**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Valentina Bošnjak

# AL-HVARIZMI, OTAC ALGEBRE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Franka Miriam Brückler

Zagreb, rujan 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

*Velika zahvala mojim roditeljima, obitelji i prijateljima, mojim sestrama koje su mi bile velika potpora u pisanju ovog diplomskog rada i posebno mom suprugu koji mi je bio najveća potpora tijekom cijelog fakultetskog obrazovanja. Najveća hvala mojoj mentorici doc. dr. sc. Franki Miriam Brückler za svaku minutu koju je izdvojila kako bi mi ukazala na eventualne pogreške, dala savjete vezane za pisanje stručne literature i velikom razumijevanju koje je pokazala.*

# Sadržaj

# Uvod

Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja, mnogi od nas su čuli za neke poznate matematičare kao što su: Pitagora, Euklid, Arhimed, Fibonacci, Pascal, Newton, Leibniz, Euler, Gauß i mnogi drugi. Matematičar za kojeg većina nije čula, osim onih koji su se malo više zainteresirali za povijest matematike, je al-Hvarizmi. Iako mnogima nepoznat, bio je matematičar koji je ostavio velik utjecaj na suvremenu matematiku. Osim u matematici, veliki utjecaj je imao i u geografiji i astronomiji.

Diplomski rad se sastoji od tri poglavlja. U prvom poglavlju je opisan njegov život, njegovi prethodnici, suvremenici i sljedbenici te glavne značajke njegovog matematičkog doprinosa. U drugom poglavlju je opisano njegovo djelo iz algebre, po kojem je algebra i dobila ime, a koje je kao i djelo iz aritmetike, opisano u trećem poglavlju, uvelo značajne promjene u tim matematičkim disciplinama.

# Poglavlje 1

# Općenito o al-Hvarizmiju

Al-Hvarizmi je bio jedna od najutjecajnijih osoba istočnjačke znanosti u 9. stoljeću, astronom, matematičar i geograf. Živio je u Bagdadu, tadašnjoj prijestolnici arapskog kalifata, za vrijeme vladavine kalifa al-Ma'muna, koji se zalagao za znanost i umjetnost. Portret al-Hvarizmija je prikazan na slici 1.1. Iako o njegovom privatnom životu malo znamo, o njegovom znanstvenom radu znamo mnogo zbog velikih doprinosa.


Slika 1.1: Poštanska marka s portretom al-Hvarizmija. Preuzeto s Wikipedije.

## 1.1 Životopis

Abu Džafar Muhamad ibn Musa al-Hvarizmi rođen je oko 780. godine, a umro je između 830. i 850. godine. Poteškoće u potrazi za činjenicama o al-Hvarizmijevom životu uzrokovane su, među ostalim, jer je u isto doba u Bagdadu djelovao astronom i matematičar istog imena Muhamad ibn Musa, pa pri proučavanju starih zapisa nije uvijek jasno na koga se odnose [1]. Znamo samo nekoliko detalja iz života al-Hvarizmija, što dovodi do toga da postoji puno nagađanja o njegovom životu, temeljenih na vrlo malo pouzdanih izvora. Učestalo je mišljenje da njegovo ime ukazuje na porijeklo iz područja Horezm južno od Aralskog jezera. No, povjesničar al-Tabari naziva ga „al-Kutrubuli”, što ukazuje da je došao iz Kutrubula, regije između Tigrisa i Eufrata nedaleko od Bagdada, dok su možda njegovi preci, a ne on sam, došli iz Horezma. Čini se da još jedan epitet koji mu je dao al-Tabari, „al-Madžusi”, pruža dodatnu informaciju o al-Hvarizmijevom životu i ukazuje na to da je bio pristaša zoroastrizma, stare zoroastrijske religije. Međutim, pobožni predgovor al-Hvarizmijeve „Algebre” pokazuje da je bio ortodoksni musliman, pa al-Tabarijev epitet može eventualno upućivati na to da su al-Hvarizmijevi preci ili on u mladosti bili pristaše zoroastrizma [15].

Za života al-Hvarizmija prevlast nad arapskim kalifatom preuzeo je kalif dinastije Abasida Al-Ma'mun (786.–833.), nakon što je pobijedio i ubio al-Amina 813. godine. Nastavio je pružati pokroviteljstvo razvoju učenja koje je započeo njegov otac i osnovao je akademiju nazvanu Kuća mudrosti (*Bajt al-hikma*) u kojoj su prevođena grčka filozofska i znanstvena djela. Također je izgradio knjižnicu, prvu koja je osnovana nakon znamenite knjižnice u Aleksandriji, prikupljajući važna djela iz raznih područja pod vlašću i u doticaju s arapskim kalifatom, koji se u to doba protezao od čitavog Arapskog poluotoka na zapad po sjeveru Afrike do današnjeg Alžira, na istoku do današnjeg Afganistana i Pakistana i na sjeveru do današnje Turske, Armenije i Ajzerbejdžana. Al-Ma'mun je zamišljao Kuću mudrosti kao mjesto gdje bi se svi grčki znanstveni tekstovi mogli prevesti na arapski i perzijski jezik [15]. Osim Kuće mudrosti, al-Ma'mun je osnovao zvjezdarnice u kojima su muslimanski astronomi mogli proširivati znanje stečeno u ranijih velikih naroda, posebice Grka i Indijaca. U kratkom vremenskom razdoblju, Bagdad je postao novo središte znanosti u mediteranskom svijetu.

Al-Hvarizmi i njegovi kolege, braća Banu Musa, bili su jedni od prvih učenjaka koji su djelovali u Kući mudrosti. Njihovi su zadaci uključivali prijevod grčkih znanstvenih rukopisa te proučavanje i pisanje o matematici, geometriji i astronomiji. Postoje dokazi da je al-Hvarizmi radio pod pokroviteljstvom al-Ma'muna, naime dva svoja teksta posvetio je tom kalifu. To su bili njegova rasprava o algebri i rasprava o astronomiji. Al-Hvarizmi je bio u mogućnosti proučavati tekstove na više jezika, uključujući perzijski, arapski, sirijski i sanskrtski. Živio je u tzv. Zlatno doba Islama, između 8. i 13. stoljeća, te je vodio vrlo pobožan i intelektualan život. Pisao je o astrolabu (astronomski instrument) i o sunčanom satu te je proučavao Ptolemejevu geometriju i vjerojatno je sudjelovao u projektu al-Ma'muna o mjerenju duljine jednog stupnja zemljopisne širine [1].

Al-Hvarizmijevo djelo *Zij al-Sindhind*, o kalendarskoj i astronomskoj kalkulaciji za određivanje kretanja Sunca, Mjeseca i pet planeta poznatih u to doba, pisano na temelju indijskog teksta na istu temu, označilo je prekretnicu u islamskoj astronomiji i učinilo al-Hvarizmija cjenjenim u arapskom svijetu. Al-Hvarizmi je izradio tablice sinusa i kosinusa te tangensa. Osmislio je sinusni kvadrant, pomagalo za astronomska mjerenja kutova. To je postao drugi najkorišteniji astronomski instrument u srednjem vijeku, nakon astrolaba. Jedan od glavnih ciljeva u islamskom svijetu bilo je utvrđivanje vremena molitve, a al-Hvarizmi je napravio nekoliko važnih poboljšanja teorije i konstrukcije sunčanog sata: njegov je bio univerzalan i mogao se promatrati bilo gdje na Zemlji te se postavljao na džamije da bi se odredilo vrijeme molitve. Napisao je i raspravu o židovskom kalendaru nazvanu *Risalah fi istikhradž ta'rikh al-jahud wa-a'jadihim*. Značajno djelo al-Hvarizmija je i *Kitāb sūrat al-ard*, „Knjiga o izgledu Zemlje", koje je završeno 833. godine. U tom radu daje geografske širine i dužine za 2402 grada, kao osnovu za kartu svijeta. Ta knjiga se temelji na Ptolemejevoj „Geografiji”, sadrži znamenitosti, gradove, planine, mora, otoke, zemljopisne krajeve i rijeke. Rukopis uključuje karte koje su uglavnom točnije od Ptolemejevih. Posebno je uočljivo da, tamo gdje je al-Hvarizmiju bilo dostupno više lokalnog znanja (regije arapskog kalifata, Srednji i Daleki istok), njegov je rad znatno točniji od Ptolemejevog. Sistematizirao je i korigirao Ptolemejevo istraživanje, koristeći vlastite originalne nalaze. Tekst je sačuvan u rukopisu, ali karte nažalost nisu sačuvane, iako su ih moderni znanstvenici uspjeli rekonstruirati iz al-Hvarizmijevih opisa. Kada je njegov rad postao poznat u Europi zahvaljujući latinskim prijevodima, ostavio je veliki utjecaj na razvoj znanosti i na Zapadu [3].

## 1.2 Prethodnici, suvremenici i sljedbenici

Povjesničari stoljećima raspravljaju o dvije teme: porijeklu algebre i izvorima koje koristi al-Hvarizmi. Njegovi doprinosi upućuju na povezanost s helenističkim matematičarima (Euklidom i Diofantom), indijskom matematikom te s babilonskom matematikom [17].

