

Sistemi korijena i Dynkinovi dijagrami

Rebić, Josip

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:683733>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-13**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Josip Rebić

SISTEMI KORIJENA I DYNKINOVİ
DIJAGRAMI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Slaven Kožić

Zagreb, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Mojoj majci Davorki i mom ocu Mariu

Sadržaj

Sadržaj	iv
Uvod	2
1 Sistemi korijena	3
1.1 Definicija i osnovna svojstva	3
1.2 Matrični i grafički prikaz sistema korijena	7
1.3 Weylova grupa	10
2 Klasifikacija sistema korijena	15
2.1 Teorem o klasifikaciji	15
2.2 Cartanova matrica tipa $A-G$	24
3 Konstrukcija sistema korijena	28
3.1 Konstrukcija tipova $A-G$	28
3.2 Liejeve algebre	34
Bibliografija	39

Uvod

Evgenii Borisovich Dynkin (1924. - 2014.), poznatiji kao Eugene Dynkin, jedan je od uglednijih matematičara prošlog stoljeća, a slavu je stekao na područjima kao što su vjerojatnost i algebra. Tijekom svog matematičkog djelovanja posebno su iskazao na istraživanju Liejevih algebri, području koje i dan danas privlači pozornost mnogih svjetskih matematičara. Prvi uvodi pojam dijagrama Liejevih algebri koje njemu u čast danas nazivamo Dynkinovi dijagrami. Upravo ti Dynkinovi dijagrami će imati važnu ulogu u klasifikaciji konačnodimenzionalnih prostih Liejevih algebri te ćemo njihovu vezu ilustrirati u zadnjoj točki ovog rada.

Definicija samih dijagrama bila bi nemoguća bez znanja o sistemima korijena. Sistemi korijena će predstavljati određene skupove vektora koji se nalaze unutar nekog konačnodimenzionalnog realnog unitarnog prostora. Upravo ti sistemi korijena, svojstva koja ti sistemi korijena moraju zadovoljavati, definiranje baze tih sistema i definiranje pojma ireducibilnih korijena zajedno sa matričnim i grafičkim zapisom istih činit će prva dva dijela Poglavlja 1 ovoga rada.

Prvo poglavlje završavamo definiranjem Weylovih grupa. Weylove grupe sistema korijena su podgrupe grupe svih automorfizama nekog sistema korijena generirane svim refleksijama σ_x gdje je x upravo korijen. Pojam refleksije ćemo također definirati u prvom dijelu Poglavlja 1. Iskazivanjem određenih svojstava samih Weylovih grupa završit ćemo već spomenuto poglavlje.

U Poglavlju 2 ćemo klasificirati sve ireducibilne sisteme korijena. Drugim riječima pokušat ćemo naći sve klase ekvivalencije, s obzirom na relaciju izomorfности sistema korijena, tj. sve klase takve da je svaki ireducibilan sistem korijena izomorfan svim reprezentantima točno jedne klase. Nakon što uvedemo bitan pojam dopustivog skupa, naš zadatak će biti kroz 10 koraka povezati sve moguće Coxeterove grafove (koji su jedan od grafičkih zapisa sistema korijena) s dopustivim skupovima vektora. Završetkom posljednjeg koraka, dobit ćemo sljedeće klase odnosno tipove: A_ℓ , B_ℓ , C_ℓ , D_ℓ , E_6 , E_7 , E_8 , F_4 i G_2 . Njihovim matričnim zapisom, odnosno njihovim Cartanovim matricama, završavamo

drugo poglavlje rada.

U posljednjem poglavlju ovog rada bavit ćemo se konstrukcijom sistema korijena. Na početku poglavlja uvodimo na koji način ćemo konstruirati sisteme korijena i s tim načinom ćemo pristupiti konstruiranju svakog tipa posebno. Ovo nas vodi ka važnom zaključku, a to je da za svaki Dynkinov dijagram (ili Cartanovu matricu) tipova $A-G$, postoji ireducibilan sistem korijena koji ima taj dijagram. Poglavlje, a ujedno i rad, završavamo uvodom u Liejeve algebre te isticanjem povezanosti Dynkinovih dijagrama s prostim Liejevim algebrama.

Na kraju ovog uvoda želim zahvaliti svojoj obitelji na velikoj podršci tijekom školovanja. Hvala i svim djelatnicima Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu koji su svojom stručnošću i zalaganjem pomogli kako meni tako i mnogim drugim studentima u ostvarenju jako važnih znanja i vještina koje otvaraju mnoga vrata u Hrvatskoj i šire. Posebno želim reći veliko hvala mentoru doc.dr.sc. Slavenu Kožiću na iskazanom povjerenju, profesionalnosti, strpljenju i bezuvjetnoj pomoći tijekom izrade ovog rada.

Poglavlje 1

Sistemi korijena

1.1 Definicija i osnovna svojstva

U ovom poglavlju ćemo, prateći izlaganje iz [4], navesti neke od glavnih pojmova ovog rada te njihova najvažnija svojstva.

Definicija 1.1.1. Neka je V vektorski prostor nad poljem skalara \mathbb{F} . **Bilinearna forma** je funkcija $B : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ sa svojstvom

- (i) $B(x + z, y) = B(x, y) + B(z, y)$,
- (ii) $B(x, y + z) = B(x, y) + B(x, z)$,
- (iii) $B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y) = B(x, \lambda y)$,

za svaki $x, y, z \in V$ i za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$.

Drugim riječima, bilinearna forma je funkcija koja je linearna u svakoj varijabli. Nadalje, definirajmo pojmove simetrična i pozitivno definitna bilinearna forma.

Definicija 1.1.2. Neka je V vektorski prostor nad poljem skalara \mathbb{F} i neka je B bilinearna forma na V . Kažemo da je B **simetrična** bilinearna forma ako vrijedi

$$B(x, y) = B(y, x), \quad \text{za sve } x, y \in V.$$

Definicija 1.1.3. Neka je V vektorski prostor nad poljem skalara \mathbb{F} i neka je B bilinearna forma na V . Kažemo da je B **pozitivno definitna** bilinearna forma ako vrijedi

$$B(x, x) \geq 0, \quad \text{za sve } x \in V$$

i ako iz $B(x, x) = 0$ slijedi $x = 0$.

Ubuduće, koncentrirat ćemo se na konačnodimenzionalni vektorski prostor V nad \mathbb{R} s definiranom pozitivno definitnom simetričnom bilinearnom formom $(\cdot | \cdot)$. Po definiciji, V je s obzirom na takvu formu zapravo realan unitaran prostor.

Geometrijski, refleksija na V je invertibilna linearna transformacija koja točke neke hiperravnine ostavlja nepromijenjenima, a svaki vektor koji je okomit na tu hiperravninu šalje u njegov aditivni inverz. Hiperravnina definirana vektorom x je

$$P_x = \{v \in V \mid (v | x) = 0\}. \quad (1.1)$$

Neka je $x \in V$ neki nenul vektor, tada definiramo ortogonalnu refleksiju prostora V u odnosu na x s

$$\sigma_x v = v - 2 \frac{(v | x)}{(x | x)} x, \quad v \in V. \quad (1.2)$$

Korolar 1.1.4. Refleksija prostora V u odnosu na vektor x definirana s (1.2) je linearna.

Dokaz. Neka su $u, v \in V$ i neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} \sigma_x(\alpha u + \beta v) &= \alpha u + \beta v - 2 \frac{(\alpha u + \beta v | x)}{(x | x)} x \\ &= \alpha u + \beta v - 2 \frac{(\alpha u | x) + (\beta v | x)}{(x | x)} x \\ &= \alpha u + \beta v - 2 \frac{\alpha(u | x) + \beta(v | x)}{(x | x)} x \\ &= \alpha u - 2 \frac{\alpha(u | x)}{(x | x)} x + \beta v - 2 \frac{\beta(v | x)}{(x | x)} x \\ &= \alpha \left(u - 2 \frac{(u | x)}{(x | x)} x \right) + \beta \left(v - 2 \frac{(v | x)}{(x | x)} x \right) \\ &= \alpha \sigma_x u + \beta \sigma_x v. \end{aligned}$$

□

Primijetimo da je σ_x zaista ortogonalna refleksija s obzirom na hiperravninu P_x jer je $\sigma_x x = -x$, dok za svaki $v \in P_x$ vrijedi $\sigma_x v = v$.

Budući da će nam se izraz uz x izražen unutar (1.2) često pojavljivati, označavat ćemo ga oznakom $\langle v, x \rangle$, tj.

$$\langle v, x \rangle := 2 \frac{(v | x)}{(x | x)}. \quad (1.3)$$

(Primijetimo da je $\langle v, x \rangle$ linearan samo u prvoj varijabli.)

Definicija 1.1.5 (Sistem korijena). Neka je R podskup od V . R nazivamo **sistem korijena** ako zadovoljava sljedeća svojstva:

- (R1) R je konačan, razapinje V i ne sadrži 0 .
- (R2) Za $x \in R$ i $c \in \mathbb{R}$ vrijedi $cx \in R$ ako i samo ako $c = \pm 1$.
- (R3) Ako je $x \in R$, onda je $\sigma_x R = R$.
- (R4) Ako su $x, y \in R$, onda je $\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}$.

Budući da promatramo konačnodimenzionalni vektorski prostor, uvodimo oznaku ℓ koja će predstavljati dimenziju našeg vektorskog prostora, tj. $\ell = \dim V$.

Primjer 1.1.6. U ovom primjeru pokušat ćemo pronaći neke sisteme korijena za $\ell = 1, 2$. Upravo zbog (R2), za $\ell = 1$ postoji samo jedna mogućnost i označit ćemo je s A_1 :

$$\overleftarrow{-x} \cdot \overrightarrow{x}$$

Lako se provjere i ostala tri svojstva. Malo zanimljiviji će nam biti slučaj u kojem je $\ell = 2$. Ono nam nudi četiri mogućnosti (Slika 1.1), za koje će se u ostatku rada utvrditi da su i jedina četiri sistema korijena u ovoj dimenziji.

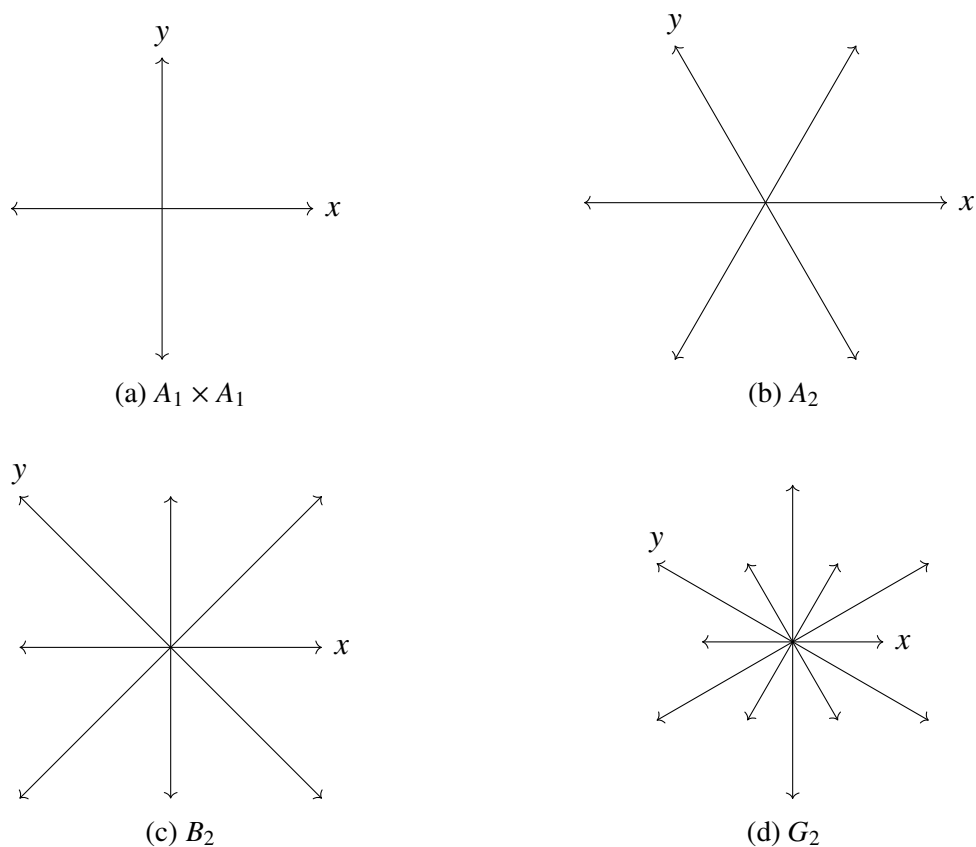
Definicija 1.1.7 (Ireducibilan sistem korijena). Neka je R neki sistem korijena. Kažemo da je R **ireducibilan** ako se ne može prikazati kao unija pravih podskupova takvih da je svaki korijen jednog skupa ortogonalan svakom korijenu drugog skupa.

