Manipulacije u izbornim sustavima

Bartak, Ivan

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivan Bartak

MANIPULACIJE U IZBORNIM SUSTAVIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Ilko Vrankić

Zagreb, rujan, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Ovaj rad je u sjećanje na moju voljenu sestru Mirjanu.
Zahvaljujem svojim roditeljima na potpori, razumijevanju i strpljenju tijekom školovanja, te bezuvjetnoj ljubavi koju mi pružaju.
Zahvaljujem svojoj zaručnici na predivnih sedam godina i logističkoj podršci.
Zahvaljujem i svojim prijateljima, kumovima i kolegama s fakulteta i posla na pomoći i lijepim trenutcima.
Posebna zahvala mentoru na motivaciji i podršci u pisanju rada.

Sadržaj

Uvod

Teorija društvenog izbora je disciplina koja se bavi proučavanjem problema agregiranja pojedinačnih preferencija u one društvene. Ideja za detaljnijim proučavanjem teorije društvenog izbora nastala je nakon predavanja mog mentora prof. dr. sc. Vrankića u kojem je govorio o Arrowljevom teoremu nemogućnosti transformiranja pojedinačnih preferencija u društvene, tj. ako zahtijevamo da društveni izbor zadovoljava određena svojstva koja smatramo demokratskima, to neće biti moguće jer će tada postojati diktator ako su preferencije ordinalnog tipa i broj alternativa koje biramo je veći ili jednak tri. Daljnjim proučavanjem načina utjecanja na izborne ishode pojam manipulacije izbornih sustava/pravila nametnuo se sam po sebi. Manipulacija u izbornom sustavu često se naziva i strateško glasovanje, a odnosi se na neiskreno izlaganje preferencija glasača kako bi ishod izbora bio što povoljniji za njega. Najvažniji rezultat iz tog područja je teorem do kojeg su nezavisno došli Allan Gibbarda i Mark Satterthwaite sedamdesetih godina prošlog stoljeća i koji ima sličan zaključak kao i Arrowljev rezultat: jedino izborno pravilo za linearno uređene ordinalne preferencije koje izabire jedinstvenog pobjednika između tri ili više alternativa i koje se ne može manipulirati je diktatura.

Cilj ovog rada je istražiti različite vrste manipulacije, kako one utječu na izborna pravila i sistematizirati rezultate na jednom mjestu. Koncept rada će biti sličan redoslijedu navedenom gore.

U prvom poglavlju ćemo napraviti kratki uvod u model teorije društvenog izbora, te se osvrnuti na Arrowljev teorem i različita izborna pravila koja postoje.

U drugom poglavlju ćemo obraditi pojam manipulacije i definirati različite vrste manipulacija, te kroz primjere vidjeti kako se neka izborna pravila definirana u prvom poglavlju ponašaju i mogu li biti manipulirana.

U trećem poglavlju predstavit ćemo Gibbard-Satterthwaiteov teorem za rezolutna izborna pravila te ćemo pokazati da je uz određene prilagodbe u pretpostavkama ekvivalentan Arrowljevom teoremu.

U četvrtom poglavlju bavit ćemo se poopćenjima Gibbard-Satterthwaiteovog teorema na izborna pravila koja nisu rezolutna: Duggan-Schwartzov teorem, Feldmanov teorem i Gärdenforsov teorem.

Poglavlje 1

Teorija društvenog izbora

1.1 Uvod u teoriju društvenog izbora

Pogledajmo primjer uprave osiguravajućeg društva koja bira novog voditelja odjela upravljanja rizicima. Uprava se sastoji od 10 članova, od kojih je jedan član predsjednik uprave. Intervjuirano je 5 kandidata za novu poziciju, te se zbog različitosti u mišljenjima uprava ne može dogovoriti koga će izabrati. Potrebna im je procedura koja će definirati kako će prenijeti individualne preferencije svakog člana uprave na preferencije cijele grupe, tj. uprave. Svaki od članova uprave mora dati svoj glas na jednom listu papira kojeg ćemo ubuduće zvati glasački listić. No, postavlja se pitanje kako će taj glasački listić izgledati. Je li moguće glasovati za jednog kandidata ili skup više njih koje član uprave podržava? Kako niti jedan od ovih tipova glasačkih listića do kraja ne izražava preferencije svakog člana uprave koristimo glasački list koji svakom članu uprave daje mogućnost rangirati kandidate od najboljeg do najgoreg, dozvoljavajući ili ne kandidate sa jednakim rangom. Kako bi nastavili dalje definirajmo prvo matematički okvir unutar kojega ćemo pokušati razrješiti problem takvog izbora.

Skup je osnovni matematički pojam i ne definira se. O njemu razmišljamo kao o cjelini koja se sastoji od elemenata. Skup koji nema elemenata zovemo prazan skup i označavamo s $\emptyset$. Ako skup S sadrži neki element s to označavamo sa $s \in S$.

Definicija 1.1. (Podskup) Skup A je podskup skupa B ako se svaki element skupa A nalazi u skupu B u oznaci $A \subseteq B$, odnosno

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Definicija 1.2. (Partitivni skup) Partitivni skup skupa A je skup svih podskupova skupa A u oznaci $\mathcal{P}(A)$, odnosno

$$\mathcal{P}(A) = \{B | B \subseteq A\}$$

Definicija 1.3. (Skupovne operacije) Definiramo sljedeće skupovne operacije:

1. *Presjek skupova* A i B u oznaci $A \cap B$ je skup
$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

2. *Unija skupova* A i B u oznaci $A \cup B$ je skup
$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

3. *Razlika skupova* A i B u oznaci $A \setminus B$ je skup
$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

4. *Simetrična razlika skupova* A i B u oznaci $A \triangle B$ je skup
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Definicija 1.4. (Binarna relacija) Neka su A i B neprazni skupovi. Svaki podskup $R \subseteq A \times B$ Kartezijevog produkta $A \times B$ zovemo binarnom relacijom. Ako je $a \in A$ i $b \in B$, kažemo da je a u relaciji s b ako je $(a, b) \in R$ i pišemo aRb. Kažemo da a nije u relaciji s b ako $(a, b) \notin R$ i pišemo $\neg(aRb)$.

Napomena 1.5. Ako je R binarna relacija na $A \times A$, tada ćemo govoriti da je R binarna relacija na A.

Definicija 1.6. (Restrikcija binarne relacije) Ako je R binarna relacija na A, te $v \subseteq A$, tada je restrikcija od R na v u oznaci $R|_v$ binarna relacija dana s
$$R|_v = R \cap (v \times v)$$

Sada ćemo definirati osnovna svojstva binarnih relacija koja su nam potrebna.

Definicija 1.7. Binarna relacija R na skupu A je

(1) **Refleksivna** ako $\forall x \in A,\ xRx$.

(2) **Irefleksivna** ako $\forall x \in A,\ \neg(xRx)$.

(3) **Simetrična** ako $\forall x, y \in A,\ xRy \Rightarrow yRx$.

(4) **Asimetrična** ako $\forall x, y \in A,\ xRy \Rightarrow \neg(yRx)$.

(5) **Antisimetrična** ako $\forall x, y \in A, (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$.

(6) **Tranzitivna** ako $\forall x, y, z \in A, (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$.

(7) **Potpuna** ako $\forall x, y \in A$ vrijedi xRy ili yRx ili $x = y$.

Definicija 1.8. Binarna relacija R na skupu A je slabi uređaj (na A) ako je tranzitivna i potpuna, a linearni uređaj (na A) ako je uz to i antisimetrična.

Uočimo da ako je R slabi uređaj na A tada potpunost relacije R povlači refleksivnost. Intuitivno, slabi uređaj će odgovarati listi u kojoj različiti elementi mogu biti izjednačeni što nije slučaj u linearnom uređaju. Izraz xRy će tada za slabi uređaj značiti da je x barem jednako dobar kao y, dok će za linearni uređaj vrijediti da su ili x i y jednaki ili da je x striktno bolji od y.

Definicija 1.9. Ako je R slabi uređaj na A, tada dolazimo do izvedenih relacija striktne preferencije P i indeferencije I ako za $x, y \in A$ vrijedi da je

$$xPy \Leftrightarrow (xRy \wedge \neg(yRx)) \text{ i } xIy \Leftrightarrow \ (xRy \wedge yRx).$$

Ako je R linearan uređaj na A, tada je relacija I zapravo jednakost, a relaciju P zovemo strogim linearnim uređajem na A.

Primjer 1.10. Neka je R slabi uređaj na A. Pokažimo prvo da je izvedena relacija indiferencije I relacija ekvivalencije, odnosno refleksivna, simetrična i tranzitivna. Refleksivnost i simetričnost očito slijede iz same definicije relacije I. Nadalje, neka je xIy i yIz. Tada iz definicije relacije I vrijedi da je xRy i yRx, te da je yRz i zRy. Kako je R tranzitivna relacija, vidimo da tada vrijedi da

$$xRyRz \wedge zRyRx \Rightarrow xRz \wedge zRx \Rightarrow xIz \tag{1.1}$$

pa je I tranzitivna. Pokažimo sada da je izvedena relacija P tranzitivna i asimetrična (pa stoga i irefleksivna). Asimetričnost očito slijedi iz same definicije relacije P. Neka je xPy i yPz. Tada iz definicije relacije P imamo:

$$\begin{aligned} xPy &\Leftrightarrow xRy \wedge \neg(yRx) \\ yPz &\Leftrightarrow yRz \wedge \neg(zRy) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Slijedi da je $xRyRz$ pa tranzitivnost od R povlači xRz. Ostalo je za dokazati $\neg(zRx)$. Pretpostavimo suprotno, tj. da vrijedi zRx. Tada iz (1.2) vrijedi xRy pa tranzitivnost (od R) povlači zRy što je kontradikcija s (1.2) i $\neg(zRy)$. Dakle, relacija P je tranzitivna. Uočimo da smo ovime pokazali da je P strogi linearni uređaj na klasama ekvivalencije I.

Sada ćemo pomoću slabog i linearnog uređaja formalizirati terminologiju teorije glasovanja.

Definicija 1.11. Ako je $A \neq \emptyset$ konačan skup kojeg smatramo skupom alternativa iz kojeg birači izabiru, tada je A-glasački listić slabi uređaj na A. Ako je dodatno $n \in \mathbb{N}$ gdje je $N = \{1, ..., n\}$ skup birača, tada je (A, n)-profil uređena n-torka A-glasačkih listića. Na sličan način definiramo linearni A-glasački listić kao linearni uređaj na A i linearni (A, n)-profil kao uređenu n-torku linearnih A-glasačkih listića.

Napomena 1.12. Kada su nam skup alternativa A i broj glasača n općeniti koristiti ćemo *glasački listić* umjesto *A-glasački listić*, te *profil* umjesto *(A,n)-profil*.

Ako je $\mathbf{P}$ profil, tada s R_i označavamo njegovu i-tu komponentu (glasački listić i-tog birača), a s P_i i I_i odgovarajuće izvedene relacije striktne preferencije i indeferencije i-tog glasača. Neka je $\mathbf{P} = \langle R_1, ..., R_n \rangle$ neki *(A,n)-profil* i $X \subseteq A$, tada je restrikcija od $\mathbf{P}$ na X profil u oznaci $\mathbf{P}|_X = \langle R_1|_X, ..., R_n|_X \rangle$. Ako je $i \in N$, tada će $\mathbf{P}|_{N \setminus \{i\}}$ označavati profil $\langle R_1, ..., R_{i-1}, R_{i+1}, ..., R_n \rangle$.

Definicija 1.13. Neka je $\mathbf{P}$ linearan (A, n)-profil, $X \subseteq A$ skup alternativa, te $i \in N$ birač. Tada:

$$\begin{aligned} \operatorname{top}_i(\mathbf{P}) = x &\Leftrightarrow \forall y \in A,\ xR_iy \\ \max_i(X, \mathbf{P}) = x &\Leftrightarrow x \in X, \forall y \in X,\ xR_iy \\ \min_i(X, \mathbf{P}) = x &\Leftrightarrow x \in X, \forall y \in X,\ yR_ix \end{aligned}$$

Iz definicije se lako vidi da je $\max_i(X, \mathbf{P})$ element skupa alternativa X koji je biraču i najviši po rangu u glasačkom listiću iz profila $\mathbf{P}$, a $\min_i(X, \mathbf{P})$ onaj kojeg rangira najniže. Također, $\operatorname{top}_i(\mathbf{P})$ je alternativa koja je biraču i na vrhu glasačkog listića iz profila $\mathbf{P}$. Uočimo da je $\operatorname{top}_i(\mathbf{P}) = \max_i(A, \mathbf{P})$, te da vrijedi $\max_i(X, \mathbf{P}) = \operatorname{top}_i(\mathbf{P}|_X)$.

Kada smo odredili kako izgledaju glasački listići, trebamo odrediti i kakvi će ishodi glasovanja biti mogući. Vraćamo se nakratko na primjer osiguravajućeg društva. Pitanje je hoće li izborom biti odmah postignut jednak pobjednik ili će biti dopušteni i neriješeni rezultati koje će onda odlučiti predsjednik društva? Također, u tijeku izbora može se dogoditi i situacija da neki kandidati odustanu. Stoga bi razumljiv kandidat za određivanje ishoda izbora bila "funkcija izbora" koja bi birala jednog ili više kandidata iz svakog nepraznog podskupa kandidata. Sada ćemo definirati različite procedure društvenog izbora.

Napomena 1.14. *Skup svih (A, n)-profila označavati ćemo oznakom $\mathcal{R}_A^n$. Uočimo da nismo restringirali izbor određenih profila, te da svaki glasač može složiti glasački listić prema svojim preferencijama.*

Definicija 1.15. Neka je A neprazan skup, $n \in \mathbb{N}$ i V funkcija čija je domena skup svih (A, n)-profila $\mathcal{R}_A^n$. Tada je V:

(1) **rezolutno izborno pravilo** za (A, n) ako je za svaki profil $\mathbf{P} \in \mathcal{R}_A^n$ izborni ishod $V(\mathbf{P})$ jedan element od A, tj. $V : \mathcal{R}_A^n \to A$.

(2) **izborno pravilo** za (A, n) ako je za svaki profil $\mathbf{P} \in \mathcal{R}_A^n$ izborni ishod $V(\mathbf{P})$ neprazan podskup od A, tj. $V : \mathcal{R}_A^n \to \mathcal{P}(A) \setminus \emptyset$.

(3) **funkcija društvenog izbora** za (A, n) ako je za svaki profil $\mathbf{P} \in \mathcal{R}_A^n$ izborni ishod $V(\mathbf{P})$ funkcija izbora C koja izabire neprazan podskup $C(v)$ od v za svaki $\emptyset \neq v \subseteq A$.

(4) **rezolutna funkcija društvenog izbora** za (A, n) ako je za svaki profil $\mathbf{P} \in \mathcal{R}_A^n$ izborni ishod $V(\mathbf{P})$ funkcija izbora C koja izabire jedinstveni element $C(v) \in v$ za svaki $\emptyset \neq v \subseteq A$.

(5) **funkcija društvenog blagostanja** za (A, n) ako je za svaki profil $\mathbf{P} \in \mathcal{R}_A^n$ izborni ishod $V(\mathbf{P})$ slabi uređaj na A.

(6) **rezolutna funkcija društvenog blagostanja** za (A, n) ako je za svaki profil $\mathbf{P} \in \mathcal{R}_A^n$ izborni ishod $V(\mathbf{P})$ linearni uređaj na A.

Skup V koji se pojavljuje u prethodnoj definiciji zovemo *agenda*, a shvaćamo ga kao neprazan podskup skupa alternativa iz kojeg biramo pobjednika izbora. Ako je V oblika $(1) - (6)$ tada ga nazivamo *agregatna procedura*. U radu ćemo se fokusirati na procedure (1) i (2).

1.2 Arrowljev teorem

Sada kada smo definirali matematički okvir u kojem pokušavamo razrješiti izborni problem, bavit ćemo se problemom kojim se bavio i Kenneth J. Arrow, dobitnik Nobelove nagrade za ekonomiju 1972. godine. Njega je, kao i nas, zanimao odgovor na jednostavno pitanje: kako različite ali konzistentne individualne preferencije pretvoriti u jedinstvene društvene preferencije? Ako inzistiramo na svojstvu tranzitivnosti binarne relacije preferencija, jako brzo dolazimo do problema kao što je Condorcetov paradoks. Pravilo većinskog glasovanja za $|A| = 3$ i $n = 3$ ne zadovoljava svojstvo tranzitivnosti, što je vidljivo iz sljedećeg primjera:

Primjer 1.16. *(Condorcetov paradoks)* Neka je $n = 3$, $A = \{a, b, c\}$ i individualne preferencije glasača su dane sljedećim profilom $\mathbf{P}$:

P		
a	b	c
b	c	a
c	a	b

U izboru između a i b, a bi dobio dva glasa, dok bi b dobio jedan što nam daje društvenu preferenciju aPb. U izboru između b i c, b bi dobio dva glasa, dok bi c dobio jedan što nam daje društvenu preferenciju bPc. Iz tranzitivnosti bi trebalo slijediti $aPbPc \Rightarrow aPc$, no vidimo da je u profilu **P** c iznad a dva puta pa bi pravilo apsolutne većine dalo cPa čime dolazimo do paradoksa, tj. svojstvo tranzitivnosti u ovom slučaju ne vrijedi.

Tražimo funkciju društvenog blagostanja f iz defincije 1.15 koja individualne preferencije R_i pretvara u društvene, tj.

$$R = f(R_1, ..., R_n).$$

Arrow predlaže četiri svojstva kao minimalna koja funkcija društvenog blagostanja mora posjedovati kako bi se smatrala demokratskom.

Definicija 1.17. (Svojstva funkcije društvenog blagostanja)

U **Neograničena domena** Domena funkcije f mora sadržavati sve moguće kombinacije individualnih preferencija na A.

WP **Pareto** Za svaki par alternativa $a, b \in A$, ako $aP_ib, \forall i \in N = \{1, ..., n\} \Rightarrow aPb$.

IIA **Nezavisnost od nebitnih alternativa** Neka je $R = f(R_1, ..., R_n)$, $\bar{R} = f(\bar{R}_1, ..., \bar{R}_n)$ i neka su $a, b \in A$ neke dvije alternative. Ako svaki pojedinac i preferira a prema b u odnosu na R_i kao u odnosu na $\bar{R}_i$ tada je i društvena preferencija a prema b jednaka u odnosu na R i $\bar{R}$.

D **Nepostojanje diktature** Ne postoji pojedinac i tako da za svake dvije alternative $a, b \in A,\ aP_ib \Rightarrow aPb$ ne uzimajući u obzir preferencije glasača $R_j,\ j \neq i$.

Prema svojstvu **U** funkcija društvenog blagostanja f generira društvene preferencije bez obzira na to kakve su sklonosti pojednica. Ovo svojstvo zajedno sa svojstvom tranzitivnosti od R isključuje većinsko glasovanje kao dobro izborno pravilo jer za tri ili više alternativa ne mora ishoditi tranzitivne društvene preferencije.

Svojstvo **WP** govori kako bi društvo trebalo preferirati a u odnosu na b ako to vrijedi za svakog pojedinca u društvu.

Prema svojstvu **IIA** društvene preferencije a prema b bi trebale ovisiti isključivo o individualnim preferencijama a prema b. Individualne preferencije R_i i $\bar{R}_i$ mogu se razlikovati u parovima različitim od a i b.

