a_n, \text{ za } x^* \in \overline{span}\{a_n\}.$$

Neka su S_N operatori parcijalnih suma koji se odnose na bazu $\{x_n\}$. Kako je S_N neprekidno linearno preslikavanje od X u samog sebe, znači da postoji njemu adjungirani operator $S_N^* : X^* \to X^*$. Ako je $x \in X$ i $x^* \in X^*$, tada imamo:

$$\begin{aligned}
\langle x, S_N^*(x^*)\rangle &= \langle S_N x, x^*\rangle \\
&= \Big\langle \sum_{n=1}^{N} \langle x, a_n\rangle x_n, x^*\Big\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{N} \langle x, a_n\rangle\langle x_n, x^*\rangle \\
&= \Big\langle x, \sum_{n=1}^{N} \langle x_n, x^*\rangle a_n\Big\rangle = \langle x, T_N(x^*)\rangle
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Stoga je $T_N = S_N^*$, iz čega slijedi $\|T_N\| = \|S_N^*\| = \|S_N\|$. Zaključujemo da vrijedi $\sup_N \|T_N\| = \sup_N \|S_N\| < \infty$. □

U primjeru (3.5.2) vidjeli smo da dual egzaktnog sustava ne mora biti egzaktan. U nastavku ćemo pokazati da je dual baze za refleksivan Banachov prostor X baza za X^*.

Korolar 3.5.4. *Ako je $\{x_n\}$ baza za refleksivan Banachov prostor X, tada je njemu biortogonalan niz $\{a_n\}$ baza za X^*.*

Dokaz. U teoremu (3.5.3) smo pokazali da je $\{a_n\}$ baza za $\overline{span}\{a_n\}$ u X^*, pa je potrebno pokazati još da je $\{a_n\}$ fundamentalan u X^*. Pretpostavimo da $x^{**} \in X$ zadovoljava $\langle a_n, x^{**}\rangle = 0$, za svaki n. Kako je X refleksivan, $X^{**} = \pi(X)$, što znači da je $x^{**} = \pi(x)$ za neki $x \in X$. No, tada je $\langle x, a_n\rangle = \langle a_n, \pi(x)\rangle = \langle a_n, x^{**}\rangle = 0$ za svaki n. Stoga je $x = \sum \langle x, a_n\rangle x_n = 0$, što povlači da je $x^{**} = \pi(x) = 0$. Po korolaru (1.0.12), $\{a_n\}$ je fundamentalan u X^*. □

Ako je $\{x_n\}$ baza za Banachov prostor X, a njemu biortogonalan niz $\{a_n\}$ je baza za X^*, tada kažemo da je $\{x_n\}$ padajuća baza za X. Preciznije, svaka baza za refleksivan Banachov prostor je padajuća.
Iskoristiti ćemo korolar (3.5.4) kako bismo pokazali da su dualni nizovi ekvivalentnih baza u Hilbertovim prostorima i sami ekvivalentni.

Korolar 3.5.5. *Neka je H Hilbertov prostor. Neka je $\{x_n\}$ baza za H kojoj je $\{a_n\}$ biortogonalan niz, te neka je $\{y_n\}$ baza za H kojoj je $\{b_n\}$ biortogonalan niz. Ako je $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, tada je $\{a_n\} \sim \{b_n\}$.*

Dokaz. Kako su Hilbertovi prostori sami sebi duali, iz korolara (3.5.4) možemo zaključiti da je $\{a_n\}$ baza za H uz pripadni biortogonalni niz $\{x_n\}$, a $\{b_n\}$ baza za H uz pripadni biortogonalni niz $\{y_n\}$. Ako vrijedi $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, tada postoji topološki izomorfizam $T : H \to H$ takav da je $Tx_n = y_n$ za svaki n. Adjungirano preslikavanje T^* je također topološki izomorfizam iz H u samog sebe, te za svaki $m, n \in \mathbb{N}$ imamo:

$$\langle x_m, T^* b_n\rangle = \langle T x_m, b_n\rangle = \langle y_m, b_n\rangle = \delta_{mn} = \langle x_m, a_n\rangle.$$

Kako je $\{x_n\}$ fundamentalan, vrijedi $T^* b_n = a_n$ za svaki n, te stoga vrijedi i $\{a_n\} \sim \{b_n\}$. □

Primjer 3.5.6. *Ako je $\{x_n\}$ minimalan niz u Banachovom prostoru X, te postoji njemu biortogonalan niz $\{a_n\}$ koji je baza za X^*, tada je $\{x_n\}$ baza za X.*