Dekadski pozicijski sustav s nulom u Indiji se tijekom prvog tisućljeća nove ere postepeno razvio iz brahmanskih brojki. U al-Hvarizmijevo doba u Indiji je dekadski pozicijski sustav već bio potpuno razvijen. Nešto ranije je poznati indijski matematičar i astronom Brahmagupta (589.–668.) definirao nulu kao rezultat oduzimanja broja od sebe. U svom djelu, *Brahmasphutasiddhanta*, Brahmagupta daje neka svojstva nule, kao što su: kada se broju doda ili oduzme nula, broj ostaje nepromijenjen; broj pomnožen s nulom postaje nula. On je također pokušao predstaviti koncept pozitivnih i negativnih brojeva kroz koncept bogatstva i dugova [4]. Uslijed arapskih osvajanja i širenja arapskog kalifata dolazi do prenošenja indijskog pozicijskog sustava u arapski svijet i dalje prema Europi. Znamenke su se postepeno modificirale do suvremenog oblika, koji su poprimile u kasnom srednjem vijeku odnosno početkom renesanse. Tu je ključna uloga al-Hvarizmija, koji je bio jedan od prvih matematičara koji je opisao račun u dekadskom pozicijskom sustavu s nulom, a da je njegovo djelo postalo poznato i u Europi. Njegovo pridavanje važnosti nuli je isprva naišlo na veliki skepticizam. Mnogi matematičari su vjerovali da je nula „bezvrijedna ništa", dok su drugi mogli prihvatiti nulu, ali nisu mogli prihvatiti da bi njeno priključenje na drugu brojku deseterostruko povećalo vrijednost broja. Svojim djelom o aritmetici al-Hvarizmi je argumentirao i ukazao na važnost nule kao znamenke [3].

Nadalje, osim indijskog dekadskog pozicijskog sustava, na al-Hvarizmija je utjecala algebra koja je bila poznata u starim civilizacijama Egipta, Babilona i Indije. Ta algebra se razlikovala od al-Hvarizmijeve po tome što su to bili pojedinačni zadaci bez sustavnog pristupa. S druge strane, nalazimo neke metode i načine rješavanja vezane za algebru i aritmetiku zbog kojih smo mogli zaključiti da je matematika tih civilizacija imala utjecaja na al-Hvarizmija. U staroegipatskoj matematici poznati su zadaci s „hrpama", koje su označavale nepoznanicu te s omjerima „pefsu", koji su označavali kvalitetu kruha ili piva. Ti su zadaci ekvivalentni linearnim jednadžbama s jednom nepoznanicom. Osim jednostavnih linearnih jednadžbi, kod starih Egipćana susrećemo i čisto kvadratne jednadžbe. Babilonski matematičari su rješavali i općenitije kvadratne jednadžbe. Slične zadatke nalazimo i u indijskim izvorima. Svim tim starim civilizacijama je zajedničko da se zadaci zadavaju i rješavaju riječima, a nema sustavnog pristupa ni dokaza. Vrijedi spomenuti i da su indijski matematičari tijekom 1. tisućljeća n. e. razvili i iterativne metode za aproksimativno računanje drugih i trećih korijena, tj. numeričko rješavanje čisto kvadratnih i kubnih jednadžbi.

Što se tiče al-Hvarizmijeve algebre, možemo zaključiti da je veliki utjecaj na njega imala i starogrčka geometrijska algebra, koja se razvila tijekom 5. i 4. st. pr. Kr. Radi se o nizu geometrijskih problema koje bi danas bilo prirodno interpretirati algebarski. Osnova starogrčke geometrijske algebre je poistovjećivanje objekata s njihovom mjerom (duljinom, površinom, volumenom) te zahtjev da se geometrijske konstrukcije provode ravnalom i šestarom, odnosno da se sve jednakosti (brojeva, duljina, površina, volumena) moralo dokazati u konačno mnogo konstrukcijskih koraka ravnalom i šestarom. Poseban utjecaj na al-Hvarizmija imali su helenistički matematičari Euklid i Diofant. Euklid je u svom djelu „Elementi" (oko 300. g. pr. Kr.) dokazao niz rezultata geometrijske algebre, što je kasnije iskoristio al-Hvarizmi prilikom geometrijskog objašnjenja kvadratnih jednadžbi. Diofant (vjerojatno 3. st. n. e.) je pak u svojoj „Aritmetici" opisao jednadžbe s nejedinstvenim rješenjima (diofantske jednadžbe) [5].

Osim utjecaja velikih civilizacija prethodnog vremena, na al-Hvarizmija su naravno utjecali njegovi suvremenici i sunarodnjaci. Braća Banu Musa te al-Hadžadž su bili suvremenici i kolege al-Hvarizmiju u Kući mudrosti. Njihovi su tamošnji zadaci bili prijevodi grčkih znanstvenih rukopisa te su proučavali i pisali o algebri, geometriji i astronomiji [22].

U sljedećim stoljećim, al-Hvarizmi će imati izniman utjecaj na matematičare kako arapskog svijeta, tako i Europe. Jedan od velikih matematičara na koje je al-Hvarizmi imao utjecaja bio je Leonardo iz Pise, poznatiji kao Fibonacci (oko 1170.–1240.), iako je on odbijao priznati da svoja djela temelji na radu al-Hvarizmija [6]. On se poziva na „algorismus“,[1] u predgovoru svog djela *Liber abaci*. Postavlja se pitanje zašto bi ga Fibonacci trebao kritizirati i utvrditi da je „metoda Indijaca“ bolja, kad je „algorismus“ upravo „metoda Indijaca“. Pretpostavlja se da nije želio navoditi al-Hvarizmija jer je želio prikazati svoje djelo kao novo otkriće u matematici. U 15. poglavlju svog djela spominje samo jedno ime al-Hvarizmija, Muhamad. Saznanja o vremenu i mjestu u kojem je Fibonacci živio sugeriraju da je vjerojatno morao biti upoznat s al-Hvarizmijevim radom. Zna se da je Fibonaccijeva obitelj bila u Pisi barem od početka 12. st. te su kao trgovačka obitelj mnogo putovali. Uz to, Pisa nije bila samo trgovačko središte Mediterana, već i jedno od najvažnijih intelektualnih središta u 12. i ranom 13. st. te je očigledno moguće da je

[1] Račun u dekadskom pozicijskom sustavu. Radi se o latinski „iskrivljenom imenu al-Hvarizmi.

Fibonacci došao u kontakt s al-Hvarizmijevim djelima. U svom poglavlju o algebri Fibonacci opisuje više od 90 problema, od kojih 22 potječu iz al-Hvarizmijeve „Algebre“, a 53 problema iz „Algebre“ Abu Kamila.

Za razliku od Fibonaccija, koji nije htio jasno priznati al-Hvarizmijev utjecaj na svoj rad, još tijekom al-Hvarizmijevog života i kratko nakon njegove smrti, mnogi matematičari su komentirali njegove knjige i njegov rad. Neki od njih su bili Abd al-Hamid ibn Turk, Tabit ibn Kora, Sinan ibn al-Fath, Abu Kamil, Abu al-Wafa Buzdžani te Abu Bekr al-Karadži, kojemu se pripisuje potpuno odvajanje algebre od geometrije. Neki od tih komentara i rasprava na temu jednadžbi dali su važan doprinos daljnjem razvoju algebre, ali gotovo nitko nije imao utjecaj na razvoj algebre kao što je to postigao al-Hvarizmi [15]. Iznimka je Omar Khayyam (1048.–1131.), koji je krajem 11. st. u svojoj „Algebri“ proširio Al-Hvarizmijevu klasifikaciju jednadžbi na kubne jednadžbe.

## 1.3 Matematički doprinos

Glavni cilj al-Hvarizmijevog matematičkog rada je bio da običnim ljudima, ne samo onima koji se bave matematikom, približi i objasni matematičke zadatke pa ih je zbog toga objasnio riječima, a ne matematičkim zapisima. Njegova dva najvažnija djela su tekst o aritmetici *Kitāb al-džam wa'l-tafrīk bi-hisāb al-Hind* i tekst o algebri *Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-džabr wa'l-mukabala* o kojima ćemo zbog njihove važnosti detaljnije pisati u sljedeća dva poglavlja.

Al-Hvarizmija mnogi nazivaju „ocem algebre“, jer je bio prvi koji je dao sustavni pristup jednadžbama, štoviše prvi se bavio jednadžbama kao takvima. I sam naziv „algebra“ izveden je iz naslova njegova djela o jednadžbama. Kad su pak Europljani u srednjem vijeku preveli njegovo djelo o aritmetici, koje opisuje indijsku vrstu izračuna, preveli su njegovo ime kao *Algorismi* i *Algoritmi*. Tako je latinizirana verzija al-Hvarizmijevog imena postala sinonim za postupke računanja, zamjenjujući izraz *helcep sarracenicum* („izračun Saracena“), koji je kratko korišten. Danas ljudi koriste algoritme za četiri osnovne računske operacije temeljene na principima koji se nalaze u djelu al-Hvarizmija, a s vremenom je riječ algoritam poprimila suvremeno značenje [3].

Većina al-Hvarizmijevog rada vezanog za algebru se oslanja na geometrijske koncepte. U mnogim svojim dokazima on predstavlja konstante i nepoznanice kao duljine dužina. Množenje tih brojeva predstavlja određene pravokutnike, tj. njihove površine — očigledno nasljeđe starogrčke geometrijske algebre.