Svojstvo **D** ne dopušta postojanje pojedinca koji bi bio apsolutni diktator, tj. čije bi preferencije za svaki društveni izbor bez obzira na preferencije ostalih pojedinaca bile jednake društvenima.

Teorem 1.18. *(Arrow) Ako skup A ima barem tri društvena stanja (alternative) tada ne postoji funkcija društvenog blagostanja f koja istovremeno zadovoljavaju U,WP,IIA i D.*

Dokaz. Pokazati ćemo da iz svojstava U, WP i IIA slijedi postojanje diktatora. Posljedično, ako vrijede svojstva U, WP i IIA tada svojstvo D neće vrijediti čime ćemo pokazati da ne postoji funkcija društvenog blagostanja koja zadovoljava sva četiri svojstva.
U svakom koraku dokaza koristimo svojstvo U kada god biramo ili mijenjamo profil preferencija. Neograničena domena osigurava da je svaki takav profil dopušten.

Korak 1. Neka je $c \in A$ neka alternativa. Pretpostavimo da je svakom pojedincu c na zadnjem mjestu po preferencijama. Tada prema WP i društevne preferencije moraju staviti c na zadnje mjesto.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{P} & & \\ R_1 & R_2 & \ldots & R_n & R \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n & x \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ c & c & \ldots & c & c \end{array}$$

Korak 2. Uz ostale preferencije svakog pojedinca nepromijenjene pomičemo alternativu c na prvo mjesto, tako da je sada c na prvom mjestu i prema društvenim preferencijama. Uočimo da mora postojati pojedinac j za kojeg se pozicija u društvenim preferencijama za alternativu c povećala po prvi put kada je on stavio c na prvo mjesto u svojim preferencijama. Tvrdimo da se pozicija alternative c ne samo povećala, nego da je c sada na prvom mjestu u društvenim preferencijama. Pretpostavimo suprotno, tj. da aRc i cRb za $a, b \neq c$. Zato što je c na vrhu ili na dnu preferencija svakog pojedinca, svakom pojedincu možemo promijeniti preferencije tako da bP_ia, a da nismo promijenili poziciju od c. To nam sada daje željenu kontradikciju, jer sada bP_ia za svakog pojedinca prema WP povlači da bPa. No, zato što se individualne preferencije c prema a i c prema b nisu promijenile mora vrijediti pretpostavka, tj. aPc i cPb. Tada prema tranzitivnosti relacije preferencija aRb što je u kontradikciji s bPa. Dakle c se odmah pomaknuo na vrh društvenih preferencija.

$\mathbf{P'}$

R_1	R_2	...	R_j	...	R_n	R
c	c	...	c	...	x_n	c
x_1	x_2	...		...	y_n	.
y_1	y_2				.	.
.	.				.	.
.	.				.	.
.	.				.	.
w_1	w_2	...		...	c	w

Korak 3. Neka su za $a, b \neq c$ dvije različite alterantive. Mijenjamo profil $\mathbf{P'}$ tako da za pojedinca j vrijedi aP_jcP_jb, a za druge pojedince je bitno da c ostane rangiran kako je bio u profilu $\mathbf{P'}$. U novom profilu rang a prema c je isti za svakog pojedinca kao i prije pomicanja c na vrh kod pojedinca j u koraku 2. Stoga prema *IIA* svojstvu društvene preferencije a prema c moraju ostati jednake kao tada što znači aPc jer je tada c bio na dnu društvenih preferencija. Slično, novom profilu rang c prema b je isti za svakog pojedinca kao poslije pomicanja c na vrh kod pojedinca j u koraku 2. Stoga prema *IIA* svojstvu društvene preferencije c prema b moraju ostati jednake kao tada što znači cPb jer se tada c premjestio na vrh društvenih preferencija. Iz aPc i cPb po tranzitivnosti slijedi aPb. Uočimo da se društvene preferencije slažu s onim pojedinca j bez obzira kako drugi pojedinci (različiti od pojednica j) rangiraju a i b. Prema svojstvu *IIA* i proizvoljnosti a i b slijedi da za sve alterantive $a, b \neq c$ vrijedi:

$$aP_jb \Rightarrow aPb.$$

To nas dovodi do zaključka da je pojedinac j diktator na svim parovima alternativa koje ne uključuju c.

Korak 4. Neka je a alternativa različita od c. Ako ponovimo korake 1.-3. za a umjesto c da bi zaključili da postoji diktator na svim parovima koji ne uključuju a. Prisjetimo se da kako pojedinac j rangira c utječe na društvenu preferenciju alternative c. Stoga je pojedinac j diktator na svim parovima koji ne uključuju a. Zbog proizvoljnosti alternative a i $a \neq c$ slijedi da je pojedinac j diktator.

□

Za kraj bez dokaza navodimo Arrowljev teorem za izborna pravila koji je ekvivalentan Arrowljevom teoremu za funkcije društvenog blagostanja, te tehničku lemu koja će nam trebati u nastavku.

Teorem 1.19. *Ako je $n \in \mathbb{N}$ i A skup tri ili više alternativa, tada ne postoji izborno pravilo V za (A, n) koje zadovoljava P,D i CIIA:*

(P) Pareto: Za svaki (A, n)-profil $\mathbf{P}$ i svaki par alternativa $x, y \in A$, ako xP_iy za svaki i tada $y \notin V(\mathbf{P})$.

(D) Nepostojanje diktature: Ne postoji glasač i takav da za svaki (A, n)-profil $\mathbf{P}$ i svaki par alternativa $x, y \in A$, ako xP_iy (za tog glasača i), tada $y \notin V(\mathbf{P})$.

(CIIA) Izborna nezavisnost od nebitnih alternativa: Za svaki par (A, n)-profila $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$ i za svaki par alternativa $x, y \in A$, ako $x \in V(\mathbf{P}$ i $y \notin V(\mathbf{P})$ i $R_i|_{\{x,y\}} = R_i|_{\{x,y\}}$ za svaki i, tada $y \notin V(\mathbf{P}')$.

Lema 1.20. *Izborno pravilo koje zadovoljava Paretovo svojstvo i IIA je rezolutno.*

1.3 Izborna pravila

U poglavlju predstavit ćemo izborna pravila u kontekstu linearnih glasačkih listića koja ćemo koristiti u radu. Grupirati ćemo ih prema njihovoj sličnosti, ali i svojstvima koja ćemo navesti u sljedećoj definiciji.

Definicija 1.21. Izborno pravilo V za (A, n) zadovoljava:

(1) *anonimnost* ako tretira sve glasače na isti način. Preciznije, V je anonimno izborno pravilo ako za svaku permutaciju σ skupa glasača N vrijedi:

$$V(\mathbf{P}) = V(\sigma(\mathbf{P}))$$

gdje je $\sigma(\mathbf{P}) = \langle P_{\sigma(1)}, ..., P_{\sigma(n)} \rangle$.

(2) *neutralnost* ako tretira sve alternative na isti način, tj. V je neutralno izborno pravilo ako za svaku permutaciju σ skupa alternativa A vrijedi:

$$V(\sigma(P_1), ..., \sigma(P_n)) = \sigma(V(P_1, ..., P_n))$$

gdje za linearni uređaj $L = \langle a_1, ..., a_k \rangle$ od A, niz $\sigma(L)$ definiran sa $\langle \sigma(a_1), ..., \sigma(a_k) \rangle$.

(3) *monotonost* ako pobjednik izbora x ostaje pobjednik kada glasač promijeni svoj glasački listić tako da x pomakne za jedno mjesto prema gore.

(4) *Paretovo svojstvo* ako alternativa a nije pobjednik ako postoji neka druga alternativa b koju svaki glasač preferira u odnosu na alternativu a, tj.

$$\forall \mathbf{P},\ \forall x \in V(\mathbf{P}),\ \forall y \in A \setminus \{x\},\ \exists i \in N,\ xP_iy.$$

(5) *jednoglasnost* ako je alternativa jedinstveni pobjednik kad god se nalazi na vrhu glasačkog listića svakog glasača. Preciznije, V zadovoljava svojstvo jednoglasnosti ako vrijedi:

$$\forall \mathbf{P},\ \forall x \in A,\ \forall i \in N,\ (\mathrm{top}_i(\mathbf{P}) = x) \Rightarrow (V(\mathbf{P}) = \{x\}).$$

(6) *nenametnutost* ako se svaka alternativa iz skupa A pojavljuje kao jedinstveni pobjednik u barem jednom od izbora (izbornih profila). Preciznije, V je nenametnuto izborno pravilo ako vrijedi:

$$\forall x \in A, \exists \mathbf{P}, V(\mathbf{P}) = \{x\}.$$

Sada ćemo predstaviti prvu grupu izbornih pravila, koja ovise isključivo o alternativama koje su na prvim mjestima i zadovoljavaju svojstvo anonimnosti, neutralnosti, monotonosti i Paretovo svojstvo. Kao i dosada s N označavamo skup glasača $N = \{1, ..., n\}$, A je skup alternativa i $\mathbf{P} = (P_1, ..., P_n)$ je proizvoljan, ali linearan (A, n)-profil.

(1) *Pravilo jednoglasnosti:* ako svaki glasač na vrhu svog glasačkog listića ima istu alternativu, tada je ona jedinstveni pobjednik. Inače su sve alternative izjednačeni kandidati. Preciznije, V je pravilo jednoglasnosti ako:

$$\begin{aligned}&\forall x \in A,\ (x \in V(\mathbf{P})) \Leftrightarrow ((\forall i \in N,\ \mathrm{top}_i(\mathbf{P}) = x)) \text{ ili}\\ &\forall y \in A,\ \exists j \in N,\ \mathrm{top}_j(\mathbf{P}) \neq y.\end{aligned}$$

(2) *Pravilo blizu jednoglasnosti:* ako svi osim jednog glasača imaju istu alternativu na vrhu svog glasačkog listića, tada je ona jedinstveni pobjednik. Inače su sve alternative izjednačeni kandidati. Preciznije, V je pravilo blizu jednoglasnosti ako $\forall x \in A$:

$$\begin{aligned}&x \in V(\mathbf{P}) \Leftrightarrow (|\{i \in N : \mathrm{top}_i(\mathbf{P}) \neq x\}| \leq 1) \textit{ ili}\\ &\forall y \in A,\ |\{i \in N : \mathrm{top}_i(\mathbf{P}) \neq y\}| \geq 2.\end{aligned}$$

(3) *Pravilo većinskog glasovanja (pravilo relativne većine):* alternativa je pobjednik ako nijedna druga alternativa nema strogo veći broj prvih mjesta na glasačkim listićima, tj. preciznije ako $\forall x \in A$:

$$x \in V(\mathbf{P}) \Leftrightarrow (\forall y \in A,\ |\{i \in N : \mathrm{top}_i(\mathbf{P}) = x\}| \geq |\{i \in N : \mathrm{top}_i(\mathbf{P}) = y\}|).$$

(4) *Pravilo većinskog glasovanja s balotažom:* ako su dvije ili više alternativa izjednačene pravilom većinskog glasovanja, tada izjednačene alternative idu u drugi krug glasanja koristeći pravilo većinskog glasovanja. Ako je jedinstveni većinski pobjednik, tada se također ide u drugi krug, u koji ulaze pobjednik i alternativa (ili alternative) koja ima drugi najveći broj osvojenih prvih mjesta. Preciznije, neka V_p označava pravilo većinskog glasovanja. Tada se pravilo većinskog glasovanja s balotažom V definira kao:

$$|V_p(\mathbf{P})| = 1 \Rightarrow V(\mathbf{P}) = V_p(\mathbf{P}|_B),\ \text{gdje je } B = V_p(\mathbf{P}) \cup V_p(\mathbf{P}|_{\{i:\, \mathrm{top}_i(\mathbf{P}) \notin V(\mathbf{P})\}}),$$
$$|V(\mathbf{P})| \geq 2 \Leftrightarrow V(\mathbf{P}) = V_p(\mathbf{P}|_{V_p(\mathbf{P})}).$$

(5) *Pravilo nominacije s dva glasa:* alternativa je pobjednik ako ima barem dva prva mjesta, a ako nema takve alternative sve alternative su izjednačene (što se događa samo ako je $n \leq |A|$. Preciznije V je pravilo nominacije s dva glasa ako:

$$x \in V(\mathbf{P}) \Leftrightarrow (|\{i \in N : \mathrm{top}_i(\mathbf{P}) = x\}| \geq 2) \text{ ili}$$
$$\forall y \in A,\ |\{i \in N : \mathrm{top}_i(\mathbf{P}) = y\}| \leq 1.$$

(6) *Pravilo omninominacije:* alternativa je pobjednik ako ima barem jedno prvo mjesto na nekom glasačkom listiću, tj. ako

$$V(\mathbf{P}) = \{top_1(\mathbf{P}), ..., top_n(\mathbf{P})\}.$$

Sljedeća četiri pravila nisu anonimna i ovise samo o alternativama na vrhu glasačkog listića.

(7) *Oligarhija:* za svaki skup glasača O, alternativa je jedinstveni pobjednik ako se nalazi na vrhu glasačkog listića svakog od glasača iz skupa O, inače su sve alternative izjednačeni kandidati. Preciznije, izborno pravilo V je oligarhija ako

$$\forall x \in A,\ (x \in V(\mathbf{P})) \Leftrightarrow (\forall i \in O,\ \mathrm{top}_i(\mathbf{P}) = x) \text{ ili}$$
$$\forall y \in A,\ \exists j \in O,\ \mathrm{top}_j(\mathbf{P}) \neq y.$$

(8) *Diktatura:* za svakog glasača imamo izborno pravilo u kojem je pobjednik izbora alternativa koja se nalazi na vrhu glasačkog listića tog glasača. Preciznije, izborno pravilo V je diktatura ako postoji $i \in N$ takav da:

$$V(\mathbf{P}) = \{\mathrm{top}_i(\mathbf{P})\}.$$

(9) *Duumvirat:* za svaki par različitih glasača imamo izborno pravilo kojem su pobjednici izbora alternative koje ta dva glasača imaju na vrhu svojih glasačkih listića. Preciznije, izborno pravilo V je duumvirat ako postoji $\{i, j\} \in N \times N$ takav da:

$$V(\mathbf{P}) = \{\mathrm{top}_i(\mathbf{P}), \mathrm{top}_j(\mathbf{P})\}.$$

(10) *Triumvirat:* za svaku trojku različitih glasča imamo izborno pravilo kojem su pobjednici izbora alternative koje ta tri glasača imaju na vrhu svojih glasačkih listića. Preciznije, izborno pravilo V je triumvirat ako postoji $\{i, j, k\} \in N^3$ takav da:

$$V(\mathbf{P}) = \{\mathrm{top}_i(\mathbf{P}), \mathrm{top}_j(\mathbf{P}), \mathrm{top}_k(\mathbf{P})\}.$$

(11) *Antidiktatura:* za svakog glasača imamo izborno pravilo kojemu je jedinstveni pobjednik alternativa koju taj glasač ima na dnu svog glasačkog listića. Preciznije, izborno pravilo V je antidiktatura ako postoji $i \in N$ za koji ako je $\mathbf{P}^*$ profil nastao preokretanjem glasačkih listića u $\mathbf{P}$, tada

$$V(\mathbf{P}) = \{\mathrm{top}_i(\mathbf{P}^*)\}.$$

Sljedeća grupa pravila uspoređuje kandidate iz glasačkih listića jedan na jedan. Izborna pravila u njoj su anonimna, neutralna, monotona i zadovoljavaju svojstvo jednoglasnosti. Dodatno, za dvije alternative x i y neka $W(x, y, \mathbf{P})$ označava broj glasača u profilu $\mathbf{P}$ koji preferiraju x u odnosu na y, tj. vrijedi:

$$W(x, y, \mathbf{P}) = |\{i \in N : xP_iy\}|.$$

Uočimo da x pobjeđuje y u natjecanju jedan na jedan u odnosu na glasačke listiće (iz profila $\mathbf{P}$) ako i samo ako vrijedi

$$W(x, y, \mathbf{P}) > W(y, x, \mathbf{P}).$$

Također x i y su izjednačeni kandidati ako i samo ako

$$W(x, y, \mathbf{P}) = W(y, x, \mathbf{P}).$$

(12) *Condocetovo pravilo:* ako postoji alternativa koja bi striktno pobjedila svaku drugu alternativu u natjecanju jedan na jedan u odnosu na glasačke listiće tada je ona jedinstveni pobjednik, inače su sve alternative izjednačeni kandidati za pobjedu. Preciznije, V je Condorcetovo pravilo ako $\forall x \in A$:

$$x \in v(\mathbf{P}) \Leftrightarrow (\forall y \in A \setminus \{x\},\ W(x, y, \mathbf{P}) > W(y, x, \mathbf{P}))$$

ili

$$\forall y \in A,\ \exists z \in A \setminus \{y\},\ W(z, y, \mathbf{P}) \geq W(y, z, \mathbf{P}).$$

(13) *Slabo Condorcetovo pravilo:* ako postoji barem jedna alternativa koj bi pobijedila ili bila izjednačena sa svim ostalim alternativama u natjecanju jedan na jedan u odnosu na glasačke listiće tada su sve takve alternative pobjednici, inače su sve alternative izjednačeni kandidati za pobjedu. Preciznije, V je slabo Condorcetovo pravilo ako $\forall x \in A$:

$$x \in v(\mathbf{P}) \Leftrightarrow (\forall y \in A,\ W(x, y, \mathbf{P}) \geq W(y, x, \mathbf{P}))$$

ili

$$\forall y \in A,\ \exists z \in A,\ W(z, y, \mathbf{P}) > W(y, z, \mathbf{P}).$$

(14) *Copelandovo pravilo:* alternativa je pobjednik ako nijedna druga alternativa nema bolji rezultat dobitaka i gubitaka, gdje se taj rezultat računa kao broj striktnih pobjeda od kojih se oduzme broj striktnih gubitaka. Preciznije, V je Copelandovo pravilo ako $\forall x \in A$:

$$x \in V(\mathbf{P}) \Leftrightarrow (\forall y \in A,\ s_x > s_y),$$

gdje je:

$$s_x = |\{z \in A : W(x, z, \mathbf{P}) > W(z, x, \mathbf{P})\}| - |\{z \in A : W(z, x, \mathbf{P}) > W(x, z, \mathbf{P})\}|,$$
$$s_y = |\{z \in A : W(y, z, \mathbf{P}) > W(z, y, \mathbf{P})\}| - |\{z \in A : W(z, y, \mathbf{P}) > W(y, z, \mathbf{P})\}|.$$

(15) *Bordino pravilo:* alternativa je pobjednik ako nijedna druga alternativa nema strogo veći ukupni broj bodova u natjecanjima jedan na jedan, gdje alternativa x dobiva poen svaki puta kada xP_iy za neki $i \in N, y \in A$. Preciznije, izborno pravilo V je Bordino pravilo ako $\forall x \in A$,

$$x \in V(\mathbf{P}) \Leftrightarrow (\forall y \in A,\ \sum_{z \in A} W(x, z, \mathbf{P}) > \sum_{z \in A} W(y, z, \mathbf{P})).$$

(16) *Paretovo pravilo:* alternativa je pobjednik osim ako ne postoji druga alternativa koju svaki glasač preferira u odnosu na prvu alternativu. Preciznije, izborno pravilo V je Paretovo pravilo ako $\forall x \in A$:

$$x \in V(\mathbf{P}) \Leftrightarrow (\forall y \in A,\ \exists i \in N,\ xP_iy).$$

Sljedeće izborno pravilo možemo odvojiti od prethodnih pet jer nije neutralno.

