Vrijednost slabe informacije u diskretnim modelima tržišta

Babić, Andrija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Andrija Babić

VRIJEDNOST SLABE INFORMACIJE U DISKRETNIM MODELIMA TRŽIŠTA

Diplomski rad

Zagreb, srpanj 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Andrija Babić

VRIJEDNOST SLABE INFORMACIJE U DISKRETNIM MODELIMA TRŽIŠTA

Diplomski rad

Voditeljica rada:
doc. dr. sc. Vanja Wagner

Zagreb, srpanj 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Jednoj ženi za sjećanje.

Sadržaj

Uvod

Cilj ovog rada je uvesti modele financijskog tržišta u diskretnom vremenu te objasniti vjerojatnosne metode za precizan matematički opis i razumijevanje tih modela. Promatrat ćemo jednostavne diskretne modele financijskog tržišta u kojima je poznata distribucija cijene dionice u budućnosti, odnosno slaba informacija. Prikazat ćemo metode optimizacije portfelja sačinjenog od dionice i to kroz očekivanu korisnost slabe informacije. Umjesto samo kroz dobit, vrijednost slabe informacije promatrat ćemo kroz razne funkcije korisnosti, čime je moguće uključiti različite stavove investitora prema riziku. Osnovni primjer diskretnog modela financijskog tržišta bit će potpuni binomni model uz standardnu pretpostavku o nepostojanju transakcijskih troškova.

Logični nastavak teorije koju ćemo obraditi u ovome radu je prelazak s diskretnog na neprekidno vrijeme, ali opseg ovog rada ne dopušta daljnju diskusiju. Ovaj model, iako izrazito pojednostavljen, koristan je jer pruža uvid u razmišljanje koje možemo koristiti i u stvarnome svijetu.

Rad je podijeljen u četiri poglavlja. Kroz prva dva poglavlja uvodimo teoriju potrebnu za razumijevanje diskretnog modela financijskog tržišta. Zatim u trećem poglavlju saznajemo kako maksimizirati funkcije korisnosti, a na samom kraju dolazimo do pojma koji je i tema ovog rada, a to je vrijednost slabe informacije.

Poglavlje 1

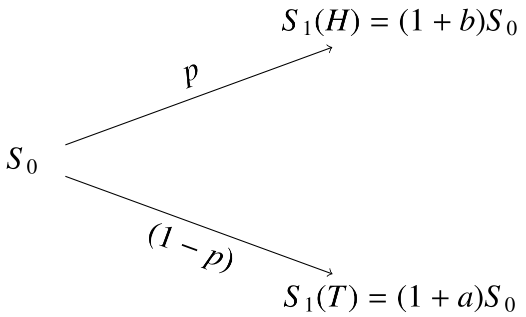
Osnovni pojmovi

Investitorom smatramo osobu koja ulaže u neku vrstu imovine, pritom nas ne zanima razlika između investitora i špekulanata niti između investiranja i kockanja. Investitor može svoj novac uložiti u banku i na osnovu toga zaraditi kamatu. U današnje vrijeme taj postupak je neisplativ zbog izrazito niskih kamatnih stopa, ako ne i negativnih. Za potrebe ovoga rada nećemo ulaziti u tu problematiku, već ćemo koristiti kamatne stope na razini nekih starijih vremena. Investitori će, osim depozita i oročenih štednji, ulagati i u obveznice, a oni skloniji riziku i u dionice. Postoje mnoge druge prilike za investiranje (*FX, alternatives, commodities* i slično), a mi ćemo dodatno uvesti *derivative*. Derivativi ili izvedenice (eng. *derivatives*) predstavljaju financijsku imovinu čija se vrijednost temelji na nekoj drugoj (eng. *underlying*) imovini. Nekoliko je osnovnih vrsta izvedenica, a to su: opcije, *forward*, *futures* i *swap* ugovor. *Forward* je ugovor u kojem se dvije strane obvezuju da će u budućnosti izvršiti neku transakciju po uvjetima dogovorenima u tom ugovoru. *Futures* je ništa drugo no *forward* na uređenom tržištu, dakle standardiziran instrument. Standardizacija za sobom povlači sigurnost, ali i gubitak *"tailor made"* dijela, zbog čega su *forwardi* i dalje atraktivan izbor. Opcija je ugovor čiji kupac ima pravo, ali ne i obvezu izvršiti ga. Postoje tri vrste opcija s obzirom na mogućnost izvršenja, dvije vrste s obzirom na pravo izvršenja te dvije strane. Američka opcija je specifična po tome što ju kupac ima pravo izvršiti u bilo kojem trenutku do njenog isteka. Europska opcija se može izvršiti samo u vrijeme isteka, a Bermudska opcija samo na unaprijed određene datume. Kupnjom *put* opcije imamo pravo, ali ne i obvezu prodati vrijednosnicu po unaprijed određenoj cijeni. Kupnjom *call* opcije imamo pravo, ali ne i obvezu kupiti vrijednosnicu po unaprijed određenoj cijeni. Kupac opcije je zauzeo *long* poziciju, a prodavač *short* poziciju.

Samo postojanje financijskih instrumenata nije dovoljno da bismo se njima bavili. Najvažniji dio investiranja je procjena vrijednosti imovine, a to je ujedno i najteži dio. Tržište se uglavnom dijeli na dvije strane, tehničare i fundamentaliste. Tehničari koriste *tehničku analizu*, tj. vjeruju da su sve relevantne informacije već ugrađene u cijenu instrumenata pa je dovoljno gledati graf cijene. Nasuprot njima su fundamentalisti koji koriste *fundamentalnu analizu*. Oni vjeruju da je cijena imovine jednaka diskontiranoj vrijednosti budućih novčanih tokova te imovine. Obje strane imaju prednosti i nedostatke. Tehničarima financijski izvještaji gotovo da nisu potrebni, dok opća definicija fundamentalista ne daje vrijednost imovini bez novčanih tokova, kao što su valute i robe (*commodities*). Ako investitor zna distribuciju cijene dionice u budućnosti i želi optimizirati svoju zaradu (tj. svoju korisnost), koja mu je financijska vrijednost informacije koju ima? Da bismo odgovorili na to pitanje, moramo se upoznati s teorijom obrađenom u [12]. Uključivanje funkcija korisnosti umjesto same zarade omogućava vrednovanje svakog investitora zasebno, jer svaki pojedinac ima svoju sklonost prema riziku.

Najprije ćemo uvesti osnovne pojmove, a za početak koristimo dvije vrste financijske imovine. Rizična imovina će biti dionica, a nerizična će biti novac (tj. depozit u banci) za koji dobivamo kamatu.

Primjer 1.0.1. *Pogledajmo klasični motivacijski primjer, bacanje novčića. Neka je* S_0 *početna cijena dionice, tj. cijena u trenutku* $t = 0$*. Neka su* $S_1(H)$ *i* $S_1(T)$ *pozitivne vrijednosti koje predstavljaju cijenu dionice u slučaju rasta i pada, respektivno (H predstavlja "glavu", a T "rep"). U ovom primjeru cijena dionice u potpunosti je određena ishodom bacanja nesimetričnog novčića, gdje je* $p = \mathbb{P}($*novčić je pao na "glavu"*$)$.



Definirali smo $(1 + b) = \frac{S_1(H)}{S_0}$ *i* $(1 + a) = \frac{S_1(T)}{S_0}$ *i bez smanjenja općenitosti pretpostavljamo* $a < b$*. U slučaju* $a = b$ *gubimo slučajnost što nam nije zanimljivo. Budući da bacanjem novčića možemo izgubiti imovinu, razmislit ćemo i o bezrizičnom ulaganju, a to je ulaganje u novčano tržište putem bankovnog depozita za koji dobivamo kamatu* r*. Nakon jedne vremenske jedinice imat ćemo* $(1 + r)$ *novčanih jedinica. U radu pretpostavljamo* $r \geq 0$*, iako je matematički točna i slabija pretpostavka* $r > -1$*. Kasnije ćemo zaključiti da, ukoliko želimo izbjeći arbitražu, mora vrijediti* $a < r < b$*.*

1.1 Funkcije korisnosti

U matematici i ekonomiji se koriste razne funkcije korisnosti, a uvodimo ih kako bismo izmjerili zadovoljstvo pojedinca. U ovome radu za funkcije korisnosti koristit ćemo se oznakom U.

Definicija 1.1.1. *Funkciju $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

- *stroga konkavnost, tj. za svake dvije točke $x, y \in \Omega$ i $\forall \lambda \in [0, 1]$ vrijedi da je*

$$U(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda U(x) + (1 - \lambda)U(y);$$

- *strogi rast, tj. ako je $x < y$, onda je $U(x) < U(y)$;*
- *neprekidna diferencijabilnost, tj. U je klase C^1;*
- $\lim_{x\to 0} U'(x) = +\infty$ *i* $\lim_{x\to\infty} U'(x) = 0$;

*zovemo **funkcija korisnosti**.*

Definicija 1.1.2. *Apsolutna odbojnost prema riziku definira se kao:*

$$A(x) = \frac{-U''(x)}{U'(x)},$$

a relativna odbojnost prema riziku kao:

$$R(x) = x \cdot A(x).$$

Ovi uvjeti su dovoljni za izražavanje sklonosti pojedinca prema riziku, zadovoljavaju *zakon opadajućih povrata* i garantiraju da povećanje zarade rezultira povećanjem korisnosti. Za početak ćemo promatrati tri različite funkcije korisnosti:

- Log korisnost: $U(x) = \ln(x), x > 0$. Ova korisnost ima konstantnu relativnu odbojnost prema riziku koja iznosi 1, što implicira da pojedinac uvijek ima izloženost proporcionalnu svojoj zaradi,

$$R(x) = x \cdot \frac{-\ln''(x)}{\ln'(x)} = x \cdot -\frac{-1/x^2}{1/x} = 1.$$

- *Power* korisnost: $U(x) = \frac{x^\lambda}{\lambda}, \lambda \in \langle -\infty, 1\rangle \backslash \{0\}$ i $x > 0$. Ovdje također imamo konstantnu relativnu odbojnost prema riziku koja iznosi 1-λ,

$$R(x) = x \cdot \frac{-(x^\lambda/\lambda)''}{(x^\lambda/\lambda)'} = x \cdot -\frac{(\lambda - 1) \cdot x^{\lambda-2}}{x^{\lambda-1}} = 1 - \lambda$$

Funkcija korisnosti odražava veću sklonost riziku od Log korisnosti za $0 < \lambda < 1$. U slučaju $-\infty < \lambda < 0$ radi se o manjoj sklonosti riziku, a za $\lambda \to -\infty$ pojedinac je sve manje sklon riziku.

- Eksponencijalna korisnost: $U(x) = -e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$ i $x \in \mathbb{R}$. Ova funkcija korisnosti ima konstantnu apsolutnu sklonost riziku jednaku a, dakle pojedinac će u svom ulaganju uvijek imati jednaku sklonost riziku u odnosu na svoju zaradu,

$$A(x) = -\frac{(-e^{-ax})''}{(-e^{-ax})'} = -\frac{-a^2 \cdot e^{-ax}}{a \cdot e^{-ax}} = a.$$

Iako ne zadovoljava zadnje svojstvo iz Definicije 1.1.1, radi se o zanimljivoj funkciji u klasi proširenih funkcija korisnosti pa ćemo ju i dalje promatrati.

Napomena 1.1.3. *Budući da želimo promatrati jednostavan model imat ćemo i jednostavne pretpostavke. Nalazit ćemo se na tržištu bez trenja. Pretpostavke su:*

- *ne postoje povlaštene informacije;*
- *nema transakcijskih troškova;*
- *financijsku imovinu možemo beskonačno dijeliti;*
- *sva imovina je likvidna (može se pretvoriti u novac u bilo kojem trenutku bez gubitka vrijednosti);*
- *kamatna stopa jednaka je za posuđivanje i ulaganje;*
- *trgujemo samo u diskretnim trenutcima $t \in \{0, 1, ..., T\}$;*
- *između svaka dva trenutka imamo samo jedan period.*

1.2 Opis modela financijskog tržišta

Za $i = 0, 1, \ldots, d$ i $t \in \mathbb{N}_0$ neka je S_t^i = cijena, odnosno vrijednost i-te financijske imovine u trenutku t, pri čemu je S_t^i je nenegativna slučajna varijabla, $\forall t \geq 1$ i $S_0^i \geq 0$ realan broj. Vektor $S_t = (S_t^0, S_t^1, S_t^2, \ldots, S_t^d)$ zovemo **sustav cijena u trenutku t**. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, Ω je prostor elementarnih događaja ω koji je konačan, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Elementarni događaj $\omega \in \Omega$ je zapravo jedno stanje ili scenarij koji se može dogoditi u budućnosti, a tada je cijena imovine u trenutku t upravo $S_t^i(\omega) \in \mathbb{R}_+$. Kako bi svi neprazni događaji bili mogući, pretpostavit ćemo $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$.

Dovoljno će biti pretpostaviti da imamo jednu nerizičnu imovinu, $(S_t^0)_{t\geq 0}$ takvu da vrijedi $S_0^0 = 1$ i $S_1^0 = 1 + r$, $r \geq 0$ konstanta. Ostali vrijednosni papiri $(S_t^i)_{t\geq 0}$ bit će rizični i smatrat ćemo ih nekonstantnim slučajnim varijablama.

Definicija 1.2.1. *Familiju σ-algebri $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_T\}$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zovemo* ***filtracija*** *ako vrijedi $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$.*

Definicija 1.2.2. *Slučajni proces $X = (X_t,\ t \in \{0, 1, ..., T\})$ je* ***adaptiran*** *u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in \{0, 1, ..., T\})$ ako je za svaki $t = 0, 1, \ldots, T$ slučajna varijabla X_t izmjeriva u odnosu na $\sigma - algebru$ $\mathcal{F}_t$.*

Definicija 1.2.3. *Slučajni proces $X = (X_t,\ t \in \{0, 1, ..., T\})$ je* ***predvidiv*** *u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in \{0, 1, ..., T\})$ ako je za sve $t \in \{1, ..., T\}$ slučajna varijabla X_t izmjeriva u odnosu na $\sigma - algebru$ $\mathcal{F}_{t-1}$, te ako je X_0 izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_0$.*

Definicija 1.2.4. ***Strategija trgovanja*** *(dinamički portfelj) je predvidiv slučajni proces $\phi = \left(\left(\phi_t^0, \phi_t^1, \ldots, \phi_t^d\right),\quad t = 1, 2, \ldots, T\right)$ s vrijednostima u $\mathbb{R}^{d+1}$.* ***Vrijednost portfelja*** *u trenutku $t = 1, 2, \ldots, T$ je slučajna varijabla:*

$$V_t\left(\phi\right) = \phi_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^{d} \phi_t^i S_t^i.$$

Diskontirana vrijednost portfelja *u trenutku $t = 1, 2, \ldots, T$ je slučajna varijabla:*

$$\tilde{V}_t\left(\phi\right) = \phi_t \cdot \tilde{S}_t,$$

gdje je $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{(1+r)^t}$. Strategija ϕ je ***samofinancirajuća*** *ako $\forall t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ vrijedi*

$$\phi_t \cdot S_t = \phi_{t+1} \cdot S_t.$$

Napomena 1.2.5. *Posljednju jednakost možemo zapisati i kao:*

$$\phi_{t+1} \cdot (S_{t+1} - S_t) = \phi_{t+1} \cdot S_{t+1} - \phi_t \cdot S_t = V_{t+1}\left(\phi\right) - V_t\left(\phi\right).$$

Razliku cijena financijskih imovina između bilo koja dva trenutka $t-1$ i t, $(t > 1)$ označavamo s:

$$\Delta S_t = S_t - S_{t-1}, \quad t \leq T.$$

Definicija 1.2.6. *Strategija ϕ je dopustiva ako je samofinancirajuća i za sve $t \in \{0, 1, ..., T\}$ vrijedi $V_t(\phi) \geq 0$.*

Definicija 1.2.7. *Portfelj ϕ naziva se* ***arbitraža*** *ako vrijedi $\phi \cdot S_0 = 0, \quad \phi \cdot S_1 \geq 0, \quad \mathbb{P}$-gotovo sigurno i $\mathbb{P}[\phi \cdot S_1 > 0] > 0$.*

Ovakvim definiranjem dopuštamo i *short sale*, tj. $\phi^i < 0$ predstavlja posuđivanje $|\phi^i|$ novčanih jedinica (u svrhu kupnje korištenjem poluge[1] kupnje vrijednosnih papira).
Cilj investiranja je, uz danu razinu rizika, ostvariti najveći mogući prinos. Prirodno se javlja ideja o mogućoj bezrizičnoj zaradi. Takvu zaradu zvat ćemo *arbitraža*. Dakle, radi se o vrsti ulaganja u kojoj nam je povrat uloženih sredstava zagarantiran, uz mogućnost zarade.

