Od nule do beskonačnosti

Drk, Veronika

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Veronika Drk

OD NULE DO BESKONAČNOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Franka Miriam Brückler

Zagreb, srpanj 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Krenimo od nule. . .

Velika zahvala prije svega mojoj mami, braći i dečku koji su mi uvijek bili podrška.

Zahvaljujem mentorici doc. dr. sc. Franki Miriam Brückler na razumijevanju, podršci, savjetima te svom vremenu i trudu koji je uložila kako bi ovaj diplomski ugledao svjetlo dana.

Hvala i svim prijateljima te kolegama s fakulteta koji su bili uz mene kroz ove godine studiranja.

Još jednom beskonačno HVALA!

Sadržaj

Uvod

Prije nekoliko tisuća godina, život bez brojeva bio je svakodnevan, a danas je nezamisliv. Potreba za korištenjem brojeva proizlazi iz rješavanja mnogih praktičnih problema, koji su s godinama postojali sve kompliciraniji, što je dovelo do razvitka brojevnih sustava. Prava vrijednost brojeva skrivena je iza njihovih simbola i naziva. Brojevi su temelj ne samo matematike kao znanosti, već i drugih znanosti poput fizike, kemije, astronomije...

Često u svakodnevnom životu kažemo da je potrebno krenuti od nule da bismo nešto postigli, no u povijesti brojeva nije bilo tako. Otkriće nule došlo je nakon razvoja brojki, a paralelno s razvojem brojevnih sustava. Važno je istaknuti razliku između brojeva i brojki, iako ova dva pojma u svakodnevnom govoru često poistovjećujemo. Brojke su zapisi brojeva, koristeći znamenke: isti broj može se predstaviti različitim brojkama.

Izrazi kojima nazivamo brojeve u različitim jezicima, narodima, plemenima, a kasnije i simboli za brojeve vjerojatno su stari tek oko 10 000 godina. Zašto smo ih uopće uveli? Zašto bilježimo brojeve? Zašto bismo brojili? Možemo li živjeti bez brojeva? Sve su to pitanja na koja ćemo pokušati odgovoriti u ovom diplomskom radu.

Osim pregleda povijesti brojeva i brojki, od prvih dokaza ljudskog brojanja, preko prvih brojevnih sustava do pozicijskog decimalnog zapisa, posebna poglavlja bit će posvećena povijesti nule (kao broja i kao znamenke), povijesti razlomaka, povijesti negativnih brojeva, povijesti realnih i kompleksnih brojeva te uvođenju transfinitnih brojeva.

Poglavlje 1

Povijest brojeva

Danas nam se čini nemoguće živjeti bez brojeva, no u povijesti, prije nekoliko tisuća godina, ljudi su živjeli bez brojeva i brojki. Postoje razne teorije zašto su ljudi počeli koristiti brojeve, a jedna od najpoznatijih je da su postali nužni kad su se ljudi počeli baviti poljoprivredom. Bilo je važno prebrojati primjerice koliko imamo ovaca da znamo ukoliko nam ih netko ukrade [1]. Za početak treba pripaziti da je jedna stvar uočiti da osoba koja ima dva psa ima jednako domaćih životinja kao osoba koja ima dvije mačke. Zatim potpuno druga stvar je stvoriti ideju dva objekta koja ne uspoređujemo s druga dva objekta. Zadnji koraci u shvaćanju koncepta su doći do apstraktne ideje broja dva, osmisliti riječ za njega, osmisliti simbol za njega te računati s tim brojem [8].

1.1 Prvi dokazi ljudskog brojanja

Najstariji dokazi da su ljudi bili sposobni brojati potječu od bilježenja pomoću crtica (engl. *tally marks*). Takve tragove brojanja možemo naći u obliku zareza u kostima i kamenju koje nazivamo rovaši. Dva najpoznatija rana rovaša, kost iz Lebomba (stara oko 43 000 godina) i kost iz Išanga (stara oko 20 000 godina) potječu iz Afrike iz razdoblja kamenog doba. Na kosti iz Lebomba vidljivo je devet redaka, a postoje teorije da je to bio lunarni kalendar. Na kosti iz Išanga postoje jasno grupirane crte, ali ni dan danas ne znamo što predstavljaju, iako postoje nagađanja da je to bila igra, kalendar ili nešto treće.

Nešto kasnije, kad su ljudi već znali oblikovati glinu, kao pomagalo za brojanje koristili su žetone od gline. U današnje vrijeme bismo to mogli usporediti s računanjem pomoću kamenčića. U južnoj Americi, Indijanci, a posebno pleme Inka primjenjivalo je metodu koja je jako atraktivna. Naime, koristili su užad s čvorovima nazvanu *quipu* koja je izgledala kao vrsta nakita. Prema poziciji i broju čvorova moglo se zaključiti koliko se nečega prebrojalo.

Iako se nalazimo još daleko u povijesti od pojave naziva i simbola za brojeve kakve danas poznajemo, poznato je da su već davno ljudi počeli davati imena manjim prirodnim brojevima. Tako i danas postoje razna lovačko-sakupljačka plemena koja žive uz Amazonu, u Australiji, Tasmaniji i Novoj Gvineji, a imaju imena samo za brojeve jedan i dva, ponekad tri, četiri i pet, dok je sve ostalo „puno". Primjerice, jedno od takvih plemena je pleme Munduruku koje za brojeve, jedan, dva i tri ima redom sljedeće nazive *pūg, xep xep, ebapug* . Izrazi za brojeve četiri i pet se koriste u smislu „otprilike četiri ili pet", a nazivaju ih *ebadipdil* i *pūg pogbi*. Iako pleme Munduruku smatra da je besmisleno brojati i ne upotrebljavaju velike brojeve, to ne znači da nisu sposobni procjenjivati, odnosno uspoređivati velike količine (brojeve), primjerice u lovu.

Zanimljiva je činjenica da je u nekim kulturama bilo zabranjeno brojanje. Najpoznatija zabrana brojanja postoji kod Židova i to se odnosi na direktno prebrojavanje Židova. Isto to židovstvo inzistira na tome da na molitvama treba biti minimalno deset osoba odnosno treba biti postignut minjan. Ovdje se postavlja pitanje kako onda prebrojati ljude ako je zabranjeno brojanje? Kako bismo ipak prebrojali Židove, potrebno je uzeti molitvu ili tekst od deset riječi te svaki od prisutnih izgovara po jednu riječ. Ako su izgovorene sve riječi tada se na molitvi doista nalazi deset osoba. Vidimo dakle da princip bijekcije omogućuje uspoređivanje dvaju (prirodnih) brojeva bez da ih direktno navodimo [8, 1].

1.2 Zašto brojimo?

Koliko je nama ljudima brojanje nešto urođeno, a koliko je posljedica razvitka ljudske kulture i civilizacije? U svrhu otkrivanja što je točno, provedeni su brojni pokusi sa životinjama. Jedan od najpoznatijih pokusa je onaj s vranama, koje su, kad bi izašao čovjek na polje, čekale da on ode, a ako bi bila dvojica čekale da odu oba. Kod takvih pokusa sa životinjama pokazalo se da mnoge životinje raspoznaju brojeve do tri ili četiri. U novije doba su u Japanu pak trenirali čimpanze da broje do deset i da prebroje koliko nečega ima, a jednu su uspjeli naučiti uspoređivati brojeve do deset (dakle, ta čimpanza je uspjela savladati koncepte kardinalnosti i ordinalnosti u skupu prirodnih brojeva od 1 do 10).

Okruženi mjernim instrumentima, ravnalima, termometrima, koordinatnim sustavima, navikli smo smatrati cijele brojeve jednoliko razmaknutima. No, istraživanja provedena s plemenom Munduruku pokazala su da pri raspodjeli objekata manje vrijednosti prema većoj, u doživljaju članova tog plemena, dakle ljudi koji se nisu susreli s matematičkim obrazovanjem, udaljenosti među susjednim prirodnim brojevima se s njihovim porastom smanjuju. Do istog rezultata došlo je i kod provedbe istraživanja s vrtićkom djecom. Dakle, čini se da je u smislu urođenog smisla za brojeve u ljudi prirodnije „logaritamsko" razmišljanje, tj. uspoređivanje brojeva po omjerima, a ne u jednolikim razmacima kako učimo u školi. Ovdje se postavlja pitanje zašto bi to bilo evolucijski korisno? Odgovor na ovo pitanje pronalazimo u svakodnevnim situacijama. Primjerice, u ratu je važnije uočiti imamo li dvostruko ili trostruko više neprijatelja, a ne jedno ili dvoje više u apsolutnom iznosu. Neke elemente takvog razmišljanja doživljavamo i danas u svakodnevnom životu. Primjerice, kao sinonime koristimo riječi milijarder i milijunaš, prethodni dan čini nam se dulji od prethodnog mjeseca i slično.

U raznim istraživanjima utvrđeno je da je ljudima urođeno aproksimativno razumijevanje veličina brojeva i uspoređivanje po omjeru, dok je razumijevanje količina kao egzaktnih brojeva kakve učimo u školi produkt civilizacije i temelj razvoja tehnologije. Kroz razne eksperimente s raznim „primitivnim” plemenima profesor Brian Butterworth iz Univ. Coll. London pokazao je da je ljudima urođeno razumijevanje točnih brojeva elemenata malih skupova. Zaključio je da male brojeve razumijevamo egzaktno i to nam je urođeno, dok razumijevanje velikih brojeva izvodimo tako da kombiniramo male i vidimo kako se ponašaju veći [1, 19].

1.3 Brojanje na prste

Prva pomagala za brojanje, a kasnije za računanje, zasigurno su bili prsti. Poznati su mnogi sustavi brojanja sa prstima koji su kroz povijest bili korišteni. S obzirom na to da većina ljudi imaju po deset prstiju na rukama i nogama, može se postaviti pitanje znači li to da su prvotni brojevni sustavi omogućavali brojanje samo do deset ili dvadeset. No, iako je to sigurno u nekim slučajevima bilo točno, ima i kontraprimjera. Jedan poznati je sljedeći primjer. Kod plemena Tamanaka uz rijeku Orinoco se i dan danas koristi sljedeći sustav: za brojeve od jedan do četiri imaju posebne riječi (kao što ih imamo i mi danas — jedan, dva, tri i četiri); pet je „čitava ruka”, šest je „jedan na drugoj ruci”,. . . , deset je „. . . , petnaest je „čitava noga”, šesnaest je „jedan na drugoj nozi”,. . . , dvadeset je „čitav čovjek”; dvadeset jedan je „jedan na ruci drugog čovjeka”,. . . ,četrdeset je „dva čovjeka”,. . . Slijedi da bi, primjerice, sedamdeset jedan bio „jedan na nozi četvrtog čovjeka”. No, s druge strane, brojevi prstiju na rukama i nogama su, to je primijetio još Aristotel, uzrok da je u većini kultura pri brojanju razvijeno grupiranje po deset, tj. da su se u većini kultura razvili brojevni sustavi s bazom deset.

Kroz povijest je postojalo mnogo sistema za brojanje prstima, a među njima je najpoznatiji onaj Beda Časnoga (7./8. st.). U Bedinom sustavu različitim položajima prstiju predstavljali su se brojevi do devet tisuća. On je u svojoj metodi brojanja podijelio prste na više dijelova, odnosno brojao je pomoću zglobova prstiju. Zabilježio je čitav znakovni sustav prikazivanja brojeva i slova prstima i rukama u svrhu računanja pashalnih tabela, tj. tablica s datumima Pashe (Uskrsa). Smatra se da Beda nije samostalno izmislio takav sustav, već ga je preuzeo od drugih te ga usavršio.

Brojanje na prste odražava se i u brojevnoj terminologiji mnogih jezika. Engleski izraz za znamenku *digit* dolazi od latinskog *digitus* što znači prst. U mnogim slavenskim jezicima imamo verzije riječi pet u korespondenciji s riječju pest, pesnica, pešće što znači šaka. Pleme Zulu za devet doslovno kaže „izostavi jedan“ (prst). Neka karipska plemena za dvadeset kažu svi sinovi ruku i nogu. Pogledamo li pet različitih stranih jezika (tablica 1.1), bez obzira na njihovu veliku različitost, postoje puno veće sličnosti za izraze od jedan do tri nego za veće brojeve što sugerira da su oni vrlo rano razvijeni [1, 8, 19].

Tablica 1.1: Prikaz brojeva u različitim stranim jezicima

	hrvatski	engleski	njemački	talijanski	francuski
1	jedan	one	eis	uno	un
2	dva	two	zwei	due	deux
3	tri	three	drei	tre	trois
4	četiri	four	vier	quattro	quatre
5	pet	five	fünf	cinque	cinq

1.4 Brojevi i jezik

S druge strane, pitamo se može li jezik olakšati ili otežati računanje s brojevima? Poznato je da dalekoistočna djeca brže nauče računati s većim brojevima od europske djece. Jedan mogući razlog je što se u njihovim kulturama (Japan, Koreja, Kina) gleda na to puno pozitivnije, u smislu se da više cijeni ako djeca znaju računati i da su sposobni u matematici. Razumno je pitati se je li to jedini razlog? Je li doista samo zbog utjecaja okoline? Ako pogledamo izraze za brojeve u drugim jezicima poput hrvatskog, uočit ćemo da je on dosta nesistematičan. Jedanaest nije deset i jedan; dvanaest nije deset i dva, dok s druge strane imamo dvadeset i jedan, dvadeset i dva i tako dalje. Slično je i u engleskom jeziku, a još nezgodnije u njemačkom jeziku zbog zamjene redoslijeda jedinici, desetica. Nešto pravilniji je turski, a zatim velški. Japanski, korejski i kineski jezik su po tom pitanju izrazito pravilni: dvadeset je dva deset, dvadeset i jedan je dva deset jedan.

Kako bi se provjerilo ima li jezik veze sa sposobnosti računanja, proveden je test s velškom djecom u jednom selu. Neka djeca su primarno govorila engleski, a neka velški. Istraživanje je pokazalo da djeca imaju slične računske sposobnosti, no djeca koja su govorila velški bila su bolja u čitanju, uspoređivanju i manipuliranju dvoznamenkastih brojeva. Pamćenje brojeva i tablice množenja u Japanu su gotovo pjesmice naziva *kuku* koju djeca prvo uče izgovarati, a tek onda ju pojme. Dakle, doista postoji indikacija da jezik kao kulturološki element ljudskog života ima utjecaj na razvijanje sposobnosti računanja. Za više o ovoj temi upućujemo na [1].