Također je dao važan doprinos trigonometriji, stvarajući tablice sinusa i kosinusa, te prvu tablicu tangensa. Al-Hvarizmi je zaslužan i za razvoj jedne tabularne metode množenja višeznamenkastih brojeva, danas poznate pod nazivom „arapska“ ili „rešetkasto“ množenje, što je metoda algoritamski ekvivalentna dugom množenju. Tu metodu je u Europu uveo Fibonacci [21].

Zapadna Europa je tijekom i nakon 12. st. informacije o dekadskom pozicijskom sustavu i linearnim i kvadratnim jednadžbama dobila iz prijevoda al-Hvarizmijevih djela. Upravo je duž trgovačkih puteva koji su povezivali kršćanski i islamski svijet došlo do upoznavanja Zapadne Europe s dekadskim pozicijskim sustavom brojeva, temeljenim na deset simbola koje danas pišemo kao: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

U nastavku ovog rada detaljno ćemo opisati sadržaj dvaju glavnih al-Hvarizmijevih djela, uz komentare o njihovim srednjovjekovnim europskim prijevodima i utjecaju na razvoj matematike.

# Poglavlje 2

# Al-Hvarizmijeva „Algebra“

Glavno al-Hvarizmijevo matematičko djelo je *Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-džabr wa'l-mukabala*, napisano oko 825. g., koje opisuje načine rješavanja jednadžbi. Riječ „algebra“ izvedena je iz arapskog izraza *al-džabr*, a odnosi se na dio naslova ovoga djela koji u prijevodu znači „upotpunjavanje“. Rosen, jedan od prevoditelja ovog djela, dao je prijevod al-Hvarizmijevih riječi koje opisuju svrhu knjige. U tome stoji da je al-Hvarizmi namjeravao podučavati: „. . . ono što je najlakše i najkorisnije u aritmetici, kao što su potrebe u slučajevima nasljedstva, ostavštine, podjele, tužbi i trgovine, ali i u svim ljudskim odnosima, ili tamo gdje se radi o mjerenju zemljišta, kopanju kanala, geometrijskim proračunima ili drugim objektima raznih vrsta“ [16]. Vidimo da je knjiga trebala biti vrlo praktična i da je algebra uvedena za rješavanje stvarnih životnih problema, koji su bili dio svakodnevnog života u arapskom kalifatu u to vrijeme. Zbog vrlo konkretnih propisa u Kuranu u vezi s podjelom imovine među djecom umrle osobe, muslimani su trebali pronaći način za vrlo precizne podjele zemljišta. Matematika koju su Arapi naslijedili od Grka učinila je takvu podjelu izuzetno složenom, ako ne i nemogućom. Koristeći al-Hvarizmijeve nove metode računanja, lokalna vlast u kalifatu je mogla bolje rješavati probleme s nasljedstvom svog stanovništva [4].

Samo djelo obrađuje četrdeset različitih zadataka, a sastoji se od predgovora, dodatka i pet glavnih poglavlja [2]. Jednu stranicu iz ovog djela, poznatog jednostavno kao al-Hvarizmijeva „Algebra“, možemo vidjeti na slici 2.1.

Al-Hvarizmi u ovom djelu redom opisuje: decimalne i „algebarske“ brojeve, šest tipova jednadžbi prvog i drugog stupnja, geometrijske dokaze za postupke rješavanja triju tipova kvadratnih jednadžbi, metode množenja binoma, računanje s korijenima, primjere za svaku vrstu jednadžbe, razne algebarske probleme, poslovne probleme koji uključuju proporcije i dodatne zadatke ilustrirajući pojedine od tipova jednadžbi. U nastavku ćemo ove sadržaje detaljnije opisati, redom kako su dani u „Algebri“ [11].

Slika 2.1: Stranica iz al-Hvarizmijeve „Algebre“. Preuzeto s Wikipedije.

Nakon što je u uvodnom dijelu opisao prirodne brojeve i indoarapski dekadski pozicijski sustav, al-Hvarizmi je u prvom dijelu prvog poglavlja opisao vrste jednadžbi. Njegove jednadžbe bile su linearne ili kvadratne i sastojale su se od „algebarskih” brojeva: od „jednostavnih brojeva“, tj. konstanti[1], korijena (*šaj*, doslovno „stvar“, naš suvremeni $x$) i kvadrata te nepoznanice (naziva ju *mal*, bogato). Za al-Hvarizmija jedinica (koju naziva

[1]U srednjovjekovnim latinskim prijevodima to je postalo *numerus simplex* ili *dragma*.

*dirham*, po arapskoj novčanoj jedinici) je bila broj.[2] U srednjem vijeku Europljani su „Algebru” preveli na latinski. Čini se da postoje točno tri originalna prijevoda, koji su u kasnija vremena prepisivani i dorađivani. Radi se o prijevodima Engleza Roberta iz Chestera (datiran oko 1145.), Talijana Gerarda iz Cremone (datiran oko 1150.) i Talijana Guglielmo de Lunisa (datiran oko 1215.) [10]. U tim prijevodima, kao i u njihovim kasnijim preradama, kao izrazi za nepoznanicu koriste se *radix* i *res*, a za kvadrat nepoznanice *census*. Tijekom srednjeg vijeka i početkom renesanse, *res* odnosno *radix* bit će uobičajene oznake nepoznanice u latinskim tekstovima, a tako i *census* za kvadrat nepoznanice.

U nastavku rada ćemo koristiti modernu matematičku notaciju, ali moramo znati da je matematika al-Hvarizmija u cijelosti objašnjena bez uporabe simbola, odnosno riječima [16].

Al-Hvarizmi dijeli jednadžbe na šest tipova:

1. Kvadrati jednaki korijenima: $ax^2 = bx$;
2. Kvadrati jednaki brojevima: $ax^2 = c$;
3. Korijeni jednaki brojevima: $bx = c$;
4. Kvadrati i korijeni jednaki brojevima: $ax^2 + bx = c$;
5. Kvadrati i brojevi jednaki korijenima: $ax^2 + c = bx$;
6. Korijeni i brojevi jednaki kvadratima: $ax^2 = bx + c$.

Iz ove podjele možemo primijetiti da za al-Hvarizmija nisu postojala dva tipa jednadžbi, linearne i kvadratne, već je on podijelio jednadžbe na šest tipova. Uzrok je u tome što je on za rješenja prihvaćao samo pozitivna rješenja, a uz to je tražio da u sređenom obliku (na koji primjenjuje svoje metode rješavanja) svi koeficijenti budu pozitivni.

[2] U starogrčkom smislu brojevi su isključivo prirodni brojevi, osim broja „jedan“, koji je izvor svih brojeva.

Primjerice, jednadžba tipa $ax^2 + bx + c = 0$ se ne pojavljuje u klasifikaciji jer uz pretpostavku da su $a$, $b$ i $c$ pozitivni (a to zahtijeva od sređenog oblika) takva jednadžba ne može imati pozitivno (pa čak ni realno) rješenje. Razlog tome je što su al-Hvarizmi i matematičari još puno stoljeća nakon njega nepoznanicu interpretirali geometrijski kao duljinu (i njen kvadrat kao površinu, a kub kao volumen). To, kao i tzv. princip homogenosti[3] ostat će jedan od razloga što je sve do 17. st., kad je R. Decartes skupa s analitičkom geometrijom uveo i moderni način shvaćanja nepoznanice te standardizirano pisanje jednadžbi tako da su svi članovi skupljeni na jednu stranu i izjednačeni s nulom, pristup jednadžbama bio bitno kompliciraniji od suvremenog [5].

Na početku, u prvom poglavlju al-Hvarizmi je dao primjere za prva tri tipa jednadžbi. Za prvi tip jednadžbe $ax^2 = bx$ dao je primjer $5x^2 = 5x$ i njezino rješenje $x = 1$, za drugi tip jednadžbe $ax^2 = c$ dao je primjer $5x^2 = 80$, iz čega je dobio da je $x^2 = 16$ te je njezino rješenje $x = 4$. Za treći tip jednadžbe $bx = c$ dao je primjer $\frac{1}{2}x = 10$ i njezino rješenje $x = 20$. I iz ovih primjera možemo primijetiti ne samo da je al-Hvarizmi izostavio negativna rješenja i nulu (jer ih, kao što smo upravo rekli, ne bi prihvatio kao rješenja), nego i da za ova tri tipa jednadžbi ne opisuje postupak već očigledno očekuje od čitatelja da sam uoči i zapamti da je rješenje jednadžbe tipa $ax^2 = bx$ jednako $\frac{b}{a}$ i analogno za jednadžbe tipa $bx = c$, a da je rješenje jednadžbe $ax^2 = c$ jednako $\sqrt{\frac{c}{a}}$ [11].

U nastavku, al-Hvarizmi je opisao kako rješavati jednadžbu tipa $ax^2 + bx = c$. Kao i za prva tri tipa, al-Hvarizmi postupak daje na primjeru, no u ovom, prvom od tri „složena“ tipa jednadžbi, al-Hvarizmi daje i detalje postupka. Iako je al-Hvarizmi geometrijska opravdanja postupaka skupio zajedno za sva tri tipa „složenih” jednadžbi nakon što je opisao postupke [13], mi ćemo za svaki tip jednadžbe geometrijsko objašnjenje dati odmah iza postupka njenog rješavanja.