Primjer 1.2.8. *Nalazimo se u jednoperiodnom binomnom modelu gdje je pozitivna vjerojatnost događaja H i T. Pokazat ćemo da, uz uvjet $0 < a < r < b$, model ne dopušta arbitražu. Odnosno, ako je $V_0 = 0 \quad$ i*

$$V_1 = \phi^1 S_1 + (1+r)(V_0 - \phi^1 S_0),$$

tada V_1 ne može biti strogo pozitivna slučajna varijabla s pozitivnom vjerojatnosti, osim ako je V_1 strogo negativna s pozitivnom vjerojatnosti, bez obzira na izbor ϕ^1.

Pretpostavili smo samo dva moguća stanja u trenutku t=1, a to su H i T. Uvjet zadatka se može zapisati kao:

$$V_1(H) > 0 \Rightarrow V_1(T) < 0 \ \ i \ \ V_1(T) > 0 \Rightarrow V_1(H) < 0.$$

Zanima nas samo $V_0 = 0$, ali dokazat ćemo općenitiju tvrdnju, $V_0 \geq 0$

$$V_1(H) > (1+r)V_0 \Rightarrow V_1(T) < (1+r)V_0 \ i \ V_1(T) > (1+r)V_0 \Rightarrow V_1(H) < (1+r)V_0.$$

Za formalni dokaz možemo zapisati V_1 kao:

$$V_1 = \phi^1 S_0 \left(\frac{S_1 - S_0}{S_0} - r \right) + (1+r)V_0.$$

Slijedi:

$$V_1(H) - (1+r)V_0 = \phi^1 S_0 (b - r)$$

i

$$V_1(T) - (1+r)V_0 = \phi^1 S_0 (a - r).$$

Uz uvjet $a < r < b$, izraz $S_0(b-r)$ je pozitivan, a $S_0(a-r)$ je negativan. Dakle,

$$V_1(H) > (1+r)V_0 \Rightarrow \phi^1 > 0 \Rightarrow V_1(T) < (1+r)V_0$$

i

$$V_1(T) > (1+r)V_0 \Rightarrow \phi^1 < 0 \Rightarrow V_1(H) < (1+r)V_0.$$

[1] *Leverage* = korištenje poluge, tj. kupovina posuđenim sredstvima radi ostvarivanja većeg prinosa, rizik je također veći.

Poglavlje 2

Martingali

Definicija 2.0.1. *Uvjetno očekivanje slučajne varijable* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *u odnosu na događaj* A *za koji je* $\mathbb{P}(A) \geq 0$, *je očekivanje od* X *s obzirom na (uvjetnu) vjerojatnost* $\mathbb{P}(\cdot|A)$, *odnosno*

$$\mathbb{E}[X|A] = \frac{\mathbb{E}[X 1_A]}{\mathbb{P}(A)}.$$

Formalno, neka je $\mathcal{G}$ σ*-algebra sadržana u* $\mathcal{F}$. ***Uvjetno očekivanje od X s obzirom na*** $\mathcal{G}$ *je* $\mathcal{G}$*-izmjeriva slučajna varijabla* $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ *takva da* $\forall A \in \mathcal{G}$ *vrijedi:*

$$\mathbb{E}[1_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[1_A X].$$

Definicija 2.0.2. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor s filtracijom* $\mathcal{F}$. *Slučajni proces* $(X_t)_{t\geq 0}$ *je* ***martingal*** *ako vrijedi:*

(i) $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$, $\forall\ t \geq 0$,

(ii) X_t *je* $\mathcal{F}_t$*-izmjeriva slučajna varijabla,*

(iii) $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_m] = X_m$, $\forall m \leq t$.

Napomena 2.0.3. *(iii) je ekvivalentno s:*

$$\mathbb{E}[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = X_t.$$

Dodatno, definiramo ***supermartingal*** *(**submartingal**) ako u (iii) vrijedi znak nejednakosti* $\leq$ $(\geq)$.

Propozicija 2.0.4. *[12] Adaptiran niz slučajnih varijabli M=* $(M_t, t \in \{0, 1, ..., T\})$ *je martingal ako i samo ako za svaki predvidiv niz slučajnih varijabli H=*$(H_t, t \in \{0, 1, ..., T\})$ *vrijedi:*

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{t-1} H_i \Delta M_i\Big] = 0.$$

U tom slučaju je proces $I = (I_t : t \in \{0, 1, ..., T\})$ *definiran s* $I_t = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{t-1} H_i \Delta M_i\Big]$ *martingal.*

2.1 Osnovna svojstva uvjetnog očekivanja

Teorem 2.1.1. *Neka je X slučajna varijabla,* $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ σ*-podalgebre od* $\mathcal{F}$*. Tada vrijedi:*

1. *Ako je Y verzija od* $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$*, vrijedi* $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X]$.
2. *Ako je X* $\mathcal{G}$*-izmjeriva, onda je* $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$ *gotovo sigurno.*
3. $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ *je gotovo sigurno linearno u X.*
4. *Ako je* $X \geq 0$*, onda je* $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$.
5. *Ako je* $\mathcal{H}$ σ*-podalgebra od* $\mathcal{G}$*, onda je* $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$ *gotovo sigurno.*
6. *Ako je Z* $\mathcal{G}$*-izmjeriva i ograničena slučajna varijabla, onda je* $\mathbb{E}[ZX|\mathcal{G}] = Z\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ *gotovo sigurno.*
7. *Ako je* $\mathcal{H}$ *nezavisno od* $\sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$*, onda je* $\mathbb{E}[X|\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ *gotovo sigurno. Ako je X nezavisno od* $\mathcal{H}$*, onda je* $\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X]$ *gotovo sigurno.*

Teorem 2.1.2. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor. Neka je* $(Y_t)_{t\geq 1}$ *niz slučajnih varijabli i neka je* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ*-podalgebra od* $\mathcal{F}$*. Tada vrijedi:*

(i) *(*Monotona konvergencija*) Neka je* $(Y_t)_{t\geq 1}$ *rastući niz pozitivnih slučajnih varijabli takvih da* $\lim_{t\to\infty} Y_t = Y$ *g.s. Tada vrijedi:*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[Y_t \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}].$$

(ii) (Fatouova lema) *Neka je* $(Y_t)_{t\geq 1}$ *niz pozitivnih slučajnih varijabli, tada vrijedi:*

$$\mathbb{E}[\liminf_t Y_t \mid \mathcal{G}] \leq \liminf_t \mathbb{E}[Y_t \mid \mathcal{G}].$$

(iii) (Dominirana konvergencija) *Neka je* $Y_t \xrightarrow{t\to\infty} Y$ *g.s. i neka postoji* $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *takav da je* $|Y_t| \leq Z$, $\forall t$. *Tada vrijedi:*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[Y_t \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}].$$

Teorem 2.1.3. *Neka je* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T)$ *filtracija,* X *i* Y $\mathcal{F}_T$*-izmjerive slučajne varijable,* $\mathbb{E}_t[X] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]$ *i* $\mathbb{E}_A[X] = \mathbb{E}[X|A], A \in \mathcal{F}_t$. *Tada vrijede sljedeća svojstva:*
(i) Linearnost uvjetnog očekivanja. $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

$$\mathbb{E}_t[c_1 X + c_2 Y] = c_1 \mathbb{E}_t[X] + c_2 \mathbb{E}_t[Y].$$

(ii) *Ako je* X $\mathcal{F}_t$*-izmjeriva slučajna varijabla, tada vrijedi:*

$$\mathbb{E}_t[XY] = X \cdot \mathbb{E}_t[Y].$$

(iii) Iterirano očekivanje. *Ako je* $0 \leq t \leq m \leq T$, *tada vrijedi:*

$$\mathbb{E}_t\left[\mathbb{E}_m[X]\right] = \mathbb{E}_t[X].$$

(iv) Nezavisnost. *Ako je slučajna varijabla* X *nezavisna od* $\mathcal{F}_t$, *tada vrijedi:*

$$\mathbb{E}_t[X] = \mathbb{E}X.$$

(v) Uvjetna Jensenova nejednakost. *Ako je* $\varphi(x)$ *konveksna funkcija varijable* x, *tada vrijedi:*

$$\mathbb{E}_t[\varphi(X)] \geq \varphi(\mathbb{E}_t[X]).$$

Primjer 2.1.4 (Simetrična slučajna šetnja)**.** *Bacamo simetričan novčić, svaki puta kada padne glava naš slučajni šetač napravi jedan korak naprijed, a kada padne pismo napravi jedan korak nazad. Označimo s* $X_j = 1$ *situaciju u kojoj je* j*-to bacanje rezultiralo glavom i* $X_j = -1$ *u slučaju pisma. Promatramo stohastički proces* $(M_t : t \leq 0)$ *definiran s* $M_0 = 0$ *i*

$$M_t = \sum_{j=1}^{t} X_j, \quad t \geq 1.$$

(i) Proces $(M_t\colon t \geq 0)$ *je martingal. Naime, iz Teorema 2.1.3 (iv) slijedi*

$$\mathbb{E}_t[M_{t+1}] = M_t + \mathbb{E}_t[X_{t+1}] = S_{t-1} M_t + \mathbb{E}[X_{t+1}] = M_t.$$

(ii) Neka je $\sigma > 0$ *konstanta i za* $t \geq 0$ *definiramo:*

$$Y_t = e^{\sigma M_t} \left(\frac{2}{e^{\sigma} + e^{-\sigma}} \right)^t.$$

Pokazat ćemo da je $(Y_t, t \geq 0)$ martingal. Iako simetrična slučajna šetnja M_t nema tendenciju (tj. očekivanje) rasta, geometrijska simetrična slučajna šetnja $e^{\sigma M_t}$ ipak ima. To je posljedica komponiranja martingala s konveksnom eksponencijalnom funkcijom [1]. *Da bismo opet dobili martingal, moramo diskontirati geometrijsku slučajnu šetnju diskontnim faktorom $\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}$, koji je strogo manji od 1 za $\sigma \neq 0$. Slijedi da je*

$$\mathbb{E}_t\left[\frac{Y_{t+1}}{Y_t}\right] = \mathbb{E}_t\left[e^{\sigma X_{t+1}}\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}\right] \overset{Tm2.1.3.(iv)}{=} \frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}\mathbb{E}\left[e^{\sigma X_{t+1}}\right] = 1.$$

Primjer 2.1.5 (Slučajni proces koji je martingal, ali nije Markovljev lanac)**.** *X_t je ishod $t-$tog bacanja novčića:*

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_t = H \\ -1, & \omega_t = T. \end{cases}$$

Pretpostavimo da je $\mathbb{P}(X_t = 1) = \mathbb{P}(X_t = -1) = \frac{1}{2}$. Uzmimo $Y_1 = X_1$ i $Y_{t+1} = Y_t + b_t(X_1, \cdots, X_t)X_{t+1}$, gdje je $b_t(\cdot)$ omeđena funkcija na $\{-1, 1\}^t$. Očito, $(Y_t)_{t\geq 1}$ je adaptiran slučajni proces i martingal:

$$\mathbb{E}_t[Y_{t+1} - Y_t] = b_t(X_1, \cdots, X_n)\mathbb{E}_t[X_{t+1}] = 0.$$

Za neku funkciju f, $\mathbb{E}_t[f(Y_{t+1})] = \frac{1}{2}[f(Y_t+b_t(X_1, \cdots, X_t))+f(Y_t-b_t(X_1, \cdots, X_t))]$. $\mathbb{E}_t[f(Y_{t+1})]$ mora ovisiti samo o Y_t jer b_t nisu specificirane funkcije. Dakle, općenito $(Y_t)_{t\geq 1}$ nije Markovljev lanac.

Napomena 2.1.6. *Ako shvatimo X_t kao rezultat t-te oklade, tada je Y_t stanje imovine u trenutku t. Funkcija b_t je ulog u $(t + 1)$-oj okladi i određujemo ga u skladu s prethodnim okladama.*

2.2 Martingalna mjera na financijskom tržištu i određivanje cijena vrijednosnica

Definicija 2.2.1. *Vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}^*$ na $(\Omega, \mathbb{F})$ zove se* ***martingalna mjera*** *ili* ***mjera neutralna na rizik****, ako $\forall t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ vrijedi:*

$$\mathbb{E}^*\left[\frac{S^i_{t+1}}{1+r}\right] = S^i_t, \quad i \in \{0, 1, ..., d\}.$$

Definicija 2.2.2. *Vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ je* ***ekvivalentna*** *s $\mathbb{P}$ i pišemo $\mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}$, ako $\forall A \in \mathcal{F}$ vrijedi:*

$$\mathbb{P}^*(A) = 0 \iff \mathbb{P}(A) = 0.$$

[1] Slijedi primjenom uvjetne Jensenove nejednakosti, Shreve, vježba 2.3.

Napomena 2.2.3. *Na diskretnom vjerojatnosnom prostoru* Ω *na kojem vrijedi* $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0, \quad \forall \omega \in \Omega$ *vrijedi:*

$$\mathbb{P}^* \approx \mathbb{P} \iff \mathbb{P}^*(\{\omega\}) > 0, \forall \omega \in \Omega.$$

Označimo s $\mathcal{P}$ familiju svih martingalnih mjera ekvivalentnih s $\mathbb{P}$, tj.:

$$\mathcal{P} = \{\mathbb{P}^* : \mathbb{P}^* \text{je martingalna mjera i } \mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}\}.$$

Teorem 2.2.4. ***1. fundamentalni teorem****[12, Teorem 1.6] Model tržišta ne dopušta arbitražu ako i samo ako je* $\mathcal{P} \neq \emptyset$*, tj. ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mjera.*

Kao što im ime govori, izvedenim vrijednosnicama vrijednost ovisi o nekoj drugoj financijskoj imovini. Isplata vrijednosti često ima nelinearnu ovisnost o primarnim imovinama $S^0, S^1, \ldots, S^d$.

Definicija 2.2.5. *Slučajni zahtjev je* $\mathcal{F}_T$*-izmjeriva slučajna varijabla C na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *takva da je:*

$$0 \leq C < \infty, \quad \mathbb{P} - g.s.$$

Slučajni zahtjev C zove se ***izvedenica*** *primarnih imovina s cijenama* $S^0, S^1, \ldots, S^d$ *ako je C funkcija od* S_t*, tj. ako postoji Borelova funkcija f:* $\mathbb{R}^{d+1} \to \langle 0, \infty \rangle$ *takva da je:*

$$C = f\left(S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^d\right).$$

U uvodu smo pojasnili *call* i *put* opcije, a sada ćemo ih i formalno zapisati.

Definicija 2.2.6. ***Europska*** **call** ***opcija*** *na i-tu financijsku imovinu s dospijećem T i cijenom izvršenja K definirana je s C=* $\left(S_T^i - K\right)^+$.
Europska **put** ***opcija*** *na i-tu financijsku imovinu s dospijećem T i cijenom izvršenja K definirana je s C=* $\left(K - S_T^i\right)^+$.

Napomena 2.2.7. *Primjećujemo da uvijek vrijedi:*

$$C^{\text{call}} - C^{\text{put}} = S_T^i - K.$$

Definicija 2.2.8. *Slučajni zahtjev C je* ***dostižan*** *ako postoji dopustiva strategija* ϕ *takva da je* $C = V_T(\phi)$*. Kažemo da strategija* ϕ *replicira C.*

Definicija 2.2.9. *Model tržišta bez arbitraže je* ***potpun*** *ako je svaki slučajni zahtjev dostižan.*

Teorem 2.2.10. ***Drugi fundamentalni teorem.***
Model tržišta bez arbitraže je potpun ako i samo ako postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera.

Za kraj iznosimo formulu po kojoj možemo računati cijenu europske call opcije u trenutku t. Detalji se mogu naći u [12]. Radi se o **Cox-Ross-Rubinsteinovom modelu** (CRR model), koji je zapravo diskretna verzija poznatog Black-Scholes-Mertonovog modela.