Poglavlje 2

Povijest brojki

Brojke koje u današnje vrijeme redovno koristimo poznate su kao indoarapske brojke ili brojke u dekadskom pozicijskom sustavu (pozicija znamenke određuje njezinu vrijednost). Osim navedenog sustava, povremeno koristimo rimske brojke i nedekadske sustave. Primjerice broj dvije tisuće dvadeset i jedan zapisan u modernom dekadskom pozicijskom sustavu je 2021, zapisan rimskom brojkom bio bi MMXXI. U sustavu s bazom 60, 2021 minutu izrekli bismo kao 33 sata i 41 minutu.

2.1 Pojava baza brojevnih sustava

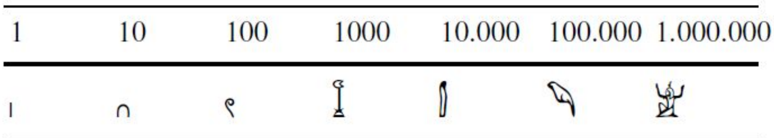
Ljudi su prvo kroz povijest naučili brojati, a onda su krenuli osmišljavati izraze za brojeve. Potreba za grupiranjem brojeva, a zatim i pojavom simbola brojeva počela se pojavljivati prilikom brojanja puno stvari. Kako su se ljudi nekada primarno bavili poljodjelstvom, često su primjerice trebali izbrojiti broj životinja u svom stadu. Kada bismo brojali jedan po jedan, dajući svakom sljedećem broju poseban naziv, teško bismo mogli efikasno izbrojiti osamdeset ovaca pa su ljudi počeli grupirati simbole na različite načine. Primjerice, pleme Arara u Amazoniji ima izraze za jedan (*anane*) i dva (*adak*) te znaju brojati do osam, redom *anane, adak, adak anane, adak adak, adak adak anane, adak adak adak, adak adak adak anane, adak adak adak adak*. Možemo reći da pleme Arara koristi bazu 2. Kod ovako male baze teško je brojati do većih brojeva odnosno za velike brojeve koristili bismo jako puno riječi.

Ljudi su s vremenom počeli grupirati malo veće brojeve da bi riješili svakodnevne probleme pa se tako primjerice u Lincolnshireu u srednjem vijeku koristilo dvadeset riječi („znamenke”) za jedan do dvadeset, a za veće brojeve se koristio prethodno gore opisani princip. Slično grupiranje po dvadeset nalazimo i na Grenlandu i Novom Zelandu što se tiče riječi, a kod starih Maja (vidi odjeljak 4.3) što se tiče simbola.

Dakle, kroz povijest došlo je do različitih principa grupiranja u „pakete”, u matematičkom smislu govorimo o bazama. Najčešće baze kroz povijest bile su 5, 20 i posebno često baza 10. U 4. st. pr. Kr. Aristotel je primijetio da su te baze izravno povezane s anatomskom građom čovjeka. Na jednoj ruci imamo pet prstiju, na dvije ruke deset prstiju odnosno dvadeset ako koristimo prste ruku i nogu.

Iako je baza deset u današnje vrijeme dominantna, jezikoslovci su ipak u mnogim jezicima otkrili ostatke drugih sustava. Primjerice, u francuskom jeziku za broj osamdeset reći ćemo *quatre-vingts*, što znači četiri-dvadeset i vidljiv je zaostatak baze 20. U francuskom, njemačkom, norveškom i španjolskom jeziku imaju izraze redom *neuf, neun, ni, nueve* za broj devet, koji je jako sličan izrazu za nešto novo, što sugerira da je to bio novi broj. Taj novi broj slijedio je nakon najvećeg i poznatog iz čega slijedi da je u neka davna vremena baza bila 8 [1].

Jedan od najstarijih sustava sa simboličkim zapisom znamenki[1] koji koristi sustav s bazom 10 bile su hijeroglifske brojke u starom Egiptu. Imali su posebne znamenke za potencije broja 10 od nulte do šeste (slika 2.1) [8]. Taj je sustav bio aditivan, a ne pozicijski: Vrijednost broja prikazanog brojkom dobije se zbrajanjem vrijednosti znamenki. Primjerice, današnji 2021 bi u hijerogliofskom brojevnom sustavu bio zapisan s dva simbola lotosa, koji predstavljaju svaki po 1000, dva simbola $\cap$ za dvaput po 10 i jednim simbolom | za jednu jedinicu,



Slika 2.1: Egipatske hijeroglifske znamenke

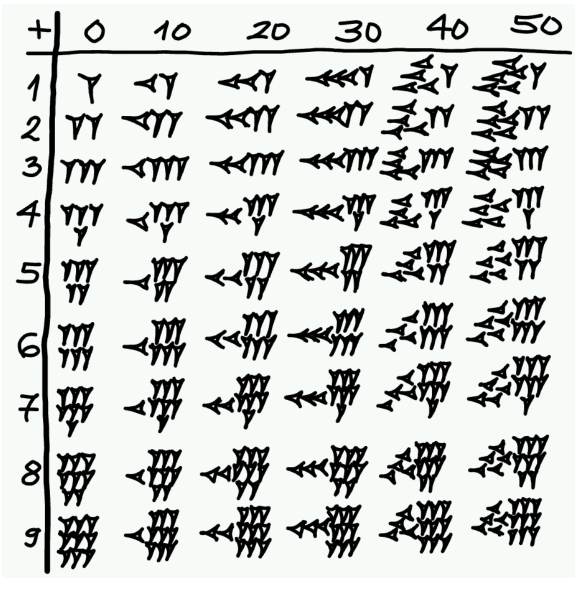
2.2 Pojava pozicijskih sustava

Smatra se da su pozicijski sustavi postepeno nastali iz starijih zapisa brojeva koji su se razvili nakon rovaša. Općenito, najstariji zapisi brojeva brojkama potječu iz Sumera i Egipta od prije otprilike 4000 godina, a razvili su se iz *tally marks*.

Pozicijski (položajni) brojevni sustav prikazuje brojeve znamenkama kojima vrijednost ovisi o položaju u zapisu broja. Znamenka na posljednjem položaju ima vlastitu vrijednost, a vrijednost znamenaka prema lijevo množi se s bazom, prva jedanput, druga dva puta, treća tri puta itd. Primjerice u dekadskom brojevnom sustavu: $2021 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2$

[1] Brojeve zapisujemo brojkama. Simboli koji se koriste u brojkama određenog sustava zovu se znamenke.

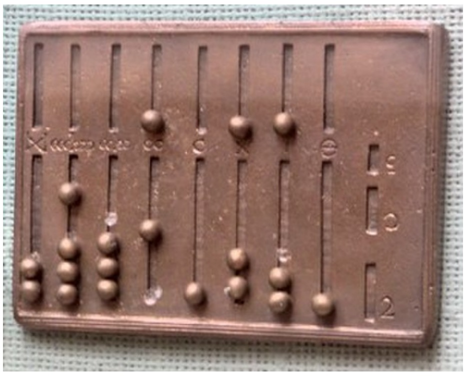
+ 2 · 10 + 1. U pozicijskom je sustavu nužno imati znak za nulu, dok je broj znamenaka ograničen, tj. broj znamenaka u nekom pozicijskom sustavu je baza toga brojevnog sustava. Za bazu pozicijskog brojevnog sustava može se uzeti bilo koji prirodan broj veći od jedan. Primjerice, ako se umjesto 10 za bazu uzme broj 4, onda se svaki broj zapisuje pomoću znamenki 0, 1, 2 i 3. U tom slučaju pozicijske vrijednosti znamenki su određene potencijom broja 4. Danas ponajviše zapisujemo brojeve u dekadskom pozicijskom sustavu, no često koristimo i binarni, oktalni i heksadekadski brojevni sustav. Heksadekadski brojevni sustav ima bazu 16, a znamenke su mu od 0 do 9 i od A do F. Brojeve možemo pretvarati iz različitih brojevnih sustava prema određenim pravilima. Pretvorba broja zapisanog u nekoj bazi u dekadski broj odvija se preko težinskih vrijednosti znamenaka. Svaka se znamenka pomnoži s potencijama baze, idući s desna na lijevo. Krajnja desna potencija je nulta. Primjerice, binarna brojka 11111100101 jednaka je broju 2021 u bazi 10 jer imamo $11111100101 = 1{\cdot}2^0 + 0{\cdot}2^1 + 1{\cdot}2^2 + 0{\cdot}2^3 + 0{\cdot}2^4 + 1{\cdot}2^5 + 1{\cdot}2^6 + 1{\cdot}2^7 + 1{\cdot}2^8 + 1{\cdot}2^9 + 1{\cdot}2^{10} = 1 + 0 + 4 + 0 + 0 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 = 2021$. Pretvorba brojke zapisane u dekadskom brojevnom sustavu u brojku u nekoj drugoj bazi b odvija se prema sljedećem pravilu: Dekadska brojka dijeli se s bazom te se postupak ponavlja sa svakim kvocijentom sve dok se ne dobije kvocijent 0. Prilikom svakog dijeljenja dobivaju se ostatci (od 0 do $b - 1$). Zapisivanjem ostataka od posljednjega prema prvome dobije se zapis broja u traženoj bazi. Primjerice, 2021 zapisan u oktalnom i heksadekadskom brojevnom sustavu je 3745 odnosno 7E5 [12].



Slika 2.2: Znamenke 1 do 59 u babilonskom seksagezimalnom sustavu. Sliku ustupila F. M. Brückler

Prva pojava pozicijskog sustava bila je u Mezopotamiji u doba Babilona nešto iza 2000. godine pr. Kr. Nastao je iz starijih sumersko-babilonskih sustava, pri čemu je razvijen brojevni sustav temeljen na dva simbola — klina, jer se u to doba koristilo klinasto pismo koje se urezivalo u pločice. Jedan je vertikalni klin oblika V koji je predstavljao jedinicu, a drugi je horizontalni klin oblika < koji je predstavljao deseticu. Taj sustav je imao bazu 60, a 10 mu je bila samo sekundarna baza, te je zato imao 59 znamenki (slika 2.2). Naravno, u sustavu s bazom 60 zapravo bismo trebali imati 60 znamenki, ali nedostajala mu je nula. Zbog nedostatka nule taj sustav nije bio apsolutno pozicijski — nemoguće je bez konteksta razlikovati, primjerice, broj 102 od 12. Bazu 60 koristimo i danas prilikom računanja vremena te u izražavanju mjere kutova u stupnjevima i minutama što je oboje nasljeđe starih Babilonaca [17].

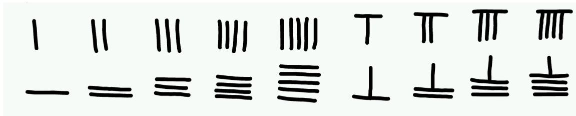
Abakusi, posebice rimski abakus (slika 2.3) koji je imao ureze za kuglice s kojima se moglo računati u svakom stupcu je zapravo pozicijski način prikaza brojeva. Iako se nije pisao broj, već se nazirao pozicijski sustav.



Slika 2.3: Rimski abakus

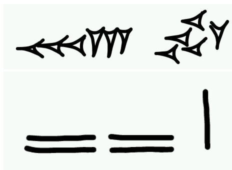
Preuzeto s:
`https://commons.wikimedia.org/wiki/File:RomanAbacusRecon.jpg`
Autor: Mike Cowlishaw
Licenca: CC BY-SA 3.0

S druge strane, u razdoblju prijelaza era u Kini su se koristile štapićaste brojke, koje su također primjer dekadskog pozicijskog sustava bez nule. Općenito, u Kini se kroz povijest koristilo više brojevnih sustava, a ovaj se smatrao i vrstom računske tehnike. Na kineskom se taj sustav zove *suan zi* (doslovno: računanje štapićima). Štapići koje su koristili bili su većinom izrađeni od čvrstih materijala poput bambusovine, slonovače ili metala. Oznaka za jedinicu bio je okomito položeni štapić, dok je pet okomitih štapića u prikazu brojeva od 6 do 9 zamijenjeno jednim vodoravnim. Štapićaste znamenke za neparne potencije postavljaju se vertikalno (prvi red na slici 2.4), a za parne horizontalno (drugi red na slici 2.4) [19].



Slika 2.4: Štapićaste brojke

Broj 2021 zapisan u oba spomenuta sustava (babilonski je 33 pa 41 jer je $2021 = 33 \cdot 60 + 44$, slika 2.5, prvi red) i štapićastim brojkama (slika 2.5 dolje).

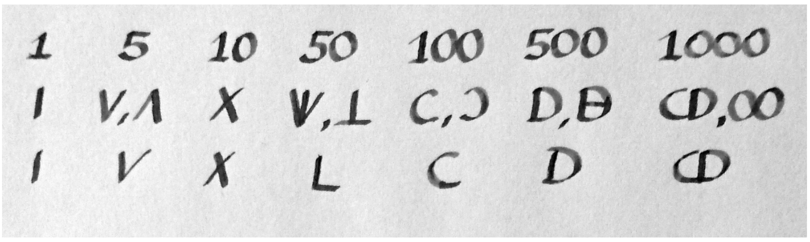


Slika 2.5: Broj 2021 zapisan u babilonskim i štapićastim brojkama. Slike ustupila F. M. Brückler

2.3 Znamenka za znamenkom, brojka

Rimski brojevni sustav povremeno koristimo još i danas. Radi se o dekadskom nepozicijskom sustavu s primarnom bazom 10 i sekundarnom bazom 5. Danas kao znamenke tog sustava koristimo I za 1, V za 5, X za 10, L za 50, C za 100, D za 500 i M za 1000, pa primjerice 2021 rimskom brojkom zapisano izgleda ovako: MMXXI. Taj skup znamenki standardizirao se tek tijekom srednjeg vijeka, dok je u doba staroga Rima izgledao malo drugačije (slika 2.6). Rimski sustav je vrlo neprikladan za računanje, posebice za množenje i dijeljenje i njegova dominacija u srednjovjekovnoj Europi jedan je od važnih razloga niske razine razvoja matematike tog doba.