Dokaz. Uzmimo $y \in X$ takav da vrijedi $y \notin \overline{span}\{x_n\}$, $y \neq 0$. Tada je $a_n(y) = 0, \forall n$, a kako je $\{a_n\}$ baza za X^*, to znači da je $y = 0$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je $y \neq 0$. Dakle, ne postoji $y \in X$ takav da vrijedi $y \notin \overline{span}\{x_n\}$, pa je $\{x_n\}$ baza za X. □

Poglavlje 4

Bezuvjetne baze u Banachovim prostorima

Schauderova baza daje nam jedinstvenu reprezentaciju svakog vektora u Banachovom prostoru, $x = \sum \langle x, a_n \rangle x_n$. No, uvjetno konvergentni redovi su osjetljivi u mnogo pogleda. Na primjer, ako $x = \sum \langle x, a_n \rangle x_n$ uvjetno konvergira i (λ_n) je ograničen niz skalara, tada red $\sum \lambda_n \langle x, a_n \rangle x_n$ ne mora biti konvergentan. Bezuvjetnost je važno svojstvo, i u često će nam biti lakše raditi sa bazama koje su bezuvjetne nego uvjetne. Zato ćemo u ovome poglavlju detaljnije proučiti bezuvjetne baze.

4.1 Osnovna svojstva i bezuvjetna bazna konstanta

Možemo preformulirati bezuvjetnost baze na sljedeći način:

Lema 4.1.1. *Za niz $\{x_n\}$ u Banachovom prostoru X, sljedeće dvije tvrdnje su ekvivalentne:*
a) $\{x_n\}$ je bezuvjetna baza za X
b) $\{x_{\sigma(n)}\}$ je baza za X za svaku permutaciju σ skupa $\mathbb{N}$.
U ovom slučaju vrijedi: ako je $\{a_n\}$ niz koeficijentnih funkcionala za $\{x_n\}$, tada je $\{a_{\sigma(n)}\}$ niz koeficijentnih funkcionala za $\{x_{\sigma(n)}\}$.

Po lemi (2.4.1), topološki izomorfizam čuva svojstvo baze. Ista tvrdnja vrijedi i za bezuvjetne baze.

Lema 4.1.2. *a) Topološki izomorfizam čuva svojstvo baze. Preciznije, ako je $\{x_n\}$ bezuvjetna baza za Banachov prostor X, a $T : X \to Y$ topološki izomorfizam, tada je $\{Tx_n\}$ bezuvjetna baza za Y.*
b) Topološki izomorfizam na isti način čuva svojstvo ograničenosti bezuvjetne baze.

Prisjetimo se, iz definicije (2.4.2), da su baze $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ ekvivalentne ako postoji topološki izomorfizam T takav da je $Tx_n = y_n$ za svaki n. Može se pokazati da su sve ograničene bezuvjetne baze na Hilbertovim prostorima ekvivalentne, štoviše ekvivalentne su i ortonormiranim bazama.

Napomena 4.1.3. *Promatrati ćemo tri tipa operatora parcijalnih suma za bezuvjetnu bazu $\{x_n\}$ za Banachov prostor X. Neka je $\{a_n\}$ niz biortogonalan nizu $\{x_n\}$.*
Za početak, svakom konačnom skupu $F \subseteq \mathbb{N}$ pridružujemo operator parcijalne sume $S_F : X \to X$ definiran s:

$$S_F(x) = \sum_{n\in F} \langle x, a_n\rangle x_n, \quad x \in X.$$

Nadalje, za svaki konačan skup $F \subseteq \mathbb{N}$ i svaki niz skalara $\varepsilon = \{\epsilon_n\}_{n\in F}$ za koje vrijedi $\epsilon_n = \pm 1$ za svaki n, definiramo operator $S_{F,\varepsilon} : X \to X$ kao

$$S_{F,\varepsilon}(x) = \sum_{n\in F} \epsilon_n \langle x, a_n\rangle x_n, \quad x \in X.$$

Konačno, svakom konačnom skupu $F \subseteq \mathbb{N}$ i svakom skupu skalara $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in F}$ koji zadovoljava $|\lambda_n| \leq 1$ za svaki n, pridružujemo operator $S_{F,\Lambda}(x) : X \to X$ definiran sa

$$S_{F,\Lambda}(x) = \sum_{n\in F} \lambda_n \langle x, a_n\rangle x_n, \quad x \in X.$$

Primjetimo da, iako za S_F vrijedi $S_F^2 = S_F$, za operatore $S_{F,\varepsilon}$ i $S_{F,\Lambda}$ ta tvrdnja ne mora vrijediti.

Primjenom teorema (1.0.18), dobivamo sljedeća svojstva bezuvjetnih baza, gdje smo supremume uzeli po F, ε, te Λ iz prethodne napomene.