**Primjer 1.** *Kao prototip jednadžbe tipa $ax^2 + bx = c$ al-Hvarizmi uzima jednadžbu $x^2$ +*

[3]Duljine mogu biti jednake samo duljinama, površine površinama, a volumeni volumenima. Stoga, primjerice, u jednadžbi $bx = c$ slobodni član $c$ treba biti neka površina (tj. $c = d^2$ za neku duljinu $d$).

$10x = 39$, *odnosno kako on kaže: „Kvadrat i deset korijena čine* 39 *jedinica.“*

*Al-Hvarizmi je postupak dobivanja rješenja opisao na sljedeći način: Uzmeš pola broja korijena i dobiješ* 5*. Kvadriraš dobiveno i dobiješ* 25*. Pribrojiš to broju jedinica i dobiješ* $39 + 25 = 64$*. Korjenuješ dobiveno i dobiješ* 8*. Od toga oduzmeš pola broja korijena i dobiješ* $8 - 5 = 3$*. Dobiveni broj* 3 *je korijen [16]. Danas, simbolima napisano, to bismo zvali svođenjem na potpun kvadrat i izgledalo bi ovako:*

$$x^2 + 10x = 39,$$

$$(x+5)^2 = 39 + 25 = 64,$$

$$x + 5 = \sqrt{64} = 8,$$

$$x = 8 - 5 = 3.$$

Vidimo da u suvremenoj simbolici al-Hvarizmi rješenje normirane kvadratne jednadžbe $x^2 + bx = c$ izračunava kao

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}.$$

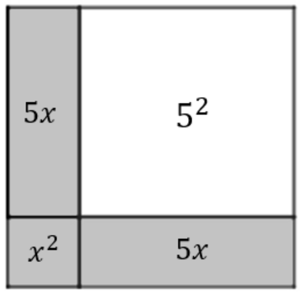
To je postupak ekvivalentan modernoj formuli, osim što od dva realna rješenja uzimamo samo ono koje je pozitivno. Danas bismo pak za istu jednadžbu računali

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2} = -5 \pm 8,$$

odnosno

$$x_1 = 3 \; ; \; x_2 = -13.$$

Postupak za dobiveno pozitivno rješenje al-Hvarizmi opravdava geometrijski, što ćemo opisati koristeći sliku 2.2.




Slika 2.2: Geometrijsko opravdanje rješenja jednadžbe $x^2 + 10x = 39$.

Lijeva strana jednadžbe odgovara jednom kvadratu sa stranicom $x$ te dvama pridruženim pravokutnicima sa stranicama $x$ i 5, to je zatamnjeni dio na slici 2.2. Ako sliku nadopunimo kvadratom sa stranicom 5, dobili smo kvadrat sa stranicom $x + 5$. Dakle površina dobivenog kvadrata je $(x+5)^2$, odnosno $x^2+10x+25$. Znamo da je $x^2+10x = 39$, to bi značilo da je površina ovog kvadrata jednaka površini $39+25 = 64$. Tada bi imali da je $(x+5)^2 = 64$, odnosno $x+5 = 8$ i tada je rješenje $x = 3$ [2]. U ovoj geometrijskoj argumentaciji uočljiv je utjecaj Euklida, konkretno dokaza 4. propozicije iz 2. knjige *Elemenata*: Ako se je dužina presječena na proizvoljnom mjestu, onda je kvadrat nad čitavom dužinom jednak zbroju kvadrata nad dijelovima plus dva pravokutnika određena dijelovima.[4]

Jednadžba iz primjera 1 postala je klasik u kasnijim algebarskim tekstovima te se pojavljuje primjerice kod Abu Kamila (850.–930.), al-Karadžija (953.–1029.) i Omara Khayyama (1048.–1131.). Talijanski matematičar Luca Pacioli (oko 1445.–1515.), u svojoj znamenitoj *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (1494.), je jednadžbu $x^2 + 10x = 39$ opisao geometrijski na isti način kao i al-Hvarizmi, dok ostale al-Hvarizmijeve primjere jednadžbi nije spomenuo [13]. Također, ne samo da je opisana jednadžba odabrana kao normirana (dakle, s vodećim koeficijentom 1), nego al-Hvarizmi upravo iza ovog primjera ističe da se vodeći koeficijent uvijek treba svesti na 1 [11].

[4]U modernoj simbolici to je $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

U al-Hvarizmijevoj „Algebri“ slijedi opis metode rješavanja petog tipa jednadžbi, a to je $ax^2 + c = bx$.

**Primjer 2.** *Kao prototip jednadžbe tipa* $ax^2+c = bx$ *al-Hvarizmi uzima jednadžbu* $x^2+21 = 10$*, odnosno kako on kaže: „Kvadrat i* 21 *jedinica čine* 10 *korijena.“*

*Al-Hvarizmi je postupak dobivanja rješenja opisao riječima: Prepoloviš broj korijena i dobiješ* 5*. Pomnožiš dobiveno sa sobom i umnožak je* 25*. Od toga oduzmeš broj jedinica* 21 *i dobiješ ostatak* 4*. Ostatak korjenuješ i oduzmeš ga od pola broja korijena, tj.* $5 - 2 = 3$*. Dobiveni broj je korijen kojeg tražiš i čiji je kvadrat* 9*. Alternativno, možeš dodati kvadratni korijen polovici broja korijena i zbroj je* 7*. To je onda korijen kojeg tražiš [6].*

Simbolima napisano, al-Hvarizmijev postupak izgledao bi ovako:

$$x^2 + 21 = 10x,$$

$$(x - 5)^2 = 25 - 21 = 4,$$

$$x - 5 = \sqrt{4} = \pm 2,$$

$$x_1 = 5 - 2 = 3,$$

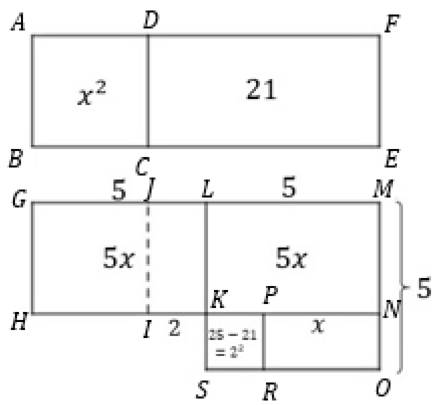
$$x_2 = 5 + 2 = 7.$$

I u ovom primjeru, kao i u prethodnom, vidimo da u suvremenoj simbolici al-Hvarizmi rješenje normirane kvadratne jednadžbe $x^2 + c = bx$ izračunava kao

$$\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{4}.$$

Vidimo da se opet radi o postupku ekvivalentnom modernoj formuli, no važnije je da je ovim primjerom al-Hvarizmi, prvi u povijesti, uočio da neke kvadratne jednadžbe mogu imati dva rješenja. Također, al-Hvarizmi ovdje ističe da ako je kvadrat polovice broja korijena manji od konstantnog člana, jednadžba nije rješiva, a da ako su jednaki, onda je rješenje jednostavno pola broja korijena. Vidimo dakle da je uočio da negativnost diskriminante znači nepostojanje (realnog) rješenja, a diskriminanta jednaka nuli znači jedinstveno rješenje [11].

Postupak je opravdao geometrijski, koristeći 5. propoziciju 2. knjige Euklidovih *Elemenata*: Ako se dužina podijeli na jednake i nejednake dijelove,[5] onda je pravokutnik određen nejednakim dijelovima skupa s kvadratnom nad dužinom između točaka kojima je dužina podijeljena jednak kvadratu nad polovinom dužine.[6].




Slika 2.3: Geometrijsko opravdanje rješenja jednadžbe $x^2 + 21 = 10x$.

Lijevu stranu jednadžbe možemo prikazati tako da uz kvadrat sa stranicom $x$ nacrtamo pravokutnik s površinom 21 (gornji crtež na slici 2.3). Taj veliki pravokutnik $ABEF$ treba biti jednak pravokutniku sa stranicama 10 i $x$. Stranicu duljine 10 podijelimo na pola, tj. na dva pravokutnika $GHKL$ i $KNML$ (donji crtež na slici 2.3). Nad $\overline{LM}$, koja je duljine 5, konstruiramo kvadrat $LSOM$ s površinom 25. Daljnjom podjelom pravokutnika $GHKL$ i $KNML$, dobivamo pravokutnik $JIKL$ i pravokutnik $RPON$ koji imaju jednake površine,

[5]Misli se: jednom točkom se prepolovi, a drugom podijeli na dva nejednaka dijela. Simbolički: Ako je dužina duljine $a$, onda je jednom točkom podijeljena na dva dijela duljina $\frac{a}{2}$, a drugom na dijelove duljina $x$ i $a - x$, $x \neq a - x$.

[6]Simbolički: $x(a-x)+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, Ovo je naravno ekvivalentno suvremenoj formuli $(y-z)(y+z) = y^2 - z^2$.

zbog čega slijedi da je površina lika $LKRPONM$ jednaka 21. Iz toga slijedi da je površina kvadrata $KSPR$ 4, odnosno $|KS|$ je jednaka $|IK|$ pa je $|HK| = |HI| + |IK| = x + |IK| = 5$, iz čega slijedi da je $x = 3$ [11].