Pogledamo li ponovno Primjer 1.1.6., primijetit ćemo da su A_1, A_2, B_2 i G_2 ireducibilni, dok $A_1 \times A_1$ nije ireducibilan. U ostatku rada koncentrirat ćemo se na ireducibilne sisteme korijena.

Definicija 1.1.8 (Baza sistema korijena). Neka je R sistem korijena. Tada podskup b od R nazivamo **baza** ako vrijedi sljedeće:

- (B1) b je baza od V .
- (B2) Svaki korijen y može se zapisati kao $y = \sum_{x \in b} k_x x$ s cjelobrojnim koeficijentima k_x , takvim da su oni svi ili nenegativni ili nepozitivni.

Od velike važnosti su nam oni korijeni koje se nalaze u b . Stoga fiksirajmo neku bazu b sistema korijena. Korijene koji čine tu bazu nazivat ćemo **jednostavnima**. Nadalje, ako su za neki $y = \sum_{x \in b} k_x x$ svi $k_x \geq 0$ ili $k_x \leq 0$, onda y nazivamo **pozitivnim**, odnosno **negativnim** korijenom. Za svaki vektor $y \in V$ definirat ćemo **pozitivan sistem** $R^+(y) := \{x \in R \mid \langle y, x \rangle > 0\}$. R^+ će biti skup svih korijena koji leže na pozitivnoj strani hiperravnine ortogonalne na y . Važno je naglasiti da ako odaberemo neku drugu bazu istog sistema

Slika 1.1: Sistemi korijena za $\ell = 2$

korijena, onda će neki drugi korijeni biti jednostavni, pozitivni itd. Primijetimo da su neke baze naših sistema korijena označene na slikama u Primjeru 1.1.6. Kod sistema A_1 njegova baza je $\{x\}$, dok je kod ostalih sistema baza $\{x, y\}$.

Teorem 1.1.9. Svaki sistem korijena ima bazu.

Dokaz Teorema 1.1.9 se može naći u knjizi [4]. Sada ga nećemo izvoditi budući da se dokazuje pomoću konstrukcije svih mogućih baza.

Nakon što smo definirali što su to sistemi korijena te definirali njegovu bazu, nadalje će nas zanimati njihov zapis. Zapise dijelimo u dvije vrste, a to su matični i grafički. Oba zapisa su jako korisna i mnogo će nam pomoći kod klasifikacije i konstrukcije samih korijena.

1.2 Matrični i grafički prikaz sistema korijena

Promotrimo prvo matrični prikaz sistema korijena. Neka je R neki sistem korijena i neka je b njegova baza. Neka je ta baza fiksirana, a zatim, s obzirom na nju fiksirajmo niz svih jednostavnih korijena $(x_1, x_2, \dots, x_\ell)$. Neka je $A = (A_{ij})$ neka matrica. Za matricu A reda ℓ kažemo da je **Cartanova matrica** od R ako su joj elementi $A_{ij} := \langle x_i, x_j \rangle$, za sve $1 \leq i, j \leq \ell$. Brojeve A_{ij} ćemo zvati **Cartanovi cijeli brojevi**. Matricu ćemo označavati sa $(\langle x_i, x_j \rangle)$.

Primjer 1.2.1. Kao u Primjeru 1.1.6 promatrat ćemo matrice za $\ell = 1, 2$. Za $\ell = 1$ matrica je dimenzije 1×1 , drugim riječima, Cartanova matrica za A_1 je upravo broj 2. Za sisteme ranga 2 matrice su sljedeće:

$$A_1 \times A_1 : \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B_2 : \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Propozicija 1.2.1. *Cartanova matrica ima sljedeća svojstva:*

- (C1) $A_{ii} = 2$ za sve i .
- (C2) $A_{ij} \in \{0, -1, -2, -3\}$ ako je $i \neq j$.
- (C3) Ako je $A_{ij} = -2$ ili -3 , onda je $A_{ji} = -1$.
- (C4) $A_{ij} = 0$ ako i samo ako $A_{ji} = 0$.

Dokaz. Svojstva (C1) i (C4) su očita i njih nije potrebno dokazivati. Obratit ćemo pažnju na (C2) i (C3).

Zbog aksioma (R4) iz Definicije 1.1.5 vidimo da se ozbiljno ograničava vrijednost kuta između neka dva korijena. Zbog toga kut može imati samo nekoliko vrijednosti. Označimo kut između dva korijena $x, y \in V$ oznakom θ . Kosinus kuta između x i y zadan je formulom $\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \cos \theta = \frac{(x | y)}{\sqrt{(x | x)} \sqrt{(y | y)}}$, gdje je $\|x\|^2 = (x | x)$. Stoga iz (1.3) imamo sljedeće:

$$\langle x, y \rangle = 2 \frac{(y | x)}{(x | x)} = 2 \frac{\|y\|}{\|x\|} \cos \theta.$$

Na analogan način dobivamo i

$$\langle y, x \rangle = 2 \frac{\|x\|}{\|y\|} \cos \theta,$$

$\langle x, y \rangle$	$\langle y, x \rangle$	θ
0	0	$\pi/2$
1	1	$\pi/3$
-1	-1	$2\pi/3$
1	2	$\pi/4$
-1	-2	$3\pi/4$
1	3	$\pi/6$
-1	-3	$5\pi/6$

Tablica 1.1

pa množenjem dobivamo

$$\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle = 4 \cos^2 \theta.$$

Budući da su vrijednosti $\langle x, y \rangle$ i $\langle y, x \rangle$ cjelobrojne i jednakog predznaka te funkcija $\cos^2 \theta$ postiže vrijednost unutar intervala $[0, 1]$, imamo $0 \leq 4 \cos^2 \theta \leq 4$. Iskoristimo sada da je $x \neq y$ i $\|y\| \geq \|x\|$. Sve mogućnosti dane su u Tablici 1.1. Time su dokazani (C2) i (C3). \square

Primjer 1.2.2. Vratimo se ponovno na Primjer 1.2.1. Promotrimo Cartanovu matricu od B_2 . Rekli smo da je zapis te matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Osim toga prema prethodnoj propoziciji B_2 može imati i Cartanovu matricu

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zaključak je da su oba zapisa točna i ubuduće ćemo matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

nazivati **parom**.

Iz definicije se lako može vidjeti da matrica ovisi upravo o redoslijedu jednostavnih korijena, ali to nije neki ozbiljan problem. Važno nam je jedino to da matrica ovisi isključivo o izboru sistema korijena R , ali ne i o izboru njegove baze b (do na poredak jednostavnih korijena). Ta činjenica slijedi iz [4], Poglavlje 10.

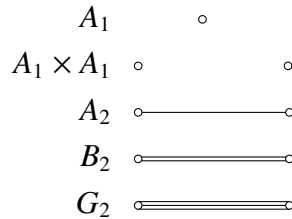
Sada kada imamo važna svojstva Cartanovih matrica promotrimo i grafički prikaz sistema korijena. Neka je R sistem korijena dimenzije ℓ . Fiksirajmo bazu sistema korijena

$$\begin{matrix}
 \left(\begin{array}{cccc} \boxed{2 & -1} & 0 & 0 \\ -1 & \boxed{2} & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) &
 \left(\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \boxed{2 & -2} & 0 \\ 0 & -1 & \boxed{2} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) &
 \left(\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & \boxed{2 & -1} \\ 0 & 0 & -1 & \boxed{2} \end{array} \right) \\
 \text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)}
 \end{matrix}$$

Slika 1.2: Matrični prikaz F_4 .

(x_1, \dots, x_ℓ) takvu da su x_i (za sve $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$) pozitivni korijeni. Tada znamo da je $\langle x_i, x_j \rangle \langle x_j, x_i \rangle \in \{0, 1, 2, 3\}$, za sve $i, j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$. Pridružimo sistemu korijena R graf Γ na sljedeći način. Za $\ell = 1$ graf je trivijalan, odnosno imamo samo jedan vrh. Stoga, neka Γ ima ukupno $\ell \geq 2$ vrhova takvih da su vrhovi i i $(i + 1)$ povezani s $\langle x_i, x_{i+1} \rangle \langle x_{i+1}, x_i \rangle$ spojnicom. Takav graf ćemo nazivati **Coxeterov graf** od R .

Primjer 1.2.3. Prikažimo neke Coxeterove grafove nama već poznatih sistema.

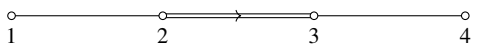


Dodavanjem strelice na Coxeterov graf na način da ju okrenemo prema kraćem korijenu dobivamo **Dynkinov dijagram** kojeg ćemo označavati s $D(R)$. U slučaju ako su oba korijena jednake duljine, kao na primjeru A_2 , onda se u tom slučaju Coxeterov graf i Dynkinov dijagram podudaraju.

Primjer 1.2.4. Promotrimo neke primjere Dynkinovih dijagrama:

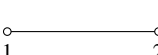
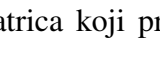



Primjer 1.2.5. Neka je zadan sistem korijena F_4 . Dynkinov dijagram tog sistema korijena zapisan je na sljedeći način



Lako je vidjeti da su u pitanju četiri vrha koji su međusobno povezani različitim brojem spojnica. Prvi i drugi vrh su povezani jednom spojnicom (jednostrukom spojnicom), drugi i treći s dvije spojnice (dvostrukom spojnicom) dok su treći i četvrti vrh, kao i prva dva, povezani jednom spojnicom. Promotrimo sada matrični zapis sistema F_4 . Možemo vidjeti da se Cartanova matrica

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

koji prikazuje graf  nalazi u lijevom kutu Cartanove matrice od F_4 (Slika 1.2 (a)). Cartanova matrica koji prikazuje graf  nalazi se u središtu matrice (Slika 1.2 (b)), dok je Cartanova matrica posljednjeg podgrafa od F_4  označena na Slici 1.2 (c).

1.3 Weylova grupa

Prateći izlaganje iz [6] ponovit ćemo neke osnovne pojmove iz teorije grupa.

Definicija 1.3.1. Neka je S neprazan skup i neka je $\cdot : S \times S \rightarrow S$ binarna operacija. Za (S, \cdot) ćemo reći da je **grupa** ako vrijede sljedeća svojstva:

- (G1) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ za svaki $x, y, z \in S$.
- (G2) Postoji element $n \in S$ takav da $n \cdot x = x \cdot n = x$ za svaki $x \in S$.
- (G3) Za svaki $x \in S$ postoji element $x^{-1} \in S$ takav da vrijedi $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = n$ gdje je n neutralan element.

Svojstvo (G1) ćemo zvati asocijativnost, svojstvo (G2) postojanje neutralnog elementa, dok će svojstvo (G3) biti postojanje inverznog elementa.

Definicija 1.3.2. Neka su G i H dvije grupe. Preslikavanje $f : G \rightarrow H$ je **homomorfizam** grupa ako vrijedi

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad \text{za sve } x, y \in G.$$

Za skup svih homomorfizama iz G u H uvodimo oznaku $\text{Hom}(G, H)$. Nadalje, homomorfizam f koji je još i injekcija naziva se **monomorfizam**. Ukoliko je homomorfizam f surjekcija tada ćemo reći da je f **epimorfizam**. Homomorfizam koje je monomorfizam i epimorfizam zovemo **izomorfizam**. Posebno, ako je $G = H$, tojest, ako imamo homomorfizam $f : G \rightarrow G$, onda kažemo da je f **endomorfizam** od G . Skup svih endomorfizama

od G ćemo označavati oznakom $\text{End}(G)$. Ukoliko je neki endomorfizam ujedno i bijekcija, onda ćemo za njega reći da je **automorfizam** od G i skup svih automorfizama od G označavamo s $\text{Aut}(G)$.

Definicija 1.3.3. Dvije grupe G i H su **izomorfne** ako između njih postoji neki izomorfizam f . Tu činjenicu označavamo sa

$$G \cong H.$$

Definicija 1.3.4. Neka je S grupa. Ako je $P \subseteq S$ grupa uz istu operaciju kao i S onda kažemo da je P **podgrupa** od S . Ekvivalentno, P je podgrupa od S ako vrijede sljedeća dva uvjeta:

- (P1) $xy \in P$, za svaki $x, y \in P$,
 (P2) $x^{-1} \in P$, za svaki $x \in P$.