U jonskom razdoblju grčke matematike (6./5. st. pr. Kr.) Grci su već bili razvili jedan brojevni sustav koji je imao isti princip kao kasniji rimski (nepozicijski, primarna baza 10, sekundardna baza 5), ali s drugačijim simbolima znamenki. Taj je sustav poznat kao akrofonski ili atički brojevni sustav. Otprilike od 4. st. pr. Kr. on je zamijenjen grčkim alfabetskim brojevnim sustavom. Grčke alfabetske brojke zapisivale su se simbolima koristeći grčki alfabet od 1 do 9, 10 do 90 i 100 do 900 što je ukupno 27 osnovnih simbola. U grčkom alfabetu ima 24 slova, dok su preostala 3 arhaična semitska slova *vau* (*digama*) za 6, *kopa* za 90 i *sampi* za 900. Za tisućice koriste iste simbole kao jedinice, ali stavljaju zarez ispred. Za deset tisućica koriste simbol M od grčke riječi mirijada[2] i povrh toga odgovarajući simbol jedinice (slika 2.7). Kako ne bi došlo do miješanja broja i riječi jer se koriste isti simboli za zapis riječi, onda su brojka natcrtala ili se na kraju brojke stavljao apostrof. Primjerice, koristeći alfabetski sustav, broj 2021 zapisat ćemo $,\beta\kappa\alpha'$. Takve slične principe, da se slovima svog jezika pridružuju vrijednosti imali su mnogi drugi narodi, Židovi te Arapi u starijem doba, a i stari Hrvati (opis glagoljskih brojki možete naći u članku [33]) [6].



Slika 2.6: Rimske znamenke u doba republike (srednji red) i u doba carstva (donji red). Sliku ustupila F. M. Brückler

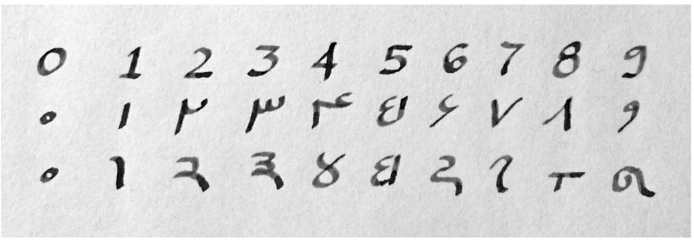
$\times$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Α′ α′	Β′ β′	Γ′ γ′	Δ′ δ′	Ε′ ε′	Ϛ′ ϛ′	Ζ′ ζ′	Η′ η′	Θ′ ϑ′
10	Ι′ ι′	Κ′ ϰ′	Λ′ λ′	Μ′ μ′	Ν′ ν′	Ξ′ ξ′	Ο′ ο′	Π′ π′	Ϙ′ ϙ′
10^2	Ρ′ ϱ′	Σ′ σ′	Τ′ τ′	Υ′ υ′	Φ′ φ′	Χ′ χ′	Ψ′ ψ′	Ω′ ω′	Ϡ′ ϡ′
10^3	͵Α ͵α	͵Β ͵β	͵Γ ͵γ	͵Δ ͵δ	͵Ε ͵ε	͵Ϛ ͵ϛ	͵Ζ ͵ζ	͵Η ͵η	͵Θ ͵ϑ
10^4	$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$	$\overset{\beta}{\mathrm{M}}$	$\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$	$\overset{\delta}{\mathrm{M}}$	$\overset{\varepsilon}{\mathrm{M}}$	$\overset{ϛ}{\mathrm{M}}$	$\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$	$\overset{\eta}{\mathrm{M}}$	$\overset{\vartheta}{\mathrm{M}}$

Slika 2.7: Grčke alfabetne brojke (klasične)

Indijci su od davnina imali razvijene računske tehnike temeljene na bazi 10. Njihova tri najpoznatija brojevna sustava poznati su pod nazivima: brahmi, gupta i nagari. Najstariji od njih je brahmi, brahmanski brojevni sustav, koji nije bio pozicijski, a ima i više varijacija. Pronađeni zapisi na špiljama i novčićima ukazuju da se ovaj brojevni sustav

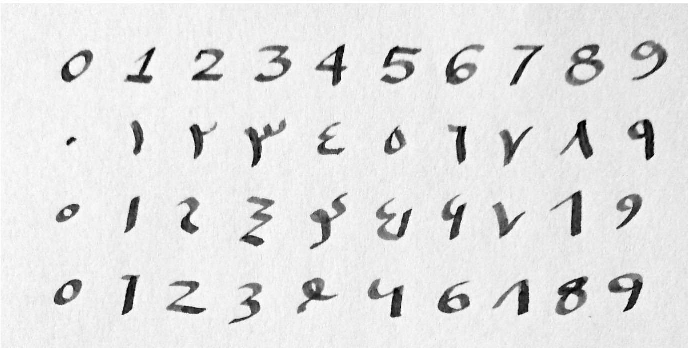
[2]grč. MYPIOI = naziv za deset tisuća

koristio do 4. st. Iz njega se razvio brojevni sustav gupta koji je bio u upotrebi do kraja 6. st., a bio je dekadski i pozicijski, ali bez nule. U razdoblju od 7. do 11. st. iz brojevnog sustava gupta razvijao se brojevni sustav nagari čije ime doslovno znači „pisanje bogova". Upravo iz indijskih nagari brojki, a iz Indije su ih preuzeli Arapi koji su ih preoblikovali (slika 2.8), razvio se suvremeni dekadski pozicijskih sustav. Brojevni sustav nagari je prvi pravi pozicijski sustav s bazom 10. Najstariji indijski dokument koji sadrži broj zapisan pozicijski je pravni dokument iz 594. godine, u kojem je zabilježena donacija Dade III. iz Sankeda pokrajini Bharukachcha [21].



Slika 2.8: Usporedba nagari-znamenki iz 11. st. (donji red) i ranoarapske varijante znamenki (srednji red) iz otprilike istog doba. Sliku ustupila F. M. Brückler

Danas, nerijetko kažemo arapske brojke, no ispravnije je reći indoarapske brojke. Sama ideja dekadskog pozicijskog sustava s deset znamenki, uključivo nule, potječe iz Indije, ali su Arapi tijekom stoljeća razvili dvije varijante znamenki, takozvanu istočnu, koja se i dan danas koristi u zemljama bliskog istoka te zapadna (*gobar*), koju su koristili Arapi na Iberskom polutoku. Europljani su zatim tijekom srednjeg vijeka preoblikovali zapadnu varijantu do modernog oblika, koji se ustalio tijekom renesanse (slika 2.9) [6].



Slika 2.9: Suvremene „arapske" znamenke (1. red), te po jedna varijanta istočnoarapskih (2. red), *gobar* (3. red) i kasnih srednjevjekovnih europskih znamenki (4. red). Sliku ustupila F. M. Brückler

Poglavlje 3

Povijest razlomaka

Razlomci kakve danas poznajemo pojavili su se u Europi tek u 17. stoljeću [17]. Iako su bili korišteni od strane mnogih naroda i civilizacija, nisu ih svi smatrali pravim brojevima, posebice ne antički Grci. U enegleskom jeziku, za razlomak koristimo riječ *fraction*, što potječe iz latinske riječi *fractus* te ima značenje biti slomljen, kao što i u hrvatskom „razlomak” potječe od biti razlomljen. Slično je i u drugim jezicima. Uistinu, razlomke poimamo kao dijelove cijeline pa nije čudo što su nazivi za razlomke u mnogom jezicima značenja, otprilike, „slomljeni broj”.

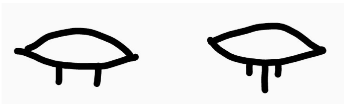
3.1 Egipat i Babilon

Prve matematičke ideje vezane za današnji pojam razlomaka pronalazimo u civilizaciji starih Egipćana otprilike oko 3300. g. pr. Kr. Koristili su svoje oznake za brojeve u hijeroglifskom (i kasnije, hijeratskom) sustavu, a najkasnije početkom 2. tisućljeća pr. Kr. znali su i računati s njima. Dva su glavna izvora iz kojih saznajemo kako su stari Egipćani baratali s razlomcima [6]:

1. Rhindov papirus
   Napisan je oko 1650. g. pr. Kr., a dobio je ime po egiptologu Alexander Henry Rhindu, koji ga je 1858. kupio u Luxoru. Nakon njegove smrti papirus stiže u *British Museum* u Londonu, gdje se nalazi i danas. Smatra se da on sadrži matematiku poznatu oko 2000. godine pr. Kr. Između ostaloga sadrži tablicu rastava razlomaka tipa $\frac{2}{2n+1}$ na jedinične razlomke.

2. Moskovski papirus
   Pronašao ga je ruski egiptolog Vladimir Goleniščev i 1893. godine donio u Moskvu. Kao i Rhindov papirus, Moskovski papirus sadrži niz zadataka. Smatra se da je nastao oko 1850. g. pr. Kr.

Specifičnost egipatske matematike je u korištenju jediničnih razlomaka, tj. razlomaka s brojnikom 1. Općenito su umjesto zapisivanja razlomka pomoću brojnika i nazivnika, koristili prikaz razlomka kao zbroja jediničnih razlomaka. Specijalni simboli postojali su samo za razlomke $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$ (slika 3.1). Nisu koristili poseban simbol za zbrajanje, već su pribrojnike, odnosno članove tog zbroja zapisivali jedan iza drugoga. Zapis jediničnog razlomka sastojao se od hijeroglifa koji je bio u obliku otvorenih otvorenih usta ponad brojke koja je predstavljala nazivnik (slika 3.2). Pod pojmom egipatskih razlomaka danas se smatra zapis razlomaka kao zbroja, u pravilu različitih, jediničnih razlomaka između 0 i 1. Razlomak $\frac{2}{3}$ bio je često korišten jer su stari Egipćani poznavali činjenicu da se $\frac{2}{3}$ od $\frac{1}{n}$ može računati kao $\frac{2}{3}\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n}$. Danas je poznato da svaki pozitivni razlomak može zapisati u egipatskom obliku i to u beskonačno mnogo prikaza [17].



Slika 3.1: Prikaz staroegipatskih simbola za $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$. Sliku ustupila F. M. Brückler

Slika 3.2: Prikaz staroegipatskog jediničnog razlomka $\frac{1}{4}$. Sliku ustupila F. M. Brückler

Nešto kasnije, Babilonci su također koristili razlomke za rješavanje praktičnih problema. Naravno, pri tom su koristili u odjeljku 2.2 opisani seksagezimalni sustav, tj. rastavljali su razlomke na zbrojeve razlomaka kojima je nazivnik potencija od šezdeset. Primjerice, zapis današnjeg razlomka $\frac{2}{5}$ bio bi $\frac{24}{60}$ — jedinični razlomak $\frac{1}{5}$ proširujemo u razlomak s nazivnikom 60, tj. stari Babilonac bi, zbog nedostatka apsolutne pozicije, ovaj razlomak jednostavno zapisao klinovima <<VVVV (24) [6].

3.2 Grčka i Rim

U antičkoj Grčkoj matematika je konačno postala znanost u kojoj se dokazuju tvrdnje, ali starogrčki matematičari razlomke nisu smatrali brojevima. Za njih su samo prirodni brojevi bili brojevi, štoviše, ni jedan (*monos*) nije bio broj, nego „izvor" svih (prirodnih) brojeva. Naravno, u praktičnim računima korišteni su i razlomci, ali to se nije smatralo „pravom" matematikom. Za primjene, npr, u astronomiji, ispočetka su koristili egipatske razlomke (uz vlastite brojke), a kasnije i razlomke poput babilonskih. Računsku operaciju zbrajanja nazivali su spajanje, a koristili su činjenicu da je lakše zbrajati razlomke istih nazivnika [17].

Grčka notacija razlomaka nije bila u potpunosti unificirana. Ispočetka su zapisivali razlomke slično kao stari Egipćani, tj. rastavljali su ih na jedinične razlomke pri čemu su koristili dva apostrofa. Primjerice, $\varepsilon" = \frac{1}{5}$. Potkraj helenizma, Heron i Diofant zapisuju razlomke slično kao što to činimo danas, no nedostaje razlomačka crta te su mjesta nazivnika i brojnika zamijenjena.

Nakon što su Rimljani osvojili grčke teritorije, došli su u doticaj s grčkom matematikom, ali Rimljani nisu imali interesa za znanost, već su isključivo bili praktično orijentirani. Prilikom rješavanja praktičnih problema, poput podjele jedinica mase i novca, koristili duodecimalne razlomke odnosno razlomke temeljene na bazi 12. Primjerice, jedan as[1] se dijelio na 12 unci (*uncia*), a jedna unca se označavala točkom. Razlomak $\frac{1}{2}$ zapisivao se slovom S (*semis*), dok su se ostali razlomci između $\frac{1}{2}$ i 1 imali svoj poseban naziv te se zapisivali aditivno korištenjem navedenih. Primjerice, razlomak $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{12}$ bi bio zapisan kao S$\cdot\cdot\cdot$. Kao i kod Grka, vidljiva je upotreba egipatskih razlomaka [5].

3.3 Indija i Kina

Najsličniji zapis razlomaka onome kakvog danas poznajemo, no bez razlomačke crte, bio je korišten u Indiji od 7. stoljeća. Matematičari Brahmagupta (oko 628.) i Bhaskara II. (oko 1150.) zapisivali su razlomke u svojim djelima, a znali su i vrlo dobro računati s njima. Cijele brojeve su smatrali razlomcima s nazivnikom jedan, što im je uveliko olakšalo računanje.

Za razliku od svih dosad spomenutih naroda, Kinezi su razlomke zapisivali riječima. Razlomke $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$ nazvali su redom polovina, mala polovina i velika polovina. U rijetkim slučajevima, uz zapis riječima koristili su i posebne znakove. Opis računskih operacija s razlomcima nalazi se u djelu „Devet poglavlja matematičkog umijeća", napisanog negdje oko prijelaza era. Razlomke su zbrajali na isti način kako ih zbrajamo i danas — svođenjem na zajednički nazivnik. Osim zbrajanja, znali su dijeliti cijeli broj s razlomkom i poznavali su postupak skraćivanja razlomaka, tj. svođenja na neskrativ ili potpuno skrativ razlomak.