(17) *Pravilo uzastopnog uspoređivanja parova:* za svaki uređaj $(a_1, ..., a_k)$ alternativa (agenda) imamo izborno pravilo u kojem alternativu a_1 uspoređujemo s a_2, pobjednika (ili obje alternative ako su izjednačene) uspoređujemo s a_3 eliminirajući alternative koje gube. Preciznije, neka V_{WC} označava slabo Condorcetovo izborno pravilo. Tada je izborno pravilo V pravilo uzastopnog uspoređivanja parova ako $\forall x \in A$:

$$V(\mathbf{P}) = W_k,$$

gdje se niz $(W_1, ...W_k)$ definira induktivno sa:

$$W_1 = \{a_1\},$$
$$W_r = V_{WC}(\mathbf{P}|_{W_{r-1}\cup\{a_r\}}),\ 2 \leq r \leq k.$$

Zadnja grupa pravila su ona koja imaju više krugova glasovanja u kojima se veličina skupa alternativa smanjuje iz kruga u krug. Pretpostavimo da je A skup alternativa, $n \in \mathbf{N}$ i V izborno prafilno definirano na (A, n), ali i na (A', n), $A' \subseteq A$. Za svaki (A, n) profil $\mathbf{P}$ promotrimo niz:

$$(W_1, W_2, W_3, ...W_{|A|})$$

gdje je

$$W_1 = V(\mathbf{P}), W_2 = V(\mathbf{P}|_{W_1}), W_3 = V(\mathbf{P}|_{W_2}), ...$$

Kako iznova primjenjujemo pravilo V na sve manji broj broj alternativa, tako se i skup pobjednika stabilizira (ili će ostati jedan ili će svi biti izjednačeni). Možemo reći da je V^* izborno pravilo za (A, n) gdje je $V^*(\mathbf{P}) = w_{|A|}$.

(18) *Hareovo pravilo:* iz kruga u krug se miču alternative s najmanjim brojem glasova na prvom mjestu. Preciznije, V je Hareovo pravilo ako $V = V_H^*$ gdje je $V_H(\mathbf{P})$ skup svih alternativa osim onih s najmanje prvih mjesta u $\mathbf{P}$ (i sve su izjednačene za pobjedu ako imaju isti broj prvih mjesta).

(19) *Coombsovo pravilo:* iz kruga u krug se miču alternative s najvećim brojem glasova na zadnjem mjestu. Preciznije, V je Coombsovo pravilo ako $V = V_C^*$ gdje je $V_C(\mathbf{P})$ skup svih alternativa osim onih s najviše zadnjih mjesta u $\mathbf{P}$ (i sve su izjednačene za pobjedu ako imaju isti broj prvih mjesta).

(20) *Iterirano pravilo većinskog glasovanja:* iz kruga u krug se primjenjuje pravilo većinskog glasovanja na izjednačene kandidate dobivene pravilom većinskog glasovanja. Preciznije, V je iterirano pravilo većinskog glasovanja ako $V = V_p^*$ gdje je $V_p(\mathbf{P})$ skup pobjednika dobivenih pravilom većinskog glasovanja.

Sada se postavlja pitanje postoji li rezolutno izborno pravilo koje je "prirodno i demokratsko", tj. zadovoljava anonimnost, neutralnost i Paretovo svojstvo. Odgovor je općenito ne, ako odgovaramo na pitanje uzimajući u obzir sve moguće veličine skupa glasača i alternativa. No, zadovoljavajući odgovor na pitanje daje sljedeći teorem:

Teorem 1.22. *Za linearne glasačke listiće, ako je n višekratnik nekog broja iz skupa $M = \{2, 3, ..., |A|\}$, tada svako izborno pravilo za (A, n) koje je anonimno, neutralno i zadovoljava Paretovo svojstvo nije rezolutno.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $2 \leq k \leq |A|$ i da je $n = m \cdot k$. Neka je skup alternativa: $A = \{a_1, ..., a_k, ..., a_{|A|}\}$. Uzmimo profil $\mathbf{P}$ u kojem ima n glasača koji su podijeljeni u m grupa veličine k i svaka grupa ima sljedeći raspored glasačkih listića:

$$\begin{array}{cccccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . & a_k \\
a_2 & a_3 & a_4 & . & . & . & a_1 \\
a_3 & a_4 & a_5 & . & . & . & a_2 \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
a_k & a_1 & a_2 & . & . & . & a_{k-1} \\
a_{k+1} & a_{k+1} & a_{k+1} & . & . & . & a_{k+1} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
a_{|A|} & a_{|A|} & a_{|A|} & . & . & . & a_{|A|}
\end{array}$$

Za bilo koje pravilo koje zadovoljava Paretovo svojstvo pobjednici moraju biti među $a_1, ..., a_k$. Tada iz anonimnosti i neutralnosti slijedi da oni moraju biti izjednačeni kandidati za pobjedu. Zato što je $k \geq 2$ pravilo ne može biti rezolutno. $\square$

Poglavlje 2

Manipulacije izbornih sustava

2.1 Skupovne preferencije i manipulabilnost

Poznata je stvar da u nekim situacijama glasači mogu postići preferirani izborni ishod ako glasaju tako da "laziraju" svoje iskrene preferencije. Proučavanje takvog ponašanja možemo početi sa danom agregatnom procedurom i pokušati pronaći načine na koje glasač može osigurati povoljniji ishod izbora promjenom glasačkog listića. Drugi način je onaj u kojem se kreće od pitanja što to znači da glasač preferira jedan ishod u odnosu na drugi, te se onda pokušavaju naći sve agregatne procedure određenog tipa koje su manipulabilne u tom smislu. Mi ćemo se u radu baviti ovim drugim načinom.

Započinjemo prvo sa formalizacijom manipulabilnosti. Prva pretpostavka je da su glasački listići linearni. Intuitivno, izborni sustav je manipulabilan ako postoji izborni proces u kojem neki glasač može osigurati ishod koji preferira tako da promijeni svoj glasački listić. Glasački listići svih ostalih glasača ostaju nepromijenjeni. To zapravo znači da kao pretpostavku uzimamo da određen glasač ima znanje o tome kako će svi ostali glasači glasovati, te koristi to znanje kako bi osigurao bolji ishod za sebe predajući lažni glasački listić. [1]

Definicija 2.1. (Manipulabilnost) Izborno pravilo V je manipulabilno ako postoje dva profila $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$, te glasač i takav da $\mathbf{P}|_{N\setminus\{i\}} = \mathbf{P}'|_{N\setminus\{i\}}$, te da glasač i za čije iskrene preferencije uzimamo P_i više preferira ishod $V(\mathbf{P})$ u odnosu na ishod $V(\mathbf{P}')$.

Uzmimo za primjer da su $V(\mathbf{P}) = \{x\}$ i $V(\mathbf{P}') = \{y\}$ jednočlani, tada je jasno da kad kažemo da glasač i više preferira ishod $V(\mathbf{P})$ u odnosu na ishod $V(\mathbf{P}')$ to znači xP_iy. Problem se javlja kada trebamo interpretirati što znači kada glasač preferira skup alternativa X nad drugim skupom alternativa Y.

[1] Ovdje se misli na bolji ishod sa vlastitog stajališta.

Svi važni rezultati u nastavku rada formaliziraju skupovne preferencije na jedan od sljedećih načina:

(1) Skupovi X i Y su jednočlani, kako je prethodno diskutirano.

(2) Skup X "slabo dominira" skup Y u smislu da su svi elementi u X barem jednako dobri kao svi elementi u Y i postoji element u X koji je bolji od nekog elementa u Y. Ova ideja potječe iz *Teorije igara* gdje govorimo kako strategija prvog igrača slabo dominira strategiju drugog igrača ako prvom igraču njegova strategija uvijek donosi ishod koji je barem dobar kao ishod drugog igrača, te mu ponekad donosi ishod koji je strogo bolji od ishoda drugog igrača.

Definicija 2.2. Glasač i preferira skup alternativa X nad skupom alternativa Y u smislu slabe dominantnosti ako vrijedi:

$$\forall x \in X, \forall y \in Y\ (xR_iy) \quad i \quad \exists x \in X, \exists y \in Y\ (xP_iy) \tag{2.1}$$

Kako bi skup X slabo dominirao skup Y iz linearnosti glasačkih listića slijedi da oni mogu imati najviše jedan zajednički element, tj. $\min_i(X, \mathbf{P})R_i\ \max_i(Y, \mathbf{P})$ i $X \neq Y$. To nam omogućuje da podijelimo slabu dominantnost u *min* i *max* verziju:

$$\forall x \in X, \forall y \in Y(xR_iy) \quad i \quad \max_i(X, \mathbf{P})P_i\ \max_i(Y, \mathbf{P}) \tag{2.2}$$

i

$$\forall x \in X, \forall y \in Y(xR_iy) \quad i \quad \min_i(X, \mathbf{P})P_i\ \min_i(Y, \mathbf{P}) \tag{2.3}$$

(3) Uspoređuju se $\max_i(X, \mathbf{P})$ i/ili $\min_i(X, \mathbf{P})$ sa $\max_i(Y, \mathbf{P})$ i/ili $\min_i(Y, \mathbf{P})$. Pretpostavimo da imamo glasački listić P_i profila $\mathbf{P}$ koje predstavljaju iskrene preferencije glasača i. Kombinirajući funkcije $\min_i$ i $\max_i$ dolazimo do 4 načina na koja glasač i može preferirati skup alternativa X nad skupom alternativa Y:

(i) $\max_i(X, \mathbf{P})P_i\ \min_i(Y, \mathbf{P})$

(ii) $\min_i(X, \mathbf{P})P_i\ \max_i(Y, \mathbf{P})$

(iii) $\max_i(X, \mathbf{P})P_i\ \max_i(Y, \mathbf{P})$

(iv) $\min_i(X, \mathbf{P})P_i\ \min_i(Y, \mathbf{P})$

Uočimo da (i) i (ii) ne daju zadovoljavajuće ideje vezane za manipulabilnost. Posebno, (i) je preslaba relacija jer nije tranzitivna i irefleksivna na skupovima koji nisu jednočlani, dok je (ii) prejaka jer je redundantna, te su manipulacije u tom smislu ostvarive jedino ako su i X i Y jednočlani. Uzmimo sada kao primjer da će društvo na neki način odabrati pobjednika od onih koji su jednako rangirani

našim izbornim pravilom. Ako je glasač dovoljno optimističan, te rangira kandidate na sljedeći način: $aP_ibP_icP_id$, tada će više preferirati izborni rezultat $\{a, d\}$ prema izbornom rezultatu $\{b, c\}$. To je zbog toga što optimistično pretpostavlja da će a koji je najviše rangiran kandidat biti ishod društvenog izbora $\{a, d\}$, dok će b koji je rangiran drugi po redu biti ishod društvenog izbora $\{b, c\}$. Općenito, optimističan glasač će uspoređivati dva skupa alternativa pitajući se koji će imati veći maksimum u odnosu na njegove iskrene preferencije. Time smo opravdali (iii).
Ako je glasač dovoljno pesimističan, te rangira kandidate na sljedeći način: $aP_ibP_icP_id$, tada će više preferirati izborni rezultat $\{b, c\}$ prema izbornom rezultatu $\{a, d\}$. To je zbog toga što pesimistično pretpostavlja da će d koji je najniže rangiran kandidat biti ishod društvenog izbora $\{a, d\}$, dok će c koji je rangiran treći po redu biti ishod društvenog izbora $\{b, c\}$. Općenito, pesimističan glasač će uspoređivati dva skupa alternativa pitajući se koji će imati veći minimum u odnosu na njegove iskrene preferencije. Time smo opravdali (iv).
Drugi način kako promatrati ovu ideju manipulacije je pogledati primjer uprave osiguravajućeg društva iz potpoglavlja 1.1. u kojem uprava društva bira zaposlenika na novu poziciju među 5 kandidata. Bilo koje izborno pravilo (Borda, Hare, pravilo većinskog glasovanja) će povremeno dati izjednačene kandidate. U ovom slučaju je optimist član uprave koji misli da predsjednik uprave dijeli njegove poglede i vrijednosti, dok je pesimist upravo suprotno.

(4) Skup X ima veću očekivanu korisnost od skupa Y gdje se u računu za svakog birača $i \in \mathbb{N}$ koristi realna funkcija korisnosti $u_i : A \to \mathbb{R}$ koja predstavlja biračeve preferencije u smislu da $\forall x, y \in A,\ xP_iy \Leftrightarrow\ u(x) > u(y)$. Također, za svakog birača i svaki skup alternativa X postoji vjerojatnosna funkcija $p : X \to [0, 1]$ za koju vrijedi $\sum\limits_{x \in X} p(x) = 1$ i koja daju mjeru vjerojatnosti da će dana alternativa biti izabrana iz danog skupa. Uočimo da se p može prirodno izvesti na jedan od dva načina:

   (i) Vjerojatnosna funkcija p može ovisiti o određenom glasaču, te njegovom znanju i pretpostavkama kako će se riješiti situacija sa izjednačenim kandidatima.

   (ii) Vjerojatnosna funkcija p može se odrediti iz izborne procedure. Na primjer, ako procedura nalaže da se situacija s izjednačenim kandidatima rješava na slučajan način, tada je $p(x) = \frac{1}{|X|},\ \forall x \in X$. U ovom slučaju glasač i preferira skup alternativa X nad skupom alternativa Y ako postoji funkcija korisnosti u koja predstavlja P_i na način da ako je $p(x) = \frac{1}{|X|},\ \forall x \in X$

i $p(y) = \frac{1}{|Y|}$, $\forall y \in Y$, tada je

$$\sum_{x \in X} p(x) \cdot u(x) > \sum_{y \in Y} p(y) \cdot u(y).$$

Definiramo i očekivanu korisnost kao:

$$E_{u,i} = \sum_{x \in X} \frac{u(x)}{|X|}.$$

Sad ćemo gore objašnjene načine manipulacije formalno defnirati.

Definicija 2.3. U smislu linearnih glasačkih listića, ako postoje profili $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$ te glasač i takav da $\mathbf{P}|_{N\setminus\{i\}} = \mathbf{P}'|_{N\setminus\{i\}}$, te da glasač i za čije iskrene preferencije uzimamo glasački listić iz $\mathbf{P}$ više preferira ishod X iz $\mathbf{P}'$ u odnosu na ishod Y iz $\mathbf{P}$ izborno pravilo je:

1. manipulabilno u smislu jednog pobjednika ako:

$$Y = \{y\} \; i \; X = \{x\} \; i \; xP_iy.$$

2. manipulabilno u smislu slabe dominantnosti ako:

$$\forall x \in X, \forall y \in Y (xR_iy) \; i \; \exists x \in X, \exists y \in Y (xP_iy).$$

3. manipulabilno optimistom ako

$$\max_i(X, \mathbf{P}) \; P_i \; \max_i(Y, \mathbf{P}).$$

4. manipulabilno pesimistom ako

$$\min_i(X, \mathbf{P}) \; P_i \; \min_i(Y, \mathbf{P}).$$

5. manipulabilno očekivanom korisnosti ako postoji funkcija korisnosti u koja predstavlja P_i na način da ako je $p(x) = \frac{1}{|X|}$, $\forall x \in X$ i $p(y) = \frac{1}{|Y|}$, $\forall y \in Y$, tada je

$$\sum_{x \in X} p(x) \cdot u(x) > \sum_{y \in Y} p(y) \cdot u(y,)$$

tj. $E_{u,i}(X) > E_{u,i}(Y)$.

2.2 Primjeri manipulacije

Sljedeći rezultat ilustrira različite razine manipulabilnosti na nekim izbornim pravilima koje smo predstavili ranije. Važno je za uočiti da pravila zadovoljavaju anonimnost, neutralnost, monotonost i nenametnutost.

Teorem 2.4.

(i) *Za skup $A = \{a, b, c, d\}$ Bordino pravilo za $(A, 4)$ je manipulabilno u smislu jednog pobjednika.*

(ii) *Za skup $A = \{a, b, c\}$ pravilo većinskog glasovanja za $(A, 4)$ je manipulabilno u smislu slabe dominantnosti. Međutim, nikad nije manipulabilno u smislu jednog pobjednika.*

(iii) *Za skup $A = \{a, b, c\}$ Condorcetovo pravilo za $(A, 3)$ je manipulabilno optimistom i pesimistom. Međutim, nikad nije manipulabilno u smislu slabe dominantnosti.*

(iv) *Za skup $A = \{a, b, c\}$ pravilo nominacije s dva glasa za $(A, 4)$ je manipulabilno optimistom, ali za $|A| < n$ nikad pesimistom i pravilo blizu jednoglasnosti za $(A, 3)$ je manipulabilno pesimistom (ali nikad optimistom).*

(v) *Za skup $A = \{a, b, c\}$ Paretovo pravilo za (A,3) je manipulabilno očekivanom korisnosti, ali nikad nije optimistom i pesimistom.*

(vi) *Diktatura i duumvirat nikad nisu manipulabilni u smislu očekivane korisnosti.*

Dokaz. (i) Neka je $A = \{a, b, c, d\}$ i $n = 4$. Promotrimo sljedeće profile $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$:

$\mathbf{P}$				$\mathbf{P}'$			
a	b	d	c	b	b	d	c
b	d	c	a	a	d	c	a
c	c	a	b	d	c	a	b
d	a	b	d	c	a	b	d

Ako je V Bordino pravilo, tada je $V(\mathbf{P}) = \{c\}$ i $V(\mathbf{P}') = \{b\}$, pa je prvom glasaču poboljšan ishod izbora.

(ii) Neka je $A = \{a, b, c\}$ i $n = 4$. Promotrimo sljedeće profile $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$:

P				**P′**			
a	c	c	b	b	c	c	b
b	a	a	a	a	a	a	a
c	b	b	c	c	b	b	c

Ako je V pravilo većinskog glasovanja, tada je $V(\mathbf{P}) = \{c\}$ i $V(\mathbf{P}') = \{b, c\}$, pa je prvom glasaču poboljšan ishod izbora, tj. pobjednik izbora neće u ovom slučaju biti njegov treći izbor, nego drugi ili treći. Time smo pokazali da je pravilo većinskog glasovanja manipulabilno u smislu *max* slabe dominantnosti. Isto se može pokazati i za "min" verziju.

Drugu tvrdnju pokazat ćemo dokazujući da za pravilo većinskog glasovanja nijedan glasač ne može istovremeno poboljšati *min* i *max* skupa pobjednika. Iz toga će slijediti da nije manipulabilno u smislu jednog pobjednika. Pretpostavimo suprotno da je $\mathbf{P}|_{N\setminus\{i\}} = \mathbf{P}'|_{N\setminus\{i\}}$ i da postoji $x \in V(\mathbf{P}) \setminus V(\mathbf{P}')$ i $y \in V(\mathbf{P}') \setminus V(\mathbf{P})$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostavit yP_ix i $F(x, \mathbf{P}) = k$. Zato što x nije na vrhu listića glasača i imamo $F(x, \mathbb{P}') \geq k$. Zato što je $x \in V(\mathbf{P})$, a $y \notin V(\mathbf{P})$ znamo da je $F(y, \mathbf{P}) \leq k-1$. No zbog pretpostavke $\mathbf{P}|_{N\setminus\{i\}} = \mathbf{P}'|_{N\setminus\{i\}}$ vrijedi da je $F(y, \mathbf{P}') \leq k$. Sada slijedi da zbog $y \in V(\mathbf{P}')$ imamo $x \in V(\mathbf{P}')$ zato što zauzima barem k prvih mjesta u $\mathbf{P}'$ čime smo došli do kontradikcije.