Činjenicu da je P podgrupa od S označavamo $P \leq S$.

Definicija 1.3.5. Neka je S grupa i neka je N podgrupa od S . Kažemo da je N **normalna podgrupa** od S ako vrijedi uvjet:

$$xNx^{-1} = N \quad \text{za svaki } x \in S, \quad (1.4)$$

gdje je $xNx^{-1} = \{xnx^{-1} \mid n \in N\}$. Činjenicu da je N normalna podgrupa od S označavamo

$$N \trianglelefteq S.$$

Neka su sada T i S neke grupe i neka je $f : S \rightarrow \text{Aut}(T)$ homomorfizam. Definirajmo na Kartezijevom produktu

$$T \times S = \{(t, s) \mid t \in T, s \in S\} \quad (1.5)$$

množenje:

$$(t_1 s_1) * (t_2, s_2) := (t_1 f_{s_1}(t_2), s_1 s_2), \quad (1.6)$$

gdje je $f_s := f(s)$. Dokaz da je $(T \times S, *)$ grupa možemo vidjeti u knjizi [6] u Poglavlju 3.

Definicija 1.3.6. Grupu $(T \times S, *)$ zovemo **semidirektan produkt** grupe T sa S određen sa f i označavamo ga s

$$T \rtimes_f S$$

ili samo $T \rtimes S$ ako znamo o kojem se homomorfizmu f radi.

Primjer 1.3.7. Neka je $S \neq 0$ neki skup. Definiramo skup

$$\text{Perm}(S) = \{f : S \rightarrow S \mid f \text{ je bijekcija}\}.$$

Tada grupu $(\text{Perm}(S), \circ)$ nazivamo **grupa permutacija** ili **simetrična grupa**.

Ukoliko je S konačan skup s n članova, tada ćemo njegovu simetričnu grupu označavati oznakom \mathcal{S}_n . Nadalje, neka je $\tau \in \mathcal{S}_n$ permutacija. Ukoliko postoje $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, takvi da vrijedi $\tau(i) = j$ i $\tau(j) = i$ te za svaki $k \neq i, j$ vrijedi $\tau(k) = k$, onda se ta permutacija naziva **transpozicija** i označavat ćemo je oznakom (i, j) .

Primjer 1.3.8. Pokažimo da je $(\text{Perm}(S), \circ)$ grupa. Iz definicije znamo da je f bijekcija pa postoji inverzna funkcija $f^{-1} : S \rightarrow S$ koja je također bijekcija. Neka su f i g dvije bijekcije takve da $f, g : S \rightarrow S$, tada su i njihove kompozicije $(g \circ f)$ i $(f \circ g)$, koje idu iz S u S , također bijekcije. Nadalje, za tri funkcije $f, g, h : S \rightarrow S$ vrijedi asocijativnost kompozicije, tj. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. Još je potrebno pronaći neutralni element. Neka je funkcija $id : S \rightarrow S$ definirana kao $id(x) = x$. Tada vrijedi $id \circ f = f \circ id = f$, za svaku funkciju $f : S \rightarrow S$. Tada je funkcija id neutralan element. Time je pokazano da je $(\text{Perm}(S), \circ)$ grupa.

Primjer 1.3.9. Zanimljiv će nam biti primjer još jedne grupe. Neka je n prirodan broj. **Grupa ostataka modulo n** $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ je konačna grupa uz zbrajanje definirano modulo n . Obično pišemo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Grupa ostataka koju ćemo često koristiti je $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$.

Neka su V i V' realni unitarni prostori. Neka je R sistem korijena u vektorskom prostoru V i neka je R' sistem korijena u vektorskom prostoru V' .

Definicija 1.3.10. Neka su R i R' sistemi korijena u vektorskim prostorima V i V' . **Izomorfizam sistema korijena** R na sistem korijena R' je izometrički izomorfizam unitarnih prostora $\varphi : V \rightarrow V'$ takav da je $R' = \varphi R$.

Definicija 1.3.11. Neka je R sistem korijena u vektorskom prostoru V . **Automorfizam sistema korijena** R je izomorfizam R na R , tj. ortogonalan operator $\tau : V \rightarrow V$ takav da je $\tau R = R$.

Ubuduće skup svih automorfizama nekog sistema korijena R označavat ćemo oznakom $\text{Aut}(R)$. $\text{Aut}(R)$ je podgrupa grupe $O(V)$ svih ortogonalnih operatora na V .

Definicija 1.3.12. Neka je R sistem korijena u nekom vektorskom prostoru V . Za svaki vektor $x \in R$ neka je σ_x ortogonalna refleksija definirana kao (1.2). Tada je **Weylova grupa** sistema korijena R podgrupa grupe $\text{Aut}(R)$ generirana svim refleksijama σ_x za svaki $x \in R$. Drugim riječima, Weylova grupa je najmanja podgrupa od $\text{Aut}(R)$ (s obzirom na inkluziju) koja sadrži sve refleksije σ_x , $x \in R$.

Weylova grupa \mathcal{W} permutira skup R koje je konačan i razapinje cijeli V . Stoga \mathcal{W} je podgrupa simetrične grupe od R , tj. grupe svih permutacija skupa R .

Lema 1.3.13. Neka je R sistem korijena u vektorskom prostoru V s pripadajućom Weylovom grupom \mathcal{W} . Ako $\sigma \in O(V)$ ostavlja R invarijantnim, tj. vrijedi $\sigma(R) \subseteq R$, tada vrijedi

$$\sigma\sigma_x\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(x)}, \quad (1.7)$$

za sve $x \in R$ i vrijedi

$$\langle y, x \rangle = \langle \sigma(y), \sigma(x) \rangle, \quad (1.8)$$

za sve $x, y \in R$.

Dokaz leme se može pronaći u knjizi [4], Poglavlje 9. Iz ove leme slijedi direktno da je Weylova grupa \mathcal{W} pridružena sistemu korijena R normalna podgrupa grupe $Aut(R)$. Sada ćemo iskazati teorem o permutaciji baze b sistema korijena R od strane pridružene Weylove grupe \mathcal{W} , ali prije toga definirajmo pojam regularnosti.

Definicija 1.3.14. Neka je R sistem korijena na vektorskom prostoru V . Neka je P_x hiperravnina definirana kao (1.1) za neki $x \in R$. Za vektor $y \in V$ kažemo je **regularan** ako vrijedi

$$y \in V \setminus \bigcup_{x \in R} P_x. \quad (1.9)$$

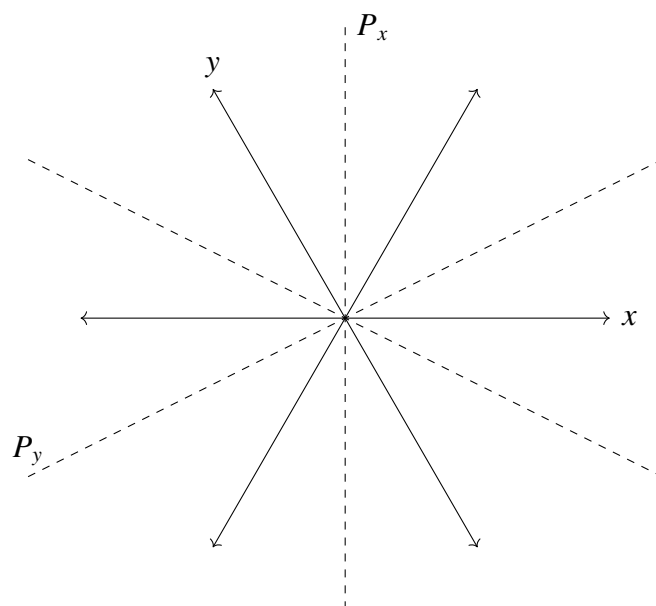
U suprotnom, za y kažemo da je **singularan**.

Teorem 1.3.15. Neka je b baza nekog sistema korijena R u vektorskom prostoru V . Tada vrijedi:

- (W1) Ako je $y \in V$ regularan, tada postoji preslikavanje $\sigma \in \mathcal{W}$ takvo da vrijedi $(\sigma(y) | x) > 0$ za svaki $x \in b$.
- (W2) Ako je b' neka druga baza od R , tada vrijedi $\sigma(b') = b$ za neki $\sigma \in \mathcal{W}$.
- (W3) Ako je x bilo koji korijen, tada postoji preslikavanje $\sigma \in \mathcal{W}$ takvo da $\sigma(x) \in b$.
- (W4) \mathcal{W} je generiran s σ_x , gdje je $x \in b$.
- (W5) Ako je $\sigma(b) = b$, gdje je $\sigma \in \mathcal{W}$, tada je $\sigma = 1$.

Dokaz teorema se nalazi u knjizi [4], Poglavlje 10.

Primjer 1.3.16. Promotrimo Sliku 1.3 na kojoj je prikazan sistem korijena A_2 . Pronađimo njegovu Weylovu grupu \mathcal{W} . Promatrajmo vektor x koji se nalazi unutar A_2 . Isprekidan pravac P_x predstavljat će hiperravninu definiranu kao u (1.1). Tada je ortogonalna refleksija σ_x , po definiciji, unutar Weylove grupe \mathcal{W} . Ako promatramo vektor y danog sistema korijena, tada će njemu pripadajuća hiperravnina biti P_y i pripadajuća ortogonalna refleksija σ_y . Preslikavanje σ_y će također biti u \mathcal{W} . Može se dokazati da će i Weylova grupa \mathcal{W} imati šest elemenata.



Slika 1.3: Slika prikazuje sistem korijena A_2 te šest mogućih hiperravnina koje ovise o izboru korijena.

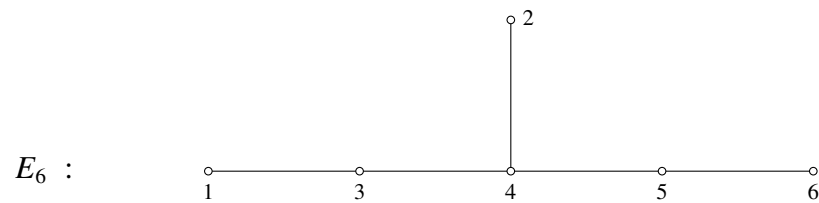
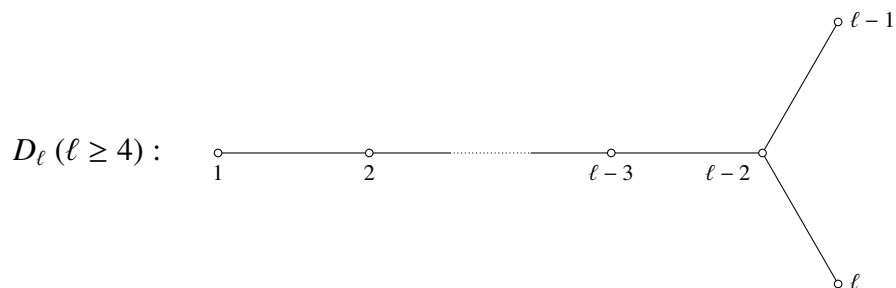
Poglavlje 2

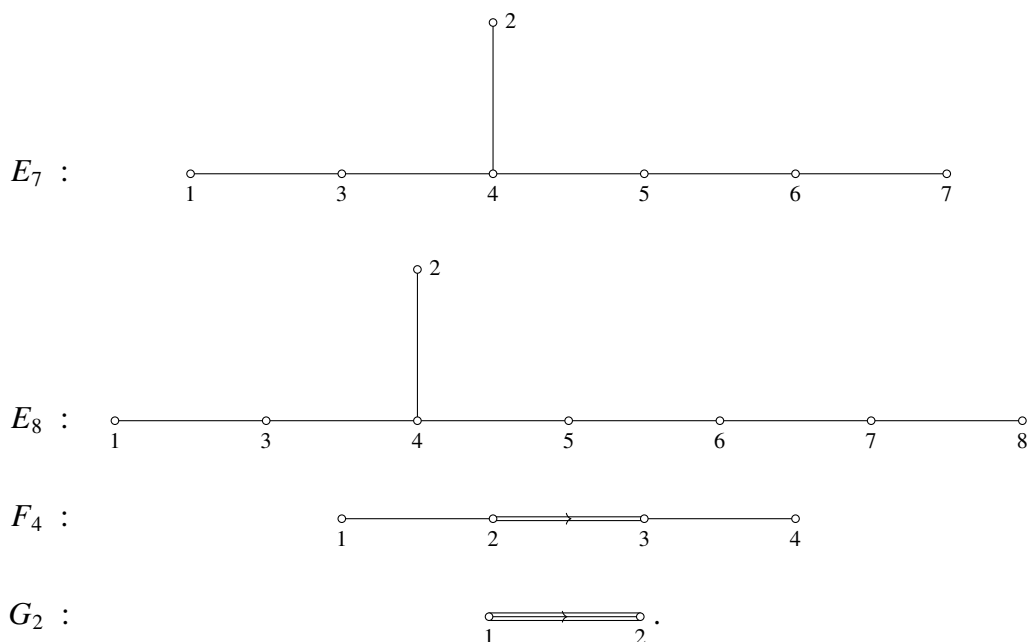
Klasifikacija sistema korijena

2.1 Teorem o klasifikaciji

U ovoj cjelini, slijedeći [4], iskazat ćemo i dokazati jedan od važnijih teorema ovog rada.