Teorem 4.1.4. *Ako je $\{x_n\}$ bezuvjetna baza za Banachov prostor X, tada vrijede sljedeće tvrdnje:*
a) Sljedeće tri vrijednosti su konačne za svaki $x \in X$:

$$|||x||| = \sup_F \|S_F(x)\|,$$

$$|||x|||_\varepsilon = \sup_{F,\varepsilon} \|S_{F,\varepsilon}(x)\|,$$

$$|||x|||_\Lambda = \sup_{F,\Lambda} \|S_{F,\Lambda}(x)\|.$$

b) Sljedeće tri vrijednosti su konačne:

$$\mathcal{K} = \sup_F \|S_F\|, \quad \mathcal{K}_\varepsilon = \sup_{F,\varepsilon} \|S_{F,\varepsilon}\|, \quad \mathcal{K}_\Lambda = \sup_{F,\Lambda} \|S_{F,\Lambda}\|.$$

c) $|||\cdot||| \leq |||\cdot|||_{\varepsilon} \leq 2|||\cdot|||$ *i vrijedi* $\mathcal{K} \leq \mathcal{K}_{\varepsilon} \leq 2\mathcal{K}$.
d) Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, *tada vrijedi* $|||\cdot|||_{\varepsilon} = |||\cdot|||_{\Lambda}$ *i* $\mathcal{K}_{\varepsilon} = \mathcal{K}_{\Lambda}$.
e) Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, *tada vrijedi* $|||\cdot|||_{\varepsilon} \leq |||\cdot|||_{\Lambda} \leq 2|||\cdot|||_{\varepsilon}$ *i* $\mathcal{K}_{\varepsilon} \leq \mathcal{K}_{\Lambda} \leq 2\mathcal{K}_{\varepsilon}$.
f) $|||\cdot|||, |||\cdot|||_{\varepsilon}$ *i* $|||\cdot|||_{\Lambda}$ *su norme na X, i svaka od njih je ekvivalentna početnoj normi* $\|\cdot\|$, *tako da vrijedi:*

$$\|\cdot\| \leq |||\cdot||| \leq \mathcal{K}\|\cdot\|,$$

$$\|\cdot\| \leq |||\cdot|||_{\varepsilon} \leq \mathcal{K}_{\varepsilon}\|\cdot\|,$$

$$\|\cdot\| \leq |||\cdot|||_{\Lambda} \leq \mathcal{K}_{\Lambda}\|\cdot\|.$$

Napomena 4.1.5. *Za bezuvjetnu bazu* $\{x_n\}$ *u Banachovom prostoru X, koristiti ćemo oznake kao u prethodnom teoremu za konstante* $\mathcal{K}, \mathcal{K}_{\varepsilon}, \mathcal{K}_{\Lambda}$ *i norme* $|||\cdot|||, |||\cdot|||_{\varepsilon}, |||\cdot|||_{\Lambda}$.

Definicija 4.1.6. *(Bezuvjetna bazna konstanta)*
Ako je $\{x_n\}$ *bezuvjetna baza za Banachov prostor X, tada broj* $\mathcal{K}_{\varepsilon}$ *zovemo bezuvjetna bazna konstanta za* $\{x_n\}$.

Usporedimo li broj $\mathcal{K}$ sa baznom konstantom C iz definicije (2.3.8), vidimo da je $C \leq \mathcal{K}$. Zapravo, ako je C_{σ} bazna konstanta za permutiranu bazu $\{x_{\sigma(n)}\}$, tada je $\mathcal{K} = \sup C_{\sigma}$, pri čemu uzimamo supremum po svim permutacijama σ od $\mathbb{N}$.
Bezuvjetna bazna konstanta $\mathcal{K}_{\varepsilon}$ implicitno ovisi o normi od X, a promjena norme u ekvivalentnu može promijeniti vrijednost bazne konstante.

4.2 Karakterizacija bezuvjetnih baza

Navedimo najprije teorem koji ćemo koristiti kasnije:

Teorem 4.2.1. *(Caratheodory)*
Za realne brojeve $\lambda_1, ..., \lambda_N$ *takve da vrijedi* $|\lambda_n| \leq 1$, *postoje realni brojevi* $c_k \geq 0$ *i* $\varepsilon_k^n = \pm 1$ *za* $k = 1, ..., N+1$ *i* $n = 1, ..., N$ *takvi da vrijedi:*

$$\sum_{k=1}^{N+1} c_k = 1 \quad i \quad \sum_{k=1}^{N+1} \varepsilon_k^n c_k = \lambda_n, \text{ za } n = 1, ..., N.$$