Propozicija 2.2.11. *CRR model ne dopušta arbitražu ako i samo ako vrijedi $a < r < b$. Ako je $a < r < b$, tada je CRR model potpun.*

Propozicija 2.2.12. *Neka je $c : \{0, 1, \ldots, T\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana formulom:*

$$c(t, x) = (1 + r)^{-(T-t)} \sum_{j=0}^{T-t} \binom{T - t}{j} (1 - p^*)^j (p^*)^{T-t-j} (x(1 + a)^j (1 + b)^{T-t-j} - K)^+.$$

Tada za cijenu europske call opcije vrijedi: $C_t = c(t, S_t),\ t \in \{0, 1, \ldots, T\}$, gdje je $p^* = \frac{r-a}{b-a} \in \langle 0, 1\rangle$. Posebno, u trenutku t=0 cijena europske call *opcije je:*

$$C_0 = c(0, S_0) = (1 + r)^{-T} \sum_{j=0}^{T} \binom{T}{j} (1 - p)^j (p)^{T-j} (x(1 + a)^j (1 + b)^{T-j} - K)^+.$$

2.3 Promjena mjere

Pogledajmo konačan skup stanja Ω i na njemu dvije vjerojatnosne mjere, $\mathbb{P}$ i $\tilde{\mathbb{P}}$, takve da za sve $\omega \in \Omega$ vrijedi $\mathbb{P}(\omega) > 0$ i $\tilde{\mathbb{P}}(\omega) > 0$. Mjere su ekvivalentne, ali razlikuju se u vjerojatnosti pojedinog elementarnog događaja.
Definiramo slučajnu varijablu Z koju zovemo *Radon-Nikodymova derivacija od $\tilde{\mathbb{P}}$ u odnosu na $\mathbb{P}$*:

$$Z(\omega) = \frac{\tilde{\mathbb{P}}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)}.$$

Teorem 2.3.1. *Vrijedi:*
(i) $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$;
(ii) $\mathbb{E}Z = 1$;
(iii) Za svaku slučajnu varijablu Y:

$$\tilde{\mathbb{E}}Y = \mathbb{E}[ZY].$$

Dokaz.
(i) Slijedi iz pretpostavke $\mathbb{P}(\omega) > 0$ i $\tilde{\mathbb{P}}(\omega) > 0$, $\forall\omega \in \Omega$.
(ii)

$$\mathbb{E}Z = \sum_{\omega\in\Omega} Z(\omega)\mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} \frac{\tilde{\mathbb{P}}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)}\mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} \tilde{\mathbb{P}}(\omega) = 1.$$

(iii)

$$\tilde{\mathbb{E}}Y = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\tilde{\mathbb{P}}(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\frac{\tilde{\mathbb{P}}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)}\mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} Z(\omega)Y(\omega)\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[ZY].$$

$\square$

Napomena 2.3.2. *Neka je $\mathbb{P}$ vjerojatnosna mjera na konačnom skupu stanja Ω. Dopuštamo $\mathbb{P}(\omega) = 0$, za neki $\omega \in \Omega$. Neka je Z slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ za koju vrijedi $\mathbb{P}(Z \geq 0) = 1$ i $\mathbb{E}Z = 1$. Za $\omega \in \Omega$, definiramo $\widetilde{\mathbb{P}}(\omega) = Z(\omega)\mathbb{P}(\omega)$, te za događaje $A \subset \Omega$, definiramo $\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \sum_{\omega\in A} \widetilde{\mathbb{P}}(\omega)$. Pokazujemo sljedeće:*

(i) $\widetilde{\mathbb{P}}$ je vjerojatnosna mjera, tj. $\widetilde{\mathbb{P}}(\Omega) = 1$.
$\widetilde{\mathbb{P}}(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} \widetilde{\mathbb{P}}(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} Z(\omega)\mathbb{P}(\omega) = E[Z] = 1.$

(ii) Ako je Y slučajna varijabla, tada vrijedi: $\widetilde{\mathbb{E}}Y = \mathbb{E}[ZY]$.
$\widetilde{\mathbb{E}}[Y] = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\widetilde{\mathbb{P}}(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)Z(\omega)\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[YZ].$

(iii) Ako je A događaj za koji vrijedi $\mathbb{P}(A) = 0$, tada također vrijedi: $\widetilde{\mathbb{P}}(A) = 0$.
$\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \sum_{\omega\in A} Z(\omega)\mathbb{P}(\omega)$. *Zbog* $\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\omega) = 0, \forall \omega \in A$. *Dakle,* $\widetilde{\mathbb{P}}(A) = 0$.

(iv) Pretpostavimo da je $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$. Ako je A događaj za koji vrijedi $\widetilde{\mathbb{P}}(A) = 0$, tada je $\mathbb{P}(A) = 0$.
Ako je $\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \sum_{\omega\in A} Z(\omega)\mathbb{P}(\omega) = 0$, *zbog* $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$, *možemo zaključiti* $\mathbb{P}(\omega) = 0, \forall \omega \in A$. *Dakle,* $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\omega) = 0$.

(v) Ako su $\mathbb{P}$ i $\widetilde{\mathbb{P}}$ ekvivalentne, tada imaju isti skup vjerojatnosti događaja jedan, tj. $\mathbb{P}(A) = 1 \iff \widetilde{\mathbb{P}}(A) = 1$.
$\mathbb{P}(A) = 1 \iff \mathbb{P}(A^c) = 0 \iff \widetilde{\mathbb{P}}(A^c) = 0 \iff \widetilde{\mathbb{P}}(A) = 1.$

(vi) Pronađimo primjer za koji vrijedi $\mathbb{P}(Z \geq 0) = 1$, ali $\mathbb{P}$ i $\widetilde{\mathbb{P}}$ nisu ekvivalentne.
Uzmimo ω_0 takav da vrijedi $0 < \mathbb{P}(\omega_0) < 1$. Definiramo:

$$Z(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \neq \omega_0, \\ \frac{1}{\mathbb{P}(\omega_0),} & \omega = \omega_0. \end{cases}$$

Tada je $\mathbb{P}(Z \geq 0) = 1$ *i* $\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{\mathbb{P}(\omega_0)} \cdot \mathbb{P}(\omega_0) = 1$. *Očito:*

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\Omega \setminus \{\omega_0\}) = \sum_{\omega\neq\omega_0} Z(\omega)\mathbb{P}(\omega) = 0.$$

Ali:

$$\mathbb{P}(\Omega \setminus \{\omega_0\}) = 1 - \mathbb{P}(\omega_0) > 0 \; zbog \; \mathbb{P}(\omega_0) < 1.$$

Dakle, $\mathbb{P}$ *i* $\widetilde{\mathbb{P}}$ *nisu ekvivalentne.*

U N-periodnom binomnom modelu s vjerojatnosnom mjerom $\mathbb{P}$ i mjerom neutralnom na rizik $\tilde{\mathbb{P}}$, neka je Z Radon-Nikodymova derivacija od $\tilde{\mathbb{P}}$ u odnosu na $\mathbb{P}$.
Označimo s $\#T(\omega_1 \dots \omega_N)$ broj ponavljanja glave na novčiću u N nezavisnih bacanja, analogno za pismo.

$$Z(\omega_1 \dots \omega_N) = \frac{\tilde{\mathbb{P}}(\omega_1 \dots \omega_N)}{\mathbb{P}(\omega_1 \dots \omega_N)} = \left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^{\#H(\omega_1 \dots \omega_N)} \left(\frac{\tilde{q}}{q}\right)^{\#T(\omega_1 \dots \omega_N)}.$$

Slučajnu varijablu *state price density* definiramo s

$$\xi(\omega) = \frac{Z(\omega)}{(1+r)^N}, \quad \omega \in \Omega.$$

Slučajnu varijablu $\xi(\omega)\mathbb{P}(\omega)$ zovemo *state price* u odnosu na $\omega \in \Omega$.
Primijetimo da je *state price* $\xi(\bar{\omega})\mathbb{P}(\bar{\omega})$ cijena imovine u trenutku 0 koja isplaćuje iznos 1 u vremenu N ako i samo ako se dogodi događaj $\bar{\omega}$.
U slučaju da imamo imovinu koja isplaćuje iznos različit od 1, možda i za više događaja ω, takvu imovinu možemo smatrati portfeljem imovina koje isplaćuju 1 u slučaju da je ispunjen jedinstveni ω, što se vidi iz:

$$V_0 = \tilde{\mathbb{E}} \frac{V_N}{(1+r)^N} = \mathbb{E}[\xi V_N] = \sum_{\omega \in \Omega} V_N(\omega)\xi(\omega)\mathbb{P}(\omega).$$

Teorem 2.3.3. *Nalazimo se u binomnom $N-$periodnom modelu kojeg smo uveli u poglavlju 1.2. Neka je $\phi = (\phi_n : n \in \{0, 1, ..., N-1\})$ adaptirani slučajni proces, $S_0 \in \mathbb{R}$ i slučajan proces $V = (V_t : t \in \{0, 1, ..., N\})$ zadan rekurzivno pomoću:*

$$V_{t+1} = \phi_t^1 S_{t+1} + (1+r)(V_t - \phi_t^1 S_t), t \in \{0, 1, ..., N-1\}.$$

Diskontirani slučajna varijabla $\frac{V_t}{(1+r)^t}, t \in \{0, 1, ..., N\}$ je $\tilde{\mathbb{P}} -$ martingal, odnosno

$$\frac{V_t}{(1+r)^t} = \tilde{\mathbb{E}}_t \left[\frac{V_{t+1}}{(1+r)^{t+1}} \right], \quad t \in \{0, 1, ..., N-1\}.$$

Korolar 2.3.4. *Uz pretpostavke Teorema 2.3.3. vrijedi:*

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{V_t}{(1+r)^t} \right] = V_0, \quad t \in \{0, 1, ..., N\}.$$

Dosad smo promatrali $\mathcal{F}_N$-izmjerivu slučajnu varijablu Z za koju vrijedi $\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t] = Z_t$. Sada želimo procijeniti Z koristeći informacije o bacanju novčića u trenutku $t < N$, a to ćemo napraviti pomoću nove slučajne varijable $\tilde{Z}$ koju uvodimo u nastavku.

Teorem 2.3.5. *Neka je Z slučajna varijabla u N-periodnom binomnom modelu. Definiramo:*

$$\tilde{Z}_t = \mathbb{E}_t[Z], \quad t \in \{0, 1, ..., N\}.$$

Tada je proces $\tilde{Z} = (\tilde{Z}_t : t \in \{0, 1, ..., N\})$ $\mathbb{P}$ *– martingal.*

Dokaz. Za $t \in \{0, 1, ..., N-1\}$, iterativnim korištenjem svojstva uvjetnog očekivanja dobivamo:

$$\mathbb{E}_t[Z_{t+1}] = \mathbb{E}_t[\mathbb{E}_{t+1}[Z]] = \mathbb{E}_t[Z] = Z_t.$$

□

Definicija 2.3.6. *Neka je Z Radon-Nikodymova derivacija od* $\tilde{\mathbb{P}}$ *u odnosu na* $\mathbb{P}$*. Proces* $(Z_t : t \in \{0, 1, ..., N\})$ *iz prošlog teorema zovemo proces Radon-Nikodymove derivacije od* $\tilde{\mathbb{P}}$ *u odnosu na* $\mathbb{P}$*.*

Poglavlje 3

Maksimizacija funkcija korisnosti

3.1 *Capital Asset Pricing* model

Dosad smo modelirali cijenu imovine tako da smo tražili cijenu koja ne dozvoljava arbitražu. Postoji i drugi način koji traži ravnotežu između ponude i potražnje među investitorima. Zadovoljstvo investitora i dalje mjerimo funkcijama korisnosti. Iako drugi način ne pruža opsežnu kvantitativnu analizu, važan je sa svoje kvalitativne strane. Postoje mnoge primjene jer nisu sva tržišta potpuna pa cijene ne možemo odrediti na klasičan način. U klasičnom načinu smo koristili dvije vjerojatnosne mjere, početnu i mjeru neutralnu na rizik. Kada računamo cijenu izvedenica dovoljna nam je samo mjera neutralna na rizik, iako nam je početna mjera korisna u dvije situacije, a to su upravljanje imovinom i upravljanje rizicima. *Asset management* traži kompromis između rizika i nagrade *(risk-reward trade-off)*, a za to nam mjera neutralna na rizik neće pomoći. Upravljanje rizicima traži stvarnu vjerojatnost nepovoljnog događaja, što također ne zahtijeva mjeru neutralnu na rizik.
Mogli bismo promatrati cijelu familiju funkcija korisnosti. Izaberimo $p < 1,\ p \neq 0$ $i\ c \in \mathbb{R}$ te definiramo

$$U_p(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}(x-c)^p, & x > c\ , \\ 0, & 0 < p < 1 \text{ i } x = c\ , \\ -\infty, & p < 0 \text{ i } x = c, \\ -\infty, & x < c. \end{cases}$$

Pogledajmo N-periodni binomni model kakav smo predstavili u prvom poglavlju. Za dani V_0, želimo pronaći portfelj $\phi = (\phi_n : n \in \{1, 2, ..., N-1\})$ koji maksimizira:

$$\mathbb{E}\Big[U(V_N)\Big],$$

uz danu jednadžbu:

$$V_{n+1} = \phi_n^1 S_{n+1} + (1+r)(V_n - \phi_n^1 S_n),\ n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}. \tag{3.1}$$

Napomena 3.1.1. *Umjesto da uvjet maksimizacije bude gornja jednadžba, mogli bismo postaviti drugi uvjet:*

$$\mathbb{E}^*\left[\frac{V_N}{(1+r)^N}\right] = V_0, \tag{3.2}$$

gdje je očekivanje u odnosu na mjeru neutralnu na rizik, iako ju nismo zahtijevali u samom iskazu problema pa bismo problem mogli preformulirati.

Za dani V_0, želimo pronaći V_N, vrijednost optimalnog portfelja u trenutku N, koja maksimizira

$$\mathbb{E}\Big[U(V_N)\Big],$$

uz uvjet (3.2). Sljedeća propozicija nas uvodi u postupak kojim ćemo biti u mogućnosti izračunati uvodni problem. Najprije ćemo naći slučajnu varijablu V_N koja maksimizira $\mathbb{E}\Big[U(V_N)\Big]$ uz uvjet (3.2), a nakon toga konstruirati portfelj s početnom vrijednošću V_0 i vrijednošću portfelja V_N u trenutku N.

Propozicija 3.1.2. *[9, Lema 3.3.4.] Pretpostavimo da je $\phi^* = (\phi^*_n : n \in \{1, 2, ..., N-1\})$ portfelj koji maksimizira $\mathbb{E}[U(V_N)]$ uz dani V_0^* te da je V_N^* vrijednost optimalnog portfelja u trenutku N. Tada je V_N^* rješenje problema iz Napomene 3.1.1.*
Dodatno, prepostavimo da je V_N^* rješenje problema Napomene 3.1.1. Tada postoji portfelj $\phi^* = (\phi^*_n : n \in \{1, 2, ..., N-1\})$ s početnim ulogom V_0^* koji u trenutku N ima vrijednost V_N^* i on je optimalan za $\mathbb{E}\left[U(V_N)\right]$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\phi^* = (\phi^*_n : n \in \{1, 2, ..., N-1\})$ portfelj koji maksimizira $\mathbb{E}\left[U(V_N)\right]$ s početnom vrijednošću V_0^* uz uvjet (3.1) te da je V_N^* vrijednost tog portfelja u trenutku N. Kako bismo pokazali da je V_N^* optimalan i u smislu Napomene 3.1.1., moramo se uvjeriti da zadovoljava uvjet (3.2) i da za svaki drugi V_N koji zadovoljava (3.2) vrijedi

$$\mathbb{E}\left[U(V_N)\right] \leq \mathbb{E}\left[U(V_N^*)\right]. \tag{3.3}$$

Jer je V_N^* vrijednost pretpostavljenog optimalnog portfelja ϕ^* u trenutku N, prema Korolaru 2.3.4. vrijedi (3.2). Neka je sada V_N neka druga slučajna varijabla koja zadovoljava (3.2). Možemo konstruirati portfelj $\phi = (\phi_n : n \in \{1, 2, ..., N-1\})$ s početnom vrijedošću V_0 i vrijednošću V_N u trenutku N. Jer je V_N^* optimalan portfelj, a V_N je neki drugi portfelj koji zadovoljava iste uvjete, mora vrijediti (3.3). Dakle, V_N^* je optimalan za $\mathbb{E}\left[U(V_N)\right]$. Za drugi dio pretpostavimo da je V_N^* optimalan za $\mathbb{E}\left[U(V_N)\right]$. Konstruirat ćemo portfelj $\phi^* = (\phi^*_n : n \in \{1, 2, ..., N-1\})$ uz početnu vrijednost V_0^* i vrijednost V_N^* u trenutku N. Neka je $\phi = (\phi_n : n \in \{1, 2, ..., N-1\})$ neki drugi portfelj uz početnu vrijednost V_0 i vrijednost V_N u trenutku N. Jer V_N zadovoljava (3.2) i jer je V_N^* optimalan za $\mathbb{E}\left[U(V_N)\right]$ vrijedi (3.3), čime je dokazana optimalnost od V_N^*. □

Imamo N bacanja novčića, dakle $M = 2^N$ mogućih ishoda ω koje označavamo s:

$$\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^M.$$

Primijetimo da je ω^m cijeli niz novčića, a ne m-ti rezultat jednog bacanja. Podsjetimo se, ranije smo definirali *state price density process* kao $\xi = (\xi_n : n \in \mathbb{N})$. Definiramo $\xi_m = \xi(\omega_m)$, $p_m = \mathbb{P}(\omega^m)$ i $x_m = V_N(\omega^m)$, za $m \in \{1, 2, \ldots, M\}$.