Ovu jednadžbu je kasnije opisao i njemački matematičar Adam Riese (1492.–1559.) u svom djelu *Die Coss* (po kojem su renesansni njemački algebraičari bili nazivani kosistima), na sličan način kao i al-Hvarizmi, iz čega se ponovno vidi koliko je velik utjecaj imao al-Hvarizmi na mnoge matematičare kasnijeg doba [13].

Naposljetku, al-Hvarizmijevu metodu rješavanja jednadžbi možemo primijeniti i za rješavanje posljednjeg „složenog“, šestog tipa jednadžbi $ax^2 = bx + c$, koji opisujemo u nastavku.

**Primjer 3.** *Kao prototip jednadžbe tipa $ax^2 = bx + c$, al-Hvarizmi uzima jednadžbu $x^2 = 3x + 4$, odnosno kako on kaže: „Kvadrat čine 3 korijena i 4 jedinice.“*

*Al-Hvarizmi je postupak dobivanja rješenja opisao riječima: Uzmeš pola broja korijena i dobiješ $\frac{3}{2}$. Kvadriraš dobiveno i dobiješ $\frac{9}{4}$ . Pribrojiš to broju jedinica i dobiješ $\frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4}$. Korjenuješ dobiveno i dobiješ $\frac{5}{2}$. Tome dodaš pola broja korijena i dobiješ $\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$. Dobiveni broj 4 je rješenje [6].*

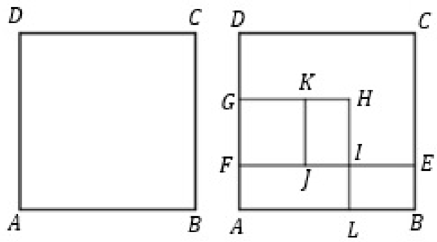
I u ovom primjeru, u suvremenoj simbolici al-Hvarizmi rješenje normirane kvadratne jednadžbe $x^2 + bx = c$ izračunava kao

$$\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2},$$

dakle ekvivalentno modernoj formuli, pri čemu kao i u četvrtom tipu jednadžbe imamo samo jedno dopustivo (pozitivno) rješenje.

I za ovaj tip jednadžbe postupak je al-Hvarizmi opravdao geometrijski. Neka je $ABCD$ kvadrat sa stranicom $x$, kojem je onda površina $x^2$ (lijevi crtež na slici 2.4). Nad stranicom

$\overline{AB}$ konstruiramo pravokutnik $ABEF$ (desni crtež na slici 2.4). S $G$ označimo polovište dužine $\overline{FD}$ i nad $\overline{FG}$ konstruiramo kvadrat $GFJK$. Produžimo $GK$ preko vrha K do $\overline{GH}$, tako da je $|KH| = |AF|$ i $|GH| = |GA|$ pa je $GALH$ kvadrat. Nadalje, $|GD| = |IE|$, $|KJ| = |IE|$ i $|FA| = |JI|$. Dakle, površina pravokutnika $KJIH$ je jednaka površini pravokutnika $ILBE$. Površina pravokutnika $FABE$ predstavlja 4 jedinice. Kvadrat $GALH$ se sastoji od umnoška polovice korijena $1\frac{1}{2}$ i dva pravokutnika $FALI$ i $KJIH$. Dakle, ukupna površina ovog kvadrata je $6\frac{1}{4}$. Kvadrat $ABCD$ ima površinu $x^2$ što mora biti jednako 3 korijena i 4 jedinice. Stranica $\overline{GD}$ ima duljinu jednaku polovici broja korijena, tj. $1\frac{1}{2}$, dok stranica $\overline{AG}$ ima duljinu $6\frac{1}{4}$. Polovicu korijena toga broja, tj. $2\frac{1}{2}$ dodamo duljini stranice $\overline{GD}$ koja je $1\frac{1}{2}$ i dobijemo 4. Odnosno, dobili smo da je duljina stranica $\overline{AD}$ jednaka 4, a to je traženo rješenje [13].




Slika 2.4: Geometrijsko opravdanje rješenja jednadžbe $x^2 = 3x + 4$.

Za ova posljednja tri tipa „složenih“ jednadžbi, al-Hvarizmi ističe da se pravila za pojedini tip jednadžbe moraju poštovati. Tako ističe, da bez obzira na tip, prva dva koraka su ista: trebamo prepoloviti broj korijena i kvadriramo dobiveni broj. Zatim se za četvrti i šesti tip kao što su npr. $x^2 + 10x = 39$ i $x^2 = 3x + 4$ na kvadrat dodaje konstanta; za peti tip kao što je $x^2 + 21 = 10x$ konstanta se oduzima od kvadrata. Ističe da ako se oduzimanje ne može izvršiti, jednadžba se ne može riješiti. Četvrti korak isti je za sve tipove: odrediti kvadratni korijen zbroja ili razlike. Samo peti i posljednji korak koji daje konačni rezultat nepoznanice $x$ je specifičan za svaki tip jednadžbe. Za četvrti tip, treba oduzeti polovicu broja korijena od rezultata četvrtog koraka; za peti, oduzeti kvadratni korijen od polovice;

a za šesti dodati polovicu korijenu. S didaktičke strane uočavamo da al-Hvarizmi najprije upoznaje čitatelje s kanonskim vrstama jednadžbi i metodama za njihovo rješavanje, a nakon što se stekne određena stručnost u rješavanju, objašnjava zašto su metode korektne i ističe sličnosti i razlike pojedinih metoda [11].

Nakon što je opisao način rješavanja ovih šest tipova jednadžbi, al-Hvarizmi opisuje množenje binoma s binomom te binoma s monomom, pri čemu je u svakom binomu prvi član pozitivan i „u deseticama”, a drugi član može biti pozitivan i negativan, ali je „u jedinicama”. Kod množenja binoma s binomom ističe da su potrebna četiri množenja. Prvo detaljno opisuje tri primjera množenja binoma s binomom: $(10+1)(10+2)$, $(10-1)(10-1)$ i $(10+2)(10-1)$. Nakon toga navodi dva primjera množenja binoma s monomom: $(10-x)\cdot 10$ i $(10+x)\cdot 10$ koje također detaljno objašnjava. Zatim daje devet primjera (od kojih osam sadrži neodređeni član $x$) [11]:

1. $(10+x)\cdot(10+x)$;
2. $(10-x)\cdot(10-x)$;
3. $\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)$
4. $(10-x)\cdot(10+x)$;
5. $(10-x)$;
6. $(10+x)\cdot(x-10)$;
7. $\left(10+\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-5x\right)$;
8. $(x-10)\cdot(x-10)$;
9. $(x+10)\cdot(x-10)$.

Kao primjer stila izlaganja, navodimo prijevod al-Hvarizmijevog opisa izračunavanja umnoška $(10 + x) \cdot (10 + x)$: $x$ pomnoženo s $x$ je $x^2$, a $x$ pomnožen s 10 je $10x$; također, 10 pomnoženo s $x$ je $10x$, a 10 pomnoženo s 10 je 100. Stoga je rezultat zbroj od $x^2$, $20x$ i 100 [13].

U sljedećem poglavlju al-Hvarizmi opisuje množenje i dijeljenje izraza koji sadrže korijene. Nakon tri konkretna primjera, ovdje al-Hvarizmi ne daje objašnjenja, nego samo šest općih pravila, koja bismo u modernoj notaciji zapisali ovako [11]:

1. $a \cdot \sqrt{x^2} = \sqrt{a^2 \cdot x^2} = a \cdot x;$
2. $a \cdot \sqrt{b^2} = \sqrt{a^2 \cdot b^2} = \sqrt{c} = d;$
3. $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a}{b};$
4. $\frac{a \cdot \sqrt{c^2}}{\sqrt{b^2}} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot c^2}{b^2}} = \frac{a \cdot c}{b};$
5. $\left(\sqrt{a^2}\right) \cdot (\sqrt{b^2}\Big) = \sqrt{a^2 \cdot b^2} = \sqrt{c} = d;$
6. $\left(a \cdot \sqrt{b^2}\right)\left(c \cdot \sqrt{d^2}\right) = \left(\sqrt{a^2 \cdot b^2}\right)\left(\sqrt{c^2 \cdot d^2}\right) = \sqrt{e} = f.$

Nakon što je ovime upotpunjena „opća teorija jednadžbi”, Al-Hvarizmi je u nastavku kroz 18 primjera opisao kako se sve linearne i kvadratne jednadžbe mogu svesti na jedan od osnovnih šest tipova. On to provodi pomoću dvije operacije, *al-džabr*[7], što znači nadopunjavanje, postupak je prebacivanja negativnih članova s jedne na drugu stranu jednakosti i *al-mukabala*[8] što znači izjednačavanje, a odnosi se na oduzimanje pozitivnog člana jedne strane jednadžbe od istovrsnog pozitivnog člana na drugoj strani [20]. Navest ćemo dva od prvih šest primjera, koji redom opisuju sređivanje jednadžbi pojedinih tipova na standardni oblik.

[7] U latinskim prijevodima ovo je postalo *restaurare*.

[8] U latinskim prijevodima korišten je izraz *opponere*.