U sljedećem teoremu dati ćemo nekoliko ekvivalentnih formulacija bezuvjetnih baza:

Teorem 4.2.2. *Neka je* $\{x_n\}$ *fundamentalan niz u Banachovom prostoru X takav da je* $x_n \neq 0$ *za svaki n. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

a) $\{x_n\}$ *je bezuvjetna baza za* X.
b) $\exists C_1 \geq 1, \quad \forall c_1, ..., c_n, \quad \forall \epsilon_1, ..., \epsilon_N = \pm 1,$

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \epsilon_n c_n x_n \Big\| \leq C_1 \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\|. \tag{4.1}$$

c) $\exists C_2 \geq 1, \quad \forall b_1, ..., b_n, \quad \forall c_1, ..., c_N,$

$$|b_1| \leq |c_1|, ..., |b_N| \leq |c_N| \quad \Rightarrow \quad \Big\| \sum_{n=1}^{N} b_n x_n \Big\| \leq C_2 \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\|.$$

d) $\exists 0 < C_3 \leq 1 \leq C_4 < \infty, \forall c_1, ..., c_N,$

$$C_3 \Big\| \sum_{n=1}^{N} |c_n| x_n \Big\| \leq \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\| \leq C_4 \Big\| \sum_{n=1}^{N} |c_n| x_n \Big\|.$$

e) $\{x_n\}$ *je baza, te za svaki ograničeni niz skalara* $\Lambda = (\lambda_n)$ *postoji neprekidan linearni operator* $T_\Lambda : X \to X$*, takav da vrijedi* $T_\Lambda(x_n) = \lambda_n x_n$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$.

Nadalje, ako navedene tvrdnje vrijede, najbolji izbor konstante C_1 *u jednadžbi* (4.1) *je bezuvjetna bazna konstanta* $C_1 = \mathcal{K}_\varepsilon = \sup_{F,\varepsilon} \|S_{F,\varepsilon}\|$.

Dokaz. a)⇒b). Pretpostavimo da je $\{x_n\}$ bezuvjetna baza za X, uz pripadne koeficijentne funkcionale $\{a_n\}$. Odaberemo neke skalare $c_1, ..., c_N$ i neke $\epsilon_1, ..., \epsilon_N = \pm 1$, te stavimo $x = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n$. Tada je $\langle x, a_n \rangle = c_n$ ako je $n \leq N$, dok je $\langle x, a_n \rangle = 0$ za $n > N$, te vrijedi

$$\sum_{n=1}^{N} \epsilon_n c_n x_n = \sum_{n \in F} \epsilon_n \langle x, a_n \rangle x_n = S_{F,\epsilon}(x),$$

gdje je $F = \{1, ..., N\}$ i $\varepsilon = \{\epsilon_1, ..., \epsilon_N\}$. Po definiciji od $|||\cdot|||_\varepsilon$ i teoremu (4.1.4 f)) imamo

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \epsilon_n c_n x_n \Big\| = \|S_{F,\varepsilon}(x)\| \leq |||x|||_\varepsilon \leq \mathcal{K}_\varepsilon \|x\| = \mathcal{K}_\varepsilon \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\|.$$

Dakle, tvrdnja b) vrijedi za $C_1 = \mathcal{K}_\varepsilon$.
b)⇒a). Pretpostavimo da vrijedi b), te neka je σ neka permutacija od $\mathbb{N}$. Potrebno je pokazati da je $\{x_{\sigma(n)}\}$ baza za X. Po pretpostavci, $\{x_{\sigma(n)}\}$ je fundamentalan, sa svim nenul elementima. Po teoremu (3.4.2), dovoljno je pokazati da postoji konstanta C_σ takva da vrijedi

$$\forall N \geq M, \quad \forall c_{\sigma(1)}, ..., c_{\sigma(N)}, \quad \Big\| \sum_{n=1}^{M} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)} \Big\| \leq C_\sigma \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)} \Big\|.$$

Da bismo to učinili, fiksiramo bilo koji $N \geq M$ i odaberemo proizvoljne skalare $c_{\sigma(1)}, ..., c_{\sigma(N)}$. Definiramo $c_n = 0$ za $n \notin \{\sigma(1), ..., \sigma(N)\}$. Neka je $L = max\{\sigma(1), ...\sigma(N)\}$, te definiramo

$$\epsilon_n = 1 \quad \text{i} \quad \gamma_n = \begin{cases} 1 & \text{za } n \in \{\sigma(1), ..., \sigma(M)\}, \\ -1 & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada je