Za dani V_0, želimo pronaći vektor $X = (x_1, x_2, \ldots, x_M)$ koji maksimizira:

$$\sum_{m=1}^{M} p_m U(x_m),$$

uz uvjet:

$$\sum_{m=1}^{M} p_m x_m \xi_m = V_0.$$

Koristeći Lagrangeovu funkciju:

$$\mathcal{L}(x_m) = \sum_{m=1}^{M} p_m U(x_m) - \lambda\left(\sum_{m=1}^{M} p_m x_m \xi_m - V_0\right),$$

dobivamo jednadžbe:

$$\frac{\partial}{\partial x_m}\mathcal{L}(x_m) = p_m U^{'}(x_m) - \lambda p_m \xi_m = 0,\ m \in \{1, 2, \ldots, M\}.$$

Nakon malo računanja, jednažbe možemo svesti na:

$$U^{'}(x_m) = \lambda \xi_m, \qquad m \in \{1, 2, \ldots, M\}.$$

Ranije smo definirali i Radon-Nikodymovu derivaciju od $\mathbb{P}^*$ u odnosu na $\mathbb{P}$, $Z(\omega) = \frac{\mathbb{P}^*(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)}$. pa uvrštavanjem Radon-Nikodymove derivacije i *state price density* procesa u gornju jednadžbu dobivamo:

$$U^{'}(V_N) = \frac{\lambda Z}{(1+r)^N}. \tag{3.4}$$

U je strogo konkavna gdje god je konačna pa joj je derivacija strogo padajuća i ima inverznu funkciju koju označavamo s I.
Kada pronađemo inverz, primijenimo ga na (3.4) i dobivamo:

$$V_N = I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right). \tag{3.5}$$

Dobili smo formulu za optimalan V_N u terminima varijable λ. Koristeći[1] da je $\mathbb{E}^*\left[\frac{V_N}{(1+r)^N}\right] = V_0$ dobivamo sljedeći izraz:

$$\mathbb{E}\left[\frac{Z}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right)\right] = V_0. \tag{3.6}$$

Nakon rješavanja (3.6) po λ i uvrštavanjem u (3.5) uz [9, Teorem 1.2.2.] dobivamo optimalni portfelj $\phi = (\phi_n : n \in \{1, 2, ..., N-1\})$.

3.2 Primjeri

Bogati investitor nam je pružio V_0 novca kako bismo pokazali efektivnost svoje strategije unutar N perioda. Dozvoljeno nam je ulagati u N-periodni binomni model, uz uvjet da vrijednost portfelja nikad ne smije biti negativna. Ako je u trenutku N vrijednost portfelja $V_N \geq \gamma$, gdje je $\gamma > 0$ konstanta koju je zadao investitor, imamo pravo upravljanja velikim iznosom novca za tog investitora. Dakle, naš se problem sastoji od maksimiziranja vrijednosti portfelja u trenutku N, točnije maksimiziranja

$$\mathbb{P}(V_N \geq \gamma),$$

gdje je slučajni proces $V = (V_n : n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ s početnom vrijednošću V_0 i vrijednost portfelja V_n zadovoljava:

$$V_n \geq 0, \quad n \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Problem možemo preformulirati na sljedeći način, potrebno je maksimizirati:

$$\mathbb{P}(V_N \geq \gamma)$$

uz uvjet:

$$\mathbb{E}^* \frac{V_N}{(1+r)^N} = V_0, \quad V_n \geq 0, \quad n \in \{1, 2, \ldots, N\}. \tag{3.7}$$

(i) Pokažimo da ako je $V_N \geq 0$, tada je $V_n \geq 0$, $\forall n$.
Zbog martingalnosti, $V_n = \mathbb{E}^*_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^{N-n}}\right]$. Dakle, ako je $V_N \geq 0$, tada $V_n \geq 0$, $\forall n$.
(ii) Pogledajmo funkciju korisnosti:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \gamma, \\ 1, & x \geq \gamma. \end{cases}$$

[1] $\mathbb{E}^*$ je očekivanje s obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$

Pokažimo da za fiksni $y > 0$, vrijedi:

$$U(x) - yx \leq U(I(y)) - yI(y), \ \forall x \geq 0,$$

gdje je:

$$I(y) = \begin{cases} \gamma, & 0 < y \leq \frac{1}{\gamma}, \\ 0, & y > \frac{1}{\gamma}. \end{cases}$$

Pogledajmo sljedeća četiri scenarija:

a) Ako je $0 \leq x < \gamma$ i $0 < y \leq \frac{1}{\gamma}$, tada je:

$$U(x) - yx = -yx \leq 0 \ i \ U(I(y)) - yI(y) = U(\gamma) - y\gamma = 1 - y\gamma \geq 0.$$

b) Ako je $0 \leq x < \gamma \quad$ i $\quad y > \frac{1}{\gamma}$, tada je:

$$U(x) - yx = -yx \leq 0 \ i \ U(I(y)) - yI(y) = U(0) - y \cdot 0 = 0.$$

c) Ako je $x \geq \gamma \quad$ i $\quad 0 < y \leq \frac{1}{\gamma}$, tada je:

$$U(x) - yx = 1 - yx \quad i \quad U(I(y)) - yI(y) = U(\gamma) - y\gamma = 1 - y\gamma \geq 1 - yx.$$

d) Ako je $x \geq \gamma \quad$ i $\quad y > \frac{1}{\gamma}$, tada je:

$$U(x) - yx = 1 - yx < 0 \ i \ U(I(y)) - yI(y) = U(0) - y \cdot 0 = 0.$$

U svakom slučaju vrijedi:

$$U(x) - yx \leq U(I(y)) - yI(y).$$

(iii) Pretpostavimo da postoji rješenje λ jednadžbe:

$$\mathbb{E}\left[\frac{Z}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right)\right] = V_0. \tag{3.8}$$

Pokažimo da je optimalni V_N zadan pomoću:

$$V_N^* = I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right). \tag{3.9}$$

Iz (ii) i uz $x = V_N$, $y = \frac{\lambda Z}{(1+r)^N}$, gdje je V_N slučajna varijabla koja zadovoljava $\mathbb{E}^*\left[\frac{V_N}{(1+r)^N}\right] = V_0$, imamo:

$$\mathbb{E}[U(V_N)] - \mathbb{E}\left[\frac{\lambda Z}{(1+r)^N} V_N\right] \leq \mathbb{E}[U(V_N^*)] - \mathbb{E}\left[\frac{\lambda Z}{(1+r)^N} V_N^*\right].$$

Odnosno:

$$\mathbb{E}[U(V_N)] - \lambda V_0 \leq \mathbb{E}[U(V_N^*)] - \lambda V_0.$$

Dakle: $\mathbb{E}[U(V_N)] \leq \mathbb{E}[U(V_N^*)]$.

(iv) Postoji $M = 2^N$ mogućih ishoda bacanja novčića, označimo ih s $\omega^1, \cdots, \omega^M$ i definirajmo $\xi_m = \xi(\omega^m)$, $p_m = \mathbb{P}(\omega^m)$. Sortirajmo ih u padajući niz ξ_m, tj. označili smo niz bacanja novčića tako da vrijedi:

$$\xi_1 \leq \xi_2 \leq \cdots \leq \xi_M.$$

Pretpostavka da je λ rješenje problema (3.8) ekvivalentna je pretpostavci da za neki $K \in \mathbb{N}$ imamo $\xi_K < \xi_{K+1}$ i:

$$\sum_{m=1}^{K} \xi_m p_m = \frac{V_0}{\gamma}. \tag{3.10}$$

Da bismo to pokazali, iz (3.8) dobivamo:

$$V_0 = \sum_{m=1}^{2^N} p_m \xi_m I(\lambda \xi_m) = \sum_{m=1}^{2^N} p_m \xi_m \gamma 1_{\{\lambda \xi_m \leq \frac{1}{\gamma}\}}.$$

Slijedi: $\frac{V_0}{\gamma} = \sum_{m=1}^{2^N} p_m \xi_m 1_{\{\lambda \xi_m \leq \frac{1}{\gamma}\}}$. Pretpostavimo da je $\lambda \in \mathbb{R}$ rješenje od (3.8), $\frac{V_0}{\gamma} > 0$ pa možemo zaključiti da je $\{m : \lambda \xi_m \leq \frac{1}{\gamma}\} \neq \emptyset$. Neka je $K = \max\{m : \lambda \xi_m \leq \frac{1}{\gamma}\}$, tada je $\lambda \xi_K \leq \frac{1}{\gamma} < \lambda \xi_{K+1}$. Dakle, $\xi_K < \xi_{K+1}$ i $\frac{V_0}{\gamma} = \sum_{m=1}^{K} p_m \xi_m$.

Također, pretpostavimo da postoji K t.d. $\xi_K < \xi_{K+1}$ i $\sum_{m=1}^{K} \xi_m p_m = \frac{V_0}{\gamma}$. Tada možemo pronaći $\lambda > 0$, t.d. $\xi_K < \frac{1}{\lambda\gamma} < \xi_{K+1}$. Za takav λ imamo:

$$\mathbb{E}\left[\frac{Z}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right)\right] = \sum_{m=1}^{2^N} p_m \xi_m 1_{\{\lambda \xi_m \leq \frac{1}{\gamma}\}} \gamma = \sum_{m=1}^{K} p_m \xi_m \gamma = V_0.$$

Pa je takav λ rješenje od (3.8). Primijetimo da K može biti 2^N. U tom slučaju ξ_{K+1} je zapravo $+\infty$. Tražimo pozitivno rješenje $\lambda > 0$.

(v) Uočimo da je tada V_N^* zadan pomoću:

$$V_N^*(\omega^m) = I(\lambda \xi_m) = \gamma 1_{\{\lambda \xi_m \leq \frac{1}{\gamma}\}} = \begin{cases} \gamma, & \text{ako } m \leq K, \\ 0, & \text{ako } m \geq K+1. \end{cases}$$

Primjer 3.2.1. *Promatramo N-periodni binomni model s funkcijom korisnosti* $U(x) = \ln x$. *Pokazat ćemo da je proces optimalne zarade jednak* $(\frac{V_0}{\xi_n}, n \in \{1, 2, \dots, N\})$.

$U'(x) = \frac{1}{x}$, *pa slijedi* $I(x) = \frac{1}{x}$. *Iz* (3.8) *slijedi* $\mathbb{E}\left[\frac{Z}{(1+r)^N} \frac{(1+r)^N}{\lambda Z}\right] = V_0$. *Dakle,* $\lambda = \frac{1}{V_0}$. *Iz* (3.9) *imamo* $V_N = \frac{(1+r)^N}{\lambda Z} = \frac{V_0}{Z}(1+r)^N$. *Dakle,*

$$V_n = \mathbb{E}_n^*\left[\frac{V_N}{(1+r)^{N-n}}\right] = \mathbb{E}_n^*\left[\frac{V_0(1+r)^n}{Z}\right] = V_0(1+r)^n \mathbb{E}_n^*\left[\frac{1}{Z}\right] = V_0(1+r)^n \frac{1}{Z_n}\mathbb{E}_n\left[Z \cdot \frac{1}{Z}\right] = \frac{V_0}{\xi_n}.$$

Primjer 3.2.2. *Nalazimo se u N-periodnom binomnom modelu s funkcijom korisnosti* $U(x) = \frac{1}{p}x^p$, *gdje je* $p < 1$, $p \neq 0$. *Pokažimo da je optimalna zarada u trenutku N jednaka:*

$$V_N = \frac{V_0(1+r)^N Z^{\frac{1}{p-1}}}{\mathbb{E}\left[Z^{\frac{p}{p-1}}\right]}.$$

Kako je $U'(x) = x^{p-1}$, *slijedi da je* $I(x) = x^{\frac{1}{p-1}}$. *Iz prethodnog primjera imamo*

$$\mathbb{E}\left[\frac{Z}{(1+r)^N}\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right] = V_0.$$

Rješavajući po λ *dobivamo:*

$$\lambda = \left(\frac{V_0}{\mathbb{E}\left[\frac{Z^{\frac{p}{p-1}}}{(1+r)^{\frac{Np}{p-1}}}\right]}\right)^{p-1} = \frac{V_0^{p-1}(1+r)^{Np}}{\left(\mathbb{E}\left[Z^{\frac{p}{p-1}}\right]\right)^{p-1}}.$$

Konačno:

$$V_N = \left[\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right]^{\frac{1}{p-1}} = \frac{\lambda^{\frac{1}{p-1}} Z^{\frac{1}{p-1}}}{(1+r)^{\frac{N}{p-1}}} = \frac{V_0(1+r)^{\frac{Np}{p-1}}}{\mathbb{E}\left[Z^{\frac{p}{p-1}}\right]} \cdot \frac{Z^{\frac{1}{p-1}}}{(1+r)^{\frac{N}{p-1}}} = \frac{(1+r)^N V_0 Z^{\frac{1}{p-1}}}{\mathbb{E}\left[Z^{\frac{p}{p-1}}\right]}.$$

Primjer 3.2.3. *Lagrangeov teorem se koristi u uvodu poglavlja i zahtijeva pretpostavke koje nismo provjeravali. Točnije, teorem zahtijeva da gradijent uvjetne funkcije, u ovom slučaju vektor* $(p_1\xi_1, \cdots, p_m\xi_m)$, *ne bude nulvektor. Tada optimalno rješenje rješava Lagrangeove jednadžbe koje navodimo na kraju poglavlja. U našem slučaju taj gradijent nije nulvektor pa su uvjeti teorema zadovoljeni, ali teorem ne garantira postojanje optimalnog rješenja. Može se dogoditi da umjesto maksimuma pronađemo minimum ili da rješenje uopće ne postoji. Zato ćemo u ovom primjeru koristiti drugu metodu kako bismo pokazali da slučajna varijabla* V_N^*, *dana pomoću* (3.9) *maksimizira očekivanu korisnost.*

Neka je V_N proizvoljna slučajna varijabla koja zadovoljava (3.7) te neka je:

$$V_N^* = I\left(\frac{\lambda}{(1+r)^N} Z\right),$$

gdje je λ rješenje jednadžbe (3.8). Potrebno je pokazati:

$$\mathbb{E}U(V_N) \leq \mathbb{E}U(V_N^*). \tag{3.11}$$

(i) Fiksirajmo $y > 0$ i pokažimo da je funkcija od x zadana preko $U(x) - yx$ maksimizirana pomoću $x = I(y)$. Zaključujemo:

$$U(x) - yx \leq U(I(y)) - yI(y), \quad \textit{za svaki } x \in \mathbb{R}. \tag{3.12}$$

$\frac{d}{dx}(U(x) - yx) = U'(x) - y$. Dakle $x = I(y)$ je kandidat za točku ekstrema od $U(x) - yx$. Zbog $\frac{d^2}{dx^2}(U(x) - yx) = U''(x) \leq 0$ (U je konkavna), $x = I(y)$ je točka maksimuma. Dakle, $U(x) - yx \leq U(I(y)) - yI(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
(ii) U (3.12), varijablu x ćemo zamijeniti slučajnom varijablom V_N, a y s $\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}$. Uzmimo očekivanje s obje strane i koristeći (3.7) i (3.8) zaključujemo da vrijedi (3.11).

$$\mathbb{E}[U(V_N)] - \mathbb{E}\left[V_N \frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right] \leq \mathbb{E}\left[U\left(I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right)\right)\right] - \mathbb{E}\left[\frac{\lambda Z}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right)\right],$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U(V_N)] - \lambda V_0 &\overset{(3.7)}{=} \mathbb{E}[U(V_N)] - \lambda \mathbb{E}^*\left[\frac{V_N}{(1+r)^N}\right] = \mathbb{E}[U(V_N)] - \mathbb{E}\left[V_N \frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right] \\ \leq \quad \mathbb{E}[U(V_N^*)] - \lambda \mathbb{E}\left[\frac{Z}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right)\right] &\overset{(3.8)}{=} \mathbb{E}[U(V_N^*)] - \lambda V_0. \end{aligned}$$

Dakle, $\mathbb{E}[U(V_N)] \leq \mathbb{E}[U(V_N^*)]$.