Teorem 2.1.1. Ako je R ireducibilan sistem korijena ranga ℓ , onda se on može prikazati jednim od sljedećih Dynkinovih dijagrama:





Restrikcija koju uvodimo na ℓ u tipovima A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ i D_ℓ su iz razloga da izbjegnemo pojavljivanje duplikata. Graf A_1 sadrži samo jedan vrh pa bismo ga mogli, u slučaju da nema restrikcije, označavati s B_1 ili čak C_1 . Graf B_2 označavali bi i s C_2 , dok bismo graf A_3 $\circ - \circ - \circ$ mogao označavati s D_3 .

Dokaz. Ideja dokaza je prvo klasificirati moguće Coxeterove grafove, a zatim promatrati pripadne Dynkinove dijagrame. Pretpostavke koje koristimo u dokazu teorema su sljedeće. Prvo, zanemarit ćemo duljinu korijena. Neka je V euklidski vektorski prostor (proizvoljne dimenzije) i neka je $\mathcal{U} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ n -torka jediničnih vektora, međusobno linearno nezavisnih, koji zadovoljavaju $(\varepsilon_i | \varepsilon_j) \leq 0$ za sve $i \neq j$ i $4(\varepsilon_i | \varepsilon_j)^2 = 0, 1, 2$ ili 3 za sve $i \neq j$. Takav skup ćemo nazvati **dopustiv** skup. Prisjetimo se kako smo definirali Coxeterov graf. Na isti način ćemo definirati graf Γ za \mathcal{U} . Naš je zadatak sada povezati sve moguće grafove s dopustivim skupovima vektora i to ćemo učiniti pomoću sljedećih 10 koraka kroz koje ćemo uvoditi i njihova svojstva.

(1) *Ako se neki ε_i ukloni iz n -torke \mathcal{U} , a preostali vektori i dalje tvore dopustiv skup, tada je graf tog novog skupa jednak grafu koji se dobije iz grafa Γ brisanjem odgovarajućeg vrha i svih spojnica povezanih za taj vrh.*

(2) *Broj parova vrhova, koji su povezani najmanje jednom spojnicom, strogo je manji od n .*

Neka je $\varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$. Budući da su ε_i linearno nezavisni vrijedi $\varepsilon \neq 0$, stoga imamo

$$0 < (\varepsilon | \varepsilon) = n + 2 \sum_{i < j} (\varepsilon_i | \varepsilon_j). \quad (2.1)$$

Neka je (i, j) par indeksa takav da $i \neq j$ i $(\varepsilon_i | \varepsilon_j) \neq 0$, drugim riječima, želimo da su dva vrha i i j povezani barem jednom spojnicom. Tada je $4(\varepsilon_i | \varepsilon_j)^2 = 1, 2$ ili 3 , a posebno vrijedi i $2(\varepsilon_i | \varepsilon_j) \leq -1$, odnosno

$$\sum_{i < j} (\varepsilon_i | \varepsilon_j) \leq -\frac{1}{2} \sum_{i < j} 1.$$

Promotrimo li sada ponovno nejednažbu (2.1) imamo sljedeće ekvivalentne nejednakosti:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i < j} (\varepsilon_i | \varepsilon_j) &> -n \\ \sum_{i < j} (\varepsilon_i | \varepsilon_j) &> -\frac{n}{2} \\ -\frac{1}{2} \sum_{i < j} 1 &> -\frac{n}{2} \\ \sum_{i < j} 1 &< n. \end{aligned}$$

Stoga, broj parova vrhova strogo manji od n .

(3) Γ ne sadrži cikluse.

Pretpostavimo suprotno, odnosno da graf Γ sadrži ciklus Γ' . Graf Γ' bi tada bio graf dopustivog podskupa \mathcal{U}' od \mathcal{U} . Broj parova vrhova grafa Γ bi u tom slučaju bio jednak broju vrhova grafa ($\text{Card } \mathcal{U}'$) pa u tom slučaju dolazimo do kontradikcije s (2).

(4) Svaki vrh može sadržavati maksimalno tri spojnice.

Neka je $\varepsilon \in \mathcal{U}$ i neka su η_1, \dots, η_k vektori iz \mathcal{U} takvi da su $\varepsilon, \eta_1, \dots, \eta_k$ različiti. Također neka su η_i spojeni jednom, dvjema ili trima spojnica s ε , odnosno $(\varepsilon | \eta_i) < 0$ za sve $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Uzmimo dva indeksa i i j iz skupa $\{1, 2, \dots, k\}$. Zbog (3) sa sigurnošću možemo reći da ne postoje vektori η_i i η_j koji su povezani međusobno, iz razloga što bi tada nastao ciklus, stoga vrijedi $(\eta_i | \eta_j) = 0$ za $i \neq j$. Budući da je \mathcal{U} linearno nezavisan skup, tada u linearnoj ljusci od $\{\varepsilon, \eta_1, \dots, \eta_k\}$ postoji jedinični vektor η_0 koji je

ortogonalan na η_1, \dots, η_k . Očito je da za η_0 vrijedi $(\varepsilon | \eta_0) \neq 0$.
Nadalje imamo sljedeći niz implikacija:

$$\begin{aligned} \varepsilon = \sum_{i=0}^k (\varepsilon | \eta_i) \eta_i &\Rightarrow (\varepsilon | \varepsilon) = \sum_{i=0}^k (\varepsilon | \eta_i)^2 \\ &\Rightarrow 1 = \sum_{i=0}^k (\varepsilon | \eta_i)^2 \\ &\Rightarrow 1 > \sum_{i=1}^k (\varepsilon | \eta_i)^2 \\ &\Rightarrow 4 > \sum_{i=1}^k 4(\varepsilon | \eta_i)^2. \end{aligned}$$

Budući da je broj spojnica između ε i η_i jednak broju $4(\varepsilon | \eta_i)^2$, zaključujemo da ih može biti najviše tri, što je i trebalo dokazati.

(5) Graf Γ nekog dopustivog skupa \mathcal{U} koji ima tri spojnice je jedinstven i to je ===== (G_2 kao Coxeterov graf).

To slijedi uspravo iz (4).

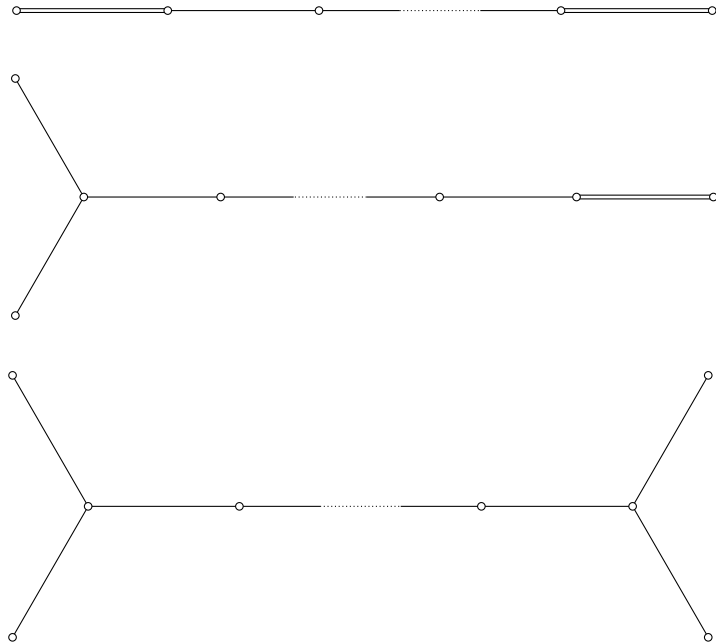
(6) Neka podskupu $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\} \subset \mathcal{U}$ odgovara podgraf $\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ$ (jednostavni lanac) grafa Γ . Ako je $\mathcal{U}' = (\mathcal{U} \setminus \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}) \cup \{\varepsilon\}$, gdje je $\varepsilon = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i$, tada je \mathcal{U}' dopustiv.

Linearna nezavisnost skupa \mathcal{U}' je očita. Iz pretpostavke i uz pomoć dokaza koraka (2) imamo

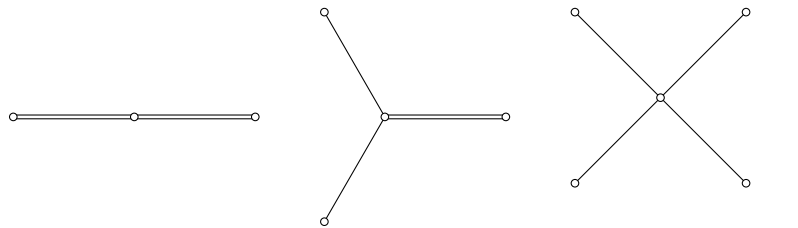
$$(\varepsilon | \varepsilon) = k + 2 \sum_{i < j} (\varepsilon_i | \varepsilon_j) = k - (k - 1) = 1.$$

Stoga je ε jedinični vektor. Svaki vektor $\eta \in \mathcal{U} \setminus \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ može biti povezan maksimalno s jednim od vektora $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$, jer bi u suprotnom napravio ciklus (što je u kontadikciji s korakom (3)). To povlači da je ili $(\eta | \varepsilon) = 0$ ili $(\eta | \varepsilon) = (\eta | \varepsilon_i)$ za $1 \leq i \leq k$. U oba slučaja vrijedi $4(\eta | \varepsilon)^2 = 0, 1, 2$ ili 3 . Odavde slijedi da je \mathcal{U}' dopustiv.

(7) Γ ne sadrži podgrafove sljedećeg oblika:

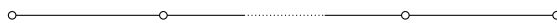


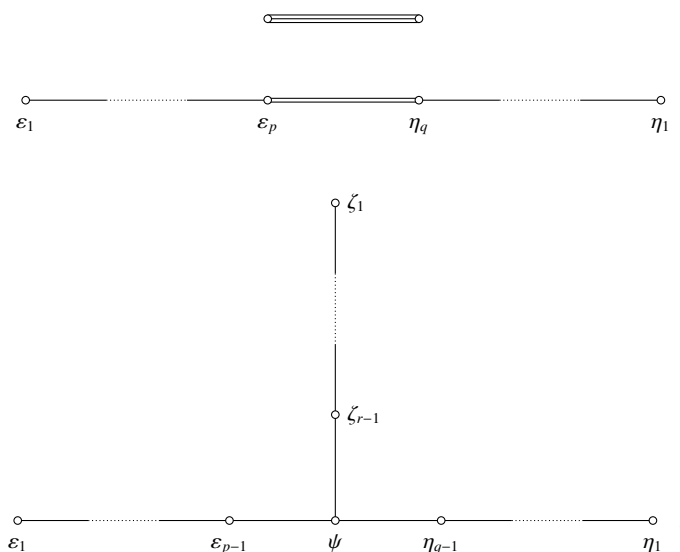
Pretpostavimo za svakog od gornja tri grafa da je on graf Γ nekog dopustivog skupa. Odmah je očito da zadovoljavaju svojstva (1), (2), (3) i (4). Međutim, ukoliko primijenimo korak (6) i jednostavan lanac zamijenimo s jednim vrhom, dobit ćemo redom sljedeće grafove:



Budući da u svakom grafu postoji jedan vrh koji sadrži četiri spojnice, očito je da takvi grafovi ne zadovoljavaju korak (4), čime je tvrdnja (7) dokazana.