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{n=1}^{M} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)} \Big\| &= \Big\| \sum_{n=1}^{L} (\frac{\epsilon_n + \gamma_n}{2}) c_n x_n \Big\| \\ &\leq \frac{1}{2} \Big\| \sum_{n=1}^{L} \epsilon_n c_n x_n \Big\| + \frac{1}{2} \Big\| \sum_{n=1}^{L} \gamma_n c_n x_n \Big\| \\ &\leq \frac{C_1}{2} \Big\| \sum_{n=1}^{L} c_n x_n \Big\| + \frac{C_1}{2} \Big\| \sum_{n=1}^{L} c_n x_n \Big\| \\ &= C_1 \Big\| \sum_{n=1}^{L} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)} \Big\|, \end{aligned} \tag{4.2}$$

što smo željeli pokazati, uz $C_\sigma = C_1$.

a)⇒ c). Pretpostavimo da je $\{x_n\}$ bezuvjetna baza za X, uz pripadne koeficijentne funkcionale $\{a_n\}$. Odaberemo bilo koje skalare $c_1, ..., c_N$ i $b_1, ..., b_N$ za koje vrijedi $|b_n| \leq |c_n|$ za svaki n. Definiramo $x = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n$, i primjetimo da je $c_n = \langle x, a_n \rangle$. Neka je λ_n takva da je $b_n = \lambda_n c_n$. Kako vrijedi $|b_n| \leq |c_n|$, možemo uzeti $|\lambda_n| \leq 1$ za svaki n. Stoga, ako definiramo $F = \{1, ..., N\}$ i $\Lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_N\}$, tada vrijedi

$$\sum_{n=1}^{N} b_n x_n = \sum_{n \in F} \lambda_n c_n x_n = \sum_{n \in F} \lambda_n \langle x, a_n \rangle x_n = S_{F,\Lambda}(x).$$

Zato je

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} b_n x_n \Big\| = \|S_{F,\Lambda}(x)\| = |||x|||_\Lambda \leq \mathcal{K}_\Lambda \|x\| = \mathcal{K}_\Lambda \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\|.$$

Za $C_2 = \mathcal{K}_\Lambda$ tvrdnja c) vrijedi.

b)⇒c). Pretpostavimo da vrijedi b). Odaberemo proizvoljan $N > 0$, i proizvoljne skalare b_n, c_n takve da je $|b_n| \leq |c_n|$ za svaki $n = 1, ..., N$. Neka je $|\lambda_n| \leq 1$ takav da vrijedi $b_n = \lambda_n c_n$. Neka je $\alpha_n = Re(\lambda_n)$, a $\beta_n = Im(\lambda_n)$. Kako su α_n realni i zadovoljavaju $|\alpha_n| \leq 1$, Caratheodoryev teorem (4.2.1) povlači da možemo naći skalare $t_m \geq 0$ i $\epsilon_m^n = \pm 1$, za $m = 1, ..., N + 1$ i $n = 1, ..., N$, takve da vrijedi

$$\sum_{m=1}^{N+1} t_m = 1 \quad i \quad \sum_{m=1}^{N+1} \epsilon_m^n t_m = \alpha_n \quad \text{za } n = 1, ..., N.$$

Stoga vrijedi

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n c_n x_n\Big\| &= \Big\|\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N+1}\epsilon_m^n t_m c_n x_n\Big\| \\
&= \Big\|\sum_{m=1}^{N+1} t_m \sum_{n=1}^{N}\epsilon_m^n c_n x_n\Big\| \\
&\leq \sum_{m=1}^{N+1} t_m \Big\|\sum_{n=1}^{N}\epsilon_m^n c_n x_n\Big\| \\
&\leq \sum_{m=1}^{N+1} t_m C_1 \Big\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\Big\| \\
&= C_1\Big\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\Big\|.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Na sličan način možemo gledati imaginarne dijelove β_n (koji iznose 0 za $\mathbb{F} = \mathbb{R}$):

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N} b_n x_n\Big\| = \Big\|\sum_{n=1}^{N} \lambda_n c_n x_n\Big\| \leq \Big\|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n c_n x_n\Big\| + \Big\|\sum_{n=1}^{N} \beta_n c_n x_n\Big\| \leq 2C_1\Big\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\Big\|.$$

Dakle, tvrdnja c) vrijedi, uz $C_2 = 2C_1$.