3.3 Konveksna konjugacija

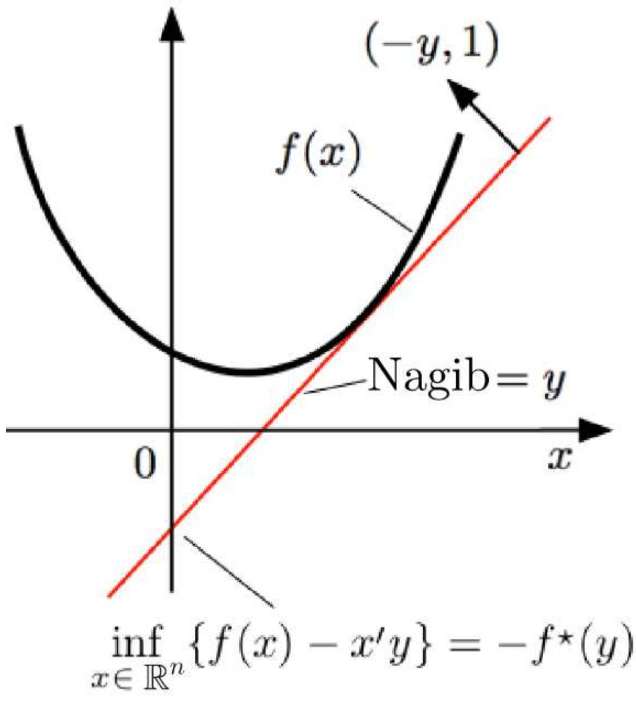
Radi se o pojmu koji dosad nismo spominjali i koji nije presudan za razumijevanje cijelog rada, ali dobro ga je shvatiti što ćemo pokušati pomoću ekonomske interpretacije. Neka je $f(x)$ trošak proizvodnje dobra x, a y cijena jedne jedinice toga dobra. Označimo s $f^*(y)$ optimalan profit, za danu razinu cijene y. Ukupan prihod je $x \cdot y$. Kada bismo nacrtali graf troška proizvodnje $f(x)$, uz pretpostavku konveksnosti, neprekidnosti i diferencijabilnosti

, lako bismo pokazali da je optimalna vrijednost proizvodnje, uz danu razinu cijena y, dana upravo s $y - f'(x) = 0$, što možemo pronaći i samo pomoću grafa i ravnala. Tražimo tangentu krivulje troška proizvodnje s nagibom y. U presjeku tangente s vertikalnom osi dobit ćemo $-(xy - f(x))$. Pronašli smo optimalan profit koristeći samo ravnalo i graf funkcije, za danu razinu cijena y. Ponavljajući ovaj postupak za razne razine cijena dobili bismo novi graf koji će prikazivati upravo transformaciju iz naslova na zadanoj funkciji.

Definicija 3.3.1. ***Legendre-Fenchelova transformacija***
Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ neprekidna, diferencijabilna i konveksna funkcija. ***Konveksno konjugirana funkcija*** *$f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksne funkcije f dana je s:*

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (\, yTx - f(x)) = \sup_{x \in Df} (\, yTx - f(x)).$$

Jedna od pretpostavki vezanih uz funkcije korisnosti U je bila da se radi o konkavnim funkcijama. Kako u konveksnoj konjugaciji zahtijevamo konveksnu funkciju (koju ćemo označiti s $\tilde{U}$), definirat ćemo $\tilde{U}$ kao konveksno konjugiranu funkciju funkcije U. Tada su zadovoljene sve pretpostavke iz definicije te otklonjene nejasnoće koje mogu nastati u idućem poglavlju.



3.4 Lagrangeov teorem

Još nam je ostalo uvesti teorem koji će nam pomoći pri traženju ekstrema funkcija korisnosti. Navodimo ga bez dokaza koji se može naći u [11, Teorem B].

Teorem 3.4.1. ***Lagrangeov teorem***
Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f, g_i : \Omega \to \mathbb{R}^n$ funkcije klase C^1, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $m < n$. Dodatno, neka je $\{\nabla g_1(P), \nabla g_2(P), \ldots, \nabla g_m(P)\}$ linearno nezavisan skup, $\forall P \in S$, $S = \{P \in \Omega : g_i(P) = 0, \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$. Ako je P_0 točka lokalnog ekstrema za funkciju $f\big|_S$, onda postoje $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takvi da vrijedi $\nabla f(P_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(P_0)$.

Tada možemo definirati Lagrangeovu funkciju:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Derivirajući $\mathcal{L}$ po svim varijablama dobivamo nužne uvjete:

$$\partial_i f(P_0) = \lambda \partial_i g(P_0), \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Poglavlje 4

Vrijednost slabe informacije

4.1 Slaba informacija

Kada znamo distribuciju cijena S_N kažemo da znamo **slabu informaciju** i označavamo ju s ν.

Neka tržište ne dopušta arbitražu i neka je $\mathcal{M}$ neprazan skup ekvivalentnih vjerojatnosnih mjera, odnosno mjera obzirom na koje su diskontirane cijene dionice martingali. U potpunom tržištu $\mathcal{M}$ je jednočlan, $\mathcal{M} = \{\mathbb{P}\}$ gdje je $\mathbb{P}$ jedinstvena vjerojatnosna mjera za koju su diskontirane cijene dionice martingali. Pomoću Ψ^{V_0} označavamo skup samofinancirajućih portfelja, uz danu **početnu imovinu** V_0. $\mathcal{A}$ je konačan skup mogućih cijena dionice u trenutku N. Uočavamo $|\mathcal{A}| \leq |\Omega|^N$. Ω označava skup svih mogućih cijena kroz N perioda. Očekivanje uz vjerojatnost $\mathbb{P}$ ćemo označavati s $\mathbb{E}$, a u slučaju da imamo očekivanje uz neku drugu vjerojatnost to ćemo posebno naglasiti.

Definicija 4.1.1. *Neka je $\mathbb{P} \in \mathcal{M}$ je ekvivalentna martingalna mjera. Vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}^\nu$ definiranu pomoću:*

$$\mathbb{P}^\nu(\{\omega\}) := \sum_{x \in \mathcal{A}} \mathbb{P}(\{\omega\} | S_N = x)\, \nu\,(S_N = x),$$

*zovemo **minimalna vjerojatnosna mjera** generirana slabom informacijom ν.*

Zaključujemo da je $\mathbb{P}^\nu$ najmanja (u smislu iduće propozicije) u skupu vjerojatnosnih mjera $\mathbb{Q}$ ekvivalentnih $\mathbb{P}$ takvih da $\mathbb{Q}(S_N = x) = \nu(S_N = x), \quad \forall\, x \in \mathcal{A}$. Takav skup označavamo s $\mathcal{E}^\nu$.

Propozicija 4.1.2. *Neka je ϕ konveksna funkcija. Tada vrijedi:*

$$\min_{\mathbb{Q} \in \mathcal{E}^\nu} \mathbb{E}\left[\phi\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\phi\left(\frac{d\mathbb{P}^\nu}{d\mathbb{P}}\right)\right],$$

gdje $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ označava Radon-Nikodymovu derivaciju od $\mathbb{Q}$ u odnosu na $\mathbb{P}$.

Dokaz. Neka su $x \in \mathcal{A}$ i $\mathbb{Q} \in \mathcal{E}^\nu$ zadani. Slijedi:

$$\mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\middle| S_N = x\right] = \frac{\nu(S_N = x)}{\mathbb{P}(S_N = x)}.$$

Jer je ϕ konveksna funkcija, iz uvjetne Jensenove nejednakosti slijedi:

$$\phi\left(\frac{\nu(S_N = x)}{\mathbb{P}(S_N = x)}\right) = \phi\left(\mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\middle| S_N = x\right]\right) \leq \mathbb{E}\left[\phi\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\middle| S_N = x\right].$$

Definiramo $h(x) = \phi\left(\frac{\nu(S_n=x)}{\mathbb{P}(S_n=x)}\right)$. Računanjem očekivanja s obje strane dobivamo:

$$\mathbb{E}\Big[h(S_n)\Big] = \mathbb{E}\left[\phi\left(\frac{d\mathbb{P}^\nu}{d\mathbb{P}}\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[\phi\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right].$$

□

4.2 Vrijednost slabe informacije

Definicija 4.2.1. ***Financijska vrijednost slabe informacije*** *je najmanja očekivana korisnost koja se može ostvariti korištenjem dane slabe informacije. Pišemo:*

$$u(V_0, \nu) = \min_{\mathbb{Q}\in\mathcal{E}^\nu} \max_{\psi\in\Psi^{V_0}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[U(V_N^\psi)],$$

gdje je U dana funkcija korisnosti.

Napomena 4.2.2. *U je strogo padajuća i konveksna te za funkciju:*

$$\tilde{U}(y) = \max_{x>0}[U(x) - xy] = U(I(y)) - yI(y)$$

vrijedi:

$$\tilde{U}'(y) = -I(y).$$

Teorem 4.2.3. *Financijska vrijednost slabe informacije u potpunom modelu tržišta dana je s:*

$$u(V_0, \nu) = \max_{\psi\in\Psi^{V_0}} \mathbb{E}^\nu[U(V_N^\psi)] = \mathbb{E}^\nu\left[U\left(I\left(\frac{\lambda(V_0)}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\nu}\right)\right)\right], \tag{4.1}$$

gdje je $\lambda(V_0)$ određena s:

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda(V_0)}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\nu}\right)\right] = V_0. \tag{4.2}$$

Dodatno, vrijednost optimalnog portfelja u trenutku n, $\hat{V}_n$, dana je pomoću:

$$\hat{V}_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \sum_{\omega \in \Omega} I\left(\frac{\lambda(V_0)}{(1+r)^N} \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\nu}(\omega)\right) \mathbb{P}(\omega | S_n), \quad n \in \{0, 1, \ldots, N\}.$$

Optimalan broj $i-$te linearno nezavisne imovine za kupnju je:

$$\phi_n^i = \sum_{j=1}^{M} (D_{n+1}^{-1})_{i,j} \hat{V}_{n+1}(\omega_j), \quad n \in \{0, 1, \ldots, N-1\},$$

gdje je:

$$D_{n+1} = \begin{bmatrix} S_{n+1}^1(\omega_1) & S_{n+1}^2(\omega_1) & . & . & . & S_{n+1}^M(\omega_1) \\ S_{n+1}^1(\omega_2) & S_{n+1}^2(\omega_2) & . & . & . & S_{n+1}^M(\omega_2) \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ S_{n+1}^1(\omega_M) & S_{n+1}^2(\omega_M) & . & . & . & S_{n+1}^M(\omega_M) \end{bmatrix}$$

i predstavlja matricu $M = |\Omega|$ linearno nezavisnih cijena imovine u trenutku $n+1$.

Dokaz. Potrebno je drugačije zapisati $\max\limits_{\psi \in \Psi^{V_0}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[U(V_N^\psi)]$. Da bismo to napravili, trebamo konveksno konjugirati U, što označavamo s $\tilde{U}$. Iz Napomene 4.22. slijedi da je $\tilde{U}' = -I$. Maksimiziranje izraza $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[U(V_N^\psi)]$ po $\psi \in \Psi^{V_0}$ ekvivalentno je maksimizaciji

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[U(V_N)] \text{ po slučajnoj varijabli } V_N \geq 0 \text{ tako da vrijedi } \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \frac{V_N}{(1+r)^N}\right] = V_0.$$

To ćemo napraviti pomoću sljedeće Lagrangeove funkcije :

$$\mathcal{L}(\lambda) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[U(V_N)] + \lambda\left[V_0 - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \frac{V_N}{(1+r)^N}\right]\right], \tag{4.3}$$

što se može drugačije zapisati koristeći (3.5) i $\tilde{U}' = -I$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\lambda) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[U\left(I\left(\frac{\lambda}{(1+r)^N} \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right)\right)\right] + \lambda\left[V_0 - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \frac{1}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda}{(1+r)^N} \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right)\right]\right] \\
&= \lambda V_0 + \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} U\left(I\left(\frac{\lambda}{(1+r)^N} \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right)\right)\right] - \lambda \mathbb{E}\left[\frac{1}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda}{(1+r)^N} \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right)\right] \\
&= \lambda V_0 + \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\left(U\left(I\left(\frac{\lambda}{(1+r)^N} \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right)\right) - \frac{\lambda}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda}{(1+r)^N} \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right)\right)\right] \\
&\overset{Definicija 3.3.1.}{=} \lambda V_0 + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{U}\left(\frac{\lambda}{(1+r)^N} \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right)\right] \\
&= \lambda V_0 + \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \tilde{U}\left(\frac{\lambda}{(1+r)^N} \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right)\right].
\end{aligned}$$

Nadalje, jer vrijedi[1] $\max_{\psi\in\Psi^{V_0}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[U(V_N^{\psi})] = \min_{\lambda>0} \mathcal{L}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} u(V_0,\nu) &= \min_{\mathbb{Q}\in\mathcal{E}^{\nu}} \min_{\lambda>0} \left[\lambda V_0 + \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \tilde{U}\left(\frac{\lambda}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right)\right]\right] \\ &= \min_{\lambda>0} \min_{\mathbb{Q}\in\mathcal{E}^{\nu}} \left[\lambda V_0 + \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \tilde{U}\left(\frac{\lambda}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right)\right]\right] \\ &= \min_{\lambda>0} \left[\lambda V_0 + \min_{\mathbb{Q}\in\mathcal{E}^{\nu}} \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \tilde{U}\left(\frac{\lambda}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right)\right]\right]. \end{aligned}$$

Zbog konveksnosti od $\tilde{U}$ zaključujemo da je preslikavanje $z \mapsto z\tilde{U}\left(\frac{\lambda}{(1+r)^N z}\right)$ konveksno[2] pa se minimum poprima za $\mathbb{P}^{\nu}$. Po Propoziciji 4.1.2 slijedi:

$$u(V_0,\nu) = \min_{\lambda>0} \left[\lambda V_0 + \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{P}^{\nu}}{d\mathbb{P}} \tilde{U}\left(\frac{\lambda}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^{\nu}}\right)\right]\right].$$

Derivirajući gornji izraz koji minimiziramo po λ uz izjednačavanje s 0 dobivamo:

$$V_0 = \mathbb{E}\left[\frac{1}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda^*(V_0)}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^{\nu}}\right)\right],$$

gdje je $\lambda^*(V_0)$ kandidat za minimum funkcije (4.3). Sada slijedi:

$$\begin{aligned} u(V_0,\nu) &= \lambda^*(V_0)V_0 + \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{P}^{\nu}}{d\mathbb{P}} \tilde{U}\left(\frac{\lambda^*(V_0)}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^{\nu}}\right)\right] \\ &= \lambda^*(V_0)V_0 + \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{P}^{\nu}}{d\mathbb{P}} \left(U\left(I\left(\frac{\lambda^*(V_0)}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^{\nu}}\right)\right) - \frac{\lambda^*(V_0)}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^{\nu}} I\left(\frac{\lambda^*(V_0)}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^{\nu}}\right)\right)\right] \\ &= \lambda^*(V_0)V_0 + \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{P}^{\nu}}{d\mathbb{P}} U\left(I\left(\frac{\lambda^*(V_0)}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^{\nu}}\right)\right)\right] - \lambda^*(V_0)\mathbb{E}\left[\frac{1}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda^*(V_0)}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^{\nu}}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}^{\nu}\left[U\left(I\left(\frac{\lambda^*(V_0)}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^{\nu}}\right)\right)\right]. \end{aligned}$$

Time je dokazan prvi dio teorema. Slučajni proces optimalne diskontirane zarade $\{\frac{\hat{V}_n}{(1+r)^n}\}_{0\le n\le N}$ je $\mathbb{P}$-martingal. Zbog toga je:

$$\hat{V}_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}}\mathbb{E}[\hat{V}_N|S_n] = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \sum_{\omega\in\Omega} I\left(\frac{\lambda(V_0)}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^{\nu}}(\omega)\right)\mathbb{P}(\omega|S_n).$$

[1] U prvom slučaju smo maksimizirali po funkciji korisnosti U, a u drugom slučaju minimiziramo po njenoj konveksno-konjugiranoj vrijednosti $\tilde{U}$.

[2] Za drugu derivaciju vrijedi: $\frac{\lambda^2}{(1+r)^{2N}z^3}\tilde{U}''(\frac{\lambda}{(1+r)^N z}) > 0$, jer je $\tilde{U}$ konveksna funkcija i $\lambda > 0$, $(1+r)^N > 0$, $z > 0$.

$\forall n \in \{0, 1, \dots, N\}$. Zarada je određena prethodnim periodom u portfelju te trenutnim cijenama. Dakle[3]:

$$\hat{V}_{n+1} = D_{n+1}\phi_n, \Rightarrow D_{n+1}^{-1}\hat{V}_{n+1} = \phi_n.$$

$\square$

Napomena 4.2.4. *Matrica cijena imovine u kompletnom tržištu ima rang M, što znači da možemo izabrati M linearno nezavisnih imovina u koje ćemo investirati. Uočimo, optimalan broj imovine je jedinstven ako i samo ako je $M = d$.*

Definicija 4.2.5. ***Dodana vrijednost*** *slabe informacije je dodatna korisnost ostvarena uključivanjem rizične imovine u investiciju, umjesto ulaganjem samo u nerizičnu imovinu. Pišemo:*

$$F(V_0, \nu) = u(V_0, \nu) - U(V_0(1 + r)^N).$$

Definicija 4.2.6. *Dodatno definiramo* ***omjer dodane vrijednosti i ukupne vrijednosti*** *kao:*

$$\pi(V_0, \nu) = \frac{F(V_0, \nu)}{u(V_0, \nu)} = 1 - \frac{U(V_0(1 + r)^N)}{u(V_0, \nu)}.$$

4.3 Primjeri funkcija korisnosti

Jednoperiodni binomni model

Za početak ćemo se ograničiti na jednoperiodni model i kao u uvodu, imat ćemo bezrizičnu imovinu s povratom $(1 + r)$, i rizičnu, čiji povrat ovisi o kretanju cijene dionice. Ako cijena poraste, vrijednost je $S_0(1 + b)$, dok je u slučaju pada ona $S_0(1 + a)$. Arbitraža je i dalje nepoželjna pa zahtijevamo $a < r < b$. Označimo broj dionica s ϕ i $\nu = (\nu_0, \nu_1)$. [4] Uz pomoć Teorema 4.2.3. dobivamo sljedeće primjere.