**Primjer 4.** *Prvi od ovih primjera je rješavanje zadatka „Podijeli deset na dva dijela tako da se jedan dio množi s drugim i umnožak, rezultat, uzet četiri puta bude jednak jednom dijelu pomnoženom sa sobom". Vidimo da se u suvremenoj simbolici radi o jednadžbi*

$$4x(10 - x) = x^2.$$

*Al-Hvarizmi prvo izračunava umnožak „lijeve" strane,* $40x - 4x^2$*. Zatim operacijom* al-džabr *prebacuje* $4x^2$ *na drugu stranu, dakle dobiva*

$$40x = 5x^2,$$

*iz čega zaključuje, budući da je ovo jednadžba prvog tipa, da je rješenje* 8.

**Primjer 5.** *Sljedeći primjer je jednadžba*

$$(10 - x)^2 + x^2 = 58,$$

*koju rješava redom ovako:*

$$100 + x^2 - 20x + x^2 = 58,$$

*iz čega* al-džabr *daje*

$$100 + 2x^2 = 58 + 20x.$$

*To pak svodi na „jedan kvadrat" (normira, dijeljenjem s* 2*):*

$$50 + x^2 = 29 + 10x,$$

*Sad operacija* al-mukabala*, ovdje oduzimanje* 29 *od* 50*, daje sređeni oblik*

$$21 + x^2 = 10x,$$

*jednadžba petog tipa, koju naravno rješava kako je već opisano, samo skraćeno. Pritom navodi samo rješenje* 3*, što je naravno i dovoljno s obzirom na zadatak: Tražili su se dijelovi od* 10 *s određenim svojstvom, pa ako imamo jedan od njih,* 3*, automatski imamo i drugi (drugo rješenje),* $10 - 3 = 7$.

Slijedi 12 primjera „za utvrđivanje gradiva", pri čemu njih tri uključuju izraze s razlomljenim dijelovima s nepoznanicom u nazivniku. U nastavku ćemo istaknuti tri primjera.

**Primjer 6.** *Prvi primjer koji je zapravo treći od njih* 12 *je „Podijeli deset na dva dijela tako da se zbroj jednog pomnožen sa sobom doda drugom pomnoženim sa samim sobom te se doda jedan dio, a drugi dio se oduzme kako bi se dobile* 54 *jedinice". Dakle, to je jednadžba*

$$(10 - x)^2 + x^2 + (10 - x) - x = 54.$$

*Al-Hvarizmi prvo izračuna na lijevoj strani* $(10 - x)^2$ *i to daje* $100 - 20x + x^2$. *Zatim operacijom al-džabr zbrajamo* $x^2$ *i* $x^2$, $-20x$ *i* $-2x$ *te* 100 *i* 10 *pa dobivamo*

$$2x^2 - 22x + 110 = 54.$$

*Nakon toga operacijom al-džabr prebacujemo* $-22x$ *na desnu stranu i dobivamo*

$$2x^2 + 110 = 54 + 22x.$$

*Dijeljenjem cijele jednadžbe s* 2 *dobivamo* $x^2 + 55 = 27 + 11x$ *te korištenjem operacije al-mukabale dobivamo*

$$x^2 + 28 = 11x$$

*čime se početna jednadžba svela na peti tip jednadžbe. Prepolovimo broj* 11 *i dobivamo* $5\frac{1}{2}$ *te od njegova kvadrata* $30\frac{1}{4}$ *oduzmemo broj jedinica, tj.* 28. *Dobiveni broj korjenujemo te dobivamo*

$$\sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}.$$

*Sada od* $5\frac{1}{2}$ *oduzmemo* $1\frac{1}{2}$ *i dobijemo rješenje* 4.

**Primjer 7.** *Drugi, odnosno sedmi od njih dvanaest je primjer*

$$x^2 = y, \frac{y}{y+2} = \frac{1}{2}.$$

*Odmah na početku možemo primijetiti, ako uvrstimo u drugu jednadžbu da je* $x^2 = y$ *dobit ćemo kvadratnu jednadžbu te al-Hvarizmi ističe da primjer riješimo tako što prvo dobijemo rješenje druge jednadžbe* $y$*, a zatim uvrstimo* $y$ *u* $x^2 = y$ *i dobijemo i drugo rješenje* $x$*. Stoga, prvo u drugoj jednadžbi* $y + 2$ *pomnožimo s* $\frac{1}{2}$ *i dobijemo*

$$y = \frac{1}{2}(y + 2).$$

*Zatim izmnožimo* $\frac{1}{2}$ *s članovima u zagradi i dobijemo*

$$y = \frac{1}{2}y + 1.$$

*Korištenjem operacije al-mukabala prebacujemo* $\frac{1}{2}y$ *na lijevu stranu i dobivamo* $\frac{1}{2}y = 1$*. Nakon toga pomnožimo s* $2$ *i dobijemo konačan rezultat* $y = 2$*. Zatim u prvu jednadžbu* $x^2 = y$ *uvrstimo* $y = 2$ *i dobijemo i drugo rješenje* $x = \sqrt{2}$*.*

**Primjer 8.** *Treći, koji je zapravo posljednji od njih* $12$ *je primjer*

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{6}.$$

*Ovaj primjer se rješava na način da prvo svaki član pomnožimo s najmanjim zajedničkim nazivnikom, u ovom slučaju je to* $6 \cdot x \cdot (x + 1)$ *te dobivamo*

$$6x = 6 \cdot (x + 1) - x \cdot (x + 1).$$

*Sređivanjem izraza dobivamo,*

$$6x = 6x + 6 - x^2 - x.$$

*Zatim operacijama al-mukabala i al-džabr dobivamo*

$$x^2 + x = 1.$$

*Uzmemo pola broja korijena i pomnožimo sa samim sobom te dobijemo* $\frac{1}{4}$*. Zatim dodamo broj* $6$ *i od zbroja uzmemo korijen. Dakle,* $\frac{1}{4} + 6 = 6\frac{1}{4}$ *i korijen od toga je* $\frac{5}{2}$*. Na kraju, od toga oduzmemo* $\frac{1}{2}$ *i dobijemo konačno rješenja, a to je* $2$ *[11, 13].*

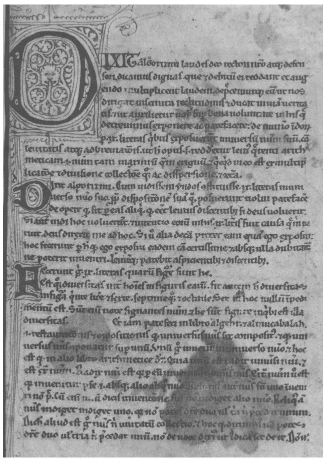
Posljednji dio u ovoj knjizi je dodatak u kojem su obrađena ekonomska pitanja, kao što su iskopavanje kanala, mjerenje zemljišta, korištenje indijskog brojevnog sustava te geometrijski i aritmetički izračuni vezani za zakone nasljeđivanja u Kuranu [2]. Sadržaj dodatka s 21 problemom se nalazi u Gerardovu prijevodu, od koji su najzanimljivija dva zadatka. Jedan od njih je $x^2 - y^2 = 2$ *i* $\frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{2}$ u kojem se prvi put spominje kvadrat dvije nepoznanice te se koristi metoda da se jedna nepoznanica izrazi preko druge i uvrsti u drugu jednadžbu te se tako dobije jedna jednadžba s jednom nepoznanicom. Drugi primjer je $\sqrt{x^2 - x} + x = 2$ čiji način rješavanja nije dobro opisan, a zapravo se rješava kvadriranjem obje strane jednadžbe, čime nestaje korijen. Većina primjera je lako rješiva, ali neki su i ponešto zahtjevniji. U verziji Roberta od Chestera se nalaze primjeri rješavanja šest vrsta jednadžbi, jedan od njih je primjer $(3x)\cdot(4x) = x^2 + 44$, koji možemo svesti na drugi osnovni tip jednadžbe korištenjem *al-džabr* te dobivamo $11x^2 = 44$. Dijeljenjem s 11 dobivamo za rješenje 4. S druge strane, u prijevodima Guglielma iz Lunisa je opisan cijel algebarski dio [11, 13].

# Poglavlje 3

# Al-Hvarizmijeva „Aritmetika”

Al-Hvarizmi je također autor jednog djela o indijskom dekadskom pozicijskom sustavu i o računskim operacijama, čiji transkribirani izvorni naslov je *Kitāb al-džam wa'l-tafrīk bi-hisāb al-Hind* („Knjiga o zbrajanju i oduzimanju u indijskoj računici”, zvat ćemo ga jednostavno „Aritmetika“), napisano oko 825. godine, ali nešto prije „Algebre”. Djelo je sačuvano na latinskom prijevodu, ali je izgubljen arapski original. Jednu stranicu iz ovog djela možemo vidjeti na slici 3.1. Kao i „Algebra”, „Aritmetika” je u srednjem vijeku prevođena na latinski, pod nazivom *Algorit(s)mi de numero Indorum*, prvi prijevod napisao je najvjerojatnije Adelard of Bath u 12. st [1]. U tom prijevodu ispred svakog pravila piše *Dixit algoritmi* što znači „Algoritam je govorio”, tj. zadnji dio imena al-Hvarizmija pretvoren je u „algoritam”. U drugim latinskim tekstovima ime je pretvoreno u *algorithmus* u prijevodu s latinskog na hrvatski jezik „algoritam”. S vremenom je naslov nad pravilima „Algoritam je govorio” pretvorio se u „algoritam glasi”. Na taj način su se pravila računanja počela nazivati algoritmima. Do 18. stoljeća zajednički naziv za novu aritmetiku s brojevima zapisanim pomoću deset znamenki 0,1,2,3,4,5,6,7,8 i 9 bio je algoritam, ili na latinskom *algorismus* [13].