(8) Povezani graf Γ nekog dopustivog skupa ima jedan od sljedećih oblika:

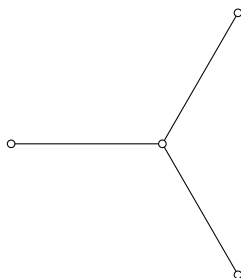




Doista, kako je pokazano u koraku (5), graf \equiv je jedini graf koji sadrži tri spojnice. Povezan graf koji sadrži više dvostrukih spojnica imao bi podgraf koji korak (7) zabranjuje pa je moguća samo jedna dvostruka spojnica unutar grafa. Nadalje, ako bi graf imao jednu dvostruku spojnicu tada ne bi mogao imati nijedan čvor, tj. vrh spojen s 3 različita vrha (Slika 2.1), jer bi to bilo u kontradikciji s korakom (7). Iz toga možemo zaključiti da je jedini mogući graf koji sadrži jednu dvostruku spojnicu upravo:

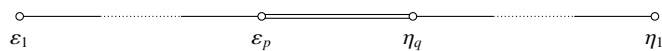


Naposlijetku, neka graf Γ sadrži samo jednostruke spojnice. Ukoliko taj graf ne sadrži neki čvor, tada je on jednostavan lanac (iz razloga što korakom (3) nisu dopušteni ciklusi). Posljednja mogućnost je da su sve spojnice jednostruke te da graf sadrži čvor. Jedini oblik grafa koja zadovoljava tu pretpostavku je opisan kao posljednji graf koraka (8).



Slika 2.1: Čvor

(9) Jedini povezani grafovi Γ oblika



su Coxeterov graf F_4



i Coxeterov graf $B_n(=C_n)$



Neka je $\varepsilon = \sum_{i=1}^p i\varepsilon_i$ i neka je $\eta = \sum_{i=1}^q i\eta_i$. Iz dokaza koraka (2) znamo da vrijedi $2(\varepsilon_i | \varepsilon_{i+1}) = -1 = 2(\eta_i | \eta_{i+1})$. Budući da su ostali parovi ortogonalni, vrijedi:

$$(\varepsilon | \varepsilon) = \sum_{i=1}^p i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) = \frac{p(p+1)}{2}, \quad (2.2)$$

$$(\eta | \eta) = \sum_{i=1}^q i^2 - \sum_{i=1}^{q-1} i(i+1) = \frac{q(q+1)}{2}. \quad (2.3)$$

Nadalje, znamo da vrijedi $4(\varepsilon_p | \eta_q)^2 = 2$, pomoću čega zaključujemo:

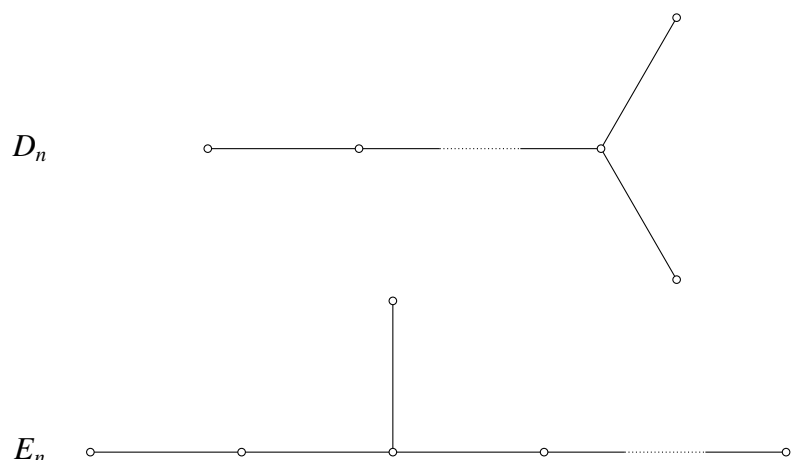
$$(\varepsilon | \eta)^2 = p^2 q^2 (\varepsilon_p | \eta_q)^2 = \frac{p^2 q^2}{2}. \quad (2.4)$$

Budući da su ε i η linearno nezavisni, pomoću Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakosti možemo iz jednakosti (2.2) (2.3) i (2.4) dobiti sljedeće ekvivalentne nejednakosti:

$$\begin{aligned} (\varepsilon | \eta)^2 &< (\varepsilon | \varepsilon)(\eta | \eta) \\ \frac{p^2 q^2}{2} &< \frac{p(p+1)}{2} \cdot \frac{q(q+1)}{2} \\ 2 &> (p-1)(q-1). \end{aligned}$$

Jedine mogućnosti su da je $p = q = 2$ (što je upravo F_4) te $p = 1$ za proizvoljan q , odnosno $q = 1$ za proizvoljan p (što su zapravo $B_n(=C_n)$).

(10) Povezan graf Γ četvrtog oblika grafa opisanog iz koraku (8) je ili Coxeterov graf D_n ili Coxeterov graf E_n ($n = 6, 7, 8$).



Neka su $\varepsilon = \sum_{i=1}^p i\varepsilon_i$, $\eta = \sum_{i=1}^q i\eta_i$ i $\zeta = \sum_{i=1}^r i\zeta_i$ (kao na Slici 2.2). Jasno je da su ε , η i ζ međusobno ortogonalni, linearno nezavisni vektori i da ψ nije u njihovoj ljusci. Neka su θ_1 , θ_2 i θ_3 kutovi između ψ i redom vektora ε , η i ζ . Slično kao u dokazu koraka (4) vrijedi nam $\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 < 1$. Koristeći jednakosti (2.2) (2.3) i (2.4), također imamo

$$(\varepsilon | \varepsilon) = \frac{p(p-1)}{2}, \quad (\eta | \eta) = \frac{q(q-1)}{2}, \quad (\zeta | \zeta) = \frac{r(r-1)}{2}. \quad (2.5)$$

Sada možemo izračunati $\cos^2 \theta_1$:

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta_1 &= \frac{(\varepsilon | \psi)^2}{(\varepsilon | \varepsilon)} (\psi | \psi) = \frac{(p-1)^2 (\varepsilon_{p-1} | \psi)^2}{(\varepsilon | \varepsilon)} = \frac{2(p-1)^2}{4p(p-1)} \\ &= \frac{p-1}{2p} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \end{aligned}$$

Na analogan način dobivamo:

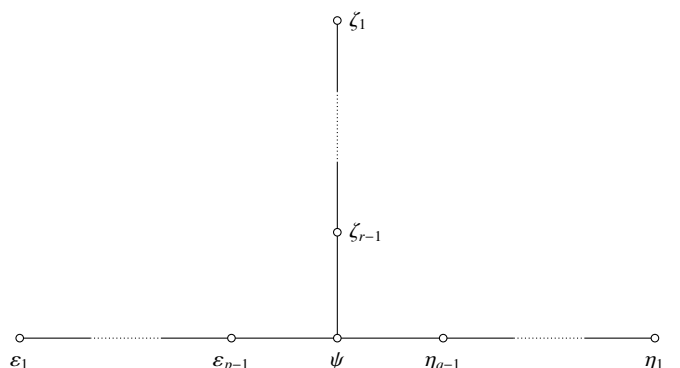
$$\cos^2 \theta_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q}\right), \quad \cos^2 \theta_3 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r}\right).$$

Zbrajajući tri potonje jednadžbe imamo:

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}\right) < 1 \quad (2.6)$$

ili jednostavnije zapisano

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1. \quad (2.7)$$



Slika 2.2

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}$. Naime, da vrijedi p , q ili $r=1$ tada bi imali graf oblika A_n . Nadalje, nejednadžba (2.7) implicira da vrijedi

$$\frac{3}{2} \geq \frac{3}{r} > 1$$

pa je stoga $r = 2$. Uvrstimo li potonji rezultat u jednadžbu (2.7) imamo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$ odnosno $\frac{2}{q} > \frac{1}{2}$ pa vrijedi $2 \leq q < 4$. U slučaju kada je $q = 2$ tada mora vrijediti $\frac{1}{p} > 0$ što vrijedi za svaki $p \geq 1$. U drugom slučaju kada je $q = 3$ vrijedi $\frac{1}{p} > \frac{1}{6}$ pa samim time i $p < 6$. Stoga, sve mogućnosti dane su u Tablici 2.1 . □

Ovi koraci nam pokazuju da su svi povezani grafovi dopustivih skupova nekog vektorskog prostora opisani Coxeterovim grafovima $A-G$. Drugim riječima, svaki Coxeterov graf nekog sistema korijena mora biti jedan od nabrojanih tipova. Kao što je rečeno na početku, Coxeterovi grafovi jedinstveno određuju Dynkinove dijagrame osim u slučajevima B_n i C_n . Stoga, iako je ovo jedan od važnijih teorema on će nam puno pomoći kod dokaza isto tako važnog Teorema 3.1.1. No prije toga vidjet ćemo i matrice naših tipova.

Coxeterov graf	p	q	r
D_n	$\in \mathbb{N}$	2	2
E_6	3	3	2
E_7	4	3	2
E_8	5	3	2

Tablica 2.1

2.2 Cartanova matrica tipa A-G

Nakon što smo klasificirali sve tipove povezanih grafova koji označavaju dopustive skupove u vektorskom prostoru, pokušat ćemo zapisati i njihove Cartanove matrice. Očito će biti riječ samo o kvadratnim matricama. Pomoći će nam i Primjer 1.2.5. Za razliku od dokaza Teorema 2.1.1, ovog puta nećemo ignorirati dimenziju vektorskog prostora V , već ćemo je označiti oznakom ℓ i ona će ujedno označavati i red kvadratne matrice. Za početak promotrimo tip A_ℓ . Coxeterov graf tipa A_ℓ je oblika

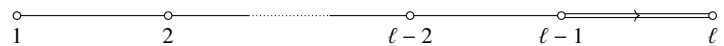


Vidimo da se on sastoji od ukupno ℓ vrhova povezanih jednostrukim spojnica, što nam daje do znanja da će kvadratna Cartanova matrica biti reda ℓ . To je i vidljivo na Slici 2.3 gdje je prikazana Cartanova matrica od A_ℓ .

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Slika 2.3: Cartanova matrica za tip A_ℓ

Promotrimo sada tip B_ℓ čiji je Dynkinov dijagram

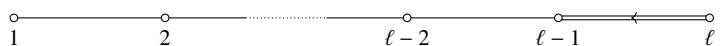


Slično kao kod tipa A_ℓ imamo ukupno ℓ vrhova koji su povezani jednostrukom spojnica, osim zadnja dva koja su povezani jednom dvostrukom spojnica. Već sada nam je jasno da će se matrica za tip A_ℓ i matrica za tip B_ℓ razlikovati samo u zadnjem bloku u kojem se nalazi kvadratna matrica reda $n = 2$ (Slika 2.4).

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Slika 2.4: Cartanova matrica za tip B_ℓ

Sada nam stiže tip C_ℓ čiji je Dynkinov dijagram

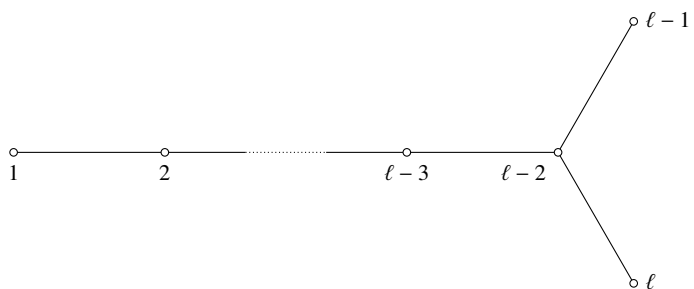


Primijetimo da za tipove B_ℓ i C_ℓ promatramo Dynkinove dijagrame umjesto Coxeterovih grafova. Već smo na par mjesta naglasili da su Coxeterovi grafovi tipa B_ℓ i tipa C_ℓ jednaki, dok se njihovi Dynkinovi dijagrami razlikuju po tome što se na dvostrukoj spojnici nalazi strelica okrenuta prema kraćem vektoru. Cartanova matrica za tip C_ℓ (Slika 2.5) je jako slična Cartanovoj matrici za tip B_ℓ i razlika je ponovno samo u kvadratnoj matrici reda 2 koja se nalazi u donjem desnom bloku.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Slika 2.5: Cartanova matrica za tip C_ℓ

Promotrimo sada tip D_ℓ čiji je graf

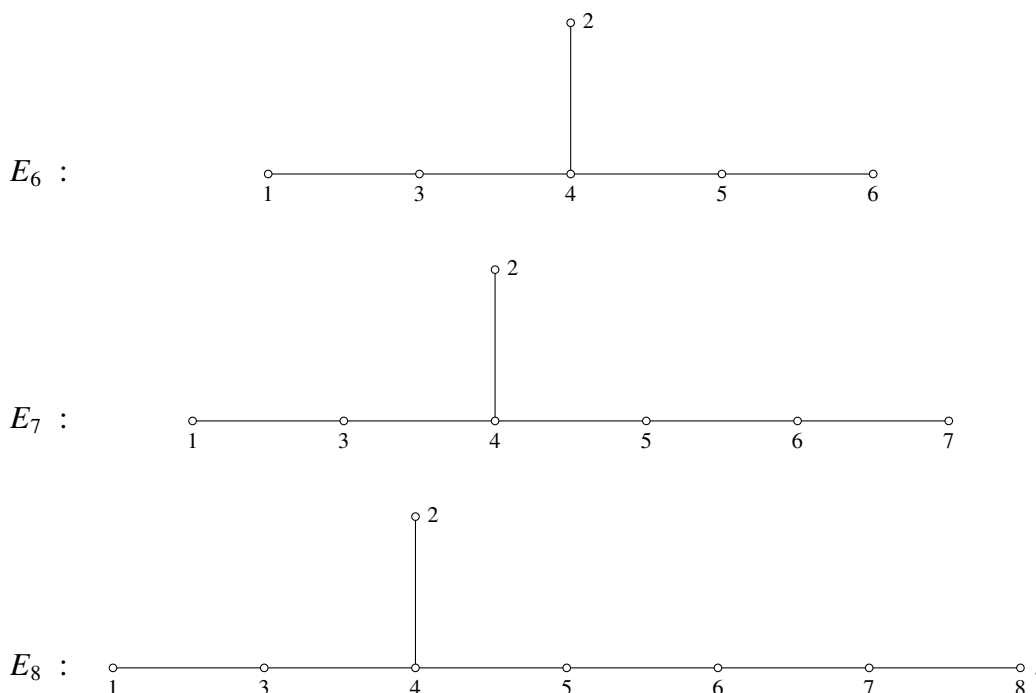


Za razliku od prethodna tri tipa, ovaj graf sadrži čvor. Zapišimo sada Cartanovu matricu za ovaj tip (Slika 2.6).