Primjer 4.3.1. ***Log korisnost***
Kada gledamo pojedine funkcije korisnosti, krećemo od maksimizacije $\mathbb{E}[U(V_N)]$ u odnosu na ϕ. To nam omogućuje rješavanje jednadžbe po optimalnom broju dionica uz maksimizaciju zarade, iz čega je $\hat{\phi}$ u jednoperiodnom modelu jednako:

$$\hat{\phi}_0 = \frac{V_0(1 + r)(\nu_0(b - r) + \nu_1(a - r))}{-S_0(b - r)(a - r)}.$$

Da bismo to pokazali promotrimo:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U(V_N)] &= \mathbb{E}[\ln(\phi S_1 + (V_0 - \phi S_0)(1 + r))] \\ &= \nu_0 \ln(\phi S_0(b - r) + V_0(1 + r)) + \nu_1 \ln(\phi S_0(a - r) + V_0(1 + r))\end{aligned}$$

[3] Slučajni vektor V_{n+1} interpretiramo kao $(V_{n+1}(\omega_1), ..., V_{n+1}(\omega_M))^\tau \in \mathbb{R}^M$. Analogno za ϕ_n.
[4] S_1 može poprimiti ukupno dvije različite vrijednosti.

Deriviramo po ϕ i izjednačimo s nulom kako bismo dobili optimalan broj dionica:

$$\frac{v_0 S_0 (b-r)}{\hat{\phi}_0 S_0(b-r) + V_0(1+r)} = -\frac{v_1 S_0 (a-r)}{\hat{\phi}_0 S_0(a-r) + V_0(1+r)}$$
$$\frac{\hat{\phi}_0 S_0(b-r) + V_0(1+r)}{v_0 S_0 (b-r)} = -\frac{\hat{\phi}_0 S_0(a-r) + V_0(1+r)}{v_1 S_0 (a-r)}$$
$$\hat{\phi}_0\left[\frac{S_0 (b-r)}{v_0 S_0 (b-r)} + \frac{S_0 (a-r)}{v_1 S_0 (a-r)}\right] = -\left[\frac{V_0 (1+r)}{v_0 S_0 (b-r)} + \frac{V_0 (1+r)}{v_1 S_0 (a-r)}\right]$$
$$\hat{\phi}_0\left[\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1}\right] = -V_0 (1+r)\left[\frac{1}{v_0 S_0 (b-r)}\frac{1}{v_1 S_0 (a-r)}\right]$$

Primijetimo da smo mogli gledati recipročnu vrijednost razlomaka jer nazivnik nikada nije jednak nuli. Također, podsjetimo se da vrijedi: $v_0 + v_1 = 1$. Sada ćemo izlučiti $\hat{\phi}_0$:

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_0 &= \frac{-v_0 v_1 V_0(1+r)}{S_0}\left[\frac{v_0 (b-r) + v_1 (a-r)}{v_0 v_1 (b-r)(a-r)}\right] \\
&= \frac{-V_0(1+r)}{S_0(a-r)(b-r)}\Big[v_0(b-r) + v_1(a-r)\Big] \\
&= \frac{V_0(1+r)(v_0(b-r) + v_1(a-r))}{-S_0(b-r)(a-r)}
\end{aligned}$$

Primjer 4.3.2. ***Power korisnost***
Isti račun provodimo za power korisnost:

$$\hat{\phi}_0 = \frac{((v_0(b-r))^{\frac{1}{\gamma-1}} - (v_1(a-r))^{\frac{1}{\gamma-1}})(1+r)V_0}{(v_1(a-r))^{\frac{1}{\gamma-1}} S_0(a-r) - (v_0(b-r))^{\frac{1}{\gamma-1}} S_0(b-r)}.$$

Kako je:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U(V_N)] &= \frac{1}{\gamma}\mathbb{E}\Big[\,((\phi S_1 + (V_0 - \phi S_0)(1+r)))^{\gamma}\,\Big] \\
&= \frac{1}{\gamma}\Big[v_0 (\phi S_0(b-r) + V_0(1+r))^{\gamma} + v_1 (\phi S_0(a-r) + V_0(1+r))^{\gamma}\Big],
\end{aligned}$$

deriviranjem izraza po ϕ te izjednačavanjem s nulom dobivamo

$$\frac{1}{\gamma}\cdot\gamma v_0 \left(\hat{\phi}_0 S_0(b-r) + V_0(1+r)\right)^{\gamma-1} S_0(b-r) = -\frac{1}{\gamma}\cdot\gamma v_1 \left(\hat{\phi}_0 S_0(a-r) + V_0(1+r)\right)^{\gamma-1} S_0(a-r)$$

Slijedi:

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\hat{\phi}_0 S_0(b-r)+V_0(1+r)\right)^{\gamma-1}}{\nu_1 S_0\,(a-r)} &= \frac{\left(\hat{\phi}_0 S_0(a-r)+V_0(1+r)\right)^{\gamma-1}}{\nu_0 S_0\,(b-r)}\\
\frac{\hat{\phi}_0 S_0(b-r)+V_0(1+r)}{(\nu_1\,(a-r))^{\frac{1}{\gamma-1}}} &= \frac{\hat{\phi}_0 S_0(a-r)+V_0(1+r)}{(\nu_0\,(b-r))^{\frac{1}{\gamma-1}}}\\
\hat{\phi}_0\left[\frac{S_0(b-r)}{(\nu_1\,(a-r))^{\frac{1}{\gamma-1}}}-\frac{S_0(a-r)}{(\nu_0\,(b-r))^{\frac{1}{\gamma-1}}}\right] &= V_0\,(1+r)\left[\frac{1}{(\nu_0\,(b-r))^{\frac{1}{\gamma-1}}}-\frac{1}{(\nu_1\,(a-r))^{\frac{1}{\gamma-1}}}\right]\\
&\cdot\left[\frac{(\nu_1\,(a-r))^{\frac{1}{\gamma-1}}-(\nu_0\,(b-r))^{\frac{1}{\gamma-1}}}{(\nu_0\nu_1\,(a-r)\,(b-r))^{\frac{1}{\gamma-1}}}\right]
\end{aligned}$$

Uz malo sređivanja dobivamo:

$$\hat{\phi}_0=\frac{((\nu_0(b-r))^{\frac{1}{\gamma-1}}-(\nu_1(a-r))^{\frac{1}{\gamma-1}})(1+r)V_0}{(\nu_1(a-r))^{\frac{1}{\gamma-1}}S_0(a-r)-(\nu_0(b-r))^{\frac{1}{\gamma-1}}S_0(b-r)}.$$

Primjer 4.3.3. ***Eksponencijalna korisnost***
I na kraju za eksponencijalnu korisnost:

$$\hat{\phi}_0=\frac{\ln(\nu_0(b-r))-\ln(-\nu_1(a-r))}{S_0(b-a)}.$$

Promotrimo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U(V_N)] &= \mathbb{E}\Big[-e^{-\lambda(\phi S_1+(V_0-\phi S_0)(1+r))}\Big]\\
&= -\nu_0 e^{-\lambda(\phi S_0(b-r)+V_0(1+r))}-\nu_1 e^{-\lambda(\phi S_0(a-r)+V_0(1+r))}
\end{aligned}$$

Deriviramo li izraz po ϕ i izjednačimo s nulom dobivamo:

$$\begin{aligned}
-\nu_0\,(b-r)\,(-\lambda S_0)\,e^{-\lambda\left(\hat{\phi}_0 S_0(b-r)+V_0(1+r)\right)} &= \nu_1\,(a-r)\,(-\lambda S_0)\,e^{-\lambda\left(\hat{\phi}_0 S_0(a-r)+V_0(1+r)\right)}\\
\nu_0\,(b-r)\,e^{-\lambda\hat{\phi}_0 S_0(b-r)} &= -\nu_1\,(a-r)\,e^{-\lambda\hat{\phi}_0 S_0(a-r)}
\end{aligned}$$

Uzimajući logaritam s obje strane jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned}
\ln(\nu_0\,(b-r))-\lambda\hat{\phi}_0 S_0\,(b-r) &= \ln(-\nu_0\,(a-r))-\lambda\hat{\phi}_0 S_0\,(a-r)\\
\hat{\phi}_0\Big[\lambda S_0\,(a-r)-\lambda S_0\,(b-r)\Big] &= \ln(-\nu_1\,(a-r))-\ln(-\nu_0\,(b-r))
\end{aligned}$$

Konačno, slijedi

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_0 &= \frac{\ln(\nu_0(b-r))-\ln(-\nu_1(a-r))}{S_0((b-r)-(a-r))}\\
&= \frac{\ln(\nu_0(b-r))-\ln(-\nu_1(a-r))}{S_0(b-a)}
\end{aligned}$$

N-periodni binomni model

U binomnom modelu sve se može eksplicitno izračunati. Sljedeći teorem daje formulu za prijelazne vjerojatnosti minimalne vjerojatnosti $\mathbb{P}^{\nu}$. Dobivena je korištenjem formule za uvjetnu vjerojatnost uz malo kombinatornog računa. Primijetimo da je $S = (S_n : n \in \{0, 1, ..., N\})$ $\mathbb{P}^{\nu}-$ Markovljev lanac te koristimo oznaku $\nu = (\nu_0, ..., \nu_N)$ za distribuciju od S_N[5].

Teorem 4.3.4. *Neka je $l \in \{1, \ldots, N-1\}$ i $i \in \{0, \ldots, N-l\}$. Tada vrijedi:*

$$\mathbb{P}^{\nu}(S_{N-l+1} = (1+b)S_{N-l} \,|S_{N-l} = (1+b)^{N-l-i}(1+a)^i S_0)$$
$$= \frac{\sum_{j=0}^{l-1} \binom{l-1}{j}(N-i-j)\ldots(N-i-(l-1))(i+1)(i+2)\ldots(i+j)\nu_{i+j}}{\sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j}(N-i-j)\ldots(N-i-(l-1))(i+1)(i+2)\ldots(i+j)\nu_{i+j}}$$

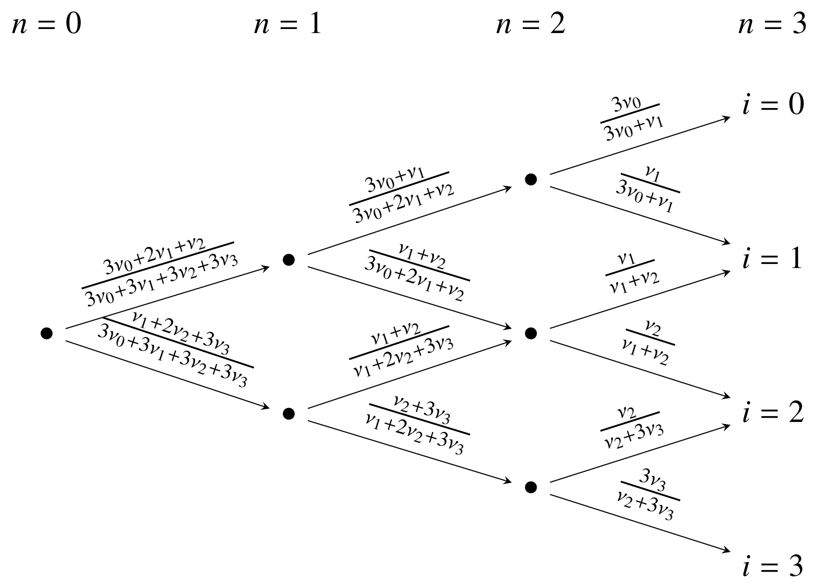
te:

$$\mathbb{P}^{\nu}(S_{N-l+1} = (1+a)S_{N-l} \,|S_{N-l} = (1+b^{N-l-i}(1+a)^i S_0)$$
$$= \frac{\sum_{j=0}^{l-1} \binom{l-1}{j}(N-i-j)\ldots(N-i-(l-1))(i+1)\ldots(i+j+1)\nu_{i+j+1}}{\sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j}(N-i-j)\ldots(N-i-(l-1))(i+1)(i+2)\ldots(i+j)\nu_{i+j}}.$$

Dokaz. Dokaz provodimo samo za prvi slučaj, drugi se provodi analogno.

$$\mathbb{P}^{\nu}(S_{N-l+1} = (1+b)S_{N-l} \,|S_{N-l} = (1+b)^{N-l-i}(1+a)^i S_0)$$
$$= \frac{\mathbb{P}^{\nu}(\{S_{N-l+1} = (1+b)S_{N-l}\} \cap \{S_{N-l} = (1+b)^{N-l-i}(1+a)^i S_0\})}{\mathbb{P}^{\nu}(S_{N-l} = (1+b)^{N-l-i}(1+a)^i S_0)}$$
$$= \frac{\mathbb{P}^{\nu}(S_{N-(l-1)} = (1+b)^{N-l+1-i}(1+a)^i S_0)}{\mathbb{P}^{\nu}(S_{N-l} = (1+b)^{N-l-i}(1+a)^i S_0)}$$
$$= \frac{\sum_{j=0}^{l-1} \binom{l-1}{j}(N-i-j)\ldots(N-i-(l-1))(i+1)(i+2)\ldots(i+j)\nu_{i+j}}{\sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j}(N-i-j)\ldots(N-i-(l-1))(i+1)(i+2)\ldots(i+j)\nu_{i+j}}$$

□



Slika 4.1: $\mathbb{P}^\nu$ za 3-periodni binomni model

Primjer 4.3.5. ***Logaritamska korisnost***
Daljnjim promatranjem logaritamske funkcije korisnosti možemo naći financijsku vrijednost slabe informacije. Najprije korištenjem (4.2) odredimo λ:

$$\begin{aligned}
V_0 &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{(1+r)^N} \cdot I\left(\frac{\lambda}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\nu}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{(1+r)^N} \cdot \left(\frac{(1+r)^N}{\lambda} \cdot \frac{d\mathbb{P}^\nu}{d\mathbb{P}}\right)\right] \\
\Rightarrow \lambda &= \frac{1}{V_0}.
\end{aligned}$$

[5] S_N sada može poprimiti $N + 1$ različitu vrijednost.

Uvrštavanjem λ u jednadžbu (4.2) dobivamo:

$$\begin{aligned} u(V_0, \nu) &= \mathbb{E}^\nu\left[U\left(I\left(\frac{\lambda}{(1+r)^N} \cdot \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\nu}\right)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}^\nu\left[\ln\left(\frac{(1+r)^N}{\frac{1}{V_0}} \cdot \frac{d\mathbb{P}^\nu}{d\mathbb{P}}\right)\right] \\ &= \ln\left(V_0(1+r)^N\right) + \mathbb{E}^\nu\left[\ln\left(\frac{d\mathbb{P}^\nu}{d\mathbb{P}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Dodana vrijednost log korisnosti je:

$$F(V_0, \nu) = \mathbb{E}^\nu\left[\ln\left(\frac{d\mathbb{P}^\nu}{d\mathbb{P}}\right)\right],$$

a omjer dodane vrijednosti i ukupne vrijednosti je:

$$\pi(V_0, \nu) = \frac{\mathbb{E}^\nu\left[\ln\left(\frac{d\mathbb{P}^\nu}{d\mathbb{P}}\right)\right]}{\ln\left(V_0(1+r)^N\right) + \mathbb{E}^\nu\left[\ln\left(\frac{d\mathbb{P}^\nu}{d\mathbb{P}}\right)\right]}.$$

Definicija 4.3.6. ***Relativna entropija*** *od p u odnosu na q je mjera različitosti vjerojatnosne mjere p u odnosu na referentnu mjeru q. Poznata je pod nazivom* ***Kullback-Leiblerova razlika*** *dviju vjerojatnosnih mjera i definirana je s:*

$$KL(p, q) = \sum_x p(x) \cdot ln\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) = \mathbb{E}^p\left[\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right].$$

Napomena 4.3.7. *Budući da se nalazimo u trenutku N, možemo pisati:*

$$F(V_0, \nu) = \mathbb{E}^\nu\left[\ln\left(\frac{d\nu}{d\mathbb{P}_{S_N}}\right)\right],$$

što je relativna entropija od ν u odnosu na $\mathbb{P}_{S_N}$.

Primijetimo, $F(V_0, \nu)$ je funkcija parametra ν pa za bilo koji fiksan ν vrijedi da je $F(V_0, \nu)$ konstanta. Nadalje, $\pi(V_0, \nu)$ je padajuća funkcija od V_0 za svaki fiksan ν. Rezultat toga je da što je pojedinac bogatiji, ostvaruje sve manje koristi.