Al-Hvarizmijevo djelo o aritmetici posebno je doprinijelo širenju indoarapskog dekad-



Slika 3.1: Stranica iz jednog prijevoda al-Hvarizmijeve „Aritmetike”. Preuzeto s Wikipedije.

skog pozicijskog sustava u Europi. U ovom djelu je opisao i metode računanja s razlomcima, a poznato je da je metoda korjenovanja bila opisana u arapskom izvorniku iako nedostaje u latinskoj verziji ovog djela koja nam je temelj za ovo poglavlje [3].

Ovaj naš opis temelji se na jednom engleskom prijevoda iz knjižnice u Cambridge-u, koji je prethodno pripadao samostanu Sv. Edmund u Bury-u, a sastoji se od 8 ispisanih listova na kojima se nalaze opisi pravila aritmetičkih operacija u indoarapskom pozicijskom sustavu. Najveći problem al-Hvarizmijevih djela pogađa i ovu knjigu, a odnosi se na minimalno sačuvane zapise od kojih se nisu mogli napraviti kvalitetni prijevodi. Zbog toga možemo pronaći različite prijevode iste knjige, jer su sami prevoditelji mijenjali sadržaj knjige prilagođavajući ga znanju kojeg su imali, a koje je bilo manje od al-Hvarizmijevog znanja o indoarapskim brojkama i aritmetici. U nastavku ćemo detaljno opisati kako je al-Hvarizmi objasnio četiri osnovne računske operacije, pri čemu naš opis prati engleski prijevod dan u [8]. U [8] su navedeni mnogi razlozi zašto se smatra da se ne radi o direktnom prijevodu izvornika: s obzirom na nedosljednosti i neke očigledne „rupe”, smatra se da se u tom rukopisu radi o prijepisu jednog ranijeg izvornog prijevoda „Aritmetike”.

Na početku, uz isticanje indijskog porijekla, uvodi se devet znamenki danas pisanih kao 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Slijedi opis principa pozicijskog sustava, uz jasno (iako iz današnje perspektive komplicirano formulirano) naglašavanje da je svaka sljedeća pozicija (ulijevo) mjesne vrijednosti deset puta veće od prethodne. Al-Hvarizmi tako kaže da prvo mjesto predstavlja jedinice, drugo desetice, treće stotice, četvrto tisućice i peto desettisućice. Pritom ističe nužnost „malog kruga” (nule, 0) u tom zapisu, navodeći da se inače ne bi mogao razlikovati jedan od deset, sto, tisuću. Korištenje znamenke 0 detaljno obrazlaže, a zatim navodi i konkretan primjer. Zapisivanje brojeva je opisano na način da je broj tri stotine dvadeset i pet sastavljen od 5, 20 i 300; prvo se uzima 5 na mjestu jedinica, zatim se na drugu poziciju (zdesna) stavlja 2 zbog dvije desetice i naposlijetku na treću poziciju (zdesna) 3 zbog tri stotice. Zaključuje da je i inače postupak analogan, a da „ako se na ikojoj poziciji skupi deset ili više, onda se mora podići na višu poziciju i za svaku deseticu se na višoj poziciji treba dodati jedinica”. To dalje još detaljnije razglaba, ističe da je vrijednost od 0 „ništa” i da vrijednosti pozicija rastu zdesna ulijevo. Ovaj uvodni dio završava s primjerom utvrđivanja da brojku 1.180.703.051.492.863 treba pročitati kao jedna tisuća tisuća tisuća tisuća tisuća stotinu i osamdeset tisuća tisuća tisuća tisuća sedam stotina i tri tisuće tisuća tisuća pedeset i jedna tisuća tisuća[1] četiri stotine devedeset i dvije tisuće osam stotina šezdeset i tri.

Slijedi opis zbrajanja i oduzimanja u dekadskom pozicijskom sustavu. Jedina bitna razlika u odnosu na suvremeni način je da se računi provode slijeva udesno, umjesto zdesna ulijevo, kako je bilo uobičajeno u staroj Kini (iako nije poznato postoji li poveznica između starokineske i arapske matematike [8]).

Prvo kaže: „Kada želite dodati broj broju ili oduzeti broj od broja, smjestite oba broja u dva retka, jedan ispod drugoga tako da znamenka na mjestu jedinica drugog broja bude ispod znamenke jedinica prvog broja, znamenka na mjestu desetica drugog broja bude ispod

[1]Izraze milijun, bilijun trilijun, kvadrilijun uveo je tek u 15. st. francuski matematičar Nicolas Chuquet. Izraz milijarda se pojavio još kasnije.

znamenke desetica prvog broja i tako redom.” Ako želimo zbrajati, zbrajaju se znamenke na odgovarajućim pozicijama. Ako smo pritom dobili zbroj manji od 10, samo ga zapisujemo na istoj poziciji. U slučaju kada tim zbrajanjem na nekoj poziciji dobijemo zbroj 10 ili više, uzimamo jedan i prenosimo ga na sljedeću poziciju ulijevo u odnosu na poziciju na kojoj smo zbrajali. Ako pritom od 10 ne preostane ništa, na poziciji na kojoj smo zbrajali zapisujemo 0, a inače na toj poziciji zapisujemo koliko je preostalo od 10. To sve opisano je detaljno, poziciju po poziciju.

Kod oduzimanja brojeva, oduzimamo jedinice donjeg broja od jedinica gornjeg broja, desetice od desetica i tako redom, analogno kao kod zbrajanja. No, u ovom je slučaju bitno obratiti pažnju na situaciju kada je znamenka na nekoj poziciji gornjeg broja manja (uključivo ništa, 0) od znamenke na istoj poziciji donjeg broja. Tada u prvom broju „posuđujemo” deseticu sa sljedeće pozicije ulijevo i dodajemo vrijednosti promatrane pozicije, a zatim oduzimamo iznos pozicije donjeg broja. Ukoliko je pak na toj sljedećoj poziciji gornjeg broja 0, onda posuđujemo ne deset, nego sto od prekosljedeće pozicije itd. Postupak je ilustriran primjerima, ali u prijevodu o kojem pišemo drugi primjer je prekinut prije kraja, a prvi je trivijalan. Stoga dajemo vlastiti primjer u duhu opisa postupka.

**Primjer 9.** *Oduzmimo* $1234 - 321$. *Prvo potpisujemo brojeve:*

$$\begin{array}{r} 1234 \\ 321 \end{array}.$$

*Ispod* 1 *na prvom mjestu gornjeg broja je ništa, što odgovara* 0*, dakle u prvom koraku imamo*

$$\begin{array}{cr} 1 & 234 \\ & 321 \\ \hline 1 & \end{array}.$$

*Zatim treba oduzeti* 3 *od* 2*. Budući da je* 2 *manje od* 3*, treba posuditi* 1 *s prethodne pozicije,* *tj. mičemo* 1 *iz rezultata i oduzimamo* 3 *od* 12 *da bismo dobili* 9 *na trećoj poziciji rezultata:*

$$\begin{array}{r} 1\quad 234 \\ 321 \\ \hline 9\phantom{00} \end{array}.$$

*Zatim treba na drugoj poziciji oduzeti* 2 *od* 3*, pa na prvoj* 1 *od* 4 *da dobijemo konačni rezultat*

$$\begin{array}{r} 1234 \\ 321 \\ \hline 913 \end{array}.$$

Nakon opisa zbrajanja i oduzimanja, slijedi opis prepolavljanja (koje je u srednjem vijeku često bilo smatrano zasebnom operacijom). Postupak ide isto poziciju po poziciju, s tim da ako se na nekoj poziciji prepolavlja neparna znamenka, ostatak 1 se prenosi na poziciju niže vrijednosti kao 5. Primjerice, ovo je naš primjer za ilustraciju al-Hvarizmijevog (ili prevodiočevog) postupka: Ako želimo prepoloviti 432 prepolovimo 4, dobijemo 2, preopolovimo 3, dobijemo 1 i prenosimo 5 na znamenku jedinica, čemu pribrojimo pola od 2 da dobijemo konačni rezultat 21(5 + 1) = 216.

Nakon toga, al-Hvarizmi je objasnio i operacije množenja i dijeljenja u dekadskom pozicijskom sustavu. Kada želimo pomnožiti jedan broj s drugim, ti se brojevi potpisuju tako da je prva znamenka prvog faktora iznad zadnje znamenke drugog faktora.