(iii) Neka je $A = \{a, b, c\}$ i $n = 3$. Promotrimo sljedeće profile $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$:

P			**P′**		
a	b	c	a	b	c
c	c	a	b	c	a
b	a	b	c	a	b

Ako je V Condorcetovo pravilo, tada je $V(\mathbf{P}) = \{c\}$ i $V(\mathbf{P}') = \{a, b, c\}$, pa je prvom glasaču poboljšan *max* sa drugog izbora na prvi. To pokazuje da je Condorcetovo pravilo manipulabilno optimistom. Isti primjer vrijedi i za manipulabilnost pesimistom ako se gleda prijelaz iz profila $\mathbf{P}'$ u $\mathbf{P}$. Prvom glasaču je poboljšan *min* sa trećeg izbora na drugi.

Za dokaz druge tvrdnje pretpostavimo da $\mathbf{P}|_{N\setminus\{i\}} = \mathbf{P}'|_{N\setminus\{i\}}$, $V(\mathbf{P}) = Y$, $V(\mathbf{P}') = X$, te da X slabo dominira Y obzirom na P_i, što su iskrene preferencije i-tog glasača. Prvo, uočimo da ako su Y i X jednočlani ($X = \{x\}, Y = \{y\}$) vrijedi xP_iy kako bi X slabo dominirao Y. No, to je nemoguće, jer bi y i dalje pobjeđivao x jedan na jedan nakon promjene glasačkog listića i-tog glasača. Iz toga slijedi da je jedan od X ili Y jednočlan, a drugi cijeli skup A. Ako je $X = \{x\}$, tada x mora biti mora biti na vrhu i-tog glasačkog listića u $\mathbf{P}$ kako bi X dominirao Y. No, $V(\mathbf{P}) = A$, pa x nije Condorcetov pobjednik. Očito je da nijedna promjena u glasačkom listiću glasača i ne može promijeniti da njegov prvi izbor u profilu $\mathbf{P}$ postane Condorcetov pobjednik ako to već nije bio. Slično, ako je $Y = \{y\}$, tada je y na dnu glasačkog listića i-tog glasača kako bi X dominirao Y. No bez obzira na promjenu i-tog glasačkog listića y će i dalje ostati Condorcetov pobjednik.

(iv) Neka je $A = \{a, b, c\}$ i $n = 4$. Promotrimo sljedeće profile $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$:

P				**P′**			
a	c	c	b	b	c	c	b
b	a	a	a	a	a	a	a
c	b	b	c	c	b	b	c

Ako je V pravilo nominacije s dva glasa, tada je $V(\mathbf{P}) = \{c\}$ i $V(\mathbf{P}') = \{b, c\}$, pa je glasač 1 poboljšao izborni ishod. To pokazuje da je pravilo nominacije s dva glasa manipulabilno optimistom.

Za dokaz druge tvrdnje uočimo $|A| < n$, pa uvijek postoji jedna alternativa koja je na barem dva glasačka listića prva. Dakle, *min* je za glasača i njegov prvi izbor, ili je na vrhu barem dva glasačka listića drugih glasača u kojem slučaju ga ne može učiniti gubitnikom.

Za pravilo blizu jednoglasnosti, neka je $A = \{a, b, c\}$ i $n = 3$. Promotrimo sljedeće profile $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$:

P			**P′**		
a	b	c	b	b	c
b	a	a	a	a	a
c	c	b	c	c	b

Ako je V pravilo blizu jednoglasnosti, tada je $V(\mathbf{P}) = \{a, b, c\}$ i $V(\mathbf{P}') = \{b\}$, pa je prvi glasač poboljšao *min* izbornog ishoda. Time smo pokazali da je pravilo blizu jednoglasnosti manipulabilno pesimistom.

Kako bi pokazali da pravilo blizu jednoglasnosti nije manipulabilno optimistom uočimo da je *max* za glasača i ili njegov prvi izbor ili je jedna alternativa na vrhu svakog drugog glasačkog listića, pa glasač i ne može promijeniti ishod izbora.

(v) Neka je $A = \{a, b, c\}$ i $n = 3$. Promotrimo sljedeće profile $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$:

P				**P′**		
a	a	c		a	a	c
b	c	b		c	c	b
c	b	a		b	b	a

Ako je V Paretovo pravilo, tada je $V(\mathbf{P}) = \{a, b, c\}$ i $V(\mathbf{P}') = \{a, c\}$. Neka je u neka funkcija korisnosti koja predstavlja preferencije prvog glasača u $\mathbf{P}$ za koju vrijedi da je $\frac{u(a)+u(c)}{2} > u(b)$. Uzmimo $u(a) = 18,\ u(b) = 9$ i $u(c) = 6$. Tada je očekivana korisnost od $\{a, b, c\}$ jednaka:

$$\frac{1}{3} \cdot 18 + \frac{1}{3} \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot 6 = 6 + 3 + 2 = 11$$

dok je očekivana korsinost od $\{a, c\}$ jednaka

$$\frac{1}{2} \cdot 18 + \frac{1}{2} \cdot 6 = 9 + 3 = 12.$$

Time smo pokazali da je Paretovo pravilo manipulabilno očekivanom korisnosti.

Lako se vidi da Paretovo pravilo nije manipulabilno optimistom jer vrijedi $\text{top}_i(\mathbf{P}) \in V(\mathbf{P})$ za svaki $i \in \mathbb{N}$.

Sada pokazujemo da Paretovo pravilo nije manipulabilno pesimistom. Neka je $y = \min_i(Y)$ gdje je $Y = V(\mathbf{P})$. Ako je y na dnu glasačkog listića i-tog glasača, tada će y ostati pobjednik bez obzira kako glasač i promijeni svoj glasački listić. Dakle, možemo pretpostaviti da postoje alternative $z_1, ...z_k$ koje se nalaze ispod y u glasačkom listiću i-tog glasača i koje nisu pobjednici. Kako y više ne bi bio pobjednik glasač i mora maknuti barem jedan od $z_j,\ j = 1, ..., k$ iznad y tako da svaki glasač preferira taj z_j nad y.

Odaberimo z_1 takav da je yP_iz_1 za glasača i, a z_1P_jy za $j \neq i$, tj. za ostale glasače. Zato što z_1 nije pobjednik (jer je ispod y na glasačkom listiću glasača i) možemo izabrati neki z_2 takav da je $z_2P_jz_1$, za $j \neq i$, tj. isto tada vrijedi i za y, odnosno $\forall j \neq i,\ z_2P_jy$. Zato što je y pobjednik, za glasača i mora vrijediti da yP_iz_2. Sada z_2 ima ista svojstva kao i z_1 iz čega slijedi da možemo naći i z_3, z_4 itd.

(vi) Trivijalno slijedi iz definicija izbornih pravila.

□

Sljedeći teorem govori koja su još izborna pravila osim Bordinog manipulabilna u smislu jednog pobjednika:

Teorem 2.5. *Za svako od sljedećih pravila postoji $n \geq 1$ i skup alternativa A tako da je izborno pravilo za (A, n) manipulabilno u smislu jednog pobjednika:*

1. *pravilo većinskog glasovanja s balotažom*
2. *slabo Condorcetovo pravilo*
3. *Copelandovo pravilo*
4. *pravilo uzastopnog uspoređivanja parova*
5. *Hareovo pravilo*
6. *Coombsovo pravilo*
7. *iterirano pravilo većinskog glasovanja*

Dokaz.

1. Pravilo većinskog glasovanja s balotažom: neka je $A = \{a, b, c\}$, $n = 5$ i promotrimo profile:

		P						**P′**		
a	a	c	c	b		b	a	c	c	b
b	b	a	a	c		a	b	a	a	c
c	c	b	b	a		c	c	b	b	a

   Ako je V pravilo većinskog glasovanja s balotažom, tada $V(\mathbf{P}) = \{c\}$ i $V(\mathbf{P}') = \{b\}$, pa je prvom glasaču poboljšan izborni ishod s trećeg mjesta na drugo.

2. Slabo Condorcetovo pravilo: neka je $A = \{a, b, c, d\}$, $n = 4$ i promotrimo profile:

	P					**P′**		
a	c	b	d		b	c	b	d
b	a	d	c		a	a	d	c
c	b	c	a		d	b	c	a
d	d	a	b		c	d	a	b

   Ako je V slabo Condorcetovo pravilo, tada $V(\mathbf{P}) = \{c\}$ i $V(\mathbf{P}') = \{b\}$, pa je prvom glasaču poboljšan izborni ishod s trećeg mjesta na drugo.

3. Copelandovo pravilo: neka je $A = \{a, b, c, d, e\}$, $n = 4$ i promotrimo profile:

P				**P′**			
a	c	a	d	c	c	a	d
b	e	e	b	a	e	e	b
c	d	d	e	b	d	d	e
d	b	c	c	e	b	c	c
e	a	b	a	d	a	b	a

Ako je V Copelandovo pravilo, tada $V(\mathbf{P}) = \{d\}$ i $V(\mathbf{P}') = \{c\}$, pa je prvom glasaču poboljšan izborni ishod s četvrtog mjesta na treće.

4. Pravilo uzastopnog uspoređivanja parova: neka je $A = \{a, b, c\}$, $n = 3$ i promotrimo profile:

P			**P′**		
a	b	c	b	b	c
b	c	a	a	c	a
c	a	b	c	a	b

Ako je V pravilo uzastopnog uspoređivanja parova, tada $V(\mathbf{P}) = \{c\}$ i $V(\mathbf{P}') = \{b\}$, pa je prvom glasaču poboljšan izborni ishod s trećeg mjesta na drugo.

5. Hareovo pravilo: neka je $A = \{a, b, c, d\}$, $n = 5$ i promotrimo profile:

P					**P′**				
a	b	c	c	d	b	b	c	c	d
b	a	b	b	b	a	a	b	b	b
c	c	a	a	c	c	c	a	a	c
d	d	d	d	a	d	d	d	d	a

Ako je V Hareovo pravilo, tada $V(\mathbf{P}) = \{c\}$ i $V(\mathbf{P}') = \{b\}$, pa je prvom glasaču poboljšan izborni ishod s trećeg mjesta na drugo.

6. Coombsovo pravilo: neka je $A = \{a, b, c\}$, $n = 5$ i promotrimo profile:

P					**P′**				
a	b	b	a	a	a	b	b	a	a
b	c	c	c	c	c	c	c	c	c
c	a	a	b	b	b	a	a	b	b

Ako je V Coombsovo pravilo, tada $V(\mathbf{P}) = \{c\}$ i $V(\mathbf{P}') = \{a\}$, pa je prvom glasaču poboljšan izborni ishod s trećeg mjesta na prvo.

7. Iterirano pravilo većinskog glasovanja: neka je $A = \{a, b, c\}$, $n = 5$ i promotrimo profile:

P					**P′**				
a	a	c	c	b	b	a	c	c	b
b	b	a	a	c	a	b	a	a	c
c	c	b	b	a	c	c	b	b	a

Ako je V iterirano pravilo većinskog glasovanja, tada $V(\mathbf{P}) = \{c\}$ i $V(\mathbf{P}') = \{b\}$, pa je prvom glasaču poboljšan izborni ishod s trećeg mjesta na drugo.

□

Sljedeća dva teorema govore o jako važnom svojstvu pravila većinskog glasovanja, ali kada ga promatramo u smislu da je neka alternativa dobila apsolutnu većinu, tj. više od pola ukupnih mogućih glasova. U nastavku ćemo to pravilo zvati *pravilo apsolutne većine.*

Teorem 2.6 (May)**.** *Ako je A skup alternativa takav da $|A| = 2$ i n neparan broj glasača, tada je pravilo apsolutne većine jedino izborno pravilo za (A, n) koje je rezolutno, anonimno, neutralno i monotono.*

Teorem 2.7. *Ako je A skup alternativa takav da $|A| = 2$ i n neparan broj glasača, tada pravilo apsolutne većine nije manipulabilno.*

Dokaz. Iz Teorema 2.7 slijedi da je pravilo apsolutne većine monotono. No tada nije ni manipulabilno što slijedi iz definicije monotonosti jer postoje samo dvije alternative.
□

Poglavlje 3

Rezolutna izborna pravila

3.1 Gibbard-Satterthwaiteov teorem

Kako je riječ o rezolutnim izbornim pravilima, u ovom poglavlju nećemo naglašavati da se radi o jednom pobjedniku kada ćemo govoriti o manipulabilnosti.

Definicija 3.1. Rezolutno izborno pravilo V je manipulabilno u kontekstu linearnih i nelinearnih glasačkih listića ako postoje profil $\mathbf{P} = (R_1, ..., R_n)$ kojeg smatramo pravim preferencijama n glasača, te glasački listić Q_i kojeg smatramo neiskrenim za glasača i koji daje profil $\mathbf{P}' = (R_1, ...R_{i-1}, Q_i, R_{i+1}, ..., R_n)$ za koje vrijedi:

$$V(\mathbf{P}')P_iV(\mathbf{P}).$$

U slučaju da ovo ne vrijedi kažemo da izborno pravilo V nije manipulabilno. Sada ćemo iskazati Gibbard-Satterthwaiteov teorem, zatim ćemo razraditi strategiju pomoću koje ćemo ga dokazati.

Teorem 3.2 (Gibbard-Satterthweite)**.** *Za linearne glasačke listiće, ako je $n \in \mathbb{N}$ i A skup od tri ili više alternativa, tada je svako rezolutno pravilo za (A, n) koje nije manipulabilno i zadovoljava Paretovo svojstvo diktatura.*

Dokaz. Teorem ćemo dokazati slično kao i Arrowljev teorem 1.18. Pretpostavit ćemo da V zadovoljava Paretovo svojstvo i da nije manipulabilno. Cilj nam je pronaći glasača koji je diktator za pravilo V.
Prvo ćemo se restringirati samo na parove alternativa. Za dvije alternative ne možemo puno reći o pobjedniku, ali sigurno znamo da ako diktator preferira a u odnosu na b da tada b sigurno nije pobjednik. Ako bi glasač mogao ovo napraviti za svaki par alternativa, onda bi on sigurno trebao biti diktator.
Pogledajmo sada skup N od n glasača i pretpostavimo da svi preferiraju a u odnosu

na b. Tada opet ne možemo zaključiti da je a pobjednik, ali možemo zaključiti da b sigurno nije pobjednik.
Ovime smo motivirali definiciju diktatorskog skupa.

Definicija 3.3. (Diktatorski skup) Neka je $X \subseteq N$ skup glasača, tada za X kažemo da je diktatorski skup ako za svaki profil $\mathbf{P}$ i svaki par alternativa $a, b \in A$ vrijedi sljedeće: ako svi glasači preferiraju a u odnosu na b (aP_ib, $\forall i \in X$)) tada $V(\mathbf{P}) \neq b$.

Dakle, počinjemo s činjenicom da je skup N diktatorski skup i želimo naći glasača i takvog da je $\{i\}$ diktatorski skup, što će značiti da je i diktator. To možemo napraviti tako da ćemo dokazati lemu koja će nam garantirati da će ako diktatorski skup podijelimo na dva dijela jedan od njih također biti diktatorski skup. U tome će nam od važnosti biti sljedeća definicija.

Definicija 3.4. Neka je $X \subseteq N$ skup glasača, te $a, b \in A$ dvije različite alternative. Tada X može s *a blokirati b* u oznaci aXb ako za svaki profil $\mathbf{P}$ u kojemu svi glasači u X preferiraju a u odnosu na b vrijedi $V(\mathbf{P}) \neq b$. Skup X je diktatorski skup ako aXb za svaki različitih par a, b alternativa iz A.

Za uvođenje manipulabilnosti u diskusiju koristimo svojstvo *monotonosti prema dolje.*

Definicija 3.5. (Monotonost prema dolje) Kažemo da je rezolutno izborno pravilo *V monotono prema dolje* ako za svaki profil $\mathbf{P}$ vrijedi: ako je profil $\mathbf{P}'$ dobiven iz $\mathbf{P}$ tako da je jedan glasač pomaknuo jednu alternativu koja ne pobjeđuje za jedno mjesto prema dolje na svom glasačkom listiću tada $V(\mathbf{P}') = V(\mathbf{P})$.

Možemo odmah uočiti da definicija vrijedi i za pomicanje prema dolje i to za više od jednog mjesta više od jedne alternative koja ne pobjeđuje.

Lema 3.6. *Svako rezolutno izborno pravilo koje nije manipulabilno zadovoljava svojstvo monotonosti prema dolje.*

Dokaz. Pretpostavimo da za rezolutno izborno pravilo V ne vrijedi monotonost prema dolje. Tada postoje dva profila $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$ alternativa y tako da:

(1) U profilu $\mathbf{P}$ glasač i rangira y odmah iznad x, $V(\mathbf{P}) = w$ i $w \neq y$, tj. y je alternativa koja nije pobjednik i pomiče se prema dolje.

(2) Profil $\mathbf{P}'$ razlikuje se od $\mathbf{P}$ u tome što je glasač i već zamijenio pozicije od x i y u svom glasačkom listiću i pobjednik je $V(\mathbf{P}') = v \neq w$.

$\mathbf{P}$		$\mathbf{P}'$	
glasački listić i	pobjednik	glasački listić i	pobjednik
y		x	
x	$w \neq y$	y	$v \neq w$

Pretpostavljajući (1) i (2) pokazati ćemo da je ovakav sustav manipulabilan.

Slučaj 1. v je iznad w na glasačkom listiću glasača i u profilu $\mathbf{P}$
U ovom slučaju, možemo pretpostaviti da je glasački listić glasača i u profilu $\mathbf{P}$ onaj iskrenih preferencija. Tada je dakle w pobjednik iako on preferira v u odnosu na w. Ako je njegov glasački listić neiskren (onaj u profilu $\mathbf{P}'$), tada je pobjednik v, te on preferira v u odnosu na w prema svojim iskrenim preferencijama u $\mathbf{P}$.

Slučaj 2. w je iznad v na glasačkom listiću glasača i u profilu $\mathbf{P}'$
U ovom slučaju, možemo pretpostaviti da je glasački listić glasača i u profilu $\mathbf{P}'$ onaj iskrenih preferencija. Tada je dakle v pobjednik iako on preferira w u odnosu na v. Ako je njegov glasački listić neiskren (onaj u profilu $\mathbf{P}$), tada je pobjednik w, te on preferira w u odnosu na v prema svojim iskrenim preferencijama u $\mathbf{P}'$.

Slučaj 3. Ostali slučajevi
U ovom slučaju, w je iznad v u glasačkom listiću glasača i u profilu $\mathbf{P}$ i v je iznad w u glasačkom listiću glasača i u profilu $\mathbf{P}'$. To tada znači da je $w = y$ i $v = x$ što je u kontradikciji s pretpostavkom $y \neq w$.

□

U nastavku pretpostavljamo da je V rezolutno izborno pravilo za (A, n) s linearnim glasačkim listićima, te da je zadovoljeno Paretovo svojstvo i monotonost prema dolje.