Primjer 4.3.8. *Promotrit ćemo još jednom i power korisnost. Također naprije izrazimo λ pomoću (4.2) čime dobivamo:*

$$\lambda = \left(\frac{V_0(1+r)^{\frac{N\gamma}{\gamma-1}}}{\mathbb{E}\left[\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\nu}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right]}\right)^{\gamma-1}.$$

Uvrštavamo λ u jednadžbu (4.1):

$$\begin{aligned} u(V_0,\nu) &= \mathbb{E}^\nu\left[U\left(I\left(\frac{\lambda}{(1+r)^N}\cdot\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\nu}\right)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}^\nu\left[\frac{1}{\gamma}\left(\frac{V_0(1+r)^{\frac{N\gamma}{\gamma-1}}}{\mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\nu}^{\frac{1}{\gamma-1}}\right]}\right)^{\gamma-1}\cdot\left(\frac{1}{(1+r)^N}\cdot\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\nu}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right] \\ &= \frac{V_0^\gamma(1+r)^{N\gamma}}{\gamma\left(\mathbb{E}\left[\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\nu}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right]\right)^{\gamma-1}}\cdot\mathbb{E}^\nu\left[\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\nu}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]. \end{aligned}$$

Dodana vrijednost korisnosti je:

$$F(V_0,\nu) = \frac{V_0^\gamma(1+r)^{N\gamma}}{\gamma\left(\mathbb{E}\left[\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\nu}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right]\right)^{\gamma-1}}\cdot\mathbb{E}^\nu\left[\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\nu}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right] - \frac{V_0^\gamma(1+r)^{N\gamma}}{\gamma}.$$

Omjer[6] *je:*

$$\pi(V_0,\nu) = 1 - \frac{1}{\mathbb{E}^\nu\left[\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\nu}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]\cdot\left(\mathbb{E}\left[\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\nu}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right]\right)^{1-\gamma}}.$$

Za power korisnost, imamo suprotnu relaciju za fiksan ν. Omjer ostaje konstantan i dodana vrijednost je rastuća fukcija početne zarade.

Primjer 4.3.9. *Za kraj pogledajmo ponovno i eksponencijalnu korisnost te dokažimo da je*

$$\mathbb{E}^\nu\left[-e^{-\alpha\hat{V}_N}\right] = e^{-V_0\alpha(1+r)^N - \sum\limits_{i=0}^{N}\binom{N}{i}p^{N-i}q^i\ln\left(\binom{N}{i}\frac{p^{N-i}q^i}{\nu_i}\right)}.$$

Počinjemo s λ:

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{(1+r)^N}\cdot I\left(\frac{\lambda}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\nu}\right)\right] = V_0,$$

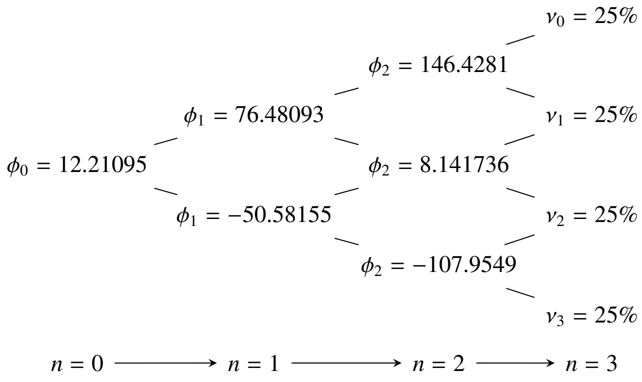
uvrštavamo I:

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{(1+r)^N}\cdot\frac{-1}{\alpha}\cdot\ln\left(\frac{\lambda}{\alpha(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\nu}\right)\right] = V_0.$$

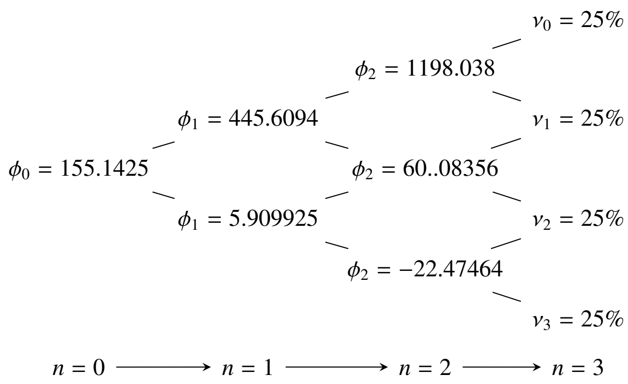
---

[6] Kao u Napomeni 4.3.7., budući da se nalazimo u trenutku N, imamo relativnu entropiju od ν u odnosu na $\mathbb{P}_{S_N}$:

$$F(V_0,\nu) = \mathbb{E}^\nu\left[\ln\left(\frac{d\nu}{d\mathbb{P}_{S_N}}\right)\right].$$



Slika 4.2: Log korisnost uz $V_0 = 200, S_0 = 20, r = 0.032, a = -0.019$ i $b = 0.09$.



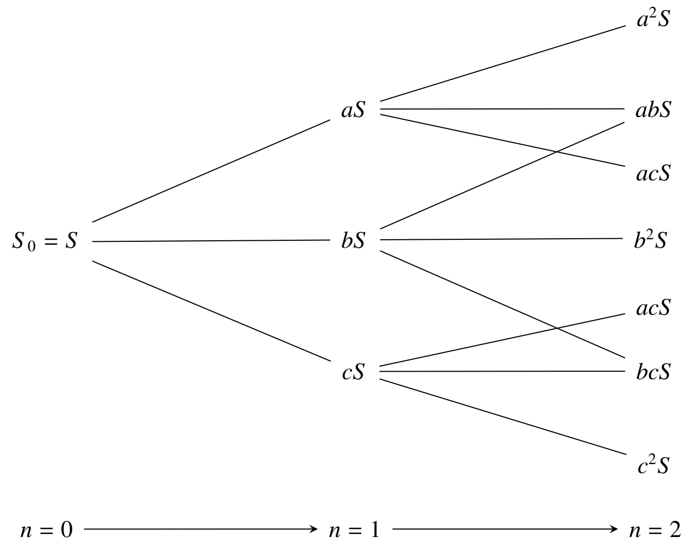
Slika 4.3: Power korisnost uz $\gamma = \frac{1}{2}, V_0 = 200, S_0 = 20, r = 0.032, a = -0.019$ i $b = 0.09$.

Rješavanjem po λ dobivamo:

$$\lambda = \alpha(1+r)^N e^{-V_0\alpha(1+r)^N - \mathbb{E}^\nu\left[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\nu}\ln\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\nu}\right)\right]}.$$

Uvrstimo I i λ u formulu za vrijednost slabe informacije čime dobivamo:

$$\begin{aligned} u(V_0, \nu) &= \mathbb{E}^\nu\left[U\left(I\left(\frac{\lambda}{(1+r)^N}\cdot\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\nu}\right)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}^\nu\left[-e^{-\alpha\frac{-1}{\alpha}\ln\left(\frac{\lambda}{\alpha(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\nu}\right)}\right] \\ &= e^{-V_0\alpha(1+r)^N - \sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}p^{N-i}q^i\ln\left(\binom{N}{i}\frac{p^{n-i}q^i}{\nu_i}\right)}. \end{aligned}$$



Slika 4.4: Vrijednost b^2S ne mora nužno biti iznad ili ispod acS jer ovisi o izboru a, b i c.

4.4 Trinomni model u nepotpunom tržištu

Za općeniti trinomni model s N perioda na prostoru $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}^N$, pri čemu s $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ označavamo donji, srednji i gornji "put". Označimo s i broj pojavljivanja gornjeg puta s isplatom a , a j broj pojavljivanja srednjeg puta s isplatom b. Tada $i \in \{0, 1, ..., N\}$ i $j \in \{0, 1, ..., N - i\}$. Za svaku pojedinačnu krajnju točku takvu da je cijena dionice porasla i puta imamo $N - i + 1$ mogućih izbora za j. Jer je svaka krajnja vrijednost jedinstveno određena varijablama i i j, uz $i, j \in \{0, 1, ..., N\}$, $i + j \leq N$, broj donjih puteva s isplatom c je $N - i - j$, a ukupan broj mogućih različitih krajnjih vrijednosti je:

$$\sum_{k=1}^{N+1} k = \frac{(N+1)(N+2)}{2}.$$

Važno je primijetiti razliku između binomnog modela u nepotpunom tržištu i trinomnog modela potpunog tržišta. Za početak, $\mathcal{M}$ sadrži više od jednog elementa. Točnije:

$$\mathcal{M} = \Big\{\mathbb{P} : \mathbb{P}(\{\omega_1\})(a-c) + \mathbb{P}(\{\omega_2\})(b-c) = 1 + r - c,\ \mathbb{P}(\{\omega_3\}) = 1 - \mathbb{P}(\{\omega_1\}) - \mathbb{P}(\{\omega_2\})\Big\},$$

$$\forall i \in \{1, 2, 3\},\ 0 < \mathbb{P}(\{\omega_i\}) < 1.$$

Primjer 4.4.1. *Pokažimo da je $\mathcal{M}$ stvarno gornjeg oblika. Vrijednost V_1 portfelja u trenutku 1 je:*

$$V_1 = \mathbb{P}(\{\omega_1\})S_1(\omega_1) + \mathbb{P}(\{\omega_2\})S_1(\omega_2) + \mathbb{P}(\{\omega_2\})S_1(\omega_2)$$

Jer vrijedi $V_0 = \frac{1}{1+r}V_1$, a vrijednost portfelja u trenutku $t = 0$ smo definirali kao S_0 i vrijedi $S_1(\omega_1) = S_0 \cdot a, S_1(\omega_2) = S_0 \cdot b$ te $S_1(\omega_3) = S_0 \cdot c$, možemo računati:

$$\begin{aligned}
S_0 &= \frac{1}{1+r}\Big[\mathbb{P}(\{\omega_1\})S_1(\omega_1) + \mathbb{P}(\{\omega_2\})S_1(\omega_2) + \mathbb{P}(\{\omega_2\})S_1(\omega_2)\Big] \\
S_0 &= \frac{1}{1+r}\Big[\mathbb{P}(\{\omega_1\})S_0 \cdot a + \mathbb{P}(\{\omega_2\})S_0 \cdot b + \mathbb{P}(\{\omega_2\})S_0 \cdot c\Big] \\
1 + r &= \mathbb{P}(\{\omega_1\}) \cdot a + \mathbb{P}(\{\omega_2\}) \cdot b + (1 - \mathbb{P}(\{\omega_1\}) - \mathbb{P}(\{\omega_2\})) \cdot c \\
1 + r - c &= \mathbb{P}(\{\omega_1\}) \cdot a + \mathbb{P}(\{\omega_2\}) \cdot b - c \cdot (\mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \mathbb{P}(\{\omega_2\})) \\
1 + r - c &= \mathbb{P}(\{\omega_1\}) \cdot (a - c) + \mathbb{P}(\{\omega_2\}) \cdot (b - c)
\end{aligned}$$

Što je i trebalo pokazati.

Imajući na umu da nemamo jedinstvenu martingalnu mjeru $\mathbb{P}$, ne možemo pronaći replicirajući portfelj pa ne možemo koristiti martingalnu metodu na način na koji smo naučili. Ipak, postoji način kako se snaći u slučaju nepostojanja jedinstvene martingalne mjere $\mathbb{P}$.

4.5 Optimiziranje korisnosti

Neka je:

$$\mathcal{M}_n = \Big\{\mathbb{P}_n : \mathbb{P}_n \text{ ekvivalentna martingalna mjera na}\Big(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \mathcal{P}(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\})\Big) \text{ u n-tom trenutku}\Big\}.$$

Jer gledamo martingalnu mjeru $\mathbb{P}_n$, vrijeme (i put u stablu) koje odaberemo ne utječu na $\mathbb{P}_n$. Neka je $\mathbb{P}_{n,0}$ neka druga vjerojatnosna mjera takva da za $b < 1 + r$ vrijedi:

$$\mathbb{P}_{n,0}(\omega) = \begin{cases} \frac{(1+r)-b}{a-b}, & \omega = \omega_1, \\ \frac{a-(1+r)}{a-b}, & \omega = \omega_2, \\ 0, & \omega = \omega_3. \end{cases}$$

Za $b \geq 1 + r$:

$$\mathbb{P}_{n,0}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega = \omega_1, \\ \frac{(1+r)-c}{b-c}, & \omega = \omega_2, \\ \frac{b-(1+r)}{b-c}, & \omega = \omega_3. \end{cases}$$

Neka je sada $\mathbb{P}_{n,1}(\omega)$ vjerojatnosna mjera takva da:

$$\mathbb{P}_{n,1}(\omega) = \begin{cases} \frac{(1+r)-c}{a-c}, & \omega = \omega_1, \\ 0, & \omega = \omega_2, \\ \frac{a-(1+r)}{a-c}, & \omega = \omega_3. \end{cases}$$

Primijetimo da $\mathbb{P}_{n,0}, \mathbb{P}_{n,1} \notin \mathcal{M}_n$. Ipak, $\forall \mathbb{P}_n \in \mathcal{M}_n$, $\mathbb{P}_n$ je konveksna kombinacija:

$$t_n \mathbb{P}_{n,0} + (1 - t_n)\mathbb{P}_{n,1}$$

od $\mathbb{P}_{n,0}$ i $\mathbb{P}_{n,1}$, uz $t_n \in (0,1)$, $\forall n$. Primijetimo, t_n može ovisiti o n, ali i o prijašnjim trenucima. Neka je $\omega \in \Omega$:

$$\mathbb{P}(\omega) = \prod_{i=0}^{N-1} (t_i \mathbb{P}_{i,0} + (1 - t_i)\mathbb{P}_{i,1}).$$

Za $N = 2$ slijedi:

$$\mathbb{P}(\omega) = t_1 t_2 \mathbb{P}_{0,0}\mathbb{P}_{1,0} + (1 - t_1)t_2 \mathbb{P}_{0,1}\mathbb{P}_{1,0} + t_1(1 - t_2)\mathbb{P}_{0,0}\mathbb{P}_{1,1} + (1 - t_1)(1 - t_2)\mathbb{P}_{0,1}\mathbb{P}_{1,1}.$$

Definiramo sljedeće:

$$\mathbb{P}^1 := \mathbb{P}_{0,0}\mathbb{P}_{1,0}, \quad \mathbb{P}^2 := \mathbb{P}_{0,1}\mathbb{P}_{1,0}, \quad \mathbb{P}^3 := \mathbb{P}_{0,0}\mathbb{P}_{1,1}, \quad \mathbb{P}^4 := \mathbb{P}_{0,1}\mathbb{P}_{1,1}. \tag{4.4}$$

Nastavljamo promatrati N-periodni model uz definirane uvjete. $\mathbb{P}$ je konveksna kombinacija od $\mathbb{P}^j$, $\forall j \in \{1, 2, ..., 2^N\}$.
Radon-Nikodymova derivacija s obzirom na slabu informaciju ν je definirana kao: $\frac{d\mathbb{P}^j}{d\nu}(\omega)$ za $j \in \{1, 2, ..., 2^N\}$. Jer je $\mathbb{P}$ konveksna kombinacija od $\mathbb{P}^j$ za $j \in \{1, 2, ..., 2^N\}$, vrijedi:

$$\mathbb{E}\frac{V_N}{(1+r)^N} = V_0, \quad \forall \mathbb{P} \iff \mathbb{E}^{\mathbb{P}^j}\frac{V_N}{(1+r)^N} = V_0, \ \forall j \in \{1, 2, ..., 2^N\}.$$

Sada ćemo iskoristiti Teorem 4.2.3. kako bismo izračunali vrijednost optimalnog portfelja $\hat{V}_N$. Koristeći (4.1) dobivamo da za vrijednost optimalnog portfelja vrijedi:

$$\hat{V}_N(\omega) = I\left(\frac{\lambda}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}}{d\nu}(\omega)\right) = I\left(\sum_{j=1}^{2^N}\frac{\lambda_j}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}^j}{d\nu}(\omega)\right),$$

Koristeći (4.2) dobivamo da λ_j zadovoljavaju:

$$V_0 = \mathbb{E}^{\nu}\frac{1}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}^i}{d\nu} I\left(\sum_{j=1}^{2^N}\frac{\lambda_j}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}^j}{d\nu}\right), \ \forall i \in \{1, 2, ..., 2^N\}.$$

Također vrijedi da je λ_j jedinstven za svaki j, jer je $U(x)$ konkavna funkcija.