c)$\Rightarrow$a). Pretpostavimo da vrijedi c), te neka je σ bilo koja permutacija od $\mathbb{N}$. Treba pokazati da je $\{x_{\sigma(n)}\}$ baza za X. Po pretpostavci, $\{x_{\sigma(n)}\}$ je fundamentalan u X, i nijedan element $x_{\sigma(n)}$ nije 0. Stoga je, po teoremu (3.4.2), dovoljno pokazati da postoji konstanta C_σ takva da vrijedi

$$\forall N \geq M, \quad \forall c_{\sigma(1)}, ..., c_{\sigma(N)}, \quad \Big\|\sum_{n=1}^{M} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}\Big\| \leq C_\sigma\Big\|\sum_{n=1}^{N} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}\Big\|.$$

Da bismo to učinili, fiksiramo bilo koji $N \geq M$ i odaberemo bilo koje skalare $c_{\sigma(1)}, ..., c_{\sigma(N)}$. Definiramo $c_n = 0$ za $n \notin \{\sigma(1), ..., \sigma(N)\}$. Neka je $L = max\{\sigma(1), ..., \sigma(N)\}$, te definirajmo

$$\lambda_n = \begin{cases} 1, & \text{za } n \in \{\sigma(1), ..., \sigma(M)\}, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada je

$$\Big\|\sum_{n=1}^{M} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}\Big\| = \Big\|\sum_{n=1}^{L} \lambda_n c_n x_n\Big\| \leq C_2\Big\|\sum_{n=1}^{L} c_n x_n\Big\| = C_2\Big\|\sum_{n=1}^{N} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}\Big\|.$$

time smo dokazali tvrdnju, uz $C_\sigma = C_2$.

c)⇒d). Pretpostavimo da vrijedi c), te izaberemo neke skalare $c_1, ..., c_N$. Neka je $b_n = |c_n|$. Tada vrijedi i $|b_n| \leq |c_n|$ i $|c_n| \leq |b_n|$ pa, prema c), imamo:

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N} b_n x_n\Big\| \leq C_2\Big\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\Big\| \quad \text{i} \quad \Big\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\Big\| \leq C_2\Big\|\sum_{n=1}^{N} b_n x_n\Big\|.$$

Takle, tvrdnja d) vrijedi, uz $C_3 = \frac{1}{C_2}$ i $C_4 = C_2$.

d)⇒c). Pretpostavimo da vrijedi d). Odaberemo neke skalare $c_1, ..., c_N$ i $\epsilon_1, ..., \epsilon_N = \pm 1$. Tada, po d), imamo:

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N} \epsilon_n c_n x_n\Big\| \leq C_4\Big\|\sum_{n=1}^{N} |\epsilon_n c_n| x_n\Big\| = C_4\Big\|\sum_{n=1}^{N} |c_n| x_n\Big\| \leq \tfrac{C_4}{C_3}\Big\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\Big\|.$$

Dakle, tvrdnja c) vrijedi, uz $C_2 = \frac{C_4}{C_3}$.

a)⇒e). Neka je $\{x_n\}$ bezuvjetna baza za X, sa pripadnim koeficijentnim funkcionalima $\{a_n\}$. Neka je (λ_n) neki ograničeni niz skalara, te neka je $M = \sup|\lambda_n|$. Fiksiramo neki $x \in X$. Tada red $x = \sum\langle x, a_n\rangle x_n$ konvergira bezuvjetno. Stoga, po teoremu (1.0.18 f)), red $T_\Lambda(x) = \sum \lambda_n\langle x, a_n\rangle x_n$ konvergira. Ovako definiran $T_\Lambda : X \to X$ je očito linearan, i imamo

$$\|T_\Lambda(x)\| = M\Big\|\sum_n \tfrac{\lambda_n}{M}\langle x, a_n\rangle x_n\Big\| \leq M\mathcal{K}_\Lambda\Big\|\sum_n\langle x, a_n\rangle x_n\Big\| = M\mathcal{K}_\Lambda\|x\|.$$

Dakle, T_Λ je neprekidna. Konačno, biortogonalnost od $\{x_n\}$ i $\{a_n\}$ povlači da je $T_\Lambda(x_n) = \lambda_n x_n$ za svaki n.

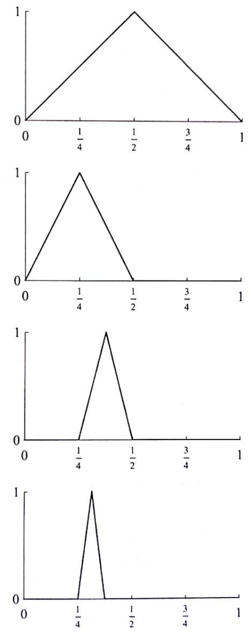
e)⇒a). Pretpostavimo da vrijedi e). Kako je $\{x_n\}$ baza, postoji njemu biortogonalan niz $\{a_n\} \subseteq X^*$ takav da red $x = \sum\langle x, a_n\rangle x_n$ konvergira i da je to jedinstveni raspis od x u terminima vektora x_n. Moramo pokazati da ovaj red bezuvjetno konvergira. Neka je $\Lambda = (\lambda_n)$ neki niz skalara takav da vrijedi $|\lambda_n| \leq 1$, za svaki n. Tada, po pretpostavci, postoji neprekidno preslikavanje $T_\Lambda(x_n) = \lambda_n x_n$ za svaki n. Neprekidnost od T_Λ povlači da vrijedi