Lema 3.7 (Lema o egzistenciji). *Pretpostavimo da je $X \subset N$ skup glasača, te da su a i b dvije različite alternative iz A. Kako bi pokazali aXb dovoljno je izvesti jedan profil $\mathbf{P}$ u kojem vrijedi:*

(1) Svi glasači u X preferiraju a u odnosu na b,

(2) Svi ostali glasači preferiraju b u odnosu na a,

(3) $V(\mathbf{P}) = a$.

Dokaz. Pretpostavimo da imamo profil $\mathbf{P}$ za koji aXb ne vrijedi. Tada imamo i profil $\mathbf{P}'$ u kojem svi glasači iz X preferiraju a u odnosu na b i $V(\mathbf{P}') = b$. U $\mathbf{P}'$ neki glasači koji nisu u X mogu također preferirati a u odnosu na b, ali zato što pretpostavljamo monotonost prema dolje možemo izvesti profil $\mathbf{P}''$ tako da svaki takav glasač pomakne alternativu a koja nije pobjednik ispod alternative b, a da i dalje vrijedi $V(\mathbf{P}'') = b$. Dakle, za $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}''$ vrijede (1) i (2) i $V(\mathbf{P}) = a$ i $V(\mathbf{P}'') = b$.
Neka je c alternativa različita od a i b i neka je svi glasači u oba profila pomaknu na dno svojih glasačkih listića. Zbog monotonosti prema dolje, a ostaje pobjednik u prvom profilu i b u drugom. Radimo ovo sve dok postoje alternative koje su različite od a, b, c i svih iskorištenih. Vremenom ćemo dobiti dva izborna profila koji imaju jednake glasačke listiće, te a kao pobjednika za prve izbore i b kao pobjednika za druge što je kontradikcija. □

Lema 3.8 (Lema o razdjeli)**.** *Pretpostavimo da je $X \subseteq N$ skup glasača i a, b, c različite alternative iz A. Također pretpostavimo da aXb i da je X particioniran u disjunktne podskupove Y i Z (od kojih jedan može biti prazan). Tada vrijedi ili aYc ili cZb.*

Dokaz. Lemu dokazujemo pomoću Condorcetovog paradoksa iz Primjera 1.16. Pogledajmo neki profil $\mathbf{P}$ u kojem svaki glasač iz Y ima alternativu a na prvom mjestu, b na drugom i c na trećem, svaki glasač iz Z ima alternativu c na prvom mjestu, a na drugom i b na trećem, te svi ostali glasači iz $N \setminus X$ imaju alternativu b na prvom mjestu, c na drugom i a na trećem mjestu.

P

glasači u Y	glasači u Z	glasači u $N \setminus X$
a	c	b
b	a	c
c	b	a
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Prema Paretovom svojstvu, $V(\mathbf{P}) \in \{a, b, c\}$. Štoviše, $V(\mathbf{P}) \neq b$ zbog pretpostavke aXb i toga što svi glasači iz $X = Y \cup Z$ preferiraju a u odnosu na b. Sada po Lemi o egzistenciji 3.7 ako je $V(\mathbf{P}) = a$ tada aYc, a ako $V(\mathbf{P}) = c$ tada cZb. □

Lema 3.9. *Pretpostavimo da je $X \subseteq N$ skup glasača, te da su a, b i c tri različite alternative iz A. Tada vrijedi:*

(1) Ako aXb tada aXc

(2) Ako aXb tada cXb.

Dokaz. Uočimo da smo u dokazu Leme o razdjeli 3.8 dopustili da Y ili Z budu prazni skupovi. Zbog Paretovog svojstva, nikad neće vrijediti $a\emptyset b$. Stoga (1) i (2) direktno slijede iz dokaza prethodne leme kada $Y = N$ i $Z = \emptyset$, te $Y = \emptyset$ i $Z = N$. □

Sljedeća lema govori o tome kako je skup X glasača diktatorski ako aXb samo za jedan par alternativa $a, b \in A$.

Lema 3.10. *Pretpostavimo da je $X \subseteq N$ skup glasača, te da za neke dvije alternative $a, b \in A$ vrijedi aXb. Tada je X diktatorski skup.*

Dokaz. Pretspostavimo da su x i y različite alternative. Pokazati ćemo da mora vrijediti xXy.

Slučaj 1. $y \neq a$
Zbog aXb i $y \neq a$, po Lemi 3.9 pod (1) znamo da aXy. Jer je $x \neq y$ možemo primijeniti Lemu 3.9 pod (2) pa vrijedi xXy.

Slučaj 2. $x \neq b$
Zbog aXb i $x \neq b$, po Lemi 3.9 pod (1) znamo da xXb. Jer je $y \neq x$ možemo primijeniti Lemu 3.9 pod (2) pa vrijedi xXy.

Slučaj 3. $y = a$ i $x = b$
Kako A ima tri ili više elmenata, možemo izabrati c različit od a i b. Sada zbog aXb po Lemi 3.9 pod (1) znamo da aXc, a po Lemi 3.9 pod (2) znamo da bXc. Još jednom upotrijebimo Lemu 3.9 pod (1) iz čega slijedi da bXa, tj. po pretpostavci xXy.

□

Lema 3.11. *Ako je X diktatorski skup , te ako ga podijelimo na disjunktne podskupove Y i Z, tada je ili Y diktatorski skup ili je Z diktatorski skup.*

Dokaz. Ako su a, b i c tri različite alternative, tada znamo da aXb jer je X diktatorski skup. Tada po Lemi o razdjeli vrijedi ili aYc ili cZb. Prema Lemi 3.10 Y je diktatorski skup u prvom slučaju, a Z u drugom slučaju. □

Lema 3.12. *Ako je X diktatorski skup, tada postoji glasač $i \in X$ takav da je $\{i\}$ diktatorski skup. Posebno, zbog toga što je N (prema Paretovom svojstvu) diktatorski skup postoji glasač koji je diktator za izborno pravilo V.*

Dokaz. Slijedi direktno iz Leme 3.11 i diskusije koja je motivirala definiciju diktatorskog skupa 3.3. □

Ovom lemom završavamo dokaz Gibbard-Satterthwaiteovog teorema 3.2.

□

Korolar 3.13. *Izborno pravilo V za linearne glasačke listiće i skup A koji sadrži više od tri alternative je nenametnuto, rezolutno i nije manipulabilno ako i samo ako je diktatura.*

Dokaz.

$\boxed{\Leftarrow}$ Diktatura je očigledno nenametnuta, rezolutna i nije manipulabilna.

$\boxed{\Rightarrow}$ Za drugi smjer je dovoljno pokazati: ako je V nenametnuto, rezolutno i nemanipulabilno da tada zadovoljava Paretovo svojstvo. Pretpostavimo suprotno, tj. da Paretovo svojstvo ne vrijedi i neka je $\mathbf{P}$ profil u kojem svaki glasač preferira a u odnosu na b, i $V(\mathbf{P}) = b$. Zato što V nije manipulabilno zadovoljava svojstvo monotonosti prema dolje, pa BSOMP da se kod svakog glasača sve ostale alternative (različite od a i b) nalaze ispod b, tj. a se nalazi na vrhu glasačkog listića svakog glasača. Zato što je V nenametnuto izborno pravilo možemo izabrati neki profil $\mathbf{P}'$ za koji je $V(\mathbf{P}') = a$. Sada mijenjamo glasački listić u $\mathbf{P}$ sa onim iz $\mathbf{P}'$ za prvog glasača, pa za drugog itd. U nekom trenutku, izborni pobjednik postaje a. Ako se to dogodilo za glasača i možemo pretpostaviti da njegov originalni glasački istić iz $\mathbf{P}$ predstavlja njegove iskrene preferencije, a sada njegov neiskren glasački listić mijenja ishod izbora iz b koji se ne nalazi na vrhu njegovog glasačkog listića u a koji se nalazi. To je manipulacija, čime smo došli do kontradikcije.

□

Korolar 3.14. *Za linearne glasačke listiće i tri ili više alternativa, svako nenametnuto izborno pravilo za (A, n) koje nije diktatura je manipulabilno u smislu da postoje profili $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$, te glasač i takav da $\mathbf{P}|_{N\setminus\{i\}} = \mathbf{P}'|_{N\setminus\{i\}}$, te glasač i čije su iskrene preferencije dane njegovim glasačkim listićem iz profila $\mathbf{P}$ preferira izborni ishod X iz $\mathbf{P}'$ u odnosu na izborni ishod Y iz $\mathbf{P}$ u sljedećem smislu:*

$$\max_i(X \setminus Y, \mathbf{P}) P_i \min_i(Y, \mathbf{P}) \ \textit{ ili } \ \max_i(X, \mathbf{P}) P_i \min_i(Y \setminus X, \mathbf{P})$$

Sljedeća propozicija tehničke je prirode te ju navodimo bez dokaza:

Propozicija 3.15. *Pretpostavimo da A ima tri ili više elemenata i da je β irefleksivna binarna relacija na A koja zadovoljava sljedeće: za neke tri različite alternative $a, b, c \in A$*

(1) $a\beta b \Rightarrow a\beta c$, *i*

(2) $a\beta b \Rightarrow c\beta b$. *Tada je ili* $\beta = \emptyset$ *ili* $\beta = (A \times A) \setminus \Delta$, *gdje je* $\Delta = \{(a, a) : a \in A\}$.

Propozicija 3.16. *Pretpostavimo da za svaki skup* $X \subseteq N$ *imamo antirefleksivnu binarnu relaciju također u oznaci* X *na skupu* A *s tri ili više alternativa. Neka je skup* $X \subseteq N$ *diktatorski skup ako* aXb *za svaki par različitih alternativa* a *i* b *iz* A *i pretpostavimo da je skup* N *sam po sebi diktatorski skup i da* $a\emptyset b$ *ne vrijedi za svaki par* a *i* b. *Pretpostavimo i da vrijedi svojstvo razdvajanja: ako* aXb *i* c *različit od* a, b, *tada za svaku particiju od* X *u disjunktne podskupove* Y *i* Z *(od kojih jedan može biti prazan) vrijedi ili* aYc *ili* cZb.
Tada za svaki diktatorski skup X *postoji* $i \in X$ *takav da je* $\{i\}$ *također diktatorski skup.*

Dokaz. Prvo tvrdimo da ako aXb za neki par alternativa a i b, tada je X diktatorski skup. Kako bi to vidjeli u svojstvu razdvajanja stavimo prvo $Y = \emptyset$ i onda $Z = \emptyset$. Zato što nikad ne vrijedi $a\emptyset b$ binarna relacija X zadovoljava uvjete Propozcije 3.15. Stoga, ili aXb ne vrijedi (što nije slučaj) ili je X diktatorski skup što smo željeli pokazati.
Sada ako je X diktatorski skup, tada možemo izabrati $Y \subseteq X$ kao neprazan minimalni diktatorski skup među svim podskupovima od X. Ako Y nije jednočlan, tada bi se opet mogli pozvati na svojstvo razdvajanja u iskazu teorema kako bi došli do podskupa od Y koji je prema prvom dijelu dokaza opet diktatorski skup što bi bila kontradikcija s minimalnošću od Y. □

3.2 Nelinearni glasački listići s izjednačenim kandidatima

U ovom poglavlju baviti ćemo se Gibbard-Satterthwaiteovim teoremom u kontekstu glasačkih listića koji nemaju linearan uređaj. U takvim listićima mogu se pojaviti kandidati koji su izjednačeni, pa nam izborno pravilo ne mora dati jedinstvenog pobjednika. Zbog toga trebamo uvesti nove pojmove *slabog diktatora* i *slabe diktature*.

Definicija 3.17. U kontekstu nelinearnih glasačkih listića, glasač je *slabi diktator* za izborno pravilo V ako je jedinstveni pobjednik svakih izbora jedna od alternativa koje taj glasač ima izjednačene u vrhu svog glasačkog listića. Izborno pravilo V je *slaba diktatura* ako postoji glasač koji je slabi diktator za V.

Teorem 3.18 (Gibbard-Satterthwaiteov teorem za nelinearne glasačke listiće)**.** *Za nelinearne glasačke listiće, ako je* $n \in \mathbb{N}$ *i* A *skup od tri ili više alternativa, tada je svako rezolutno pravilo za* (A, n) *koje je nenametnuto i nije manipulabilno slaba diktatura.*

Dokaz. Za dokaz teorema koristimo Korolar 3.13. Neka je V' restrikcija od V na linearne glasačke listiće. Tada očito V' nije manipulabilno jer nije ni V. Tvrdimo također da V' zadovoljava svojstvo jednoglasnosti.
Pretpostavimo suprotno da je $\mathbf{P}$ profil u kojem svaki glasač ima linearan glasački listić s istom alternativom x na vrhu istog, te da $V(\mathbf{P}) \neq x$. Izaberimo profil $\mathbf{P}'$ koji nije linearno uređen, te može imati izjednačene kandidate za koji vrijedi $V(\mathbf{P}') = x$. Sada kao i u dokazu Korolara 3.13 u profilu $\mathbf{P}$ mijenjamo glasačke listiće jedan po jedan sve dok x ne postane pobjednik. Zadnja zamjena glasačkog listića (recimo kod glasača i) predstavlja manipulaciju izbornog pravila V jer su glasaču i iskrene preferencije bile dane glasačkim listićem u $\mathbf{P}$ s x na vrhu glasačkog listića, te je promjenom (davanjem neiskrenog glasačkog listića) osigurao pobjedu svog najbolje rangiranog kandidata. Time smo došli do kontradikcije, pa V' zadovoljava svojstvo jednoglasnosti.
Sada iz Korolara 3.13 slijedi da je V' diktatura. Stoga možemo pretpostaviti da je najviše rangirana alternativa glasača i jedinstveni pobjednik izbora ako su glasački listići linearni. Sada ćemo pokazati da je glasač i slabi diktator za V.
Pretpostavimo da glasač i nije slabi diktator za V. Tada postoji profil $\mathbf{P}$ takav da je $V(\mathbf{P}) = x$, ali x nije među alternativama koje su glasaču i izjednačene kao kandidati na vrhu njegovog glasačkog listića. Sada u svim ostalim glasačkim listićima pomičemo x mjesto po mjesto sve dok se ne nađe na vrhu glasačkog listića. Tada x sigurno ostaje pobjednik jer bi inače to bila manipulacija tog glasača. Slično, možemo jednu po jednu micati jednakosti među preferencijama u ostalim glasačkim listićima, te i dalje imati x kao pobjednika izbora jer bi poništavanje takvog poteza donijelo biraču njegov najbolji izbor što bi opet predstavljalo manipulaciju. Sada maknemo jednakosti u preferencijama i glasaču i u čijem slučaju alternativa koja je bila na vrhu njegovog glasačkog listića postaje pobjednik. Stoga, originalni glasački listić su bile njegove iskrene preferencije, te je poboljšan njegov izbor davanjem neiskrenog glasačkog listića, te je on slabi diktator za V.

□

3.3 Ekvivalencija Arrowljevog i Gibbard-Satthertwaiteovog teorema

Arrowljev i Gibbard-Satterthwaiteov teorem razlikuju se na nekoliko razina. Na kraju Poglavlja 1.2 Teorem 1.19 i Lema 1.20 rješavaju probleme različitih pretpostavki teorema (Gibbard-Satterthwaiteov teorem zahtjeva rezolutnost, a Arrowljev ne) i različitih objekata s kojima teoremi rade (Arrowljev teorem se odnosi na funkcije društvenog blagostanja, a Gibbard-Satterthwaiteov teorem na izborna pravila). Kako bi mogli iskazati i dokazati teorem koji povezuje Arrowljev i Gibbard-Satterthwaiteov teorem napraviti ćemo još dvije pretpostavke:

1) Zamijeniti ćemo nenametnutost s Paretovim svojstvom u Gibbard- Satterthwaite-ovom teoremu

2) U Arrowljevom teoremu ćemo zamijeniti *IIA* s *MIIA* gdje je *MIIA* svojstvo koje u nezavisnost o nebitnim alternativama ugrađuje monotonost definirano na sljedeći način:

    (MIIA) Rezolutno izborno pravilo zadovoljava *MIIA* ako svaki put za profile $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$ i različite alternative a i b takve da je $V(\mathbf{P}) = a$ i $V(\mathbf{P}) = b$ postoji i takav da aP_ib i $bP_i'a$.

Teorem 3.19. *Za svaki skup A s tri ili više alternativa i svaki $n \geq 1$, izborno pravilo za (A, n) koje zadovoljava Paretovo svojstvo je rezolutno i nije manipulabilno ako i samo ako zadovoljava svojstvo MIIA.*

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$ Pretpostavimo da je V rezolutno izborno pravilo, nije manipulabilno i zadovoljava Paretovo svojstvo. Pretpostavimo da su $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$ profili, te a i b različite alternative takve da $V(\mathbf{P}) = a$ i $V(\mathbf{P}') = b$. Želimo pokazati da postoji i takav da aP_ib i $bP_i'a$. Zato što je V rezolutno i nije manipulabilno prema Lemi 3.6 slijedi da V zadovoljava svojstvo monotonosti prema dolje.
Stoga, za svakog glasača j za kojeg je bP_ja i $aP_j'b$ možemo premjestiti b na dno glasačkog listića u $\mathbf{P}$. I ostale alternative osim a i b (u oznaci $c_1, c_2, ...c_k$) možemo jednu po jednu tim redom premještati na dno svih glasačkih listića u $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$. Sada su a i b na prva dva mjesta na svim glasačkim listićima u profilima $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$, a sve druge alternative se javljaju u poretku $c_1, ..., c_k$ u svakom glasačkom listiću. Također, za svaki glasački listić za kojeg glasač preferira b u odnosu na a u $\mathbf{P}$, ista stvar vrijedi i u $\mathbf{P}'$ i vrijedi $V(\mathbf{P}) = a$ i $V(\mathbf{P}') = b$. Zbog različitosti profila $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}'$ možemo izabrati i takav da je $P_i \neq P_i'$. No, to znači da je aP_ib i $bP_i'a$ što smo i željeli pokazati.

$\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da V zadovoljava Paretovo i *MIIA* svojstvo. Prema Lemi 1.20 slijedi da je V rezolutno pravilo, te nam preostaje pokazati da nije manipulabilno. Pretpostavimo da su $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$ profili, i glasač, $\mathbf{P}|_{N\setminus\{i\}} = \mathbf{P}'|_{N\setminus\{i\}}$, $V(\mathbf{P}) = a$ i bP_ia. Tada *MIIA* povlači da $V(\mathbf{P}') \neq b$ zato što za svakog glasača koji preferira a u odnosu na b u $\mathbf{P}$ isto vrijedi i u $\mathbf{P}'$. Stoga manipulacija glasača i ne uspijeva.