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Slika 2.6: Cartanova matrica za tip D_ℓ

Vidimo da će blok matrica reda 3 koja se nalazi u donjem desnom kutu Cartanove matrice D_ℓ predstavljati taj čvor. Čvor će se javiti i u sljedeća tri tipa, a to su E_6 , E_7 i E_8 , čiji su grafovi:



Cartanove matrice tipova E_6 i E_7 su prikazane na Slici 2.7, dok je Cartanova matrica od E_8 na Slici 2.8. Lako je za vidjeti da je Cartanova matrica tipa E_6 sadržana unutar Cartanove matrice od E_7 te da su obje sadržane unutar Cartanove matrice E_8 . Naravno, to smo i

$$\begin{array}{cc}
 \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) &
 \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \\
 \text{(a) } E_6 & \text{(b) } E_7
 \end{array}$$

Slika 2.7: Cartanove matrice za tipove E_6 i E_7 .

očekivali jer su u takvom odnosu i njihovi Dynkinovi dijagrami.

Na kraju nam ostaju još dva tipa čije smo matrice već spominjali i komentirali. To su tipovi F_4 (Primjer 1.2.5) i G_2 (Primjer 1.2.1).

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Slika 2.8: Cartanova matrica za tip E_8 .

Poglavlje 3

Konstrukcija sistema korijena

3.1 Konstrukcija tipova $A-G$

U prošlom poglavlju ustanovili smo sve moguće povezane Dynkinove dijagrame ireducibilnih sistema korijena. Još nam preostaje pokazati da doista svaki od tipova $A-G$ odgovara nekom sistemu korijena R . Sada ćemo prezentirati dokaz te tvrdnje slijedeći [4].

Neka smo u vektorskom prostoru \mathbb{R}^n i neka je definiran standardni skalarni produkt $(\cdot | \cdot)$ na \mathbb{R}^n . Neka su $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ vektori koji formiraju standardnu ortonormiranu bazu u \mathbb{R}^n takvi da ε_i ima i -tu koordinatu 1, a ostale 0. Aditivna podgrupa od \mathbb{R}^n koja je generirana tom bazom je izomorfna grupi \mathbb{Z}^n te ćemo je označavati s I . U svakom od sljedećih slučajeva kroz ovo poglavlje V će biti potprostor od \mathbb{R}^n . R će biti definiran kao skup svih vektora grupe I (ili neke podgrupe J od V) s unaprijed zadanom duljinom. Iz konstrukcije će biti jasno da je R konačan i ne sadrži 0 te da razapinje V pa samim time zadovoljava svojstvo (R1). Izbor duljina vektora će biti takav da vrijedi i svojstvo (R2). Svojstva (R3) i (R4) ćemo morati provjeravati posebno za svaki slučaj. Za (R3) bit će dovoljno provjeriti da refleksija σ_x , za svaki $x \in R$, preslikava R natrag u J , jer tada $\sigma_x(R)$ automatski sadrži vektore tražene duljine. Tada će (R3) slijediti iz (R4).

Osim toga, tamo gdje je to moguće u ovom trenutku, opisat ćemo Weylovu grupu pridruženu tom tipu.

Tip A_ℓ

Neka je $\ell \geq 1$. Pretpostavimo da je V ℓ -dimenzionalni potprostor od $\mathbb{R}^{\ell+1}$ ortogonalan u odnosu na vektor $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{\ell+1}$. Neka je

$$I = \{c_1\varepsilon_1 + \dots + c_{\ell+1}\varepsilon_{\ell+1} \in \mathbb{R}^{\ell+1} \mid c_1, \dots, c_{\ell+1} \in \mathbb{Z}\}$$

pa je I izomorfno $\mathbb{Z}^{\ell+1}$, odnosno $I \cong \mathbb{Z}^{\ell+1}$. Neka je $I' = I \cap V$ i neka je R skup svih vektora $x \in I'$ za koje vrijedi $(x | x) = 2$. Očito je tada $R = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq \ell, i \neq j\}$. Vektori $x_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ za $1 \leq i \leq \ell$ su nezavisni i vrijedi $\varepsilon_i - \varepsilon_j = (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) + \cdots + (\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j)$ za $i < j$, što nam pokazuje da su upravo x_i , za $1 \leq i \leq \ell$, baza za R .

Provjerimo da je R zaista sistem korijena. Očito je R konačan i razapinje cijeli V te ne sadrži 0 i time zadovoljava svojstvo (R1). Budući da je duljina svih vektora jednaka tada je također zadovoljeno i svojstvo (R2). Prije svojstva (R3) provjerimo svojstvo (R4). Neka su α i $\beta \in R$ takvi da su $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ i $\beta = \varepsilon_k - \varepsilon_s$ za neke $1 \leq i, j, k, s \leq \ell$ takvi da $i \neq j$ i $k \neq s$. Pokažimo da je $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$. Vrijedi:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = 2 \frac{(\beta | \alpha)}{(\alpha | \alpha)} = 2 \frac{(\varepsilon_k - \varepsilon_s | \varepsilon_i - \varepsilon_j)}{2} = (\varepsilon_k | \varepsilon_i) - (\varepsilon_s | \varepsilon_i) - (\varepsilon_k | \varepsilon_j) + (\varepsilon_s | \varepsilon_j).$$

Ukoliko je $k = i$ i $s \neq j$ tada je $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$. U slučaju da je $k = j$ i $s \neq i$ tada je također $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$. Ukoliko je $k = i$ i $s = j$ (ili analogno $k = j$ i $s = i$) onda je $\langle \alpha, \beta \rangle = 2$. Posljednji slučaj je da vrijedi $k \neq i \neq s \neq j$ gdje je tada $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. Time je dokazano da vrijedi i svojstvo (R4). Sada je za svojstvo (R3) dovoljno pokazati da za svaki $\alpha \in R$ refleksija σ_α preslikava R natrag u R . Neka su α i $\beta \in R$ definirani kao u potonjem slučaju. Tada vrijedi:

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \alpha, \beta \rangle \alpha.$$

Pomoću svojstva (R4) vrijedi nam da je $\langle \alpha, \beta \rangle = 0, 1$ ili 2 i time je pokazano da je $\sigma_\alpha(\beta)$ linearna kombinacija vektora iz R . Zanima nas još je li $\langle \sigma_\alpha(\beta), \sigma_\alpha(\beta) \rangle = 2$. Ukoliko je $k = i$ i $s \neq j$ tada je $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$ pa vrijedi

$$\sigma_\alpha(\beta) = \varepsilon_i - \varepsilon_s - (\varepsilon_i - \varepsilon_j) = \varepsilon_j - \varepsilon_s,$$

što je element od R pa je i $\langle \sigma_\alpha(\beta), \sigma_\alpha(\beta) \rangle = 2$. Analogno vrijedi i za slučaj $k = j$ i $s \neq i$. U slučaju $k = i$ i $s = j$ (ili analogno $k = j$ i $s = i$) vrijedi:

$$\sigma_\alpha(\beta) = \varepsilon_i - \varepsilon_j - 2(\varepsilon_i - \varepsilon_j) = \varepsilon_j - \varepsilon_i.$$

Slijedi da je i tada $\sigma_\alpha(\beta) \in R$. Posljednji slučaj, kada je $k \neq i \neq s \neq j$ je trivijalan budući da je tada $\sigma_\alpha(\beta) = \beta \in R$. To znači da za svaki $\alpha \in R$, σ_α preslikava R natrag u R . Time je pokazano da je R sistem korijena.

Pronađimo sada Weylovu grupu. Primijetimo da refleksija σ_{x_i} permutira vektore ε_i i ε_{i+1} dok ostali vektori ostaju nepromijenjeni. Stoga σ_{x_i} odgovara transpoziciji $(i, i+1)$ iz simetrične grupe $\mathcal{S}_{\ell+1}$. Kako te transpozicije generiraju $\mathcal{S}_{\ell+1}$ postoji prirodni izomorfizam između Weylove grupe \mathcal{W} i simetrične grupe $\mathcal{S}_{\ell+1}$.

Tip B_ℓ

Neka su $\ell \geq 2$ i $V = \mathbb{R}^\ell$. Nadalje, neka je

$$I = \{c_1\varepsilon_1 + \cdots + c_\ell\varepsilon_\ell \in \mathbb{R}^\ell \mid c_1, \dots, c_\ell \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^\ell$$

i neka je $R = \{x \in I \mid (x \mid x) = 1 \text{ ili } 2\}$. Lako je provjeriti da R uistinu sadrži sve vektore $\pm\varepsilon_i$ (koji su duljine 1) i sve vektore $\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)$, $i \neq j$ (koji su duljine $\sqrt{2}$). Sljedećih ℓ vektora su linearno nezavisni:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell, \varepsilon_\ell.$$

Kraće korijene možemo izraziti kao linearnu kombinaciju $\varepsilon_i = (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) + \cdots + (\varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell) + \varepsilon_\ell$. Na sličan način možemo izraziti i dulje korijene $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ i $\varepsilon_i + \varepsilon_j$.

Analogno, kao kod tipa A , pokaže se da je R sistem korijena. Weylova grupa \mathcal{W} djeluje na bazu $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell$ od V permutacijama uz promjenu predznaka nekih članova. Stoga, \mathcal{W} je izomorfna semidirektnom produktu grupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\ell$ i grupe permutacija \mathcal{S}_ℓ .

Tip C_ℓ

Neka je $\ell \geq 3$ i neka je $V = \mathbb{R}^\ell$. Slično kao kod tipa B_ℓ , možemo provjeriti da vektori $\pm 2\varepsilon_i$ zajedno sa svim vektorima $\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)$, za sve $i \neq j$, tvore sistem korijena za tip C_ℓ s bazom

$$\{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell, 2\varepsilon_\ell\}.$$

Analogno, kao kod tipa A , pokaže se da je R sistem korijena, dok je Weylova grupa za ovaj tip izomorfna Weylovoj grupi tipa B_ℓ .

Tip D_ℓ

Polazimo od toga da je $\ell \geq 4$ i $V = \mathbb{R}^\ell$. Neka je

$$I = \{c_1\varepsilon_1 + \cdots + c_\ell\varepsilon_\ell \in \mathbb{R}^\ell \mid c_1, \dots, c_\ell \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^\ell$$

i neka je $R = \{x \in I \mid (x \mid x) = 2\} = \{\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j), i \neq j\}$. Stoga, za bazu ćemo uzeti ℓ linearno nezavisne vektore

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell, \varepsilon_{\ell-1} + \varepsilon_\ell.$$

Analogno, kao kod tipa A , pokaže se da je R sistem korijena. Može se dokazati da je Weylova grupa \mathcal{W} izomorfna semidirektnom produktu grupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\ell-1}$ i grupe permutacija \mathcal{S}_ℓ .