Od 2. st. pr. Kr. u Kini se upotrebljava dekadski sustav mjera, što rezultira prvom pojavom dekadskih razlomaka. Dekadski ili decimalni razlomci su razlomci koji u nazivniku imaju brojeve 1, 10, 100, 100, itd. Danas koristimo zapis dekadskih razlomaka koji nazivamo decimalnim razlomcima [17].

[1]Jedinica novca i mase. Jedinica duljine bila je —*pes*, stopa, i dijelila se na 12 *polices*, palaca ili na 16 *ti*, prstiju.

3.4 Arapi i srednjevjekovna i renesansna Europa

U arapskoj matematici se, čak i nakon prihvaćanja indijskog dekadskog pozicijskog sustava, dugo zadržala starogrčka, a zapravo babilonska, tradicija da se u astronomskim izračunima brojke zapisuju u seksagezimalnom sustavu. Al-Nasawi (oko 1010.–1075.) u svojim spisima $\frac{412}{100}$ zapisuje kao seksagezimalni razlomak 4° 7' 12", tj. $4 + \frac{7}{60} + \frac{12}{3600}$. Prva pojava dekadskih razlomaka je u djelima perzijskog astronoma i matematičara al-Kašija (1380.–1429.), koji koristi dekadske razlomke u izračunavanju ukupne površine različitih oblika svodova u islamskoj arhitekturi. Općenito se smatralo da je flamansko-nizozemski matematičar, fizičar i injžinjer Simon Stevin (1548.–1620.) prvi uveo dekadske razlomke, no to se pokazalo lažnim 1948. godine kada je P. Luckey u djelu *Die Rechnenkunst bei Gamsid b. Masud al-Kasi* pokazao da u *Ključu aritmetike* al-Kaši daje jasan opis dekadskih razlomaka oko 135 godina prije Stevina. Međutim, tvrditi da je al-Kaši izumitelj dekadskih razlomaka, kao što su to radili mnogi matematičari prateći Luckeyevo djelo, bilo bi daleko od istine jer je ta ideja bila prisutna u radu nekoliko matematičara al-Karadžijeve škole, posebno al-Samawala (1130.–1180.). Al-Kaši provodi osnovne računske operacije s dekaskim razlocima pa tako zapisuje 358.501 kao rezultat umnoška brojeva 25.07 i 14.3 [21, 28].

Zapis razlomka u kojem je brojnik iznad nazivnika (bez razlomačke crte) prvi puta se spominje u „Aritmetici" Ivana Seviljskog iz 12. st., koja je zapravo latinsko razlaganje al-Hvarizmijeve „Aritmetike" (al-Hvarizmi je živio oko 780.–850.). Uvođenje razlomačke crte pripisuje se al-Hassaru (12. st.), ali prvi utjecajan matematičar koji ju je uveo i koristio, vjerojatno ne znajući za al-Hassarov tekst, bio je talijanski matematičar Leonardo iz Pise (oko 1170.–1250.), poznatiji kao Fibonacci. Utjecaj Arapa, koji pišu zdesna ulijevo, u to doba vidljiv je i kod pisanja mješovitih razlomka pa tako Fibonacci piše prvo razlomljeni, a onda cijeli dio. Primjerice, $1\frac{20}{2021}$ zapisao bi $\frac{20}{2021}1$. U svom djelu *Liber Abaci* iz 1202. godine Fibonnaci opisuje metodu zapisivanja bilo kojeg razlomka u egipatskom obliku, a kao rezultat toga, danas je poznat Fibonnacijev teorem o egipatskim razlomcima. Metoda je jednostavna: Uzmimo zadani razlomak. Od njega oduzmemo najveći jedinični razlomak manji od njega, zatim od razlike oduzmemo najveći jedinični razlomak manji od nje itd., sve dok se kao razlika ne dobije jedinični razlomak. Primjerice, uzmimo razlomak $\frac{7}{8}$, najveći jedinični razlomak manji od njega je $\frac{1}{2}$. Sada imamo $\frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$. Najveći jedinični razlomak manji od $\frac{3}{8}$ je $\frac{1}{4}$. Sada imamo $\frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, što je jedinični razlomak. Dakle, $\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ [19].

Europski su matematičari osnovno znanje o razlomcima preuzeli od Arapa te su dalje razvijali i nadograđivali to znanje. U razdoblju između 14. i 16. st. dolazi do velike zainteresiranosti za razlomke, što je rezultiralo pojavom razlomaka u mnogim matematičkim djelima. Primjerice, njemački matematičar Christoff Rudolff u svom djelu *Exempelbüchlin* iz 1530. godine računa s dekadskim razlomcima. Njegov zapis za decimale ne razlikuje se mnogo od današnjeg; umjesto moderne „decimalne točke", Rudolff koristi okomitu crticu za odvajanje cijelog i decimalnog dijela, npr. 20 | 2021. Zapis razlomaka pomoću vodoravne razlomačke crte u tri razine (iznad brojnik, u sredini crta, ispod nazivnik)se uglavnom ustalio dao 17. st., ali je bilo i iznimaka pa je tako primjerice britanski matematičar i logičar August De Morgan (1806.–1871.) zagovarao korištenje zapisa u jednoj razini sa kosom crtom (/) kao znakom dijeljenja, iako je sam često koristio dvotočku (:). Dvotočku u zapisu razlomaka koristio je i njemački matematičar Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.–1716.) [21].

Djelo koje se posebno ističe je Stevinova „Desetina" *(La Thiende)* iz 1585. Stevin u tom djelu opisuje kako su dekadski razlomci najpraktičniji za računanje i rješavanje praktičnih zadataka. Neki su raniji matematičari u svojim djelima opisali postupak dolaženja do dekadskih razlomaka, ali je Stevin svojim radom predstavio osnovu za unifikaciju cjelokupnog sustava mjera na dekadskoj osnovi te dekadski razlomci postaju redoviti dio kurikuluma. Upotrebljavao je zapis koji podsjeća na onaj seksagezimalnog sustava, uz cjelobrojni dio zapisuje zaokruženu nulu, a pored svakog višekratnike potencije od $\frac{1}{10}$ zapisuje zaokruženu tu potenciju (slika 3.3). Kod računskih operacija oduzimanja, množenja i dijeljenja također koristi sličan zapis bez dekadskih razlomaka.

		0	1	2	3
	2	0	2	1	0
	2	1	0	1	2
1	1	2	1	0	1
1	5	3	3	2	3

Slika 3.3: Prikaz zapisa kojeg koristi Stevin za 20.210 + 21.012 + 112.101 = 153.323

Stevin je postavio dobre temelje za račun s razlomcima, no njegov se zapis čini nepraktičnim, za razliku od onog C. Rudolffa. Oznaka kruga bila je preuzeta od talijanskog matematičara Rafaela Bombellija (1526.–1572.), koji se služio sličnim zapisom u svom djelu „Algebra" iz 1572. godine. Veliki utjecaj na važnost Stevinovih djela, imao je škotski matematičar John Napier (1550.–1617.), koji je poznat kao izmuitelj logaritama. Iako se u originalnoj verziji Napierovog djela *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* iz 1614. godine ne pojavljuju dekadski razlomci, pojavili su se u engleskom prijevodu ovog djela iz 1616. godine. Napier u svom djelu *Rabdologiæ* iz 1617. godine predlaže točku ili zarez kao deimalni separator, npr. 20.21 ili 20,21, ali ujedno koristi i zapis 20, 2'1" za $20\frac{21}{100}$. Kasnije je decimalni zapis brojeva opisao na vrlo intuitivan i jednostavan način: Štogod je zapisano poslije točke, jest razlomak [28, 19].

Iako se u Europi do kraja 18. st. koristilo mnogo različitih zapisa decimalnih razlomaka, u 19. st. su većinom svi svedeni na jednu vrstu – onu s decimalnim separatorom. Do dan danas, decimalni zapis nije potpuno unificiran pa se za decimalni separator negdje koristi točka, a negdje zarez [17, 28, 19, 7].

Poglavlje 4

Povijest nule

U davna vremena nula nije imala veliko značenje jer se nije činilo smisleno razmišljati o broju koji predstavlja ništa. Kroz razvoj brojevnih sustava, nula je dobila veliku važnost u matematičkom pogledu, ali i svakodnevnom životu. Kao što smo već prije spomenuli, važno je razlikovati nulu kao broj i kao brojku odnosno znamenku zapisanu simbolom. Nulu možemo opisati na više načina, ovisno u kojem kontekstu je razmatramo. Primjerice, nula je broj koji označava količinu ili mjeru nečega, npr. temperature u Celsiusovim stupnjevima. Također, nula je cijeli broj čiji je prethodnik broj minus jedan, a sljedbenik jedan. Kažemo da nula nije ni pozitivan ni negativan broj, a bez nule ne možemo imati ni pravi pozicijski sustav s ikojom bazom. Danas koristimo pozicijski brojevni sustav s bazom deset u kojem je nula jedna od deset znamenki. Primjerice, u broju 2021 označava poziciju stotice. No, kao što ćemo vidjeti u ovom poglavlju, ne postoji jedinstven odgovor na pitanje „Tko je prvi otkrio nulu?” [3].

4.1 Babilon

U Mezopotamiji, prvi povijesno poznati narod bili su Sumerani, no oko 2000. godine pr. Kr. apsorbirao ih je semitski narod Babilonaca. Babilonska je matematika u mnogim aspektima bila naprednija od egipatske iz istog vremena, a njihovo korištenje seksagezimalnog pozicijskog sustava ostavilo je utjecaja sve do danas. No, kako je već rečeno u odjeljku 2.2, problem s babilonskim seksagezimalnim sustavom je da nije imao nule pa stoga nije bilo apsolutne pozicije. Primjerice, brojka VV (11) mogla je predstavljati broj šezdeset i jedan ($1 \cdot 60^1 + 1 \cdot 60^0$), ali i broj tri tisuće šest stotina i jedan ($1 \cdot 60^2 + 1 \cdot 60^0$), pa čak i $1\frac{1}{3600}$ ($1 \cdot 60^0 + 1 \cdot 60^{-2}$) — stvarna vrijednost brojke otkrila se iz konteksta [6].

U doba perzijskog carstva, oko 4. st. pr. Kr. pojavljuje se znak za nulu, ali se koristio samo kad je nula potrebna „usred” broja, što je bilo puno rjeđe nego u kasnijoj pojavi dekadskog sustava. Prije nego što se počeo koristiti kao znak za nulu, taj znak dvostrukog klina, koristio se kao znak za razdvajanje riječi, nizova, ili u kao prijelaz s jednog jezika na drugi u dvojezičnim tekstovima [3].

4.2 Grčka

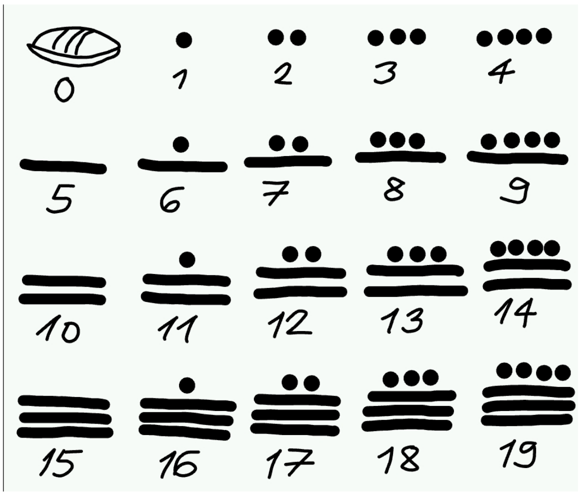
Većina velikih otkrića grčkih matematičara bila su iz područja geometrije, astronomije i kozmologije gdje su koristili veličine poput duljine, površine, volumena. Starogrčki matematičari smatrali su brojevima samo prirodne brojeve, ali su u praksi koristili i razlomke. U doba helenizma se, posebice za astronomske proračune, alfabetski sustav koristio u kombinaciji s babilonskim seksagezimalnim npr. Teon Aleksandrijski u komentaru Ptolemejeva *Almagesta* piše $,\alpha\iota\varepsilon\ \kappa\ \iota\varepsilon'$ za 1515 ° 20' 14".

Godine 331. pr. Kr., vojska Aleksandra Makedonskog je u bitci kod Gaugamele porazila perzijsku vojsku i tako konačno osvojila teritorij Perzijskog carstva. U to doba, grčki su putnici i ratnici iz babilonskog carstva donijeli papiruse o astronomiji iz 3. st. pr. Kr. gdje je bio zapisan simbol 'O' koji je vjerojatno označavao nulu. Različiti povjesničari, imali su različita mišljenje pa je tako za neke od njih taj simbol poteko od grčkog omikron, prvog slova od *ouden* („ništa", kao Odisejevo ime $O\upsilon\tau\iota\zeta$, „Nitko") ili jednostavno od *ouk* („ne"). Kako su za zapis brojeva koristili slova grčke abecede, matematičar Otto Neugebauer iz prijelaza 19. stoljeća u 20. stoljeće, pobio je tu teoriju, jer je omikron već označavao numeričku vrijednost 70 [11, 3].

4.3 Amerika (civilizacija Maja)

Najsofisticiraniji matematički sustav ikad razvijen u Americi potječe od civilizacije Maja smještene na otoku Yucatan u razdoblju oko 300. g. pr. Kr. do 900. g. n. e. S obzirom da su bili izolirani od utjecaja drugih naroda i kultura, sve što su stvorili pripisuje se u potpunosti njima. Brojevni sustav kojeg su koristili sastojao se od samo tri simbola: točka koja predstavlja vrijednost jedan, crta koja predstavlja pet i ljuska koja predstavlja nulu (slika 4.1). Ova su se tri simbola koristila u raznim kombinacijama za praćenje kalendarskih događaja u prošlosti i budućnosti.