□

Poglavlje 4

Nerezolutna izborna pravila

4.1 Duggan-Schwartzov teorem

U ovom poglavlju baviti ćemo se generalizacijom Gibbard-Satterthwaiteovog teorema u kontekstu nerezolutnih izbornih pravila. Prvo ćemo se prisjetiti definicije manipulabilnosti optimistom i pesimistom s proširenjem na nelinearne glasačke listiće:

Definicija 4.1. Za linearne i nelinearne glasačke listiće izborno pravilo V je manipulabilno optimističnim glasačem i ako postoji profil $\mathbf{P} = (R_1, ..., R_n)$ koji smatramo iskrenim preferencijama svih n glasača i glasački listić Q_i kojeg smatramo neiskrenim glasačkim listićem glasača i tako da uz $\mathbf{P}' = (R_1, ..., R_{i-1}, Q_i, R_{i+1}, ..., R_n)$ vrijedi:

$$(\exists x \in V(\mathbf{P}'))(\forall y \in V(\mathbf{P}))(xP_iy).$$

Slično, izborno pravilo V je manipulabilno pesimističnim glasačem ako postoji profil $\mathbf{P} = (R_1, ..., R_n)$ koji smatramo iskrenim preferencijama svih n glasača i glasački listić Q_i kojeg smatramo neiskrenim glasačkim listićem glasača i tako da uz $\mathbf{P}' = (R_1, ..., R_{i-1}, Q_i, R_{i+1}, ..., R_n)$ vrijedi:

$$(\forall x \in V(\mathbf{P}'))(\exists y \in V(\mathbf{P}))(xP_iy).$$

Kažemo da je glasač i *nominator* za izborno pravilo V ako za svaki profil $\mathbf{P}$ i svaku alternativu x vrijedi da ako glasač i ima alternativu x na vrhu glasačkog listića, da je tada $x \in V(\mathbf{P})$.

Manipulabilnost optimistom je moguća ako postoji barem jedan izbor u kojem neki glasač može predati neiskren glasački listić i poboljšati *max* skupa pobjednika prema svojim iskrenim preferencijama, tj. barem jedan od pobjednika iz $\mathbf{P}'$ je prema R_i striktno preferirani u odnosu na sve pobjednike iz $\mathbf{P}$. Slično, manipulabilnost pesimistom je moguća ako postoji barem jedan izbor u kojem neki glasač može predati neiskren glasački listić i poboljšati *min* skupa pobjednika prema svojim iskrenim preferencijama, tj. svi pobjednici iz $\mathbf{P}'$ su prema R_i striktno preferirani u odnosu na barem jednog pobjednika iz $\mathbf{P}$.

Duggan-Schwartzov teorem za linearne glasačke listiće dokazati ćemo na sličan način kao Gibbard-Satterthwaiteov teorem zbog čega nam trebaju sljedeći pomoćni rezultati:

Definicija 4.2. Ako je $\mathbf{P}$ profil, za skup X alternativa kažemo da je *top-skup* za $\mathbf{P}$ ako svaki glasač preferira svaku alternativu u X u odnosu na svaku alternativu koja nije u X.

Možemo uočiti da ako je x na vrhu glasačkog listića svakog glasača, tada je $\{x\}$ top-skup.

Definicija 4.3. Izborno pravilo V zadovoljava svojstvo *monotonosti prema dolje za jednog pobjednika* za svaki profil $\mathbf{P}$ za koji je $|V(\mathbf{P})| = 1$, ako je $\mathbf{P}'$ dobiven iz $\mathbf{P}$ tako da jedan glasač pomakne jednu alternativu koja ne pobjeđuje za jedno mjesto prema dolje u svom glasačku listiću, tada $V(\mathbf{P}') = V(\mathbf{P})$.

Kao i u slučaju s monotonosti prema dolje, možemo uočiti da definicija vrijedi i za pomicanje prema dolje i to za više od jednog glasača, za više od jednog mjesta i više od jedne alternative koja ne pobjeđuje.

Primjer 4.4. Primjer izbornog pravila koje zadovoljava monotonost prema dolje za jednog pobjednika je pravilo omninominacije. U tom slučaju, pobjednik izbora može biti samo jedan ako svaki glasač ima istu alternativu na vrhu svog glasačkog listića. Pravilo većinskog glasovanja je primjer izbornog pravila koje ne zadovoljava monotonost prema dolje za jednog pobjednika. Neka je dan sljedeći profil:

	P		
a	a	b	c
b	b	a	b
c	c	c	a

Pravilo većinskog glasovanja za pobjednika daje alternativu $\{a\}$, ali ako krajnji desni glasač pomakne alternativu c jedno mjesto prema dolje (tj. zamijeni b i c), tada su a i b izjednačeni kandidati. Ovo je također primjer manipulabilnosti optimistom.

Teorem 4.5 (Duggan-Schwartzov teorem za linearne glasačke listiće)**.** *Za linearne glasačke listiće, ako je $n \in \mathbb{N}$ i A skup od tri ili više alternativa, tada svako izborno pravilo za (A, n) koje je nenametnuto i nije manipulabilno optimistom ili pesimistom ima nominatora.*

Dokaz. Pretpostavimo da je V izborno pravilo koje nije manipulabilno ni optimistom ni pesimistom i da je $\mathbf{P}$ profil za koji je X top-skup. Pretpostavimo da je V nenametnuto. Tada tvrdimo da je $V(\mathbf{P}) \subseteq X$. Ako to ne bi vrijedilo, mogli bismo pretvoriti $\mathbf{P}$ u $\mathbf{P}'$ jedan po jedan glasački listić i tako sve dok skup pobjednika ne bi postao podskup od X. Ako se to dogodi dok mijenjamo glasački listić igrača i iz B_i u B_i' možemo B_i uzeti kao iskrene preferencije glasača i i primijetiti da je njegov neiskreni glasački listić B_i' poboljšao *min* iz nečega što nije u X u nešto što je u X. Sada ćemo nastaviti dokaz na sličan način kao i Gibbard-Satterthwaiteov teorem 3.2.

Lema 4.6. *Svako izborno pravilo koje nije manipulabilno optimistom ili pesimistom zadovoljava svojstvo monotonosti prema dolje za jednog pobjednika.*

Dokaz. Pretpostavimo da za rezolutno izborno pravilo V ne vrijedi monotonost prema dolje za jednog pobjednika. Tada postoje dva profila $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$ i alternativa y tako da:

(1) U profilu $\mathbf{P}$ glasač i rangira y odmah iznad x, $V(\mathbf{P}) = w$ i $w \neq y$, tj. y je alternativa koja nije pobjednik i pomiče se prema dolje.

(2) Profil $\mathbf{P}'$ razlikuje se od $\mathbf{P}$ u tome što je glasač i već zamijenio pozicije od x i y u svom glasačkom listiću i pobjednik je $V(\mathbf{P}') = v \neq w$.

Pretpostavljajući (1) i (2) pokazati ćemo da je ovakav sustav manipulabilan.

Slučaj 1. v je iznad w na glasačkom listiću glasača i u profilu $\mathbf{P}$
U ovom slučaju, možemo pretpostaviti da je glasački listić glasača i u profilu $\mathbf{P}$ onaj iskrenih preferencija. Tada ako glasač i preda glasački listić iskrenih preferencija $\mathbf{P}$, w je jedini pobjednik iako on preferira v u odnosu na w. Ako je njegov glasački listić neiskren (onaj u profilu $\mathbf{P}'$), tada on poboljšava svoj *max* s w barem na v.

Slučaj 2. w je iznad v na glasačkom listiću glasača i u profilu $\mathbf{P}'$
U ovom slučaju, možemo pretpostaviti da je glasački listić glasača i u profilu $\mathbf{P}'$ onaj iskrenih preferencija. Tada je dakle v među pobjednicima iako on preferira w u odnosu na v. Ako je njegov glasački listić neiskren (onaj u profilu $\mathbf{P}$, tada je jedini pobjednik w, te tada glasač i poboljšava svoj *min* s v (ili gore) na w.

Slučaj 3. Ostali slučajevi
U ovom slučaju, w je iznad v u glasačkom listiću glasača i u profilu $\mathbf{P}$ i v je iznad w u glasačkom listiću glasača i u profilu $\mathbf{P}'$. To tada znači da je $w = y$ i $v = x$ što je u kontradikciji s pretpostavkom $y \neq w$.

□

U ostatku dokaza pretpostavljamo da je V izborno pravilo za (A, n) za linearne glasačke listiće, te da je nenametnuto i ne može biti manipulirano optimistom ili pesimistom, te stoga zadovoljava svojstvo monotonosti prema dolje za jednog pobjednika.

Lema 4.7 (Lema o egzistenciji)**.** *Pretpostavimo da je $X \subset N$ skup glasača, te da su a i b dvije različite alternative iz A. Kako bi pokazali aXb dovoljno je izvesti jedan profil $\mathbf{P}$ u kojem vrijedi:*

(1) $\{a, b\}$ je top-skup,

(2) Svi glasači u X preferiraju a u odnosu na b,

(3) Svi ostali glasači preferiraju b u odnosu na a,

(4) $a \in V(\mathbf{P})$.

Dokaz. Pretpostavimo da imamo profil $\mathbf{P}$ u kojem aXb ne vrijedi. Tada imamo i profil $\mathbf{P}'$ u kojem svi glasači u X preferiraju a u odnosu na b i $V(\mathbf{P}') = \{b\}$. Koristeći monotonosti prema dolje za jednog pobjednika možemo transformirati profil $\mathbf{P}'$ u profil $\mathbf{P}$ koji smo pretpostavili da postoji i dobiti $V(\mathbf{P}) = \{b\}$. No, to je kontradikcija jer je $a \in V(\mathbf{P})$. □

Lema 4.8 (Lema o razdjeli)**.** *Pretpostavimo da je $X \subseteq N$ skup glasača i a, b, c različite alternative iz A. Također pretpostavimo da aXb i da je X particioniran u disjunktne podskupove Y i Z (od kojih jedan može biti prazan). Tada vrijedi ili aYc ili cZb.*

Dokaz. Pogledajmo neki profil $\mathbf{P}$ u kojem svaki glasač iz Y ima alternativu a na prvom mjestu, b na drugom i c na trećem, svaki glasač iz Z ima alternativu c na prvom mjestu, a na drugom i b na trećem, te svi ostali glasači iz $N \setminus X$ imaju alternativu b na prvom mjestu, c na drugom i a na trećem mjestu.

P

glasači u Y	glasači u Z	glasači u $N \setminus X$
a	c	b
b	a	c
c	b	a
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Zato što je $\{a, b, c\}$ top-skup znamo da je $V(\mathbf{P}) \subseteq \{a, b, c\}$. Zbog aXb, $V(\mathbf{P}) \neq \{b\}$, te je stoga $a \in V(\mathbf{P})$ ili $c \in V(\mathbf{P})$.

Slučaj 1. $a \in V(\mathbf{P})$

Za svakog glasača u Y, pomičemo b jedno po jedno mjesto dok ne dođe ispod c. Dok mijenjamo glasačke listiće iz B_i u C_i alternativa a ostaje pobjednik dok bi u protivnom mogli uzeti C_i kao iskrene preferencije glasača i čime bi on poboljšao svoj *max* iz nečega što nije njegov prvi izbor u svoj prvi izbor a. Sada za svakog glasača u $N \setminus X$ (oni nisu ni u Y ni u Z) pomičemo b jedno po jedno mjesto dok ne dođe ispod a. Dok mijenjamo glasačke listiće iz B_i u C_i alternativa a ostaje pobjednik dok bi u protivnom mogli uzeti B_i kao iskrene preferencije glasača i čime bi on poboljšao svoj *min* iz a u b ili c. Sada smo izveli profil $\mathbf{P}'$ u kojem je $\{a, c\}$ top-skup, svi u Y preferiraju a u odnosu na c, svi ostali preferiraju c u odnosu na a, te vrijedi $a \in V(\mathbf{P}')$. Tada prema Lemi 4.7 slijedi aYc.

Slučaj 2. $c \in V(\mathbf{P})$

Za svakog glasača u Z, pomičemo a jedno po jedno mjesto dok ne dođe ispod b. Dok mijenjamo glasačke listiće iz B_i u C_i alternativa c ostaje pobjednik dok bi u protivnom mogli uzeti C_i kao iskrene preferencije glasača i čime bi on poboljšao svoj *max* iz nečega što nije njegov prvi izbor u svoj prvi izbor c. Sada za svakog glasača u Y pomičemo a jedno po jedno mjesto dok ne dođe ispod c. Dok mijenjamo glasačke listiće iz B_i u C_i alternativa c ostaje pobjednik dok bi u protivnom mogli uzeti B_i kao iskrene preferencije glasača i čime bi on poboljšao svoj *min* iz c u a ili b. Sada smo izveli profil $\mathbf{P}'$ u kojem je $\{b, c\}$ top-skup, svi u Z preferiraju c u odnosu na b, svi ostali preferiraju b u odnosu na c, te vrijedi $c \in V(\mathbf{P}')$. Tada prema Lemi 4.7 slijedi cZb.

□

Lema 4.9. *Ako je X diktatorski skup, tada postoji glasač $i \in X$ takav da je $\{i\}$ diktatorski skup. Stoga je prvi izbor glasača i jedinstveni pobjednik ako je skup pobjednika jednočlan.*

Dokaz. Pokazati ćemo da za svaki par alternativa vrijedi aNb, dok $a\emptyset b$ ne vrijedi. Tada će rezultat teorema slijediti iz Leme 4.8 i Propozicije 3.16. Pretpostavimo da aNb ne vrijedi i izaberimo profil $\mathbf{P}$ u kojem svaki glasač preferira a u odnosu na b, ali $V(\mathbf{P}) = \{b\}$. Neka je sada profil $\mathbf{P}'$ neki profil u kojem je $V(\mathbf{P}') = \{a\}$. Koristeći svojstvo monotonosti prema dolje za jednog pobjednika u profilu $\mathbf{P}'$ možemo pomaknuti b tako da je na dnu svakog glasačkog listića, te svaku alternativu koja ne pobjeđuje pomaknuti ispod b u nekom fiksnom poretku. Na sličan način u profilu $\mathbf{P}$ možemo pomaknuti sve alternative osim a i b u istom fiksnom poretku. No tada smo dobili dva ista profila za koja izborno pravilo V ima dva različita ishoda što je kontradikcija.

Možemo vidjeti da $a\emptyset b$ ne vrijedi izborom profila u kojem je $V(\mathbf{P}) = \{b\}$. Tada svaki glasač u $\emptyset$ (kojeg nema) preferira a u odnosu prema b, ali $V(\mathbf{P}) = \{b\}$. □

Nastavljamo dokaz Duggan-Schwartzovog teorema. Pretpostavimo da je alternativa x s vrha glasačkog listića glasača i jedinstveni pobjednik kad god je skup pobjednika jednočlan (što nam garantira Lema 4.9). Stoga, tvrdimo da se upravo x uvijek nalazi u skupu pobjednika.
Pretpostavimo suprotno, tj. da gornja tvrdnja ne vrijedi i izaberimo profil $\mathbf{P}$ takav da $x \notin V(\mathbf{P})$ i takav da je $|V(\mathbf{P})|$ najmanji mogući. Zbog pretpostavke da je prvi izbor glasača i jedinstveni pobjednik ako je skup pobjednika jednočlan ne može vrijediti $|V(\mathbf{P})| = 1$. Pretpostavimo da je $V(\mathbf{P}) = \{s_1, ..., s_t\}$, $t \geq 2$ i $x \notin V(\mathbf{P})$, te pretpostavimo da za glasača i vrijedi $s_1 P_i s_2 P_i ... P_i s_t$. Neka je $\mathbf{P}'$ neki profil u kojem je glasački listić glasača i isti kao u $\mathbf{P}$, ali imaju $s_1, ..., s_t$ kao top-skup u tom redoslijedu. Sada mijenjamo $\mathbf{P}$ u $\mathbf{P}'$ jedan po jedan glasački listić.
Prvo tvrdimo da dok mijenjamo glasački listić B_j u C_j nijedna nova alternativa w nije dodana u skup $V(\mathbf{P})$, jer bi tada mogli smatrati C_j kao iskrene preferencije glasača j, te bi davanje neiskrenog glasačkog listića B_j poboljšalo *min* iz w (ili gore) u s_t. Ovaj slučaj vrijedi i za $x = w$.
Štoviše, nijedan se s_j ne može ukloniti iz $V(\mathbf{P})$ zbog minimalnosti od $|V(\mathbf{P})|$. Sada počinjući od profila $\mathbf{P}'$ glasač i može dovesti s_1 na vrh svog glasačkog listića i time napraviti skup pobjednika jednočlanim $\{s_1\}$ (zato što je tada $\{s_1\}$ top-skup). Time glasač i poboljšava svoj *min* jer je $t \geq 2$ što je kontradikcija s pretpostavkom. Time smo došli do kraja dokaza Duggan-Schwartzovog teorema. □

4.2 Nelinearni glasački listići s izjednačenim kandidatima

Slično kao i u poglavlju 3.2, bavit ćemo se Duggan-Schwartzovim teoremom u kontekstu nelineranih glasačkih lisitća, tj.kada su u glasačkim listićima dopušteni izjednačeni kandidati.

Teorem 4.10 (Duggan-Schwartzov teorem za nelinearne glasačke listiće)**.** *Za nelinearne glasačke listiće, ako je $n \in \mathbb{N}$ i A skup od tri ili više alternativa tada je svako izborno pravilo V za (A, n) koje je nenametnuto i ne može biti manipulabilno optimistom ili pesimistom diktatura u smislu da postoji glasač kojem se za svaki profil* $\mathbf{P}$, *u skupu $V(\mathbf{P})$ nalazi barem jedna alternativa koju on ima izjednačenu na vrhu svog glasačkog listića.*

Dokaz. Neka je V izborno pravilo iz teorema i V' restrikcija od V na linearne glasačke listiće. Jasno je da tada i V' ne može biti manipulabilno optimistom ili pesimistom. Štoviše, tvrdimo ako je $\mathbf{P}$ profil u kojem je svakom glasaču x na vrhu glasačkog listića, da je tada $V(\mathbf{P}) = \{x\}$. Izaberimo profil (ne nužno s linearnim glasačkim listićima) tako da je $V(\mathbf{P}') = \{x\}$. Mijenjamo $\mathbf{P}$ u $\mathbf{P}'$ jedan po jedan glasački listić dok pobjednik ne postane $\{x\}$. U tom trenutku neki glasač je poboljšao svoj min u alternativu x s vrha njegovog glasačkog listića.
Sada iz Teorema 4.5 slijedi da ako su glasački listići linearni, da je tada alternativa s vrha glasačkog listića glasača i među pobjednicima izbora. Pretpostavimo suprotno, da je profil (s izjednačenim kandidatima) $\mathbf{P}$ takav da se nijedna alternativa s vrha glasačkog listića glasača i ne nalazi među pobjednicima, ali izaberimo ga na način da je $|V(\mathbf{P})|$ najmanji mogući. Jedan po jedan glasački listić pomičemo skup $V(\mathbf{P})$ na vrh svakog glasačkog listića (osim glasača i) i mičemo jednakosti u preferencijama među alternativama. Novi pobjednik w nije dodan u skup pobjednika, inače bi glasačke listiće s $V(\mathbf{P})$ mogli smatrati onim s iskrenim preferencijama i vidjeti da se min poboljšao s w u nešto iz $V(\mathbf{P})$. Također, ništa iz $V(\mathbf{P})$ nije izgubljeno minimalnošću $|V(\mathbf{P})|$.
Sada mičemo jednakosti u preferencijama među alternativama i u glasačkom listiću glasača i, te jedna od alternativa koja je bila u vrhu njegovog glasačkog listića postaje jedan od pobjednika. Glasač i je tako poboljšao svoj max iz nečega što nije bilo u vrhu njegovog glasačkog listića u nešto što je u vrhu njegovog glasačkog listića. $\square$