$$T_\Lambda(x) = T_\Lambda(\sum_n\langle x, a_n\rangle x_n) = \sum\langle x, a_n\rangle T_\Lambda(x_n) = \sum_n \lambda_n\langle x, a_n\rangle x_n.$$

Dakle, najdesniji izraz iz prethodne jednadžbe konvergira za bilo koji izbor ograničenih skalara, pa iz teorema (1.0.18 f)) znamo da red $x = \sum\langle x, a_n\rangle x_n$ konvergira bezuvjetno. □

4.3 Uvjetnost Schauderovog sustava u $C[0, 1]$

Ranije smo pokazali da je Schauderov sustav baza za $C[0, 1]$. Sljedeće ćemo pokazati da je ta baza uvjetna. To ćemo napraviti indirektno: nećemo eksplicitno konstruirati element iz $C[0, 1]$ čija reprezentacija u bazi konvergira uvjetno, već ćemo koristiti teorem (4.2.2) kako bismo pokazali da bezuvjetna bazna konstanta za Schauderov sustav mora biti beskonačna.



Slika 4.1: Odozgo: funkcije t_1, t_2, t_3, t_4

Koristeći notaciju otprije, elementi Schauderovog sustava su funkcije $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{[0,1]}$, funkcija $l(t) = t$, te proširene i translatirane kapa-funkcije $s_{n,k}(t) = W(2^n t - k)$, gdje je W kapa-funkcija visine 1 definirana na $[0, 1]$. Odaberemo podniz Schauderovog sustava definiranjem:

$$t_1 = s_{0,0} \quad \text{(kapa-funkcija na } I_1 = [0, 1]\text{)},$$

$$t_2 = s_{1,0} \quad \text{(kapa-funkcija na } I_2 = [0, \tfrac{1}{2}]\text{)},$$

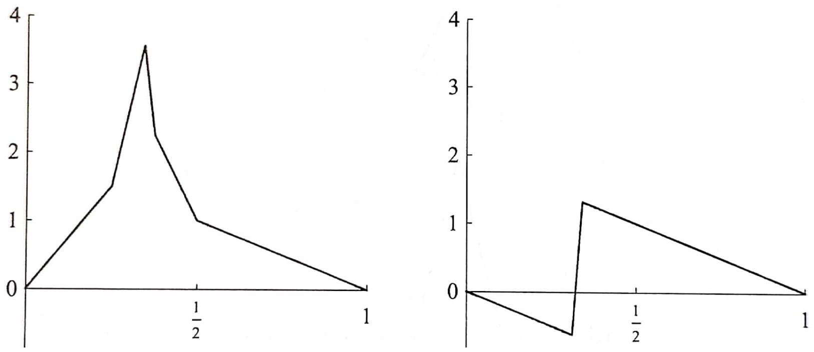
$$t_3 = s_{2,1} \quad \text{(kapa-funkcija na } I_3 = [\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}]\text{)},$$

$$t_4 = s_{3,2} \quad \text{(kapa-funkcija na } I_4 = [\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{8}]\text{)},$$

$$t_5 = s_{4,5} \quad \text{(kapa-funkcija na } I_5 = [\tfrac{5}{16}, \tfrac{3}{8}]\text{)},$$

$$t_6 = s_{5,10} \quad \text{(kapa-funkcija na } I_6 = [\tfrac{5}{16}, \tfrac{11}{32}]\text{)},$$

itd., gdje mijenjamo lijeve, odnosno desne strane intervala I_{N-1} kao intervala I_N na kojem je kapa-funkcija t_N definirana (slika 4.1).



Slika 4.2: Funkcije g_5 (lijevo) i h_5 (desno)

Promotrimo sada funkciju $g_N = \sum_{n=1}^{N} t_n$. Cilj nam nije pokazati da g_N konvergira uniformno (u stvari niti ne konvergira uniformno), već da mu izračunamo normu i usporedimo rezultat sa normom od $h_n = \sum\limits_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}(t_n)$ (vidi ilustraciju 4.2).