Maje su koristile vigesimalni sustav — sustav s bazom 20, a ne 10. Dakle, umjesto 1, 10, 100, 1.000 i 10.000 našeg matematičkog sustava, koristili 1, 20, 400, 8000 i 160000. Primjerice, broj $2021 = 11 \cdot 20^1 + 1 \cdot 20^0$ (slika 4.2). Neke su brojeve smatrali svetima, a među njima su bili brojevi pet i dvadeset. Broj pet predstavljao je broj prstiju na jednoj ruci ili nozi čovjek, dok je dvadeset predstavljao ukupan broj prstiju na rukama i nogama čovjeka. Još neki od svetih brojeva bili su trinaest kao broj bogova koje su štovali Maje, zatim broj pedeset i dva koji je predstavljao broj godina u „snopu", jedinici sličnoj konceptu našem stoljeću te četiristo kao broj noćnih bogova Maja.



Slika 4.1: Znamenke majanskog vigesimalnog sustava. Sliku ustupila F. M. Brückler

Slika 4.2: Broj 2021 zapisan majanskim brojkama. Sliku ustupila F. M. Brückler

Važno je naglasiti da su Babilonci, Grci i Maje upotrebljavali simbol za nulu koji su tumačili kao prazno mjesto i ništa drugo. Ne postoje povijesni dokazi koji bi ukazivali da su simbole za nulu tumačili kao broj nula. Maje su koristile mnogo različitih simbola za nulu, no onaj najupečatljiviji je bio tetovirani muškarac s ogrlicom oko vrata i unatrag zabačenom glavom [11, 9, 3].

4.4 Indija i Kina

Kao potpuna suprotnost Grcima, indijski matematičari posebno su zaslužni za aritmetičko-algebarska postignuća. Indijska je matematika posebno značajna po razvoju raznih tehnika računanja iz čijih korijena se razvila i današnja aritmetika. Indijci su zaslužni za razvijanje pravila za provođenje aritmetičkih operacija (četiri osnovne, kvadriranje i kubiranje, kvadratni i kubni korijen) na temelju dekadskog sustava. Tijekom prvog tisućljeća naše ere razvili su dekadski pozicijski sustav s nulom. Prijelaz s nule kao simbola do prihvaćanja nule kao broja nije upotpunosti jasan. Naime, neki je indijski matematičar sveo razlomak $\frac{407150}{483920}$ na $\frac{40715}{48392}$ krateći nulu u brojniku i nazivniku, dok je indijski astronom Varahamihira (oko 505.–587. pr. Kr.) konstatirao da će vrijednost veličine ostati nepromijenjena ukoliko se njoj doda ili oduzme nula. Prihvaćanje nule kao broja, postaje izraženije kada indijski matematičar Brahmagupta (598.–670.) u svom djelu *Brahmasphutasiddhanti* nulu definira kao rezultat oduzimanja broja od sebe samoga. U tom djelu navodi i sljedeća svojstva: $0{\cdot}a = 0$, $0{\cdot}0 = 0$ i $\sqrt{0} = 0$ koja vrijede i danas. Proširuje aritmetiku na dijeljenje s nulom te navodi sljedeća pravila: „Dijeljenjem pozitivnog ili negativnog broja s nulom, dobit ćemo razlomak s nulom u nazivniku; nula podijeljena s negativnim ili pozitivnim brojevima je ili nula ili se izražava kao razlomak s nulom kao brojnikom i konačnom veličinom kao nazivnikom; nula podijeljena s nulom je nula.”. Svakako griješi kad tada tvrdi da je nula podijeljena s nulom nula, no to je sjajan pokušaj proširenja aritmetike na računanje s nulom. Indijski matematičar i astronom, Bhaskara II. (1114.–1185.) proširuje Brahmaguptin rad na brojevnim sustavima i razumijevanje nule kao broja. U svom djelu *Lilavati* zapisuje tvrdnju koja bi u suvremenom zapisu izgledala kao $(a{\cdot}0) : 0 = a$ te karakterizira rezultat dijeljenja s nulom kao beskonačnost. Indijci su koristili različite zapise za nulu, a neki od njih su: točka, kružić, riječ *kha* ili *sunya*. Najstariji sačuvani zapis nule sličan današnjem potječe iz 876. g. pr. Kr., kada su stanovnici jednog malog gradića južno od grda Delhi, željeli zasaditi vrt u čast boga Višnu iz kojeg bi se svakog dan moglo ubrati cvijeće dostatno za pedeset cvjetnih vijenaca. Zapis o ovom događaju ostao je zapisan na kamenoj ploči u obliku datuma samvat 993 (876 god. n. e.) i mjere vrta 187 hasta $\times$ 270 hasta. Također, pronađen je i Kmerski zapis, tzv. Samborski natpis, iz 683. godine koji koristi nulu u zapisu broja 605 [11, 3, 21].

Kinezi u zapisu broja koriste nulu, ali kao prikaz izostanka neke od potencija baze. Nula bi se označavala kružićem ili češće znakom *líng*. Ovaj način zapisivanja prvi se puta spominje u djelu *Shu shu jiu zhang* iz 1247., u istom djelu nula se prvi put spominje i kod štapićastih brojki (vidi odjeljak 2.2) [9, 19].

4.5 Arapski i islamski svijet

Arapi su u početku mnogo vremena ulagali u prevođenje grčkih i indijskih zapisa i nisu indijske brojke koristili za računanje, već samo za zapis. No, doprinos arapskog područja matematici mnogo je veći od samog prevođenja i prijenosa podataka. Naime, al-Hvarizmi oko 825. god. pr. Kr. u svom dijelu poznatom pod naziv „Aritmetika” donosi novi koncept metoda za računanje. U tom djelu opisao je indijski dekadski pozicijski sustav s nulom. Iako se danas često govori o arapskom sustavu brojki, Arapi nisu bili njegovi začetnici, već su ga samo usvojili i prenijeli u Europu tijekom srednjeg vijeka.

U 12. st. španjolski matematičar Ibn Ezra (1092.–1167.) koji je djelovao u islamskom dijelu Španjolske kroz svoje je djelo „Knjiga o računanju” objašnjavao indijsku aritmetiku. Opisao je aritmetiku koristeći indijske brojke s nulom to jest decimalni sustav brojeva u kojem se vrijednosti znamenaka određuju gledajući s lijeva na desno. Nulu naziva *galgal* što znači kotač ili krug. Također, nulu spominje i islamski matematičar al-Samawal (1130.–1180.) u svom zapisu: „Ako oduzmemo pozitivan broj od nule, ostaje nam taj isti negativan broj... ako oduzmemo negativan broj od nule, ostaje nam taj isti pozitivan broj" [11, 3, 1].

4.6 Europa

U 12. stoljeću došlo je do intenzivnijeg kontakta europske s grčkom i indijskom matematikom putem direktnog kontakta s Arapima. Na temelju raznih prijevoda, pisala su se različita saznanja, a među njima je bio i Francuz Alexander de Villa Dei (oko 1175.–1240.) koji je napisao 1240. godine pjesmu o arapskim brojevima. Jedan od stihova glasi: „Prvo znači jedan, drugo doista dva, treće znači tri i tako nastaviš dalje, sve dok ne dostigneš do zadnjeg, koje se naziva nula." [11].

Već spomenuti Fibonacci jedan je od prvih ljudi koji je u Europu uveo indijsko-arapski pozicijski sustav s nulom. Važno je napomenuti da Fibonacci u svom djelu *Liber Abaci* govori samo o devet indijskih „brojeva", a nulu koristi samo kao znak što dokazuje da Fibonacci još nije u potpunosti prihvatio nulu, koja je u to doba već općeprisutna u indijskih i arapskih matematičara.

Kako je nula ispočetka predstavljala znak na ništa, odnosno koristio se znak da bi se „popunilo prazno mjesto", tako su Indijci za nulu koristili sanskrtski izraz *sunya* (praznina). Arapi koriste izraz *sifr*, dok je kod Fibonaccija izraz za nulu *zephiram*. Kasnije, u Italiji je taj izraz poprimio razne oblike, uključujući *cifre* i *zeron*, iz kojih su nastale riječi „cifra" i engleski izraz za nulu, *zero* koje se danas koriste. Sve do druge polovine 16. st. u Europi se za nulu koristio naziv *cifre* za nulu, a tek kasnije se počeo koristiti kao naziv za brojke. Također, tek u 16. st. nula se počinje interpretirati kao razlika dvaju jednakih brojeva. Prvi dokazi u prihvaćanju nule kao broja vidljivi su djelu *Triparty en la science des nombres* francuskog matematičara Nicolasa Chuqueta (oko 1455.–1488.) koji zapisuje $.0.m.12$ za $0-12$ i $.0.p.12$ za $0+12$. Također, jedan je od prvih matematičara koji koristi zapis eksponenta nepoznanice kao superskripta i pritom je prvi koristio nulu kao eksponent što je vidljivo iz njegovih zapisa 9^0 za ono što bismo danas zapisali kao $9x^0$ odnosno samo kao 9. U tom djelu je sadržana i tablica potencija s bazom 2 gdje je $2^0 = 1$. Iako se u cjelokupnom radu Chuqueta nigdje ne spominje prihvaćanje nule kao potencijalnog rješenja jednandžbe, jednom je prilikom rekao: „Traženi broj je nula.". Tijekom 16. st. učestalost korištenja nule u računu mnogih matematičara postaje sve češća. Godine 1544. Michael Stifel (1487.–1567.) piše polinom x^3+1 u obliku ekvivalentnom s[1] x^3+0x^2+0x+1. Talijan Niccoló Fontana Tartaglia (oko 1499.–1557.) u svom djelu *General trattato di numeri et misure* iz 1556. godine piše $\sqrt{45}+0$ i $\sqrt{45}-0$. Talijanski matematičar i liječnik Girolamo Cardano (1501.–1576.) 1570. godine u svom radu zapisuje sljedeće dvije jednandžbe:

[1]Oznaku x za nepoznanicu uveo je tek Descartes 1637., a ovdje ju koristimo radi kratkoće i jasnoće.

$x^3 = 0 + x$ i $x^3 = 216 + 0x$. Ovime je Cardano postavio dobre temelje za prihvaćanje nule kao mogućeg rješenja jednadžbe, što se pripisuje francuskom matematičaru Albertu Girardu (1595.–1632.). Djelo zbog kojeg je nula postala opće prihvaćena i ravnopravna s ostalim brojevima bila je *La Géométrie* (1637.) francuskog matematičara i filozofa Renéa Descartesa (1596.–1650.) [11, 19, 3].

Poglavlje 5

Povijest negativnih brojeva

Mnogi stari narodi nisu vjerovali u postojanje negativnih brojeva i općenito razmatranje računa s takvim brojevima smatrali su besmislenim. Razmišljanja europskih matematičara srednjeg vijeka bila su oblikovana pod utjecajem starogrčke matematike, što je rezultiralo time da je dugi niz godina u Europi broj bio samo prirodan broj. U isto doba, negativni brojevi su već rano bili poznati i upotrebljavani u Indiji i Kini. Negativni brojevi ili nepravi, apsurdni, besmisleni, oduzimajući, „dugovi", kako su ih često nazivali, počeli su se upotrebljavati u Europi tek u 15. stoljeću. Razvojem pomorstva, prometa, tehnike i trgovine s vremenom su postali prihvaćeni i korisni.

5.1 Grčka

Kao što ni razlomke ne bi priznavali kao brojeve, Grci nisu ni negativne brojeve smatrali brojevima. Pojam broja za njih bio je isključivo prirodan broj. Čak i ako starogrčku geometrijsku algebru[1] interpretiramo na moderan način, pa duljine, površine i volumene interpretiramo kao (realne) brojeve, opet zbog te geometrijske interpretacije u starogčkoj matematici nalazimo samo ono što danas nazivamo pozitivnim realnim brojevima. U cijeloj antičkoj grčkoj matematici poznat je samo jedan matematičar kod kojeg se nazire pojava negativnih brojeva. Bio je to Diofant (vj. 3. st. n. e.), koji se u svojoj „Aritmetici" bavio jednadžbama koje danas nazivamo diofantskim. U jednom od zadataka iz „Aritmetike" pojavljuje se jednadžba koju bismo danas zapisali kao $4 = 4x + 20$ te je njeno rješenje nazvao što je nazivao apsurdnim [25]. Uveo je nazive „brojevi za zbrajanje" i „brojevi za oduzimanje" za pozitivne i negativne brojeve te navodi sljedeće pravila: „Broj za oduzimanje pomnožen s brojem za oduzimanje daje broj za zbrajanje; broj za oduzimanje pomnožen s brojem za zbrajanje daje broj za oduzimanje." [17].

[1]Tijekom 5. st. pr. Kr. starogčka je matematika poprimila formu tzv. geometrijske algebre. Radi se o geometriji koju bismo danas mogli interpretirati kao algbarske identitete ili pak kao jednadžbe.

5.2 Kina

Negativni brojevi su se pojavili u Kini oko prijelaza era. U Kini se od davnina koristio dekadski pozicijski sustav bez nule (štapići kao pomagalo za računanje i iz korištenja istih izvedene štapićaste brojke, vidi odjeljak 2.2). Oko prijelaza era, štapići za računanje počeli su se izrađivati u dvije boje, crvenoj za pozitivne i crnoj za negativne brojeve, a to korištenje boja odrazilo se naravno i u zapisu pomoću štapićastih brojki. Kinezi su računali s pozitivnim i negativnim brojevima te su koristili pozicijski brojevni sustav i pomagala za računanje – štapići. Potreba za pozitivnim i negativnim brojevima pojavila se vezano za obračune poreza i trgovinu: crni brojevi poništavali su crvene. Prihod od prodaje je bio pozitivan (crven), a trošak negativan (crn). No, iako su stari Kinezi od davnina bili navikli na trgovačku računicu s plusom i minusom, to nipošto ne znači da bi u ta davna vremena negativne brojeve prihvatili, primjerice, kao rješenja jednadžbi [25, 18].