Tipovi E_6, E_7 i E_8

Neka je $V = \mathbb{R}^8$ i neka je $I' = I \cap \mathbb{Z}((\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_8)/2)$, gdje je

$$I = \{c_1\varepsilon_1 + \dots + c_8\varepsilon_8 \in \mathbb{R}^8 \mid c_1, \dots, c_8 \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^8.$$

Neka je J podgrupa od I' definirana kao

$$J = \left\{ \sum_{i=1}^8 c_i e_i + \frac{c}{2}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_8) \mid c, c_i \in \mathbb{Z}, c + \sum_{i=1}^8 c_i \in 2\mathbb{Z} \right\}. \quad (3.1)$$

Nadalje, neka je $R = \{x \in J \mid (x \mid x) = 2\}$. Iz toga slijedi da je

$$R = \left\{ \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i, j \in \{1, 2, \dots, 8\}, i \neq j \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 (-1)^{k_i} \varepsilon_i \mid k_i \in \{0, 1\}, \sum_{i=1}^8 k_i \in 2\mathbb{Z} \right\}.$$

Jedna od mogućih baza skupa R je

$$\left\{ \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_8 - (\varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_7)), \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \varepsilon_3 - \varepsilon_2, \varepsilon_4 - \varepsilon_3, \varepsilon_5 - \varepsilon_4, \varepsilon_6 - \varepsilon_5, \varepsilon_7 - \varepsilon_6 \right\}.$$

Provjerimo da je R zaista sistem korijena. Očito je da je R konačan, razapinje cijeli V i ne sadrži 0 pa je zadovoljeno svojstvo (R1). Svi vektori su jednake duljine pa je trivijalno zadovoljeno i svojstvo (R2). Nadalje, budući da vrijedi

$$\langle \alpha, \beta \rangle = 2 \frac{(\alpha \mid \beta)}{(\beta \mid \beta)} = 2 \frac{(\alpha \mid \beta)}{2} = (\alpha \mid \beta) \quad (3.2)$$

dovoljno je pokazati da je upravo $(\alpha \mid \beta) \in \mathbb{Z}$. Budući da su α i $\beta \in R$ to očito povlači da su $\alpha, \beta \in J$ takvi da $(\alpha \mid \alpha) = (\beta \mid \beta) = 2$. Stoga postoje $c_i, c, d_i, d \in \mathbb{Z}$ za svaki $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$, gdje je $c + \sum_{i=1}^8 c_i \in 2\mathbb{Z}$ i $d + \sum_{i=1}^8 d_i \in 2\mathbb{Z}$, takvi da vrijedi

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^8 c_i e_i + \frac{c}{2}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_8) \\ \beta &= \sum_{i=1}^8 d_i e_i + \frac{d}{2}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_8). \end{aligned}$$

Iz toga slijedi

$$(\alpha \mid \beta) = c_1 d_1 + \dots + \frac{c}{2}(d_1 + \dots + d_8) + \frac{d}{2}(c_1 + \dots + c_8) + c_8 d_8 + \frac{c + d}{2}.$$

Budući da su svi pribrojnici iz \mathbb{Z} tada je i $(\alpha | \beta) \in \mathbb{Z}$, odnosno $\langle \alpha | \beta \rangle \in \mathbb{Z}$. Time je i svojstvo (R4) pokazano. Promotrimo sada (R3). Znamo da za neke α i $\beta \in R$ vrijedi

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - (\beta | \alpha) \alpha. \quad (3.3)$$

Očito je $\sigma_\alpha(\beta) \in J$ je linearna kombinacija dvaju vektora iz J pa je dovoljno pokazati da je $(\sigma_\alpha(\beta) | \sigma_\alpha(\beta)) = 2$. Računamo

$$\begin{aligned} (\sigma_\alpha(\beta) | \sigma_\alpha(\beta)) &= (\beta - (\beta | \alpha) \alpha | \beta - (\beta | \alpha) \alpha) \\ &= (\beta | \beta) - (\beta | \alpha)(\beta | \alpha) - (\beta | \alpha)(\alpha | \beta) + (\beta | \alpha)^2(\alpha | \alpha) \\ &= 2 - 2(\beta | \alpha)^2 + 2(\beta | \alpha)^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

pa slijedi i svojstvo (R3). R je sistem korijena.

Kod tipova E_6 i E_7 jedina je razlika u tome što se oni realiziraju na potprostorima $V' = \mathbb{R}^6$ i $V'' = \mathbb{R}^7$ od V .

Tip F_4

Neka je $V = \mathbb{R}^4$ i neka je $I' = I + \mathbb{Z}((\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)/2)$, gdje je

$$I = \{c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + c_3\varepsilon_3 + c_4\varepsilon_4 \in \mathbb{R}^4 \mid c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^4.$$

Neka je $R = \{x \in I' \mid (x | x) = 1 \text{ ili } 2\}$. Stoga, R sadrži sve vektore oblika $\pm\varepsilon_i$ i $\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)$ za sve $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, takvi da $i \neq j$. Na analogan način kao kod tipa E_8 pokaže se da je R zaista sistem korijena. Za bazu možemo uzeti skup

$$\{\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \varepsilon_4, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)\}.$$

Tip G_2

Neka je V potprostor od \mathbb{R}^3 ortogonalan na $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Neka je $I' = I \cap V$ gdje je

$$I = \{c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + c_3\varepsilon_3 \in \mathbb{R}^3 \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^3.$$

Definirajmo skup $R = \{x \in I' \mid (x | x) = 2 \text{ ili } 6\}$. Iz toga slijedi da je $R = \pm\{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_1 - \varepsilon_3, 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3, 2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3, 2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2\}$. Pokažimo da R zadovoljava sva svojstva sistema korijena. Svojstva (R1) i (R2) zadovoljena su trivijalno. Primijetimo da se

u skupu R nalaze dva osnovna tipa vektora $\beta_1 = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ i $\beta_2 = 2\varepsilon_i - \varepsilon_j - \varepsilon_k$ za $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ takve da $i \neq j \neq k$. Tada za svaki $\alpha \in R$ vrijedi:

$$\langle \alpha, \beta_1 \rangle = 2 \frac{(\alpha | \beta_1)}{(\beta_1 | \beta_1)} = 2 \frac{(\alpha | \beta_1)}{2} = (\alpha | \beta_1) \quad (3.4)$$

$$\langle \alpha, \beta_2 \rangle = 2 \frac{(\alpha | \beta_2)}{(\beta_2 | \beta_2)} = 2 \frac{(\alpha | \beta_2)}{6} = \frac{(\alpha | \beta_2)}{3}. \quad (3.5)$$

Vrijednost $(\alpha | \beta_1)$ može biti $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ pa iz toga i (3.4) slijedi $\langle \alpha, \beta_1 \rangle \in \mathbb{Z}$. Također, $(\alpha | \beta_2)$ može biti $-6, -3, 0, 3, 6$ pa iz toga i (3.5) slijedi $\langle \alpha, \beta_2 \rangle \in \mathbb{Z}$. Ovim je pokazano svojstvo (R4). Nadalje,

$$\sigma_{\beta_1}(\alpha) = \alpha - (\alpha | \beta_1)\beta_1 \quad (3.6)$$

$$\sigma_{\beta_2}(\alpha) = \alpha - (\alpha | \beta_2)\beta_2 \quad (3.7)$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned} (\sigma_{\beta_1}(\alpha) | \sigma_{\beta_1}(\alpha)) &= (\alpha | \alpha) - 2(\alpha | \beta_1) + (\alpha | \beta_1)^2(\beta_1 | \beta_1) \\ &= (\alpha | \alpha) - 2(\alpha | \beta_1) + 2(\alpha | \beta_1)^2 \\ &= (\alpha | \alpha) \\ (\sigma_{\beta_2}(\alpha) | \sigma_{\beta_2}(\alpha)) &= (\alpha | \alpha) - \frac{2(\alpha | \beta_2)}{3} + \frac{(\alpha | \beta_2)^2}{9}(\beta_2 | \beta_2) \\ &= (\alpha | \alpha) - \frac{2(\alpha | \beta_2)}{3} + \frac{6(\alpha | \beta_2)^2}{9} \\ &= (\alpha | \alpha). \end{aligned}$$

U oba slučaja je $(\alpha | \alpha) = 2$ ili 6 pa je zadovoljeno i svojstvo (R3).
Primjer neke baze od R koju možemo izabrati je

$$\{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\}.$$

Prethodnom diskusijom dokazali smo sljedeći teorem o konstrukciji tipova A-G.

Teorem 3.1.1. Za svaki Dynkinov dijagram (ili Cartanovu matricu) tipova A-G, postoji ireducibilni sistema korijena koji ima taj dijagram.

3.2 Liejeve algebre

Cilj ove točke je ilustrirati vezu između sistema korijena i prostih Liejevih algebri. Prateći [3], to ćemo učiniti na primjeru specijalne linearne Liejeve algebre $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.

Definicija 3.2.1. Neka je V vektorski prostor nad poljem \mathbb{C} . Neka je definirana operacija $\cdot : V \times V \rightarrow V$, $(x, y) \mapsto xy$, za $x, y \in V$. Takvu operaciju ćemo nazivati **bilinearna**, ako vrijede sljedeća dva svojstva:

$$x(y + z) = xy + xz, \quad (x + y)z = xz + yz, \quad \text{za sve } x, y, z \in V$$

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y), \quad \text{za sve } x, y \in V \text{ i za sve } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Prvo svojstvo nazivamo **biaditivnost** ili **obostranu distributivnost**, a drugo **bihomogenost**.

Definicija 3.2.2. Algebra nad poljem \mathbb{C} je vektorski prostor V nad poljem \mathbb{C} na komu je zadana bilinearna operacija $\cdot : V \times V \rightarrow V$. Nadalje, za algebru kažemo da je asocijativna ako je $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ za sve njene elemente x, y, z .

Definicija 3.2.3. Vektorski prostor V nad poljem \mathbb{C} s operacijom $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$, koju uobičajeno označavamo sa $(x, y) \mapsto [x, y]$ i nazivamo **komutator** od x i y gdje su $x, y \in V$, nazivamo **Liejeva algebra** nad \mathbb{C} ako vrijede sljedeći aksiomi:

(L1) Komutator je \mathbb{C} -bilinearna operacija.

(L2) $[x, x] = 0$ za sve $x \in V$.

(L3) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, za sve $x, y, z \in V$.

Svojstvo (L3) zove se **Jacobijev identitet**. Iz svojstva (L1) i (L2) vrijedi

$$0 = [x + y, x + y] = [x, y] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x] \quad (3.8)$$

iz čega slijedi $[x, y] = -[y, x]$.

Neka su H i K potprostori Liejeve algebre \mathfrak{g} . Tada definiramo $[H, K]$ kao potprostor razapet svim komutatorima $[x, y]$ gdje su $x \in H$ i $y \in K$.

Primjer 3.2.4. Neka je asocijativna algebra \mathfrak{B} vektorski prostor V nad poljem \mathbb{C} . Definiramo

$$[x, y] = xy - yx, \quad \text{za sve } x, y \in V. \quad (3.9)$$

Lako se može provjeriti da je \mathfrak{B} s ovako definiranom operacijom $[\cdot, \cdot]$ Liejeva algebra. Označavat ćemo je s $\text{Lie}(V)$.

Definicija 3.2.5. Neka je \mathfrak{g} neka Liejeva algebra nad \mathbb{C} . Podskup H od \mathfrak{g} nazivamo **podalgebra** od \mathfrak{g} ako je H potprostor od \mathfrak{g} i vrijedi $[H, H] \subseteq H$. Tada je H sama po sebi Liejeva algebra s istim operacijama kao i \mathfrak{g} .

Definicija 3.2.6. Neka je H podalgebra neke Liejeve algebre \mathfrak{g} . Neka je

$$N(H) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] \in H, \text{ za sve } h \in H\}. \quad (3.10)$$

$N(H)$ se tada zove **normalizator** od H u Liejevoj algebri \mathfrak{g} .

Napomena 3.2.7. Primijetimo da je $N(H)$ podalgebra od \mathfrak{g} . Neka su $x, y \in N(H)$. Tada vrijedi

$$[h, [x, y]] = [[y, h], x] + [[h, x], y] \in H.$$

Stoga $[x, y] \in N(H)$ i $N(H)$ je podalgebra.

Definicija 3.2.8. Podalgebra H od Liejeve algebre \mathfrak{g} naziva se **Cartanova podalgebra** ako je H nilpotentan, tj., vrijedi $H^k = 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$ i $H = N(H)$.

Neka su \mathfrak{g} i \mathfrak{h} dvije Liejeve algebre. Preslikavanje $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ nazivamo **homomorfizam Liejevih algebri** ako je θ linearan i vrijedi

$$\theta[x, y] = [\theta x, \theta y],$$

za sve $x, y \in \mathfrak{g}$. Ukoliko je to preslikavanje i bijektivno tada će se ono nazivati **izomorfizam Liejevih algebri**.