4.3 Feldmanov teorem

Prisjetimo se kratko manipulabilnosti u smislu očekivane korisnosti: ako postoje profili $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$ te glasač i takav da $\mathbf{P}|_{N\setminus\{i\}} = \mathbf{P}'|_{N\setminus\{i\}}$ za čije iskrene preferencije uzimamo glasački listić iz $\mathbf{P}$ više preferira ishod X iz $\mathbf{P}'$ u odnosu na ishod Y iz $\mathbf{P}$ u sljedećem smislu - postoji funkcija korisnosti u koja predstavlja P_i na način da ako je $p(x) = \frac{1}{|X|}$, $\forall x \in X$ i $p(y) = \frac{1}{|Y|}$, $\forall y \in Y$, tada je

$$\sum_{x\in X} p(x)\cdot u(x) > \sum_{y\in Y} p(y)\cdot u(y,).$$

Ako je u funkcija korisnosti koja reprezentira P_i i $p = (p_1, p_2)$ je fiksiran par vjerojatnosnih funkcija, gdje je p_1 na skupu X i p_2 na skupu Y tada $E_{u,p,i}(X)$ i $E_{u,p,i}(Y)$

označavaju pripadajuće očekivane korisnosti, tj.

$$E_{u,p,i}(X) = \sum_{x \in X} p_1(x) \cdot u(x)$$

$$E_{u,p,i}(Y) = \sum_{y \in Y} p_2(y) \cdot u(y)$$

Za početak postavit ćemo si sljedeće pitanje: Što je kombinatorni ekvivalent postojanja funkcije korisnosti u koja reprezentira P_i za koju vrijedi $E_{u,p,i}(X) > E_{u,p,i}(Y)$ gdje je $p = (p_1, p_2)$ par vjerojatnosnih funkcija za koje vrijedi $p_1(x) = \frac{1}{|X|}$ za svaki $x \in X$ i $p_2(y) = \frac{1}{|Y|}$ za svaki $y \in Y$?
Kako bi odgovorili na to pitanje, moramo generaliziranu verziju u kojoj su funkcije p_1 i p_2 proizvoljne što je jači rezultat. Kako bi mogli odgovoriti na to pitanje, treba nam dodatna notacija:
Ako je R_i slabi uređaj na A i $z \in A$ tada sa $G(z)$ označavamo skup:

$$G(z) = \{x \in A : \ xR_iz\}.$$

Uočimo da je $z \in G(z)$ čak i ako su glasački listići linearno uređeni. Sljedeća propozicija karakterizira željenu relaciju na skupu alternativa:

Propozicija 4.11. *Neka je R fiksan linearan uređaj na A i neka su X i Y dva različita podskupa od A. Zbog notacije, neka je u varijabla čiji su raspon funkcije korisnosti koje reprezentiraju R_i, te neka je (p_1, p_2) fiksiran par strogo pozitivnih vjerojatnosnih funkcija gdje je p_1 na X i p_2 na Y. Tada su za neki $z \in A$ sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(1)

$$\sum_{x \in X \cap G(z)} p_1(x) > \sum_{y \in Y \cap G(z)} p_2(y)$$

(2)

$$\exists u, \ E_{u,p,i}(X) > E_{u,p,i}(Y)$$

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi (1) i izaberimo $z \in A$ takav da $r > s$ gdje je

$$\sum_{x \in X \cap G(z)} p_1(x) = r \text{ i } \sum_{y \in Y \cap G(z)} p_2(x) = s$$

Traženi u ćemo konstruirati ako postavimo $u(a)$ blizu 1 ako $a \in G(z)$ i blizu 0 ako $a \notin G(z)$. Neka je $0 < \epsilon < \frac{r-s}{r-s+1}$. Definiramo u tako da

$$\begin{aligned} 1-\epsilon < u(a) < 1,\ a \in G(z) \\ 0 < u(a) < \epsilon,\ a \notin G(z) \end{aligned}$$

Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} E_{u,p,i}(X) > r \cdot (1-\epsilon) \\ E_{u,p,i}(Y) < s + \epsilon \cdot (1-s) \end{aligned}$$

Iz $\frac{r-s}{r-s+1} > \epsilon$ slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{r-s-\epsilon\cdot(r-s+1)}{r-s+1} > 0 \ &\Rightarrow\ r\cdot(1-\epsilon) - s - \epsilon\cdot(1-s) > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow\ r\cdot(1-\epsilon) > s + \epsilon\cdot(1-s) \end{aligned}$$

iz čega slijedi $E_{u,p,i}(X) > E_{u,p,i}(Y)$,tj. vrijedi (2).
Pretpostavimo sad da (1) ne vrijedi, tj.

$$\sum_{x \in X \cap G(z)} p_1(x) \leq \sum_{y \in Y \cap G(z)} p_2(y),\ \forall z \in A.$$

Pretpostavimo da je u proizvoljna. Pokazat ćemo da je tada $E_{u,p,i}(X) \leq E_{u,p,i}(Y)$ induktivno po $|X \cup Y|$. Ako je $|X \cup Y| = 2$ rezultat je trivijalan jer su tada X i Y jednočlani. Neka je $|X \cup Y| > 2$. Pretpostavimo da je $Y \setminus X \neq \emptyset$ i neka je $y_0 = \max(Y \setminus X)$. Uočimo da ne može vrijediti $X \subseteq G(y_0)$, pa je $(X \cup Y) \setminus G(y_0) \neq \emptyset$. Neka je $w = \max((X \cup Y) \setminus G(y_0))$ i $Y' = (Y \setminus \{y_0\}) \cup \{w\}$. Tada je $|X \cup Y'| < |X \cup Y|$. Definirajmo p_2' na Y' sa

$$p_2'(y) = \begin{cases} p_2(y) & y \neq w \\ p_2(y_0) & y = w \text{ i } w \notin Y \\ p_2(y_0) + p_2(w) & y = w \text{ i } w \in Y \end{cases}$$

Tvrdimo da je tada

$$\sum_{x \in X \cap G(z)} p_1(x) \leq \sum_{y \in Y' \cap G(z)} p_2'(y),\ \forall z \in A$$

Slučaj 1. $z \leq w$ ili $z > y_0$
U ovom slučaju :

$$\sum_{y \in Y' \cap G(z)} p_2'(y) = \sum_{y \in Y \cap G(z)} p_2(y)$$

Slučaj 2. $w < z \leq y_0$

Rezultat slijedi odmah slijedi ako je $y_0 = \max(A)$ jer je tada $|X \cap G(z)| = 0$. Ako je $y_0 \neq \max(A)$, neka je v tada prva alternativa koja je bolja od y_0. Tada je $X \cap G(z) = X \cap G(v)$ pa imamo:

$$\sum_{y \in Y' \cap G(z)} p_2'(y) \leq \sum_{y \in Y \cap G(z)} p_2(y) \leq \sum_{x \in x \cap G(v)} p_1(x) = \sum_{x \in x \cap G(z)} p_1(x)$$

Štoviše, zbog $|X \cup Y'| < |X \cup Y|$ i indukcije slijedi da je $E_{u,p,i}(X) \leq E_{u,p,i}(Y')$. Kako je Y' dobiven prebacivanjem vjerojatnosti koja je bila na y_0 na manje preferiranu alternativu w imamo $E_{u,p,i}(Y') \leq E_{u,p,i}(Y)$. Time smo pokazali da $E_{u,p,i}(X) \leq E_{u,p,i}(Y)$.

Pretpostavimo da je $Y \setminus X = \emptyset$, tj. $Y \subseteq X$ i neka je $x_0 = \max(Y \setminus X)$. Tada $\sum_{x \in x \cap G(x_0)} p_1(x) \geq p(x_0) > 0$ pa je $\sum_{y \in Y \cap G(x_0)} p_2(y) > 0$ i postoji $y \in Y$ (koji je onda i u X) za koji vrijedi $x_0 < y$. Neka je $w = \min(\{y \in Y : x_0 < y\})$. Neka je $X' = X \setminus \{x_0\}$ i uočimo da je $w \in X'$. Tada $|X' \cup Y| < |X \cup Y|$. Definirajmo p_1' na X' sa

$$p_1'(y) = \begin{cases} p_1(x) & x \neq w \\ p_1(x_0) + p_1(w) & x = w \end{cases}$$

Tvrdimo da je tada

$$\sum_{x \in X' \cap G(z)} p_1'(x) \leq \sum_{y \in Y \cap G(z)} p_2(y),\ \forall z \in A$$

Analogno kao ranije možemo pokazati da je

$$\sum_{y \in Y \cap G(z)} p_2(y) \geq \sum_{x \in X' \cap G(z)} p_1'(x).$$

Štoviše, zbog $|X' \cup Y| < |X \cup Y|$ i indukcije slijedi da je $E_{u,p,i}(X') \leq E_{u,p,i}(Y)$. Kako je X' dobiven prebacivanjem vjerojatnosti koja je bila na x_0 na više preferiranu alternativu w imamo $E_{u,p,i}(X) \leq E_{u,p,i}(X')$. Time smo pokazali da

$$E_{u,p,i}(X) \leq E_{u,p,i}(Y).$$

□

Teorem 4.12 (Feldmanov teorem). *Za linearne glasačke listiće, ako je $n \in \mathbb{N}$ i A skup od tri ili više alternativa, tada nenametnuto izborno pravilo za (A, n) nije manipulabilno očekivanom korisnosti ako i samo ako je diktatura ili duumvirat.*

Dokaz. Uočimo da je dovoljno dokazati samo smjer iz lijeva u desno jer drugi smjer slijedi direktno iz definicije ovih izbornih pravila kako je navedeno u dokazu Teorema 2.4 pod (*vi*). U nastavku dokaza pretpostavljamo da je V nenametnuto izborno pravilo, te da nije manipulabilno u smislu očekivane korisnosti.

Lema 4.13. *Postoji glasač i za kojeg vrijedi* $top_i(\mathbf{P}) \in V(\mathbf{P})$ *za svaki profil* $\mathbf{P}$.

Dokaz. Ako V nije manipulabilno u smislu očekivane korisnosti, tada V nije manipulabilno optimistom ili pesimistom. Sada tvrdnja leme slijedi iz Duggan-Schwartzovog teorema 4.5. □

Lema 4.14. *Ako glasač može jednostrano promijeniti ishod izbora iz* $V(\mathbf{P}) = Y$ *u* $V(\mathbf{P}') = X$, *tada niti jedan od sljedećih uvjeta ne vrijedi (gdje ako govorimo o glasaču* j *pišemo* $\max(X)$ *umjesto* $\max_j(X, \mathbf{P})$*):*

1. $\max(X) > \max(Y)$
2. $\max(X) = \max(Y)$ *i* $|X| < |Y|$
3. $\max(X) = \max(Y)$ *i* $|X| = |Y|$ *i* $\max(X \triangle Y) \in X$
4. $\min(X) > \min(Y)$
5. $\min(X) = \min(Y)$ *i* $|X| > |Y|$
6. $\min(X) = \min(Y)$ *i* $|X| = |Y|$ *i* $\min(X \triangle Y) \in Y$

Skica dokaza.
Za svaki od slučajeva dovoljno je naći $z \in X$ takav da je

$$\frac{|Y \cap G(z)|}{|Y|} < \frac{|X \cap G(z)|}{|X|}$$

Dajemo prijedlog za z za svaki od slučajeva:

1. $z = \max(X)$
2. $z = \max(X)$
3. $z = \max(X \triangle Y)$
4. $z = \min(X)$
5. $z = \min(\{x \in A : x > \min(X)\})$

6. $z = \min(\{x \in A : x > \min(X \triangle Y)\})$

$\square$

Lema 4.15. *Ako je V nerezolutno pravilo, tada postoje glasači i i j za koje za svaki profil $\mathbf{P}$ vrijedi $\{top_i(\mathbf{P}), top_j(\mathbf{P})\} \subseteq V(\mathbf{P})$.*

Dokaz. Prema Lemi 4.13 možemo izabrati i tako za svaki profil $\mathbf{P}$, $\text{top}_i(\mathbf{P}) \in V(\mathbf{P})$. Neka je sad $k = \max\{|V(\mathbf{P})\}$ po svim profilima $\mathbf{P}$ i uočimo da je $k \geq 2$ zato što V nije rezolutno. Definiramo novo pravilo V':

$$V(\mathbf{P}) = \begin{cases} V(\mathbf{P}) & |V(\mathbf{P})| < k \\ V(\mathbf{P}) \setminus \{\text{top}_i(\mathbf{P})\} & |V(\mathbf{P})| = k \end{cases}$$

V' je očito nenametnuto i tvrdimo da nije manipulabilno optimistom ili pesimistom. Pretpostavimo suprotno, tj. da neki glasač s može jednostrano promijeniti ishod iz $V'(\mathbf{P}) = Y$ u $V(\mathbf{P}') = X$ i da vrijedi ili $\max_s(X, \mathbf{P}) > \max_s(Y, \mathbf{P})$ ili $\min_s(X, \mathbf{P}) > \min_s(Y, \mathbf{P})$. Nazovimo Y "starim" ako je i $V(\mathbf{P}) = Y$, te "novim" ako je $V(\mathbf{P}) = Y \cup \{\text{top}_i(\mathbf{P})\}$ i isto za X. Uočimo da X i Y ne mogu oba biti "stari" jer bi inače V bilo manipulabilno optimistom ili pesimistom te bi onda bilo i manipulabilno u smislu očekivane korisnosti. Pretpostavimo prvo $\max_s(X, \mathbf{P}) > \max_s(Y, \mathbf{P})$.

Slučaj 1. X je "novi", a Y "stari"
U ovom slučaju $\max_s(X \cup \{\text{top}_i(\mathbf{P})\}, \mathbf{P}) > \max_s(Y, \mathbf{P})$, pa je V manipulabilno u smislu očekivane korisnosti po (1) iz Leme 4.14.

Slučaj 2. X je "stari", a Y "novi"
Kako je $\text{top}_i(\mathbf{P}) \in X$ ili je $\max_s(X, \mathbf{P}) > \max_s(Y \cup \{\text{top}_i(\mathbf{P})\}, \mathbf{P})$, pa je V manipulabilno u smislu očekivane korisnosti po (1) iz Leme 4.14, ili je $\max_s(X, \mathbf{P}) = \max_s(Y \cup \{\text{top}_i(\mathbf{P})\}, \mathbf{P})$. U tom slučaju imamo $|Y \cup \{\text{top}_i(\mathbf{P})\}| = k > |X|$, pa je V manipulabilno u smislu očekivane korisnosti po (2) iz Leme 4.14.

Slučaj 3. X i Y su "novi"
Tada vrijedi ili

$$\max_s(X \cup \{\text{top}_i(\mathbf{P})\}, \mathbf{P}) > \max_s(Y \cup \{\text{top}_i(\mathbf{P})\}, \mathbf{P})$$

ili

$$\max_s(X \cup \{\text{top}_i(\mathbf{P})\}, \mathbf{P}) = \text{top}_i(\mathbf{P}) = \max_s(Y \cup \{\text{top}_i(\mathbf{P})\}, \mathbf{P})$$

U prvom slučaju V je manipulabilno u smislu očekivane korisnosti po (1) iz Leme 4.14. U drugom slučaju imamo $|X \cup \{\text{top}_i(\mathbf{P})\}| = k$ i $|Y \cup \{\text{top}_i(\mathbf{P})\}| = k$, ali tada također vrijedi i

$$\max_s([X \cup \{\text{top}_i(\mathbf{P})\}] \triangle [Y \cup \{\text{top}_i(\mathbf{P})\}], \mathbf{P}) = \max_s(Y, \mathbf{P})$$

zato što $\max_s(X, \mathbf{P}) > \max_s(Y, \mathbf{P})$, pa je V manipulabilno u smislu očekivane korisnosti po (3) iz Leme 4.14.

Za $\min_s(X, \mathbf{P}) > \min_s(Y, \mathbf{P})$ vrijedi analogan dokaz, koristeći uvjete (4), (5) i (6) iz Leme 4.14.
Zato što V nije manipulabilno optimistom ili pesimistom možemo primijeniti Duggan-Schwartzov teorem kako bi dobili glasača j tako da $\text{top}_j(\mathbf{P}) \in V'(\mathbf{P})$ za svaki profil $\mathbf{P}$. Uočimo da $j \neq i$ jer možemo izabrati $\mathbf{P}$ za koji $|V(\mathbf{P})| = k$ jer tada $\text{top}_j(\mathbf{P}) \in V'(\mathbf{P})$, ali $\text{top}_i(\mathbf{P}) \notin V'(\mathbf{P})$. Sada slijedi da za svaki profil $\mathbf{P}$, $\{\text{top}_i(\mathbf{P}), \text{top}_j(\mathbf{P})\} \subseteq V(\mathbf{P})$. □

Lema 4.16. *Ako bilo koji glasač promijeni svoj glasački listić mijenjajući poredak dvije susjedne alternative, tada se skup pobjednika koji se na njegovom glasačkom listiću pojavljuju ispod tih alternativa ne mijenja.*

Dokaz. Pretpostavimo da je glasački listić glasača i dan na sljedeći način:
$R_i = ...aR_ibR_i...R_iyR_i...$ i da je $y \in V(\mathbf{P})$. Pretpostavimo da je $\mathbf{P}'$ dobiven tako da je glasač i promijenio svoj glasački listić u: $R_i' = ...bR_i'aR_i'...R_i'yR_i'...$ i da $y \notin V(\mathbf{P}')$. U R_i i R_i' alternative koje su ispod a i b su iste, te se njihovo rangiranje nije promijenilo. Prema tome, ima smisla izabrati najmanje rangiran $y \in V(\mathbf{P}) \triangle V(\mathbf{P}')$. Tada za svaki $w < y$, $w \in V(\mathbf{P})$ ako i samo ako $w \in V(\mathbf{P}')$.

Slučaj 1. Za svaki $w < y$, $w \in V(\mathbf{P})$ i $w \notin V(\mathbf{P}')$
U ovom slučaju $\min_i(V(\mathbf{P}), \mathbf{P}) = y$ i $\min_i(V(\mathbf{P}'), \mathbf{P}) > y$ što je kontradikcija s Lemom 4.14 pod 4..

Slučaj 2. Postoji $w < y$ takav da $w \in V(\mathbf{P})$ i $w \in V(\mathbf{P}')$
U ovom slučaju $\min_i(V(\mathbf{P}), \mathbf{P}) = \min_i(V(\mathbf{P}'), \mathbf{P})$. Ako $|V(\mathbf{P})| \neq |V(\mathbf{P}')|$, tada zbog Leme 4.14 pod 5. imamo kontradikciju. Ako $|V(\mathbf{P})| = |V(\mathbf{P}')|$ tada $\min_i(V(\mathbf{P}) \triangle V(\mathbf{P}', \mathbf{P})) \in V(\mathbf{P})$ tada zbog Leme 4.14 pod 6. imamo kontradikciju.