Primjer 4.5.1. ***Log korisnost***
Kod optimiziranja vrijednosti V_N koristimo I od zadane funkcije korisnosti:

$$\hat{V}_N(\omega) = \frac{(1+r)^N}{\sum_{j=1}^{2^N} \lambda_j \frac{\mathbb{P}^j(\omega)}{\nu(\omega)}},$$

gdje λ_j zadovoljava:

$$V_0 = \mathbb{E}^\nu\left[\frac{\mathbb{P}^i(\omega)}{\sum_{j=1}^{2^N} \lambda_j \mathbb{P}^j(\omega)}\right], \quad \forall i \in \{1, 2, ..., 2^N\}.$$

Primjer 4.5.2. ***Power korisnost***
Provodimo sličan račun i za power korisnost:

$$\hat{V}_N(\omega) = \left(\sum_{j=1}^{2^N} \frac{\lambda_j}{(1+r)^N} \frac{\mathbb{P}^j(\omega)}{\nu(\omega)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

gdje λ_j zadovoljavaju:

$$V_0 = \mathbb{E}^\nu\left[\frac{1}{(1+r)^N} \frac{d\mathbb{P}^i}{d\nu}\left(\sum_{j=1}^{2^N} \frac{\lambda_j}{(1+r)^N} \frac{d\mathbb{P}^j}{d\nu}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right], \quad \forall i \in \{1, 2, ..., 2^N\}.$$

Primjer 4.5.3. ***Eksponencijalna korisnost***
I još jednom isti račun za eksponencijalnu korisnost:

$$\hat{V}_N(\omega) = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{-1}{(1+r)^N \alpha} \sum_{j=1}^{2^N} \lambda_j \frac{d\mathbb{P}^j}{d\nu}(\omega)\right),$$

gdje λ_j zadovoljavaju:

$$V_0 = \mathbb{E}^\nu\left[-\frac{1}{(1+r)^N \alpha} \frac{d\mathbb{P}^i}{d\nu} \ln\left(\frac{-1}{(1+r)^N \alpha} \sum_{j=1}^{2^N} \lambda_j \frac{d\mathbb{P}^j}{d\nu}\right)\right], \quad \forall i \in \{1, 2, ..., 2^N\}.$$

4.6 Pronalazak optimalnog portfelja

U tržištima koja nisu potpuna ne možemo uvijek pronaći replicirajući portfelj pa zbog toga moramo naći neki drugi način. Podsjetimo se,

$$\mathbb{E}\frac{V_N}{(1+r)^N} = V_0, \quad \forall\, \mathbb{P} \in \mathcal{M} \iff \mathbb{E}^{\mathbb{P}^j}\frac{V_N}{(1+r)^N} = V_0, \quad \forall j \in \{1, 2, ..., 2^N\}.$$

Imajući ovaj uvjet u vidu, ako je $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^j}\frac{V_N}{(1+r)^N} = V_0, \forall j \in \{1,2,...,2^N\}$, možemo replicirati $\hat{V}_n$ pomoću samofinancirajućeg portfelja. Tada možemo pronaći optimalnu strategiju $\phi = (\phi_n,\ n \in \{1,2,\cdots,N-1\})$:

$$\phi_n = \frac{\hat{V}_{n+1}(\omega_i) - \hat{V}_{n+1}(\omega_j)}{S_{n+1}(\omega_i) - S_{n+1}(\omega_j)},\ \text{za } i,j \in \{1,2,3\}, \quad i \neq j, \quad n \in \{0,1,...,N-1\}.$$

Fiksirajmo $\mathbb{P} \in \mathcal{M}$, tada možemo pronaći:

$$\hat{V}_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \cdot \mathbb{E}\left[I\left(\sum_{j=1}^{2^N} \frac{\lambda_j}{(1+r)^N} \frac{d\mathbb{P}^j}{d\nu} \right) \Big| S_n \right],$$

i dalje rješavati u terminima portfelja, ϕ.

Gledamo potpuno tržište u diskretnom vremenu i, kao i ranije, pomoću Ψ^{V_0} označavamo skup samofinancirajućih portfelja uz početnu vrijednost V_0.

Teorem 4.6.1. *Diskontirana vrijednost portfelja je $\mathbb{Q}$-martingal, za sve $\mathbb{Q} \in \mathcal{E}^\nu$.*

Dokaz. Neka je Ψ^{V_0} skup samofinancirajućih portfelja uz početnu vrijednost V_0 i neka je $\tilde{V}_{n+1}$ diskontirana vrijednost portfelja u trenutku $n+1$. Tada vrijedi:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_{n+1}] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\phi_{n+1}\tilde{S}_{n+1}\right] = \phi_{n+1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{S}_{n+1}\right] = \phi_{n+1}\tilde{S}_n = \tilde{V}_n$$

□

Primjer 4.6.2. *Sada želimo pronaći financijsku vrijednost slabe informacije*

$$u(V_0,\nu) = \max_{V_2} \mathbb{E}^\nu\left[\ \ln\left(\hat{V}_2\right)\right]$$

pomoću postupka iz Teorema 4.2.3. Promotrimo trinomni model s parametrima $r = 0, a = 1, b = 0, c = -\frac{1}{2}$ i $\nu = (\nu_1,\nu_2,\nu_3) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.
Radon-Nikodymova derivacija s obzirom na slabu informaciju ν je definirana kao: $\frac{d\mathbb{P}^j}{d\nu}(\omega)$ za $j \in \{1,2,3,4\}$. Jer je $\mathbb{P}$ konveksna kombinacija od $\mathbb{P}^j$ za $j \in \{1,2,3,4\}$, vrijedi:

$$\mathbb{E}\frac{V_N}{(1+r)^N} = V_0, \quad \forall\mathbb{P} \iff \mathbb{E}^{\mathbb{P}^j}\frac{V_N}{(1+r)^N} = V_0,\ \forall j \in \{1,2,3,4\}.$$

Sada ćemo iskoristiti Teorem 4.2.3. kako bismo izračunali vrijednost optimalnog portfelja $\hat{V}_N$. Koristeći (4.1) dobivamo da za vrijednost optimalnog portfelja vrijedi:

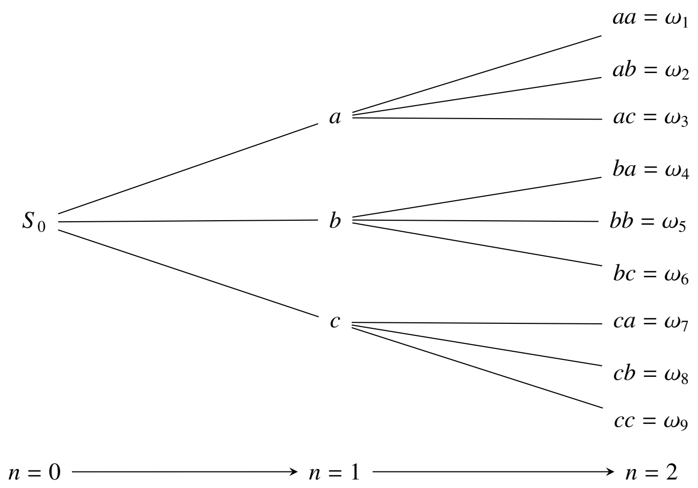
$$\hat{V}_N(\omega) = I\left(\frac{\lambda}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}}{d\nu}(\omega)\right) = I\left(\sum_{j=1}^{4}\frac{\lambda_j}{(1+r)^N}\frac{d\mathbb{P}^j}{d\nu}(\omega)\right),$$

Koristeći (4.2) *dobivamo da* λ_j *zadovoljavaju:*

$$V_0 = \mathbb{E}^{\nu} \frac{1}{(1+r)^N} \frac{d\mathbb{P}^i}{d\nu} I\left(\sum_{j=1}^{4} \frac{\lambda_j}{(1+r)^N} \frac{d\mathbb{P}^j}{d\nu} \right), \ \forall i \in \{1,2,3,4\}.$$

Također vrijedi da je λ_j *jedinstven za svaki* j*, jer je* $U(x)$ *konkavna funkcija.*

Neka je $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_9\}$ *uz:*



Vrijedi $\nu(\omega_i) = \frac{1}{9}, \ i \in \{1, ..., 9\}$.
Cilj je, dakle, pronaći $\max_{V_2} \mathbb{E}^{\nu}(\ln(V_2))$ *uz* $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^j} \frac{V_N}{(1+r)^N} = V_0$*, gdje je* $\mathbb{P}^j$ *ekvivalentna martingalna mjera iz* (4.4)*. Odredimo* $\mathbb{P}^j, \ j \in \{1, ..., 4\}$ *(uz pretpostavku* $b \leq 1 + r = 1$*)*
$\mathbb{P}^1(\omega_i) = 0, \ za \ i \neq 5 \ te \ \mathbb{P}^1(\omega_5) = 1;$
$\mathbb{P}^2(\omega_i) = 0 \ za \ i \neq 2, 8 \ te \ \mathbb{P}^2(\omega_2) = \frac{1}{3} \ i \ \mathbb{P}^2(\omega_8) = \frac{2}{3};$
$\mathbb{P}^3(\omega_i) = 0 \ za \ i \neq 4, 6 \ te \ \mathbb{P}^3(\omega_4) = \frac{1}{3} \ i \ \mathbb{P}^3(\omega_6) = \frac{2}{3};$
$\mathbb{P}^4(\omega_i) = 0 \ za \ i \neq 1, 3, 7, 9 \ te \ \mathbb{P}^4(\omega_1) = \frac{1}{9}, \mathbb{P}^4(\omega_3) = \frac{2}{9}, \mathbb{P}^4(\omega_7) = \frac{2}{9} \ i \ \mathbb{P}^4(\omega_9) = \frac{4}{9}.$
Slično kao u Primjeru 4.5.1. znamo da je vrijednost optimalnog portfelja jednaka:

$$\hat{V}_N = \frac{(1+r)^2}{\sum\limits_{j=1}^{4} \lambda_j \frac{\mathbb{P}^j}{\nu}} = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{4} \lambda_j \frac{\mathbb{P}^j}{\nu}},$$

gdje λ_i *zadovoljavaju jednadžbe:*

$$V_0 = \mathbb{E}^{\nu} \left[\frac{\mathbb{P}^i}{\sum\limits_{j=1}^{4} \lambda_j \mathbb{P}^j} \right] = \sum_{k=1}^{9} \nu(\omega_k) \frac{\mathbb{P}^i(\omega_k)}{\sum\limits_{j=1}^{4} \lambda_j \mathbb{P}^j(\omega_k)}.$$

Kratkim računom dobivamo:

$$\begin{cases} V_0 = \frac{1}{9}\frac{1}{\lambda_1} \\ V_0 = \frac{1}{9}\frac{2}{\lambda_2} \\ V_0 = \frac{1}{9}\frac{2}{\lambda_3} \\ V_0 = \frac{1}{9}\frac{4}{\lambda_4} \end{cases}$$

Iz čega slijedi $\lambda = (\frac{1}{9V_0}, \frac{2}{9V_0}, \frac{2}{9V_0}, \frac{4}{9V_0})$ *te:*

$$\begin{aligned} \hat{V}_N(\omega_k) &= \frac{1}{\frac{1}{9V_0}\frac{\mathbb{P}^1(\omega_k)}{\nu(\omega_k)} + \frac{2}{9V_0}\frac{\mathbb{P}^2(\omega_k)}{\nu(\omega_k)} + \frac{2}{9V_0}\frac{\mathbb{P}^3(\omega_k)}{\nu(\omega_k)} + \frac{4}{9V_0}\frac{\mathbb{P}^4(\omega_k)}{\nu(\omega_k)}} \\ &= \frac{V_0}{\mathbb{P}^1(\omega_k) + 2\mathbb{P}^2(\omega_k) + 2\mathbb{P}^3(\omega_k) + 4\mathbb{P}^4(\omega_k)}. \end{aligned}$$

Računamo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\nu[\ln(\hat{V}_N)] &= \ln(V_0) - \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{9} \ln[\mathbb{P}^1(\omega_k) + 2\mathbb{P}^2(\omega_k) + 2\mathbb{P}^3(\omega_k) + 4\mathbb{P}^4(\omega_k)] \\ &= \ln(V_0) - \frac{1}{9}\left(\ln(\frac{4}{9}) + \ln(\frac{2}{3}) + \ln(\frac{8}{9}) + \ln(\frac{2}{3}) + \ln(1) + \ln(\frac{4}{3}) + \ln(\frac{8}{9}) + \ln(\frac{4}{3}) + \ln(\frac{16}{9})\right) \\ &= \ln(V_0) - \frac{1}{9}\,(18\ln(2) - 12\ln(3)) \\ &= \ln(V_0) - 2\ln(2) + \frac{4}{3}\ln(3) \\ &= \ln(\frac{3^{\frac{4}{3}}}{4}V_0). \end{aligned}$$

Dakle, pronašli smo financijsku vrijednost slabe informacije u trenutku 2*:*

$$u(V_0, \nu) = \max_{V_2} \mathbb{E}^\nu\Big[\ln\Big(\hat{V}_2\Big)\Big] = \ln(\frac{3^{\frac{4}{3}}}{4}V_0).$$

Bibliografija

[1] Amiran, A., Baudoin F., Brock S., Coster B., Craver R., Ezeaka U., Mariano P. i Wishart M.B.: *The financial value of knowing the distribution of stock prices in discrete market models.* Mathematical Finance, 2018.

[2] Bertsekas, D.P.: *Convex Optimization Theory*. Athena Scientific optimization and computation series. Athena Scientific, 2009, ISBN 9781886529311. https://books.google.hr/books?id=0H1iQwAACAAJ, posjećena 30.06.2021.

[3] Bremaud, P.: *Discrete Probability Models and Methods*, svezak 78 *Springer Probability Theory and Stochastic Modelling*. Springer, 2017. https://hal.inria.fr/hal-01505040, posjećena 30.06.2021.

[4] Moshayedi, N: *Lectures on Probability Theory*, 2020. https://www.researchgate.net/publication/345152289_Lectures_on_Probability_Theory, posjećena 30.06.2021.

[5] Pliska, S. R.: *Introduction to Mathematical Finance*. Blackwell, 1997.

[6] Privault, N: *Notes on Stochastic Finance*. 2021. https://personal.ntu.edu.sg/nprivault/MA5182/stochastic_finance.pdf, posjećena 30.06.2021.

[7] Runggaldier, W.: *Portfolio optimization in discrete time*. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 2006. https://www.math.unipd.it/~runggal/MPS_ru.pdf, posjećena 30.06.2021.

[8] Rásonyi, M. i Stettner L.: *On Utility Maximization in Discrete-Time Financial Market Models*. The Annals of Applied Probability, 15(2):1367–1395, 2005, ISSN 10505164. http://www.jstor.org/stable/30038357, posjećena 30.06.2021.

[9] Shreve, S.E.: *Stohastic Calculus for Finance I; The Binomial Asset Pricing Model*. Springer Finance, 2004.

[10] Stella, L: *Geometric intuition of conjugate function*. 2021. https://math.stackexchange.com/questions/1874482/geometric-intuition-of-conjugate-function, posjećena 30.06.2021.

[11] Ungar, Š.: *Matematička analiza 3*. PMF - Matematički odjel, 1994, ISBN 953-6076-59-4.

[12] Vondraček, Z: *Skripta iz Financijskog modeliranja*. 2008. https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/1fm16-predavanja.html, posjećena 30.06.2021.

[13] Wagner, V: *Financijsko modeliranje 1*. 2021. https://web.math.pmf.unizg.hr/~wagner/userfiles/nastava/fm1_p10.pdf, posjećena 30.06.2021.

Sažetak

U ovome radu proučavali smo diskretni model financijskog tržišta. Krenuli smo od pretpostavke da investitor želi maksimizirati očekivanu korisnost koju ostvaruje ulaganjem u svoj portfelj. Također smo pretpostavili da investitor zna distribuciju cijene imovine u konačnom trenutku i tu informaciju smo nazvali *slaba informacija.* Odgovorili smo na glavno pitanje rada, a to je koja je financijska vrijednost slabe informacije. Nije nas zanimala sama novčana vrijednost koju investitor može ostvariti, već smo htjeli uzeti u obzir i sklonost riziku pojedinog investitora. To smo napravili preko funkcija korisnosti te smo dali i načine kako ih maksimizirati. Rezultate smo primijenili na nekoliko različitih funkcija korisnosti.

Summary

In this thesis, we studied a discrete model of the financial market, assuming that an investor is interested in maximizing his expected utility by investing in his portfolio and that the investor knows the distribution of the price of the property, which is referred to as *weak information.* We answered the main question of this thesis, what is the financial value of poor information. It was done by looking not only at the monetary value that an investor can achieve, but also taking into account the risk awareness of an individual investor. This was achieved through utility functions and ways to maximize them were given. We applied the results to several different utility functions.

Životopis

Rođen sam 30. lipnja 1995. godine u Požegi. Osnovnu školu završio sam u Pleternici, a nakon nje upisao sam Prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Požegi. Sudjelovao sam na nekoliko regionalnih i državnih natjecanja iz matematike, zbog čega sam 2014. godine upisao preddiplomski sveučilišni studij Matematika na matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu. Studiranje nastavljam na diplomskom studiju Financijska i poslovna matematika. Tijekom diplomskog studija bio sam aktivan član studentske udruge Financijski klub, kao član i voditelj skupine Analiza poduzeća i industrije te kao član skupine Upravljanje portfeljem. Radno iskustvo uz studiranje sam stekao u odjelu validacije i monitoringa kreditnog rizika u Raiffeisen banci te kao pripravnik u odjelu upravljanja imovinom u OTP Investu, gdje i dalje radim.