Neka je \mathfrak{g} Liejeva algebra i neka je asocijativna algebra \mathfrak{B} vektorski prostor V nad poljem \mathbb{C} . Tada ćemo preslikavanje $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow V$, koje je homomorfizam Liejeve algebre \mathfrak{g} u Liejevu algebru $\text{Lie}(V)$ zvati **Liejev morfizam** Liejeve algebre \mathfrak{g} u asocijativnu algebru \mathfrak{B} .

Primjer 3.2.9. Neka je V vektorski prostor nad poljem \mathbb{C} . Neka je $L(V)$ asocijativna algebra svih linearnih operatora na vektorskom prostoru V . Neka je \mathfrak{g} Liejeva algebra nad poljem \mathbb{C} . Liejev homomorfizam $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow L(V)$ zove se **reprezentacija** Liejeve algebre \mathfrak{g} na vektorskom prostoru V . Dakle, reprezentacija Liejeve algebre \mathfrak{g} nad poljem \mathbb{C} je preslikavanje π koje svakom elementu $x \in \mathfrak{g}$ pridružuje linearan operator $\pi(x) : V \rightarrow V$ ukoliko su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

$$\pi(x + y) = \pi(x) + \pi(y), \quad \pi(\lambda x) = \lambda \pi(x), \quad \pi([x, y]) = \pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x),$$

za sve $x, y \in \mathfrak{g}$ i za sve $\lambda \in \mathbb{C}$.

Primjer 3.2.10. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem \mathbb{C} i $n = \dim V$. Neka je $L(V)$ asocijativna algebra svih linearnih operatora na vektorskom prostoru V i neka je $M_n(\mathbb{C})$ skup svih kvadratnih matrica $n \times n$. Liejevu algebru $\text{Lie}(L(V))$ označavat ćemo sa $\mathfrak{gl}(V)$ i vrijedi $\dim \mathfrak{gl}(V) = n^2$. Za svaku bazu prostora V možemo konstruirati izomorfizam Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(V)$ na Liejevu algebru $\text{Lie}(M_n(\mathbb{C}))$. Liejevu algebru $\text{Lie}(M_n(\mathbb{C}))$ označavat ćemo s $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Definicija 3.2.11. Linearna Liejeva algebra je bilo koja Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ za konačnodimenzionalni vektorski prostor V .

Liejeva algebra $\mathfrak{gl}(V)$ zove se **opća linearna Liejeva algebra**.

Primjer 3.2.12. Promotrimo nama važan primjer linearne Liejeve algebre. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem \mathbb{C} . Neka $\mathfrak{sl}(V)$ označava skup svih linearnih operatora kojima je trag jednak nuli i analogno neka $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ označava skup svih matrica $n \times n$ traga 0. Budući da je trag komutatora dvaju operatora, odnosno, dviju matrica, uvijek jednak nuli $\mathfrak{sl}(V)$ je Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}(V)$ i $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ je Liejeva podalgebra od $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Liejeva algebra $\mathfrak{sl}(V)$ zove se **specijalna linearna Liejeva algebra**. Nadalje, vrijedi $\dim \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = n^2 - 1$. Pretpostavimo da je $n \geq 2$. Tada $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ ima bazu

$$\{E_{11} - E_{22}, E_{22} - E_{33}, \dots, E_{n-1,n-1} - E_{nn}, E_{ij} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\},$$

gdje su E_{ij} $n \times n$ nul matrice s jedinicom na poziciji (i, j) .

Primjer 3.2.13. Neka je \mathfrak{g} Liejeva algebra. Definiramo preslikavanje $\text{ad } x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ na sljedeći način:

$$(\text{ad } x)y = [x, y], \quad (3.11)$$

za sve $y \in \mathfrak{g}$. Tada imamo i

$$\text{ad } [x, y] = \text{ad } x \text{ ad } y - \text{ad } y \text{ ad } x. \quad (3.12)$$

Definicija 3.2.14. Neka je V vektorski prostor nad \mathbb{C} s bilinearnom operacijom $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ definiranom kao

$$(x, y) = \text{tr}(\text{ad } x \text{ ad } y). \quad (3.13)$$

Tako definiranu bilinearnu operaciju zvat ćemo **Killingova forma**.

Znamo da vrijedi $\text{ad } x : V \rightarrow V$ i $\text{ad } y : V \rightarrow V$ pa time i $\text{ad } x \text{ ad } y : V \rightarrow V$. Stoga vrijedi $\text{tr}(\text{ad } x \text{ ad } y) \in \mathbb{C}$.

Propozicija 3.2.1. *Neka je H skup svih dijagonalnih matrica u $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Tada je $\dim H = n - 1$ i H je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.*

Dokaz ove propozicije može se pronaći u knjizi [3], Poglavlje 4.

Podskup I Liejeve algebre L naziva se **ideal** od L ako je I potprostor od L i ako vrijedi $[I, L] \subset I$. Možemo primijetiti da je potonji uvjet jednak uvjetu $[L, I] \subset I$. Stoga, nema razlike između lijevih i desnih ideala u Liejevim algebra. Svaki ideal je **obostran**.

Definicija 3.2.15. Liejeva algebra \mathfrak{g} je **prosta** ako ona nije komutativna i ne sadrži nijedan netrivialni ideal.

Zahtjev nekomutativnosti znači da isključujemo slučajeve $\mathfrak{g} = \{0\}$ i $\dim \mathfrak{g} = 1$.

Napomena 3.2.16. Može se dokazati da je $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ prosta Liejeva algebra te da $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ nije prosta Liejeva algebra.

Neka je L prosta Liejeva algebra i neka je H Cartanova podalgebra od L . Tada imamo dekompoziciju algebre L kao

$$L = \bigoplus_{\lambda} L_{\lambda} \quad (3.14)$$

gdje je $L_{\lambda} = \{x \in L \mid (\text{ad } h)x = \lambda(h)x \text{ za sve } h \in H\}$ i gdje je λ element dualnog vektorskog prostora H^* (opisano u [3], Poglavlje 2).

Također znamo da vrijedi $L_0 = H$ (knjiga [3], Poglavlje 4). Linearni funkcionali λ na H takvi da je $\lambda \neq 0$ i $L_{\lambda} \neq 0$ se nazivaju **korijeni** od L u odnosu na H . Skup svih korijena od L u odnosu na H označavamo s R . Stoga imamo

$$L = H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R} L_{\alpha} \right). \quad (3.15)$$

Ovakva dekompozicija naziva se **Cartanova dekompozicija** od L u odnosu na H .

Propozicija 3.2.2. *Neka je H podalgebra dijagonalnih matrica u $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Tada je Cartanova dekompozicija od $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ u odnosu na H*

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = H \oplus \sum_{i \neq j} \mathbb{C}E_{ij}. \quad (3.16)$$

Dokaz potonje dvije propozicije može se pronaći u knjizi [3], Poglavlje 4.

Propozicija 3.2.3. Korijeni od $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ u odnosu na H su linearni funkcionali $H \rightarrow \mathbb{C}$ zadane

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \cdot & & 0 \\ & & \cdot & \\ 0 & & & \cdot \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_i - \lambda_j \quad i \neq j. \quad (3.17)$$

Dokaz. Slijedi direktno iz Cartanove dekompozicije dane u Propoziciji 3.2.2. □

Sada izračunajmo vrijednost Killingove forme na H .

Propozicija 3.2.4. Neka su $x, y \in H$ takvi da je $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_{ii}$ i $y = \sum_{i=1}^n \mu_i E_{ii}$. Tada je Killingova forma od x i y jednaka $2n \operatorname{tr}(xy)$.

Dokaz. Znamo da je Killingova forma od x i y jednaka $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)$. Budući da vrijedi

$$(\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y)E_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)(\mu_i - \mu_j)E_{ij} \text{ za } i \neq j \text{ i } (\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y)H = O$$

tada

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^n (\lambda_i - \lambda_j)(\mu_i - \mu_j).$$

Stoga vrijedi

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) &= \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\lambda_i - \lambda_j)(\mu_i - \mu_j) \\ &= \sum_{i,j} \lambda_i \mu_i + \sum_{i,j} \lambda_j \mu_j - \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j - \sum_{i,j} \lambda_j \mu_i \\ &= 2n \operatorname{tr}(xy) - \left(\sum_i \lambda_i \right) \left(\sum_j \mu_j \right) - \left(\sum_j \lambda_j \right) \left(\sum_i \mu_i \right) \\ &= 2n \operatorname{tr}(xy). \end{aligned}$$

Posljednja jednakost slijedi iz činjenice da vrijedi $\sum_i \lambda_i = \sum_i \mu_i = 0$. □

Bibliografija

- [1] Damir Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, 2008.
- [2] Nicolas Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras*, Springer-Verlag, 2002.
- [3] Roger Carter, *Lie Algebras of Finite and Affine Type*, Cambridge University Press, 2005.
- [4] James E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, 1972.
- [5] Hrvoje Kraljević, *Liejeve algebre*, skripta, Sveučilište u Zagrebu (2010), <https://web.math.pmf.unizg.hr/~hrk/nastava/2009-10/LA.pdf> (pristupljeno 21.3.2021.).
- [6] Boris Širola, *Algebarske strukture*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/alg/predavanja/ASpred.pdf> (pristupljeno 21.3.2021.).

Sažetak

U ovom radu promatrali smo sisteme korijena pridružene Liejevim algebrama. Na početku smo definirali što su to sistemi korijena i što je to ortogonalna refleksija pridružena elementima sistema korijena. Nakon toga definiramo i bazu sistema korijena. Ovime i definiranjem ireducibilnih sistema korijena dobili smo važan alat za proučavanje samih Liejevih algebri. Pokazali smo i dva osnovna načina zapisivanja korijena. Jedan od njih je grafički način pomoću Coxeterovih grafova, odnosno Dynkinovih dijagrama. Drugi način je pomoću takozvanih Cartanovih matrica. Nadalje, prelazimo na Weylove grupe koje definiramo kao podgrupe grupe svih automorfizama nekog sistema korijena generirane refleksijama sistema korijena. Sada nam se samo postavlja pitanje možemo li zapisati sve moguće sisteme korijena? Njihovom klasifikacijom i konstrukcijom dobivamo potvrđan odgovor. Kroz klasifikaciju, koja se sastoji od deset koraka, dolazimo do konačnog zaključka da je broj tipova sistema korijena konačan odnosno, drugim riječima, da možemo sve sisteme korijena klasificirati kao tipove $A-G$. Kroz konstrukciju zaključujemo da za svaki Dynkinov dijagram (ili Cartanovu matricu) tipova $A-G$ postoji ireducibilan sistem korijena koji ima upravo taj dijagram (ili matricu). Naposljetku, promatramo Liejeve algebre te ilustriramo vezu između njih i sistema korijena uz primjeru specijalne linearne Liejeve algebre $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.

Summary

In this thesis we considered the root systems associated with Lie algebras. At the beginning, we defined root systems and orthogonal reflection associated to the elements of the root system. After that, we define the basis of the root system. By doing this and defining the irreducible root systems, we established an important tool for studying Lie algebras. We also showed two basic methods of presentation of root systems. One of them is the graphical with Coxeter graphs and Dynkin diagrams. The other is with the so-called Cartan matrices. Furthermore, we move on to Weyl groups, which we define as the subgroups of the root system automorphism groups, generated by all reflections of the root system. Now the question is, can we write down all the possible root systems? By their classification and construction we get a positive answer. Through the classification which consists of ten steps, we come to the final conclusion that the number of root system types is finite or, in other words, that we can classify all root systems as types $A-G$. Through construction, we conclude that for each Dynkin diagram (or Cartan matrix) of types $A-G$ there is an irreducible root system that has exactly that diagram (or matrix). Finally, we observe Lie algebras and illustrate the connection between them and the root systems using the example of special linear Lie algebra $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.

Životopis

Josip Rebić rođen je u Splitu šestog dana mjeseca svibnja 1996. godine. Svoje djetinjstvo provodi u Imotskom gdje pohađa prvo vrtić, a zatim i Osnovnu školu "Stjepan Radić". Nakon završene osnovne škole upisuje Gimanziju dr. Mate Ujevića u Imotskom. Kroz osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje sudjeluje na natjecanjima iz hrvatskog jezika, fizike i matematike od kojih treba izdvojiti natjecanje "Klokan bez granica" na kojem sudjeluje u osnovnoj školi dva puta gdje oba puta biva u 10% najboljih te državno natjecanje iz matematike u srednjoj školi. Godine 2015., na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, upisuje preddiplomski studij Matematike imajući pri tome izravan upis. Studij završava 2018. godine te potom upisuje i diplomski studij Financijske i poslovne matematike na istom fakultetu.