Funkcije g_{N-1} i g_N se poklapaju svugdje osim na intervalu I_N. Neka je μ_n središte intervala I_N. Funkcija g_{N-1} je linearna n a intervalu I_N, a g_N dostiže svoj globalni maksimum na središtu μ_n. Po napravljenoj konstrukciji, za $N \geq 3$, jedan rub intervala I_N je μ_{N-2}, a drugi je μ_{N-1}. Odredimo li $a_N = g_N(\mu_N)$ kao globalni maksimum od g_N, imamo

$$a_N = 1 + \tfrac{a_{N-1}+a_{N-2}}{2}.$$

Vrijedi: a_N se povećava beskonačno za $N \to \infty$.
S druge strane, za $h_N = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}t_n$ vrijedi da uvijek imamo $|h_n(t)| \leq 2$, pa je $b_N = \|h_N\|_\infty \leq 2$. Kao posljedicu vidimo da ne može postojati konačna konstanta C takva da vrijedi:

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N} t_n\Big\|_\infty = a_N \leq Cb_N = C\Big\|\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}t_n\Big\|_\infty, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Uzmemo li u obzir dio c) iz teorema (4.2.2), zaključujemo da Schauderov sustav ne može biti bezuvjetan.

Bibliografija

[1]. C.Heil, A Basis Theory Primer Expanded Edition, Birkhäuser, Springer Science+Business Media, LLC 2011.
[2]. D.Bakić, Normirani prostori, Zagreb 2016.
[3]. D.Bakić, Linearna Algebra, Zagreb 2008.

Sažetak

U ovome radu cilj nam je bio proučiti i opisati osnovna svojstva bezuvjetnih baza.
U prvome poglavlju smo uveli rezultate iz raznih područja koji su nam bili potrebni za opis problema.
U drugom poglavlju smo opisali baze na Banachovim prostorima i njihova svojstva, počevši od Hamelovih baza, s kojima smo se prije susreli u konačnodimenzionalnim prostorima. Definirali smo i opisali neke vrste baza (bezuvjetne, apsolutno konvergentne, ograničene i normalizirane baze), detaljnije smo proučili Schauderove baze, te smo opisali i proučili svojstvo ekvivalencije baza u beskonačnodimenzionalnim Banachovim prostorima. Također, proučili smo i trigonometrijski sustav, $\{e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.
U trećem poglavlju pozabavili smo se svojstvima baza: definicijom, svojstvima minimalnosti i biortogonalnosti, te karakterizacijom Schauderovih baza i minimalnih nizova. Također smo se pozabavili pitanjem nezavisnosti u beskonačnodimenzionalnim prostorima.
U zadnjem poglavlju smo opisali bezuvjetne baze. Proučili smo njihova osnovna svojstva i karakterizaciju, uveli pojam bezuvjetne bazne konstante i naučili kako ju najbolje odrediti, te smo uvidjeli da Schauderov sustav ne može biti bezuvjetan.

Summary

In this paper, our goal was to analyze and describe the properties of unconditional bases.
In the first chapter, we've introduced the results we needed to describe the problem.
In the second chapter, we have defined the bases on Banach spaces and described their properties, starting with Hamel bases, which we referred to as bases in finite dimensional spaces. We have defined and described several types of bases (such as the unconditional bases, absolutely convergent bases, bounded bases, and normalized bases), we studied Schauder bases in detail, and have described equivalence of bases in infinite dimensional Banach spaces. Also, we've described the trigonometric system, $\{e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.
In the third chapter, we had a closer look at basis properties: definition, minimality, biorthogonality, and independence when in infinite dimensional Banach spaces. We've characterized Schauder bases and minimal sequences and found out how minimality and Schauder bases are related..
In the last chapter, we've described the unconditional bases. We characterized them, described their basic properties, introduced the definition of unconditional basis constant (its properties, and how to find it). At last, we've shown that the Schauder system cannot be unconditional.

Životopis

Moje ime je Matko Ban, rođen sam 26.5.1991. u Zagrebu, gdje 2009. godine završavam XV. gimnaziju, a 2015. završavam preddiplomski smjer na PMF-u, te upisujem diplomski studij Primijenjena matematika.

Tijekom studija prikupio sam praktična znanja kao što su korištenje operativnih sustava Windows i Linux, korištenje MS Office-a, rad s bazama podataka, programiranje u C-u, C++-u i Matlab-u, te rad na projektima koji uključuju data mining i numeričku matematiku, te rad u Latex-u. Osim toga, upoznat sam sa data warehousingom i poslovnom inteligencijom, Oracle alatima, te PowerBI editorom.

Dodatno, surađujem u izradi znanstvenog rada na temu antropometrije u Zagrebu. Od stranih jezika dobro govorim engleski i njemački.