5.3 Indija

Pojavom kompliciranijih praktičnih problema, poput uvođenja nekih vrsta poreza ili zaduženja dugova i u Indiji je došlo do potrebe uvođenja negativnih brojeva. Oko 620. godine, Brahmagupta u svom djelu koristi ideje o „imanju" i „dugovima" za pozitivno i negativno. Brahmagupta je uveo poseban simbol za negativne brojeve te opisao sljedeća pravila za računanje s pozitivnim i negativnim brojevima i nulom: „Zbroj dva imanja je imanje. Zbroj dva duga je dug. Ako zbrojimo imanje koje je jednako dugu dobit ćemo nulu ili u slučaju da su različitih vrijednosti, dobit ćemo njihovu razliku. Zbroj nule i duga je dug. Zbroj imanja i nule je imanje, a zbroj dviju nula je nula. Dug minus nula je dug. Imanje minus nula je imanje. Nula minus nula je nula. Dug oduzet od nule imanje je, a imanje oduzeto od nule je dug. Umnožak nule pomnožen dugom ili imanjom je nula. Umnožak nule pomnožene s nulom je nula. Umnožak ili količnik dva imanja jedno je imanje. Umnožak ili količnik dva duga jedno je imanje. Umnožak ili količnik duga i imanja je dug. Umnožak ili količnik imanja i duga je dug" [25, 17].

Sljedeća indijska, Brahmaguptinim ekvivalentna, pravila za množenje i dijeljenje s pozitivnim i negativnim brojevima opisao je u 12. st. matematičar Bhaskara II. On je svom djelu „Bijaganita" posvetio jedno poglavlje pozitivnim i negativnim brojevima. Bhaskara II. daje i zadatke na kojima čitatelj može provjeriti svoju uvježbanost u računu s pozitivnim i negativnim brojevima, primjerice „Brzo mi reci rezultat brojeva tri i četiri, negativnih ili pozitivnih, uzetih skupa. Dakle, pozitivan i negativan, ili oba negativna ili oba pozitivna kao zasebne slučajeve, ako znaš zbrajati pozitivne i negativne veličine." Negativne brojeve je zapisivao s točkom iznad broja, a također je opisao i pravilo za korjenovanje: Imanje ima dva korijena, jedan je imanje, a drugi je dug [21, 17].

5.4 Arapi

Arapska matematika razvila se na temeljima grčkog i indijskog matematičkog nasljeđa. Od Grka su preuzeli preciznost i argumentaciju, od Indijaca praktičniji pristup. No, iako su zasigurno od Indijaca saznali za negativne brojeve, čini se da je jedino djelo u kom su u srednjovjekovnoj arapskoj matematici opisani negativni brojevi bilo je djelo matematičara Abu'l-Wafe al-Buzdžanija (940.–998.). Koristio je negativne brojeve kako bi pisarima i poslovnim ljudima opisao značenje duga, što sugerira da je poznavao indijska djela iz tog vremena. Kod njega možemo pronaći pravila za račun s negativnim brojevima. Kao primjer on daje oduzimanje 5 od 3, što daje „dug" 2; množenjem s 10 dobiva „dug" 20, koji zatim pribraja umnošku od $10 - 3$ i $10 - 5$ da dobije rezultat $15 = 3 \cdot 5$ [21, 17].

5.5 Europa

Iako su od 13. st. europski matematičari računali s negativnim veličinama, tek u drugoj polovici 19. st. dolazi do potpune ravnopravnosti pozitivnih i negativnih brojeva u govoru i pismu širom Europe. Negativni brojevi počeli su se proučavati zahvaljujući brzom razvitku trgovačkih gradova i mnogim putovanjima diljem Sredozemlja što je rezultiralo proučavanjem arapskih matematičkih djela. Jedan od njih bio je i Fibonnaci koji u svom djelu *Liber abaci* (1202.) daje primjer sustava za kojeg kaže da ima rješenje samo ako se za jednu od nepoznanica prihvati da je „dug". Takav primjer sustava opisuje u zadatku o pronađenom novčaniku koji kaže da je pronađen novčanik s nepoznatim iznosom b novca u njemu. Bila su četvorica nalaznika koji su svaki već kod sebe imali određene svote novca. Ako prvi uzme sav novac iz novčanika, onda će on imati dvostruko više novaca, nego drugi i treći zajedno. Ukoliko drugi nalaznik uzme sav novac iz novčanika, imat će trostruko koliko treći i četvrti zajedno. Ako treći uzme sav novac, imat će četverostruko koliko prvi i četvrti zajedno. Naposljetku, ako bi četvrti uzeo sav novac iz pronađenog novčanika, imao bi peterostruko koliko prvi i drugi zajedno. Potrebno je odrediti koliko je tko imao novaca prije pronalaska novčanika. Rješavajući ovaj sustav, Leonardo kaže: „Pokazat ću da ovaj problem nije rješiv ako se ne dozvoli da je prvi partner u dugu.". Jedno od rješenja koje navodi je da prvom nalazniku nedostaje jedan novčić, zatim drugi ima 4 novčića, treći 1 novčić i četvrti 4 novčića pri čemu je u novčaniku pronađen iznos od 11 novčića. Ovime Fibonacci pokazuje razumijevanje negativnih brojeva iako teško da je za njih saznao od Arapa. Jedino je Abu'l-Wafe pisao o njima, a Fibonacci se nije susreo s njegovim djelom. No, Fibonacci je bio iznimka; negativni brojevi još dugo neće postati općeprihvaćeni. Među matematičarima koji nisu prihvaćali negativne brojeve, našli su se Chuquet i Stifel koji ih nazivaju „apsurdnim" brojevima, Cardano koji negativna rješenja smatra samo simbolima, a Francois Viéte (1540.–1603.) ih u potpunosti zanemaruje. Nešto kasnije, Leibniz ih u teoriji prihvaća, ali u praksi ne koristi. S druge stane, Thomas Harriot

(1560.–1621.), Bombelli kao i Girard u svom djelu *is Invention novelle en algébre* te nešto kasnije engleski matematičar John Wallis (1616.–1703.) negativne i pozitivne brojeve stavljaju u ravnopravan položaj. Međutim, Harriot ne prihvaća negativne brojeve kao rješenja jednadžbi.

Francuski fizičar i matematičar Jean le Rond d'Alembert (1717.–1783.) u poznatoj Diderotovoj *Encyclopédie* pod natuknicom „Negativno" piše da ako problem ima negativno rješenje, onda je dio početne hipoteze netočan iako se smatrao točnim. Samo je švicarski matematičar, fizičar i astronom Leonard Euler (1707.–1783.) dijelio mišljenje o negativnim brojevima s Indijcima te ih interpretirao na sljedeći način: „ono što čovjek zaista posjeduje (imanja) označavamo pozitivnim brojem i koristimo znak +, dok su čovjekovi dugovi predstavljeni negativnim brojevima i znakom −".

Descartes je djelomično prihvatio negativne brojeve. Naime, smatrao je negativna rješenja jednadžbi netočnima jer su to bili brojevi manji od nula pa je takva pojedinačna rješenja odbacio prilikom formiranja konačnog rješenja. Međutim, kasnije je pokazao da se jednadžba s negativnim rješenjima može transformirati u one s pozitivnim rješenjima što ga je u konačnici navelo da prihvati negativne brojeve. S druge strane, Wallis je odmah prihvatio račun s negativnim brojevima te je tvrdio da su negativni brojevi veći od beskonačnosti, ali ne manji od nula.

Krajem 18. st. i početkom 19. st. i dalje je postojao određeni otpor prema prihvaćanju negativnih brojeva što vidimo u radu Wiliama Frenda (1757.–1841.), koji opisuje da je apsurdno oduzimati veći broj od manjeg. Lazare Carnot (1753.–1823.) kao i De Morgan, također potvrđuju da je promatranje veličine manje od nule besmisleno. Tek krajem 19. st., skupa s formalnom definicijom realnih brojeva (o čemu ćemo ponešto reći u sljedećem poglavlju) negativni brojevi su konačno dobili svoju jasnu ulogu i postali opće prihvaćeni [25, 27, 18].

Poglavlje 6

Povijest realnih i kompleksnih brojeva

6.1 Iracionalni i racionalni brojevi

Stari Egipćani i Babilonci pretežito su se bavili rješavanjem praktičnih geometrijskih problema, što je povremeno uključivalo potrebu računa površine kruga. Također su procjenjivali površinu kruga kao površinu kvadrata stranice osam devetina promjera kruga, što se svodi na formulu $P = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{256}{81}r^2$. Iako još nema nikakvih naznaka poznavanja proporcionalnosti površine kruga s kvadratom polumjera/promjera niti opsega s promjerom, vidimo da staroegipatska procjena površine kruga odgovara aproksimaciji $\pi \approx \frac{256}{81} \approx 3.16$. Slično kao i kod Egipćana, babilonske se aproksimacije površine i opsega kruga najčešće svode na $\pi \approx 3$, a ponekad s $3\frac{1}{8}$ [8].

Slično je bilo i u staroj Indiji i Kini. Najznačajnije starokinesko matematičko djelo „Devet poglavlja umijeća računanja", koje se datira negdje oko prijelaza era, sastoji se od devet poglavlja s ukupno 246 zadataka. U prvom poglavlju nalaze se zadaci mjerenja (površine) pri čemu se postupci svode na aproksimaciju $\pi \approx 3$, odnosno ako želimo izračunati površinu kruga računamo trostruki kvadrat nad radijusom. U četvrtom poglavlju nalaze se razni geometrijski zadaci, što uključuje iterativno računanje kvadratnih i kubnih korijena, primjerice, za određivanje stranice kvadrata ili brida kocke poznate površine ili volumena. Ovdje se, kao i kasnije, vidi da Kinezi (a tako i Indijci) nisu bili „opterećeni" razlikom između racionalnih i iracionalnih brojeva, već su jednostavno uzimali vrijednosti dovoljno točne za njihove potrebe. U kasnijem razdoblju poznati su razni pokušaji indijskih i kineskih matematičara za dobivanje boljih aproksimacija broja π, primjerice je Liu Hui Arhimedovom metodom[1] dobio procjenu 3.14150 za π. Također, tijekom prvog tisućljeća n. e. kineski matematičari su metode aproksimativnog računanja drugog i trećeg

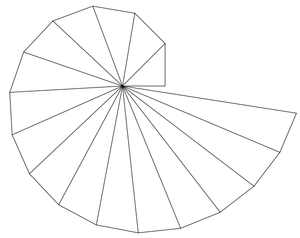
[1] Arhimed je u 3. st. pr. Kr. iterativnom metodom temeljenom na upisivanju i opisivanju pravilnih mnogokuta krugu dobio procjenu da je omjer opsega i promjera kruga između $3\frac{10}{71}$ i $3\frac{1}{7}$. Liu Hui vjerojatno nije znao za Arhimedov postupak.

korijena doradili do metoda za iterativno (numeričko) rješavanje općenitih polinomijalnih jednadžbi [6].

Dugo je vremena trebalo da matematičari počnu razmatrati razliku racionalnih i iracionalnih brojeva. Sve je počelo još od pitagorejaca, grčke škole koju je krajem 6. st. pr. Kr. osnovao Pitagora sa Samosa, koji su vjerovali da je sve broj, odnosno da se sve može shvatiti preko (prirodnih) brojeva i njihovih omjera (tj. razlomaka). To učenje za posljedicu ima očekivanje da je (ako je zadana jedinična duljina) svaka duljina cijelobrojna ili racionalna, odnosno: sve su duljine sumjerljive jediničnoj (dvije su istovrsne veličine sumjerljive ako im je omjer mjera opisiv kao omjer prirodnih brojeva). Pitagorejci su otkrili postojanje iracionalnih veličina iako se to protivi spomenutoj filozofiji. Oni su naime dokazali da dijagonala i stranica kvadrata te dijagonala i stranica pravilnog peterokuta nisu sumjerljive. Danas bismo rekli da su dokazali da su $\sqrt{2}$ i $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ iracionalni brojevi, no naravno, za njih ti omjeri nisu bili brojevi [5].

Znameniti filozof Platon (oko 428.–347. pr. Kr.) bio je učenik Sokrata i pitagorejca Teodora iz Kirene (oko 465.–398. pr. Kr.). U svojoj filozofiji Platon matematiku smješta u nematerijalni svijet, skupa s nepromjenjivim, Bogom, dobrim, hrabrosti i dušom. Po platonističkoj filozofiji matematički objekti postoje neovisno o ljudskom razumu, dakle svojstva im se otkrivaju, a ne stvaraju. U njegovim se djelima mogu naći informacije o tadašnjoj matematici, osobito u dijalozima „Timej" i „Teetet". U „Teetetu" se nalazi opis onoga što danas nazivamo iracionalnim kvadratnim korijenima. Izvor za „Teetet" spomenuti je Teodor iz Kirene koji je dokazao iracionalnost korijena iz $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ i $\sqrt{17}$ (tj. nesumjerljivost stranice i dijagonale za kvadrate površina 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17 jedinica). Uočljivo je da nedostaje $\sqrt{2}$, ali iako su pitagorejci svoje otkriće o nesumjerljivosti dijagonale i stranice kvadrata pokušali zadržati tajnim, čini se da je to tijekom 5. st. pr. Kr. postalo opće poznato. Nije poznat Teodorov dokaz, no vjerojatno se radi o generalizaciji već ranije poznatog dokaza za $\sqrt{2}$, iz koje se vidi i mogući razlog zašto je stao baš na $\sqrt{17}$. Na Teodorovoj spirali (slika 6.1) vidi se da ako krenemo od pravokutnog trokuta s dvije jednake katete (recimo, duljine 1) i onda iterativno uzimamo posljednju hipotenuzu kao jednu katetu, a kao drugu opet katetu duljine 1, dobivamo hipotenuze $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, ..., a puni krug prelazimo točno nakon hipotenuze duljine $\sqrt{17}$.