□

Lema 4.17. *Izborno pravilo V zadovoljava svojstvo jednoglasnosti.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno i izaberimo $\mathbf{P}'$ takav da $V(\mathbf{P}') = \{x\}$. Glasači jedan po jedan mijenaju glasačke listiće iz onih u $\mathbf{P}$ u one u $\mathbf{P}'$. U nekom trenutku pobjednik postane $\{x\}$, te je time glasač neposredno prije na dobitku jer je njegov najbolje rangiran kandidat pobjednik. □

Lema 4.18. *Izborno pravilo V zadovoljava Paretovo svojstvo.*

Dokaz. Pretpostavimo da svaki glasač preferira x u odnosu na y i da je y pobjednik. Glasači jedan po jedan zamijene mjesta alternativi x i onoj neposredno iznad nje, te ponavljaju taj proces dok mogu. Po Lemi 4.16 y ostaje pobjednik. Ali na kraju tog procesa svaki glasač ima x na vrhu svog glasačkog listića pa je po Lemi 4.17 pobjednik $\{x\}$. □

Lema 4.19. *Ako izaberemo i, j iz Leme 4.15 vrijedi $V(\mathbf{P}) = \{top_i(\mathbf{P}), top_j(\mathbf{P})\}$.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $i = 1,\ j = 2$ i $x = \mathrm{top}_1(\mathbf{P})$, $y = \mathrm{top}_2(\mathbf{P})$. Pretpostavimo da je $z \in V(\mathbf{P})$ i $z \neq x, y$. Ostale glasačke listiće (3 do n) mijenjamo jedan po jedan tako da dovedemo z na njihov vrh (ili bi poništavanje takve promjene poboljšalo *max* skupa ishoda za tog glasača). Istu stvar napravimo za x tako da ga dovedemo točno ispod z i y tako da ga dovedemo točno ispod x, dok z i dalje ostaje pobjednik. Neka glasač 2 pomakne x točno ispod y i nazovimo sad ovaj profil s $\mathbf{P}'$. Prema Paretovom svojstvu vrijedi $V(\mathbf{P}') \subseteq \{x, y, z\}$ zato što je x iznad svake ostale alternative u svakom glasačkom listiću. Stoga imamo dva slučaja:

Slučaj 1. $V(\mathbf{P}') = \{x, y\}$
Za glasača 2 vrijedi $\max_2(V(\mathbf{P}), \mathbf{P}) = y$, $\max_2(V(\mathbf{P}'), \mathbf{P}) = y$ i $|V(\mathbf{P})| > |V(\mathbf{P}'|$. Sada iz Leme 4.14 pod 2. slijedi da je V manipulabilno u smislu očekivane korisnosti.

Slučaj 2. $V(\mathbf{P}') = \{x, y, z\}$
U ovom slučaju mora vrijediti $V(\mathbf{P}) = \{x, y, z\}$ ili bi mogli zaključiti kao u prvom slučaju. Pretpostavimo da glasač 2 zamijeni x i y u svom glasačkom listiću. Prema Paretovom svojstvu slijedi da y više ne može biti pobjednik. Ako je novi pobjednik $\{x\}$ tada je drugi glasač poboljšao svoj *min* iz z u x. Ako je novi pobjednik $\{x, z\}$, tada možemo uzeti ovaj glasački listić glasača kao njegove iskrene preferencije. Poništavanje promjene će promijeniti skup pobjednika iz $\{x, z\}$ u $\{x, y, z\}$, pa *min* ostaje isti, ali se veličina skupa pobjednika povećala. To je prema Lemi 4.14 pod 5. kontradikcija.

□

Time smo završili dokaz Feldmanovog teorema. □

4.4 Gärdenforsov teorem

Definicija 4.20. Za $\mathbf{P}$ profil ne nužno linearnih glasačkih listića, x je *slabi Condorcetov pobjednik* (WCW) ako i samo ako

$$(\forall y \in A)\ (|\{i : xR_iy\}| \geq |\{i : yR_ix\}|)$$

Izborno pravilo zadovoljava *slabi Condorcetov pobjednički kriterij* (WCWC) ako za svaki profil $\mathbf{P}$ skup pobjednika $V(\mathbf{P})$ je upravo skup slabih Condorcetovih pobjednika kad god je ovaj skup neprazan.

Teorem 4.21. *Neka je A skup od tri ili više alternativa, $n \geq 3$ i V izborno pravilo za (A, n) koje zadovoljava WCWC. Tada:*

(1) Za nelinearne glasačke listiće V je manipulabilno u smislu slabe dominantnosti.

(2) Za linearne glasačke listiće V je manipulabilno u smislu slabe dominantnosti ako je broj glasača n paran, a tvrdnja ne mora nužno vrijediti ako je neparan.

Dokaz.

(1) Neka je $\mathbf{P}$ sljedeći profil (prikazujemo samo prva tri glasača):

P

y	x	xz
z	y	
x	z	y
.	.	.
.	.	.

u kojem su ostale alternative ispod x, y i z, te su sve izjednačeni kandidati. Također svi ostali glasači imaju sve alternative kao izjednačene kandidate. Sada se lako vidi da je x slabi Condorcetov pobjednik, te da y i z nisu. Stoga vrijedi $V(\mathbf{P}) = \{x\}$.
Neka je $\mathbf{P}'$ nastao zamijenom mjesta alternativama y i z u glasačkom listiću prvog glasača. Tada su x i z slabi Condorcetovi pobjednici, a y nije, te vrijedi $V(\mathbf{P}') = \{x, z\}$. Time je prvi glasač za čije iskrene preferencije uzimamo one iz profila $\mathbf{P}$ poboljšao svoj ishod sa $\{x\}$ u $\{x, z\}$. To pokazuje da je V manipulabilno u smislu slabe dominiranosti.

(2) Pretpostavimo da je broj glasača paran, te $A = \{x, y, z, w_1, ..., w_n\}$. Neka je $\mathbf{P}$ profil u kojem prva četiri glasača imaju sljedeće glasačke listiće:

$$
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{\mathbf{P}} \\
\mathrm{z} & \mathrm{x} & \mathrm{y} & \mathrm{x} \\
\mathrm{y} & \mathrm{z} & \mathrm{x} & \mathrm{z} \\
\mathrm{x} & \mathrm{y} & \mathrm{z} & \mathrm{y} \\
w_1 & w_1 & w_1 & w_1 \\
. & . & . & . \\
. & . & . & . \\
. & . & . & . \\
w_n & w_n & w_n & w_n
\end{array}
$$

Pola preostalih glasača neka rangira alternative na sljedeći način:
$xR_iyR_izR_iw_1R_i...R_iw_n$, dok ih druga polovica rangira na obrnut način.
Uočimo da je $V(\mathbf{P}) = \{x\}$ zato što je x jedini slabi Condorcetov pobjednik. Neka je $\mathbf{P}'$ nastao zamjenom mjesta alternativama y i z u glasačkom listiću prvog glasača. Tada su x i y jedini slabi Condorcetovi pobjednici, te vrijedi $V(\mathbf{P}') = \{x, y\}$. Time je prvi glasač, za čije iskrene preferencije uzimamo one iz profila $\mathbf{P}$ poboljšao svoj ishod sa $\{x\}$ u $\{x, y\}$. To pokazuje da je V manipulabilno u smislu slabe dominiranosti.
Ako je n neparan, V može biti izborno pravilo za koje su svi elementi skupa pobjednika slabi Condorcetovi pobjednici i taj skup je neprazan. Uočimo da je to upravo slabo Condorcetovo pravilo, tj. pravilo (13) iz prvog poglavlja. Kako su glasački listići linearni i broj glasača je neparan, slabi Condorcetov pobjednik je jedinstven ako postoji, tj. imamo Condorcetovo izborno pravilo, tj. pravilo (12) iz prvog poglavlja. No, prema Teoremu 2.4 pod (iii) znamo da Condorcetovo pravilo nije manipulabilno u smislu slabe dominantnosti.

□

Kako je svojstvo WCWC izrazito jako, uvodimo sljedeće:

Definicija 4.22. Za $\mathbf{P}$ profil ne nužno linearnih glasačkih listića, x je *Condorcetov pobjednik* (CW) ako

$$(\forall y \in A)\ (|\{i : xR_iy\}| > |\{i : yR_ix\}|)$$

Izborno pravilo zadovoljava *Condorcetov pobjednički kriterij* (CWC) ako za svaki profil $\mathbf{P}$ skup pobjednika $V(\mathbf{P})$ sadrži jedinstvenog Condorcetovog pobjednika kad god on postoji.

Uočimo da za linearne glasačke listiće i neparan broj glasača vrijedi da je alternativa x CW ako i samo ako je WCW. No, u Teoremu 4.21 smo pokazali da tada postoje pravila koja nisu manipulabilna u smislu slabe dominantnosti. Odgovor na to pitanje je dao Gärdenfors uz jedno oslabljivanje manipulabilnosti u smislu slabe dominantnosti dano sljedećom definicijom.

Definicija 4.23. Izborno pravilo V je *skoro manipulabilno u smislu slabe dominantnosti* ako je manipulabilno u smislu slabe dominantnosti ili postoji profil $\mathbf{P} = (R_1, ...R_n)$ kojeg smatramo profilom sa iskrenim preferencijama od n glasača i u kojem glasač i ima x na prvom mjestu, y na drugom i z na trećem mjestu u glasačkom listiću. Neka S_i neki drugi glasački listić kojeg smatramo kao neiskren glasački listić glasača i, te ako je $\mathbf{P'} = (R_1, ...R_{i-1}, S_i, R_{i+1}, ..., R_n)$ za koji vrijedi:

$$V(\mathbf{P}) = \{x, y, z\} \text{ i } V(\mathbf{P'}) = \{x, y\}$$

Teorem 4.24 (Gärdenfors)**.** *Za nelinearne glasačke listiće, neka je A skup od tri ili više alternativa, $n \geq 3$, te da je V izborno pravilo za (A, n) koje zadovoljava CWC. Tada je V skoro manpulabilno u smislu slabe dominantnosti.*

Dokaz. Teorem ćemo dokazati pomoću tri tvrdnje:

Tvrdnja 1. Neka je $\mathbf{P}_1$ profil u kojem prvi, drugi i treći glasač rangiraju alternative x, y i z kao u Condorcetovom paradoksu:

	$\mathbf{P}_1$	
x	y	z
y	z	x
z	x	y
.	.	.
.	.	.

dok su ostale alternative izjednačeni kandidati ispod ove tri alternative, te su ostalim glasačima sve alternative izjednačeni kandidati. Tada je $\{x, y, z\} \subseteq V(\mathbf{P})$.

Dokaz. Ako su pobjednici x i neka alternativa različita od y i z, tada drugi glasač može zamijeniti y i z, te bi time z postao Condorcetov pobjednik, te je pobjednik izbora $\{z\}$ što je poboljšanje izbornog ishoda drugog glasača. Analogno se pokaže da y ili z ne mogu biti pobjednici s ili bez ostalih alternativa (različitih od x, y i z).
Ako su pobjednici x, y i neka alternativa različita od z, tada treći glasač može zamijeniti x i z, te bi time $\{x\}$ postao Condorcetov pobjednik, te je pobjednik izbora $\{x\}$ što je poboljšanje izbornog ishoda trećeg glasača. Analogno se pokaže da x i z ili y i z ne mogu biti pobjednici s ili bez ostalih alternativa (različitih od x, y i z).
Ako nijedna od alternativa x, y i z nije pobjednik, tada prvi glasač može zamijeniti x i y, te bi time y postao Condorcetov pobjednik.

Stoga, pobjednici moraju biti x, y i z uz još neke alternative različite od njih.

Tvrdnja 2. Neka je $\mathbf{P}_2$ profil u kojem prvi, drugi i treći glasač rangiraju alternative x, y i z na sljedeći način:

$\mathbf{P}_2$

x	yz	z
y		x
z	x	y
.	.	.
.	.	.

dok su ostale alternative izjednačeni kandidati ispod ove tri alternative, te su ostalim glasačima sve alternative izjednačeni kandidati. Tada je $V(\mathbf{P_2}) = \{z\}$.

Dokaz. Ako je $x \in V(\mathbf{P}_2)$, tada drugi glasač može pomaknuti z prema dolje i time y postaje Condorcetov pobjednik čime $\{y\}$ postaje pobjednik izbora što je poboljšanje izbornog ishoda. Drugi glasač bi to mogao napraviti i ako skup pobjednika sadrži i neku alternativu različitu od x, y i z, te u kombinaciji s y ili z ili y i z. Ako je $V(\mathbf{P_2}) = \{y\}$ ili $V(\mathbf{P_2}) = \{y, z\}$, tada bi drugi glasač mogao poboljšati izborni ishod promjenom svog glasačkog listića iz profila $\mathbf{P}_1$ u glasački listić iz profila $\mathbf{P_2}$. To nas ostavlja s $V(\mathbf{P}_2) = \{z\}$ što smo htjeli pokazati.

Tvrdnja 3. Neka je $\mathbf{P}_3$ profil u kojem prvi, drugi i treći glasač rangiraju alternative x, y i z na sljedeći način:

$\mathbf{P}_2$

y	yz	z
x		x
z	x	y
.	.	.
.	.	.

dok su ostale alternative izjednačeni kandidati ispod ove tri alternative, te su ostalim glasačima sve alternative izjednačeni kandidati. Tada je $V(\mathbf{P_3}) = \{z\}$.

Dokaz. Ako je $x \in V(\mathbf{P}_3)$, tada drugi glasač može pomaknuti z prema dolje i time y postaje Condorcetov pobjednik čime $\{y\}$ postaje pobjednik izbora što je poboljšanje izbornog ishoda. Drugi glasač bi to mogao napraviti i ako skup pobjednika sadrži neku alternativu različitu od x, y i z, te u kombinaciji s y ili z ili y i z. Ako je $V(\mathbf{P_3}) = \{y\}$ ili $V(\mathbf{P_3}) = \{y, z\}$, tada bi prvi glasač mogao poboljšati izborni ishod promjenom svog glasačkog listića iz profila $\mathbf{P}_2$ u glasački listić iz profila $\mathbf{P_3}$. To nas ostavlja s $V(\mathbf{P}_3) = \{z\}$ što smo htjeli pokazati.

Ako primijenimo prethodne tri tvrdnje na sljedeće profile:

$\mathbf{P'_1}$			$\mathbf{P'_2}$			$\mathbf{P'_3}$		
y	z	x	y	yz	x	y	yz	z
x	y	z	x		z	x		x
z	x	y	z	x	y	z	x	y
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.

tada možemo zaključiti da je $V(\mathbf{P'_3}) = \{y\}$. Ali, $\mathbf{P_3} = \mathbf{P'_3}$ što je kontradikcija.

□

Zaključak

U kratkom uvodu u teoriju društvenog izbora, proučavajući problem izbora u upravi osiguravajućeg društva u kontekstu ordinalnih preferencija, definirali smo pomoću binarne relacije glasački listić i izborni profil, te smo definirali različite vrste agregatnih procedura za određivanje ishoda izbora. Zatim smo dokazali Arrowljev teorem o nemogućnosti transformiranja individualnih preferencija u društvene pomoću kojeg možemo zaključiti da za tri ili više alternativa i uz određene pretpostavke koje smatramo demokratskima od društva ne možemo očekivati donošenje nepristranih odluka zbog postojanja diktatora.

Nakon definiranja izbornih pravila uveli smo pet različitih načina manipuliranja izbornih pravila, te smo dali primjere za neka od izbornih pravila.

Nastavili smo rad dokazavši Gibbard-Satterthwaiteov teorem za linerano uređene glasačke listiće kojim smo pokazali da je za tri ili više alternativa jedino diktatura rezolutno izborno pravilo koje zadovoljava Paretovo svojstvo i nije manipulabilno. Nakon toga smo povezali Arrowljev i Gibbard-Satterthwaiteov teorem time što smo dokazali da su ekvivalentni uz određene promjene u pretpostavkama.

Za kraj smo poopćili Gibbard-Satterthwaiteov teorem na nerezolutna izborna pravila, te smo dokazali Duggan-Schwartzov teorem za manipulacije optimistom i pesimistom, Feldmanov teorem za manipulacije u smislu očekivane korisnosti i Gärdenforsov teorem za manipulacije u smislu slabe dominantnosti.

Iako je nit vodilja kroz rad nemogućnost, tj. dokazani teoremi pokazuju da je nemoguće izbjeći manipulacije za tri ili više alternativa, na kraju drugog poglavlja smo se kratko dotaknuli Mayovog teorema, te smo pokazali da ipak nije sve izgubljeno kada biramo između dvije alternative, što je često slučaj u političkim izborima. Također, ne smijemo odbaciti ni kardinalne preferencije kao alternativan način rangiranja kandidata koji se često zanemaruje zbog toga što su u začetku teorije društvenog izbora one odbačene jer se mislilo da je nemoguće usporediti preferencije različitih glasača. Moramo biti svjesni toga da su neke od pretpostavki teorema dokazanih u radu dosta jake, te da nismo radili restrikcije na mogućim izbornim profilima, što je daleko od realnosti. Trenutno je naglasak na pitanju koja se svojstva mogu relaksirati kako bi se našla izborna pravila koja nisu manipulabilna za više od tri alternative.

Bibliografija

[1] Philip J. Reny and Geoffrey A. Jehle. *Advanced Microeconomic Theory*. Financial TImes Prentice Hall, 2011.

[2] Alan D. Taylor. The manipulability of voting systems. *The American Mathematical Monthly*, 109, 2002.

[3] Alan D. Taylor. *Social Choice and the Mathematics of Manipulation*. Cambridge University Press, 2005.

Sažetak

U ovom radu bavili smo se manipulacijama u izbornim sustavima u kontekstu ordinalnih preferencija. Uveli smo pojmove glasačkog listića i izbornog profila pomoću binarne relacije, te smo definirali različite vrste procedura za određivanje ishoda izbora. Zatim smo definirali dvadeset izbornih pravila i dokazali Arrowljev teorem nemogućnosti transformiranja pojedinačnih preferencija u društvene. Promatrali smo i na koje načine glasač može manipulirati izborno pravilo, te smo za neka pravila dali konkretne primjere kada je to moguće ili nije. Dokazali smo Gibbard-Satterthwaiteov teorem za rezolutna izborna pravila koji tvrdi da je diktatura jedino rezolutno pravilo koje nije manipulabilno i zadovoljava Paretovo svojstvo, te smo dokazali ekvivalenciju Gibbard-Satterthwaiteovog i Arrowljevog teorema. Zatim smo za nerezolutna pravila dokazali Duggan-Schwartzov, Feldmanov i Gärdenforsov teorem, koji uz određene izmjene pretpostavki, poopćavaju Gibbard-Satterthwaiteov teorem.

Summary

In this thesis we dealt with manipulations in voting systems. We introduced the terms of ballot and election profile with a help of binary relations, also we defined different types of aggregate procedures for determining the outcome of elections. Then we defined twenty voting rules and proved Arrow's theorem of impossibility of transforming individual preferences into social preferences. We also looked at possible ways in which voter could manipulate the voting rule, and for some rules we have given concrete examples of when it is possible and when it isn't. We proved the Gibbard-Satterthwaite's theorem for resolute voting rules which claims that dictatorship is the only resolute rule that is not manipulable and satisfies Pareto's condition, and we have proved the equivalency of Gibbard-Satterthwaite's and Arrow's theorems. Then, for non-resolute rules, we proved Duggan-Schwartz's, Feldman's and Gärdenfors's theorem which, with some changes in the assumptions, generalizes Gibbard-Satterthwaite's theorem.

Životopis

Rođen sam 2. rujna 1995. godine u Zagrebu gdje sam započeo školovanje u Osnovnoj školi Otona Ivekovića. Nakon završetka upisujem prirodoslovno - matematičku XV. gimnaziju, te 2014. godine upisujem preddiplomski studij inženjerskog smjera Matematike na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu koji završavam 2019. godine. Iste godine upisujem diplomski studij Financijske i poslovne matematike. Tijekom studiranja držao sam instrukcije za osnovnu i srednju školu, te dodatnu nastavu matematike za učenike osnovnih škola. Član sam Hrvatske udruge za neurofibromatozu. Trenutno sam zaposlen kao student u Odjelu za upravljanje rizicima i kontroling u Grawe osiguranju.