Kako su grčki matematičari pretežito proučavali geometriju, za njih $\sqrt{2}$ (a analogno i gore spomenuti Teodorovi korijeni zapisani i shvaćeni na moderan način) nije bio broj već geometrijski omjer dijagonale i stranice kvadrata. Također, jedan od danas najpoznatijih iracionalnih brojeva, broj π, za antičke grčke matematičare nije broj, nego „samo" omjer duljine kružnice i njezinog promjera. Iako su stari Grci dobili niz rezultata o iracionalnim brojevima, ne može se dovoljno naglasiti da osim prirodnih brojeva za njih drugih brojeva nije bilo. Vezano za ono što nazivamo iracionalnim brojevima se ističu radovi dvojice grčkih matematičara Eudoksa (oko 400.–350. pr. Kr.) i Euklida (4./3. st. pr. Kr.). Naj-



Slika 6.1: Teodorova spirala

značajnije su Euklidovo djelo njegovi *Elementi* (dalje označeno s EE), koji predstavljaju sintezu dotad poznate matematike u 13 knjiga. Peta knjiga opisuje Eudoksovu opću teoriju omjera (*logos*) i razmjera (*analogia*), dok se šesta knjiga bavi sličnošću i geometrijskim omjerima, tj. primjenom opće teorije omjera i razmjera u planimetriji. Omjer je u trećoj definiciji u EEV definiran kao odnos s obzirom na mjeru (iznos) između dviju istovrsnih veličina. Razmjer je definiran u petoj definiciji: za veličine kažemo da su u istom omjeru, prva prema drugoj i treća prema četvrtoj, ako kojim god brojem pomnožimo prvu i treću i bilo kojim drugu i četvrtu, prva dva višekratnika podjednako nadilaze, jednaki su ili manji od drugih dvaju, u odgovarajućem redoslijedu. Veličine s istim omjerom šesta definicija naziva proporcionalnim. Teorija omjera i razmjera izuzetno je bitna za starogrčku matematiku jer omogućuje uključivanje nekih iracionalnih veličina u analize. Tako, primjerice, ono što je danas poznato kao korjenovanje, mogli bismo pomoću ove teoriju uvesti preko razmjera zapisati kao $a{:}x{=}x{:}b$, što je ekvivalentno $x = \sqrt{ab}$, a produljeni razmjer $a : x = x : y = y : b$ ekvivalentan je s $y = \sqrt[3]{ab}$. Također, u *Elementima* možemo naći prvi spomen naziva racionalan i iracionalan. Naime, Euklid u EEX definira da, uz pretpostavku fiksirane dužiine (mi bismo rekli, fiksirane jedinične duljine) je duljina racionalna ako je sumjerljiva duljini te fiksirane dužine ili je kvadrat nad njome (tj. njegova površina) sumjerljiv s kvadratom nad fiksiranom dužinom, a inače je iracionalna. Suvremenim stilom rečeno: Realan broj x je racionalan u Euklidovom smislu ako je to razlomak ili drugi korijen iz razlomka, dakle naš $\sqrt{2}$ bi — da su ga stari Grci uopće gledali kao broj — bio racionalan u Euklidovom smislu. Euklid se dalje u EEX bavi veličinama koje danas nazivamo Euklidovim iracionalnostima, a koje su u modernom smislu drugi korijeni zbrojeva i razlika drugih korijena racionalnih brojeva [6, 8].

U arapskoj matematici, zahvaljujući njihovom utemeljenju algebre (al-Hvarizmi početkom 9. st.) racionalni i iracionalni brojevi došli su na ravnopravnu razinu. Arapska algebra je također omogućila početak spajanja ideje broja (iz aritmetike) s idejom veličine (iz geometrije) te tako otvorila put prema definiciji skupa realnih brojeva. Ovdje posebno treba istaknuti al-Bagdadija (10. st.), koji je prvi u povijesti opisao kako smjestiti racionalne brojeve na pravac i tako začeo ideju identifikacije skupa realnih brojeva s pravcem [14].

Za razvoj pojma iracionalnog broja su ponajviše zaslužni europski matematičari od srednjeg vijeka nadalje, a prvenstveno zahvaljujući grčkom i arapskom utjecaju. U srednjem vijeku i renesansi, europski matematičari iracionalne brojeve nerijetko nazivaju za-mi-šlje-nim, nijemim ili neizrazivim brojevima. Posebno se ističe Fibonacci, koji je na natjecanju kojeg je organizirao car Friedrich II. aproksimativno riješio jednu kubnu jednadžbu, pritom ističući da ju je riješio aproksimativno jer je prije toga pokazao da ta jednadžba nema rješenja ni u cijelim ni u racionalnim brojevima, pa čak ni u obliku Euklidovih iracionalnosti. Stifel 1544. godine u svom djelu *Arithmetica integra* upotrebljava izraz iracionalni brojevi te opisuje odnos između cijelih, racionalnih i iracionalnih brojeva. Stifel kaže da iracionalan broj ne može biti racionalan, ali može biti između dva racionalna. Također, zaključuje da postoji beskrajno mnogo razlomaka i iracionalnih brojeva između dva najbliža cijela broja. Time je Stifel postao prvi matematičar koji je naslutio jedno od temeljnih svojstava skupa realnih brojeva — gustoću skupa $\mathbb{Q}$ u skupu $\mathbb{R}$. Među prvima koji pokušava razjasniti što je to (realan) broj bio je Descartes, koji kaže da je broj „sve što se odnosi prema jedinici kao jedna dužina prema drugoj".

U 18. stoljeću uočeno je da su neki iracionalni brojevi „kompliciraniji" od drugih. To su transcendentni brojevi, tj. realni brojevi koji se ne mogu dobiti kao rješenja ni jedne polinomijalne jednadžbe s cjelobrojnim koeficijentima. Prvi ih je definirao Euler, koji je 1737. dokazao da je e iracionalan i zatim postavio hipotezu da je transcendentan. Za π je tu hipotezu postavio Johann Heinrich Lambert (1728.–1777.), koji je pak 1768. dokazao da je π iracionalan. No, tek 1844. je dokazana egzistencija transcendentnih brojeva (J. Liouville), a transcendentnost e i π dokazana je oko 30 godina kasnije. Njemački matematičar Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845.–1918.) uočio je da do tada skup realnih brojeva nije precizno definiran te 1870. godine definirao realne brojeve kao klase ekvivalencije Cauchyjevih[2] nizova racionalnih brojeva. Također je dokazao da su te klase ekvivalencija u bijekciji s točkama pravca. Potrebu za uvođenjem preciznije definicije realnih brojeva primijetio je i njemački matematičar Richard Dedekind (1831.–1916.), koji se 1872. godine sprijateljio s Canotorom. Dedekind daje definiciju skupa realnih brojeva, koju danas smatramo općeprihvaćenom, a to je pomoću Dedekindovih rezova u skupu racionalnih brojeva: Prvo definiramo skup $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva kao skup brojeva koje možemo zapisati u obliku razlomaka. Zatim definiramo Dedekindov rez u skupu $\mathbb{Q}$ kao njegovu particiju na dva neprazna podskupa A i B takve da je svaki element od A manji od svakog elementa od B i da A nema najveći element. Iracionalni brojevi se onda definiraju kao Dedekindovi rezovi u skupu racionalnih brojeva, primjerice $\sqrt{2}$ je Dedekindov rez $A = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$, $B = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 > 2\}$. Skup realnih brojeva je onda naravno definiran kao unija skupova svih racionalnih i svih iracionalnih brojeva [24, 17, 8, 26].

[2]Neka je (x_n) niz realnih brojeva. Kažemo da je (x_n) Cauchyjev niz ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \leq \mathrm{n}_0$ vrijedi $\left|x_m - x_n\right| < \varepsilon$. Dva Cauchyjeva niza su ekvivalentna ako njihova razlika teži u 0.

6.2 Kompleksni brojevi

Kompleksne brojeve najčešće povezujemo s rješavanjem kvadratnih jednadžbi i smatra se da su uvedeni upravo kako bi svaka kvadratna jednadžba imala rješenje. No, kompleksni brojevi su proizašli iz rješavanja kubnih jednadžbi.

Talijanski renesansni matematičari bavili su se problemom rješivosti kubnih jednadžbi u radikalima, tj. tražili su rješenja koja bi se, kao kod linearnih i kvadratnih jednadžbi, mogla izraziti s konačno mnogo primjena osnovne četiri operacije te korjenovanja na koeficijente jednadžbe.

Veliki problem tadašnjeg pristupa je bio da su se razmatrala isključivo rješenja koja su pozitivna i jednadžbe koje su svedene na oblik u kom su svi koeficijenti pozitivni. Tako su dobiveni razni parcijalni rezultati, koje je naposljetku objedinio i generalizirao na sve moguće slučajeve Cardano. Rješenja kubnih jednadžbi u radikalima objavio je u svom djelu *Ars Magna* (1545.), a tu je objavio i rezultate svog studenta Ferrarija o rješenju jednadžbi četvrtog stupnja u radikalima. Pritom je, opisujući svoj postupak na primjerima za jedan slučaj, za koji je znao da ima rješenje 4, dobio da bi u međukoraku morao računati drugi korijen negativnog broja. Cardano drugi korijen negativnog broja nije prihvatio kao broj, ali ga je prihvatio kao međukorak.

Cardanov postupak opravdao je ubrzo zatim, 1572. godine, Rafael Bombelli u djelu *L'Algebra*. Bombelli je prva osoba u povijesti koja je kao smislene prihvatila kompleksne brojeve, a opisao je i pravila računa s njima. Imaginarne brojeve zapisuje kao kvadratne korijene negativnih brojeva tj. uveo je zapis $\sqrt{-1}$ i naziva ga *piú di meno*. Bombelli je prvi dokazao da je Cardanovo rješenje $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ jednako 4, odnosno opisuje rješenje jednadžbe $x^3 = 15x + 4$ kao $x = a + bi + a - bi = 2a$, što za $a = 2$ daje $x = 4$. Prvi koji je koristio izraze „realni" i „imaginarni" brojevi bio je Descartes, no sve do otkrića geometrijske interpretacije kompleksnih brojeva oni su ostali „kuriozitet". U 17. st. Wallis daje prvi pokušaj geometrijske interpretacije $\sqrt{-1}$, a početkom 18. st. Abraham De Moivre (1667.–1754.) objavljuje poznatu formulu (za koju navodi da je bila poznata već Newtonu): $(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n = (\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))^n$ za prirodan broj n. Malo kasnije Euler je koristeći redove potencija dokazao znameniti Eulerov identitet

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

a upravo Euler je uveo i oznaku i za jedan od dva druga korijena od -1.

Prvi uspješan opis geometrijske interpretacije kompleksnih brojeva dao je Norvežanin Caspar Wessel (1745.–1818.) u članku objavljenom 1799. godine u memoarima Kraljevske Danske akademije znanosti. Wesselov članak bio je napisan na danskom jeziku i ostao nezapažen skoro 100 godina te se stoga kompleksna ravnina danas naziva po druga dva matematičara koji su ju međusobno nezavisno (i ne znajući za Wessela) opisali početkom 19. st. Bili su to francuski hobi-matematičar Jean-Robert Argand (1768.–1822.) 1806. te 1831.

znameniti njemački matematičar Carl Friedrich Gauß (1777.-–1855.). Tu priča naravno nije stala, ne samo jer je geometrijska interpretacija omogućila i primjene kompleksnih brojeva, nego i jer su matematičari nastavili tražiti daljnje generalizacije brojeva (posebno poznati su kvaternioni irskog matematičara sir William Rowan Hamiltona (1805.–1865.)), no opis tih daljnjih razvoja bio bi preopširan za ovaj tip rada [20, 5, 6].

Poglavlje 7

Uvođenje transfinitnih brojeva

Svi dosad opisani brojevi su „konačni”, no paralelno s definicijom iracionalnih i realnih brojeva otkriveni su i drugačiji, beskonačni brojevi. O tom ćemo otkriću sad ukratko nešto reći i tako stići do kraja našeg rada, do beskonačnosti.

7.1 Put do beskonačnosti

Još od davnina ljudi su se pitali postoji li nešto što je beskonačno veliko ili beskonačno malo. Vodeći se dvjema pretpostavkama: (ako se neka (kontinuirana) veličina može podijeliti na dva dijela, to se može učiniti beskonačno mnogo puta te ne može postojati stvar bez veličine). Rana razmišljanja na tu temu dao je grčki filozof Zenon iz Eleje u 5. st. pr. Kr., koji je opisao brojne paradokse. Jedan od najpoznatijih Zenonovih problema zove se paradoks dihotomije, što na starom Grčkom znači „paradoks dijeljenja na dva dijela”. Popularno ga se može opisati ovako: Poslije dugog dana sjedenja i razmišljanja, Zenon odluči prošetati od svoje kuće od parka. Kako bi došao do parka, prvo mora doći na pola puta do parka. Jednom kada dođe do polovice, treba prehodati pola preostale udaljenosti. Ovako možemo nastaviti u nedogled, dijeliti preostalu udaljenost na manje i manje dijelove, a za prijelaz svakog od kojih je potrebno neko konačno vrijeme. Kako bismo saznali koju udaljenost Zenon treba prijeći da dođe do parka, potrebno je zbrojiti duljine svih dijelova putovanja, kojih ima beskonačno mnogo. Dakle, dobivamo sljedeći geometrijski red $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots$ S obzirom da u danom zbroju imamo beskonačno mnogo članova, a svaki član zasebno je konačan, zbroj bi prema Zenonu, trebao biti jednak beskonačnosti. No, pokazalo se da će se ipak dobiti konačni rezultat (1), tj. da je paradoks samo prividan; to se može dokazati primjerice Eudoksovim principom ekshaustije (ili naravno na suvremen način pomoću limesa) [16].

Aristotel (384.–322. pr. Kr.) je razmatrao dva tipa beskonačnosti: aktualna (nešto što je beskonačno samo po sebi) i potencijalna beskonačnost (nešto što postepeno postaje beskonačno, recimo prilikom nabrajanja prirodnih brojeva uvijek stajemo nakon konačno mnogo brojeva, no znamo da zapravo možemo ići „jedan dalje”). Aristotel je samo potencijalnu beskonačnost smatrao mogućom, a aktualnu paradoksalnom. U srednjem vijeku takvim su se pitanjima posebno bavili Toma Akvinski u 13. stoljeću i Thomas Bradwardine u 14. stoljeću. Bradwardine u svom djelu *De continuo* razlikuje sljedeća dva tipa beskonačnosti: katetična (odgovara našem pojmu transfinitnog, tj. onomu čemu već otpočetka nedostaje ograničenost) i sinkatetična (odgovara našem pojmu infinitnog, tj. onom što iz konačnog nastaje neograničenim rastom) [10].

Galileo Galilei (1564.–1642.) je prvi koji je prihvatio postojanje beskonačnih skupova. Promatrao je niz prirodnih brojeva (1, 2, 3, 4, 5,. . .) i niz njihovih kvadrata (1, 4, 9, 16, 25. . .). Zaključio je da svakom prirodnom broju odgovara točno jedan kvadrat, tj. uočio je bijekciju (ekvipotentnost) ta dva skupa. Slijedi da kvadratnih brojeva ima jednako koliko i prirodnih brojeva, Galileo kaže: „Koliko vidim, možemo samo zaključiti da je ukupnost svih (prirodnih) brojeva beskonačna, da je broj kvadrata beskonačan, i da je broj njihovih korijena beskonačan; niti je broj kvadrata manji od ukupnosti svih brojeva, niti je ono prvo veće od drugoga; i konačno, oznake ‘veće’, ‘manje’ i ‘jednako’ nisu primjenjive na beskonačne nego samo na konačne veličine.”. No, u to doba većina matematičara razmišljali su kao primjerice, Leibniz, koji je smatrao da ih ne može biti jednako jer bi to rezultiralo da pravi podskup nekog skupa ima jednako članova koliko i sam taj skup. Taj zaključak činio se suprotan Euklidovom aksiomu: „Cjelina je veća od dijela.” [8].

U 17. stoljeću Wallis prvi je uveo simbol ∞ za beskonačnost, no taj simbol nije predstavljao broj, već samo nešto neograničeno veliko. Sve do 19. stoljeća beskonačni skupovi ostali su nešto „čudno”, paradoksalno. Prvi koji je ostvario značajniji napredak prema shvaćanju beskonačnih skupova bio je češki matematičar Bernard Bolzano (1781.–1848.). Glavni dio Bolzanove teorije beskonačnosti sadržan je u njegovoj posljednjoj raspravi *Paradoxien des Unendlichen* napisane 1848. godine, a objavljene posthumno 1851. godine. U toj raspravi prvi se puta pojavljuje pojam „skup”. Bolzano je prvi uočio da je za beskonačne skupove tipično da postoji bijekcija između njih i nekog njihovog pravog podskupa, primjerice, $\langle 0, 1\rangle$ je u bijekciji s $\langle 0, 2\rangle$. Također, Bolzano je u tom djelu razjasnio i mnoge ranije prividne paradokse, no nije došao do koncepta kardinalnosti niti transfinitnih brojeva [30].

7.2 Transfinitni brojevi

Tijekom 1873. godine Cantor uvodi pojam ekvipotentnosti[1] skupova i dokazuje da je skup prirodnih brojeva ekvivpotentan sa skupom cijelih i sa skupom racionalnih brojeva. Kas-

[1]Svojstvo dvaju skupova da se među njima može uspostaviti bijekcija; za konačne skupove znači jednakost broja elemenata.

nije u svojim djelima, skupove koji su ekvipotentni sa skupom prirodnih brojeva naziva prebrojivim skupovima. Kako bi označio broj elemenata u skupu $\mathbb{N}$, odnosno u bilo kojem prebrojivom skupu, uvodi oznaku $\aleph_0$, što se čita „alef nula", prema prvome slovu hebrejske abecede ($\aleph$: alef). Iste, 1873., godine dokazao je i da je skup svih algebarskih brojeva[2] prebrojiv. Ovi rezultati navode na pitanje „Je li i skup realnih brojeva prebrojiv?" što opet povlači pitanje „Jesu li možda svi beskonačni skupovi prebrojivi?". Godine 1874. u *Crelle's Journal* Cantor objavljuje dokaz da skup $\mathbb{R}$ nije ekvipotentan s $\mathbb{N}$. Ovim je dokazom utemeljena teorija skupova — utvrđeno je da nisu svi beskonačni skupovi „jednakobrojni". Dakle, prirodnih/cijelih/racionalnih/algebarskih ima $\aleph_0$, a realnih brojeva ima više od $\aleph_0$ elemenata, njegov broj elemenata označava se s $\mathfrak{c}$.

Cantorov dokaz da je Z prebrojiv zapravo pokazuje da je $\aleph_0 + \aleph_0 = 2\aleph_0 = \aleph_0$, a dokaz da je Q prebrojiv pokazuje da je $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0^2 = \aleph_0$. Kasnije je dokazao i da je $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ te da općenito za sve transfinitne kardinalne brojeve a vrijedi $2a = a^2 = a$. Postavio je i sljedeću hipotezu: $\mathfrak{c}$ je najmanji kardinalni broj veći od $\aleph_0$. Ovu hipotezu nazivamo hipoteza kontinuuma te zapisujemo kao $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ pri čemu je s $\aleph_1$ označen najmanji kardinalni broj veći od $\aleph_0$. Danas je poznato da se tu hipoteza ne može ni dokazati ni opovrgnuti unutar standardne aksiomatike teorije skupova uvedene 1920-ih godina.

Nadalje, 1880-ih godina, u svojim člancima, Cantor je proširio teoriju skupova i na dobro uređene skupove. Uveo je ordinalne brojeve koji karakteriziraju dobro uređene skupove te razvio aritmetiku s ordinalnim brojevima. Primjerice, ω je ordinalni broj skupa N sa standardnim uređajem za koji, za razliku od $\aleph_0 = 2 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \cdot 2 = \aleph_0 + \aleph_0$, vrijedi $\omega = 2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2 = \omega + \omega$ [4, 34, 31, 8].

[2]Skup svih rješenja polinomijalnih jednadžbi s cjelobrojnim koeficijentima.

Poglavlje 8

Zaključak

U ovom smo radu vidjeli da prolazeći kroz povijest mnogih kultura i civilizacija, stigli smo od ničega, do današnjeg poznavanja brojeva i brojki te pogleda na budućnost koja nam nosi beskonačnost. Brojevi su postali jezikom prirodnih znanosti i najvažnije matematičko oruđe. Danas s lakoćom zapisujemo brojke, preračunavamo brojeve iz jedne baze u drugu, razlomke koristimo u svakodnevici, pozitivne i negativne brojeve smatramo jednakovrijednima, nulu smo prihvatili kao i svaki drugi broj, računamo s beskonačnostima te za rješenja jednadžbi dozvoljavamo kompleksne brojeve, no da dođemo do preciznih temelja tih pojmova, bilo je potrebno mnogo godina, uspona i padova. Zaključujemo da je put razvoja brojeva i brojki uključivao mnogo znanstvenika, učenjaka, putovanja, prevođenja tekstova, borba za priznavanje novih ideja, što uspješnih, što neuspješnih te paradoksa koji su nas često navodili na krivi trag. Glavna inspiracija za pisanje ovog rada proizašla je iz opisa knjige *Alex's Adventures in Numbertland* Alexa Bellosa [1] pa sve zainteresirane za produbljivanje znanja o ovoj temi upućujemo na tu referencu. Ujedno bismo istakli i [10] kao ozbiljni matematičko povijesni tekst koji je uveliko doprinio sadržaju ovog rada.

Bibliografija

[1] A. Bellos, *Alex's Adventures in Numberland,*, Bloomsbury Publishing, 2010.

[2] C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, Taylor Francis, 1989.

[3] ______, *Zero: The Symbol, the Concept, the Number*, John Wiley and Sons, 1989.

[4] Encyclpaedia Britannica, *Georg Cantor*, dostupno na https://www.britannica.com/biography/Georg-Ferdinand-Ludwig-Philipp-Cantor#ref199443 (svibanj 2021.).

[5] F. M. Brückler, *Povijest matematike 2*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, 2010.

[6] ______, *Povijest matematike 1*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, 2014.

[7] ______, *Egipatski razlomci*, prihvaćen za objavljivanje u Osječkom matematičkom listu (2021.), 1–4.

[8] ______, *Jedan, dva puno. Predavanje za Večer matematike 2020.*, dostupno na https://www.youtube.com/watch?v=Rk8BAWN-Kgo (svibanj 2021.).

[9] ______, *Povijest matematike*, predavanja ak. g. 2020/21, Sveučilište u Zagrebu, dostupno na https://www.pmf.unizg.hr/math/predmet/povmat_a.

[10] E. B. Burger, *Zero to Infinity: A History of Numbers*, The Teaching Company, 2007.

[11] M. Duk, *Broj nula*, dostupno na http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/DUK04.pdf (svibanj 2021.).

[12] Hrvatska enciklopedija, *Brojevni sustav,*, dostupno na https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=9668 (svibanj 2021.).

[13] I. Gusić, *Zašto su uvedeni kompleksni brojevi?, Hrvatski matematički elektronski časopis*, dostupno na http://e.math.hr/old/povmat/pov1.html (svibanj 2021.).

[14] R. P. Agarwal H. Agarwal, *Origin of Irrational Numbers and Their Approximations*, Computation 2021, 9, 29. https://doi.org/10.3390/ computation9030029.

[15] G. Ifrah, *The Universal History of Numbers*, John Wiles and Sons, 1994.

[16] C. Kelleher, *What is Zeno's Dichotomy Paradox?*, dostupno na https://www.ted.com/talks/colm_kelleher_what_is_zeno_s_dichotomy_paradox/transcript (lipanj 2021.).

[17] A. Klisurić, *Povijesni početci nastajanja i razvoja brojeva*, dostupno na http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/KLI07.pdff (svibanj 2021.).

[18] R. Mattessich, *From Accounting to Negative Numbers: A Signal Contribution of Medieval India to Mathematics*, The Academy of Accounting Historians (1998.), 129–145.

[19] D. Medić, *Povijest brojeva i njihove notacije*, Sveučilište u Zagrebu, 2011.

[20] O. Merino, *A Short History of Complex Numbers*, University of Rhode Island (2006.).

[21] The MacTutor History of Mathematics Archive, dostupno na https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/ (svibanj 2021.).

[22] P. Papić, *Uvod u teoriju skupova*, Hrvatsko matematičko društvo, 2000.

[23] R. Rashed, *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*, Boston Studies in the Philosophy of Science, 1994.

[24] H. Rebić, *Realni brojevi kroz povijest*, dostupno na http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/REB02.pdf (svibanj 2021.).

[25] L. Rogers, *The History of Negative Numbers*, dostupno na https://nrich.maths.org/5961 (svibanj 2021.).

[26] G. I. Sinkevich, *On the History of Number Line*, (2015.).

[27] M. K. Smith, *History of Negative Numbers*, dostupno na https://www.britannica.com/biography/Georg-Ferdinand-Ludwig-Philipp-Cantor. (svibanj 2021.).

[28] D. J. Struik, *Simon Stevin and the decimal fractions*, National Council of Teachers of Mathematics.

[29] J. Suzuki, *A History of Mathematics*, Prentice Hall, 2002.

[30] K. Trlifajova, *Bolzano's Infinite Quantities*, dostupno na https://arxiv.org/pdf/1711.01603.pdf (svibanj 2021.).

[31] M. Vuković, *Teorija skupova*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ts/materijali/ts-skripta-2015.pdf (svibanj 2021.).

[32] D. Wells, *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*, Penguin, 1997.

[33] D. Žubrinić, *Glagoljski brojevi*, Matematika i škola 11 (2001.), 35–37.

[34] P. Žugec, *Koliko je točaka...*, dostupno na http://www.phy.pmf.unizg.hr/~pzugec/MFL/OML_19_2.pdf (svibanj 2021.).

Sažetak

U ovom diplomskom radu opisan je povijesni razvoj brojeva i brojki. U prvom poglavlju promatramo prve dokaze ljudskog brojanja te dajemo (parcijalni) odgovor na pitanje „Zašto brojimo?”. U drugom poglavlju, koje se tiče povijesti brojki, dan je povijesni pregled brojevnih sustava i njihovih baza, kao i općeniti zapis brojeva. U trećem poglavlju opisujemo prvu pojavu razlomaka kod starih Egipćana kao i njihov razvoj u Babilonaca, Grka, Rimljana, Indijaca, Kineza, Arapa i Europljana. U četvrtom poglavlju dan je pregled povijesnog razvoja nule kao broja i kao brojke. U petom poglavlju, bavimo se s povijesti negativnih brojeva, a u šestom poglavlju dajemo kratku povijest definicije skupova realnih i kompleksnih brojeva. Na samom kraju ovog rada, u posljednjem poglavlju bavimo se uvođenjem transfinitnih brojeva u matematiku.

Summary

In this thesis we describe the historical development of numbers and numerals. In the first chapter, we discuss the first evidences of human counting and give a (partial) answer to the question „Why do humans count?". The second chapter gives a historical overview of number systems and their bases, as well as a general history of numbers. In the third chapter we describe the first appearance of fractions in ancient Egypt as well as their development in various civilisaitons: Babylonians, Greeks, Romans, Indians, Chinese, Arabs, and Europeans. The fourth chapter gives an overview of the historical development of zero as a number and as a digit. In the fifth chapter, we deal with the history of negative numbers, and in the sixth chapter we give a brief history of the definition of sets of real and complex numbers. At the very end of this thesis, in the last chapter, we describe introduction of transfinite numbers.

Životopis

Moje ime i prezime je Veronika Drk. Rođena sam 4. travnja 1997. u Čakovcu gdje sam pohađala III. osnovnu školu, a 2011. upisala sam prirodoslovno-matematički smjer u Gimnaziji Josip Slavenski Čakovec.

Nakon završene srednje škole, 2015. sam upisala preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Sveučilišnom prvostupnicom (baccalaureus) matematike postala sam 2018. godine te sam iste godine među deset najboljih upisala diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički, također na Matematičkom odsjeku.

U toku studiranja paralelno sam sudjelovala u vođenju obiteljskog obrta Hortikultura i floristika „Veronika"specijaliziranog za izradu cvjetnih dekoracija za sve prigode. Držala sam instrukcije iz matematike i srodnih predmeta učenicima osnovnih i srednjih škola na području Međimurja i Zagreba. Uz to, u školskoj godini 2020./2021. radila sam kao zamjena nastavnice matematike u Osnovnoj školi S. S. Kranjčevića u Zagrebu.

U zimskom semestru akademske godine 2020./2021. pohađala sam praksu iz matematike u Osnovnoj školi S. S. Kranjčevića u Zagrebu, dok sam u ljetnom semestru iste akademske godine, praksu pohađala u III. gimnaziji u Zagrebu.

U ono malo slobodnog vremena koje mi preostaje od radnog tjedna, volim kuhati i pripremati slastice za svoje bližnje.