**Primjer 10.** *Za primjer je dan umnožak brojeva* 214 *i* 2326*. Prvo ih, uz dosta popratnog teksta, potpisuje kako je navedeno:*

$$\begin{array}{lll} & 2 & 326 \\ 21 & 4 & \end{array}.$$

*Nakon toga počinjemo od prve znamenke gornjeg broja i pomnožimo ju s posljednjom znamenkom donjeg broja. Rezultat množenja zapisujemo iznad gornjeg broja, tj. tako da* *se taj broj nalazi iznad prve znamenke gornjeg broja, odnosno zadnje znamenke donjeg broja:*

$$\begin{array}{rrl} & 8 & \\ & 2 & 326\ . \\ 21 & 4 & \end{array}$$

*Zatim množimo prvu znamenku gornjeg broja s predzadnjom znamenkom donjeg broja i postupak ponavljamo sve dok ne pomnožimo prvu znamenku gornjeg broja sa svim znamenkama donjeg broja, pri čemu izračunate znamenke zapisujemo zdesna ulijevo:*

$$\begin{array}{rrl} 42 & 8 & \\ & 2 & 326\ . \\ 21 & 4 & \end{array}$$

*Nakon toga, slijedi množenje druge znamenke gornjeg broja sa svakom znamenkom donjeg broja, a rezultat se ponovno piše iznad prvog broja, a na način da su znamenke dobivenog broja zapisane tako da je mjesto jedinica iznad mjesta jedinica donjeg broja, desetice iznad desetica i stotice iznad stotica. Tako nastavljamo sve dok ne pomnožimo svaku znamenku gornjeg broja sa svakom znamenkom donjeg broja. Kroz 12 koraka, cijel postupak bi izgledao kao na slici 3.2.*

*Al-Hvarizmi piše da kad se dogodi da je znamenka drugog broja ispod nekog mjesta u kojem nema broja, tj. u kojem je krug (nula), prijeđemo na sljedeće mjesto udesno na kojem „ima broja”. Svaki krug koji se pomnoži s nekim brojem nije ništa te zapisujemo krug, a sve što se pomnoži s krugom isto tako daje krug. Kada smo sve pomnožili, zbrajamo dobivene umnoške u koracima* (3), (6), (9) *i* (12), *tj.* 428, 642, 428 *i* 1284 *i time dolazimo do konačnog rezultata, a to je* 497764.

Dijeljenje se uvodi usporedbom s množenjem: Zbrajanju kod množenja odgovara oduzimanje kod dijeljenja. Također, opet se prvo opisuje kako potpisati brojeve koje dijelimo: Kod dijeljenja brojeve zapisujemo na način da prva znamenka djelitelja bude ispod prve

| | |
|---|---|
| (3) | 4 2 8 |
| (2) | 2 3 2 6 |
| (1) | 2 1 4 |
| (6) | 6 4 2 |
| (5) | 2 3 2 6 |
| (4) | 2 1 4 |
| (9) | 4 2 8 |
| (8) | 2 3 2 6 |
| (7) | 2 1 4 |
| (12) | 1 2 8 4 |
| (11) | 2 3 2 6 |
| (10) | 2 1 4 |

Slika 3.2: Prikaz množenja brojeva 214 i 2326.

znamenke djeljenika. Ako je prva znamenka djeljenika manja od prve znamenke djelitelja, pomičemo djelitelj prema desno, tj. stavimo prvu znamenku djelitelja ispod druge znamenke djeljenika. Zatim se postupak objašnjava na primjeru.

**Primjer 11.** *Uzmimo primjer kada je prva znamenka djelitelja manja od prve znamenke djeljenika, npr. dijelimo broj* 46468 *s brojem* 324*. Iznad prve znamenke djeljenika pišemo broj koji kad se pomnoži s prvom znamenkom djelitelja je manji ili jednak prvoj znamenci djeljenika i to je broj* 1*. Dobiveni broj sa strane pomnožimo s prvom znamenkom djelitelja te rezultat oduzmemo od prve znamenke djeljenika, odnosno* $4 - 1 \cdot 3 = 1$ *. Rezultat, tj. broj* 1 *pak zapišemo u drugi red iznad prve znamenke djeljenika, što bi izgledalo ovako*

1

1

4 6468

324

*te onda drugu znamenku djelitelja pomnožimo s rezultatom prvog oduzimanja te dobiveni broj oduzmemo od druge znamenke djeljenika, tj.* $6 - 1 \cdot 2 = 4$*. Rezultat broj* 4 *zapisujemo u treći red iznad druge znamenke djeljenika. a onda treću znamenku djelitelja množimo s rezultatom drugog oduzimanja te dobiveni broj oduzmemo od treće znamenke djeljenika, odnosno* $4 - 1 \cdot 4 = 0$*, i zapišemo rezultat* 0 *u četvrti red iznad treće znamenke djeljenika. Kroz* 6 *koraka bi to izgledalo ovako;*

| | | |
|---|---|---|
| (6) | 0 | |
| (5) | 4 | |
| (4) | 1 | |
| (3) | 1 | |
| (1) | 4 | 6468 |
| (2) | 3 | 24 |

*Zatim djeljenik pomičemo za jedno mjesto udesno i postupak ponavljamo kao na početku te dobivamo*

| | | |
|---|---|---|
| (12) | | 110 |
| (11) | | 126 |
| (10) | | 12 |
| (9) | | 2 |
| (8) | 1 | 40 |
| (7) | 1 | 4 |
| | 4 | 6468 |
| | | 324 |

*Na kraju djeljenik pomičemo za još jedno mjesto udesno, odnosno prvu znamenku djeljenika pišemo ispod treće znamenke djelitelja. Cijel postupak od* 17 *koraka možemo vidjeti na slici 3.3.*

| | | |
|---|---|---|
| (6) | 0 | $4-1\cdot 4=0$ |
| (5) | 4 | $6-1\cdot 2=4$ |
| (4) | 1 | $4-1\cdot 3=1$ |
| (3) | 1 | |
| (1) | 4 6 4 6 8 | |
| (2) | 3 2 4 | |
| (12) | 1 1 0 | $126-4\cdot 4=110$ |
| (11) | 1 2 6 | $20-4\cdot 2=12$ |
| (10) | 1 2 | $14-4\cdot 3=2$ |
| (9) | 2 | |
| (8) | 1 4 0 | |
| (7) | 1 4 | |
| | 4 6 4 6 8 | |
| | 3 2 4 | |
| (17) | 1 3 6 | $148-3\cdot 4=136$ |
| (16) | 1 4 8 | $20-3\cdot 2=14$ |
| (15) | 2 0 | $11-3\cdot 3=2$ |
| (14) | 1 1 0 8 | |
| (13) | 1 4 3 | |
| | 4 6 4 6 8 | |
| | 3 2 4 | |

Slika 3.3: Prikaz dijeljenja brojeva 46468 i 324.

*Postupak je gotov kad je posljednja znamenka djelitelja ispod posljednje znamenke djeljenika. Broj* 143 *koji smo dobili kao* 13. *korak na slici 3.3 je količnik brojeva* 46468 *i* 324*, a posljednji broj koji smo dobili kao* 17. *korak na slici 3.3 je brojnik razlomka kojem je nazivnik djelitelj, a to je* $\frac{136}{324}$.

**Primjer 12.** *Drugi primjer koji je al-Hvarizmi dao u ovom djelu je dijeljenje broja 1800 s brojem 9. Budući da je prva znamenka djelitelja* 1 *i manja je od prve znamenke djeljenika to znači djeljenik pomičemo u desno za jedno mjesto i zatim računamo. Broj pomnožen s* 9 *koji je manji ili jednak* 18 *je broj* 2 *i njega pišemo u prvi red iznad znamenke* 8 *djelitelja. Zatim od* 18 *oduzimamo umnožak djeljenika i rezultata* 2 *i dobivamo* 0 *koju zapisujemo u* *drugom redu iznad djelitelja i iznad znamenke* 8. *Nakon toga djelitelj pomičemo za jedno mjesto udesno i ponavljamo postupak na način: budući je djelitelj, tj. broj* 9 *ispod prve znamenke* 0 *u djelitelju tada pored broja* 2 *dopisujemo 0 jer broj pomnožen s* 9 *koji je manji ili jedan* 0 *je broj* 0 *i treći korak je kada djeljenik pišemo ispod posljednje znamenke djelitelja te dopisujemo dvije* 0 *što nam daje konačan količnik* 200.

U nastavku slijedi dio koji opisuje metode računanja s razlomcima. Al-Hvarizmi je opisao razlomke u babilonskoj (i grčkoj i indijskoj) tradiciji kao razlomke u bazi 60, tj. pomoću stupnjeva, minuta i sekunda, tj. 1 stupanj se dijeli na 60 minuta, a 1 minuta na 60 sekundi, a dalje se sekunde dijele na po 60 „trećina”, „trećine” na 60 „četvrtina” itd. Pritom stupnjevi predstavljaju cijeli dio. U nastavku je dao nekoliko primjera kako bi se bolje razumjela njegova ideja računanja s razlomcima te ćemo neke od njih i navesti. Ako pomnožimo 2 stupnja s 2 minute dobit ćemo 4 minute, a ako pomnožimo 3 stupnja sa 6 „trećina” dobit ćemo 18 „trećina”. Odnosno, minute pomnožene s minutama bit će sekunde, sekunde pomnožene sa sekundama bit će „trećine”, „trećine” pomnožene s „trećinama” „četvrtine”, „četvrtine” pomnožene s „četvrtinama” daju „petine” i tako redom. Nadalje, 6 minuta pomnoženih sa 7 minuta dat će 42 sekunde. Ako želimo pomnožiti 1 i pol s 1 i pol, tada pretvorimo 1 i pol u 90 minuta i kad ih pomnožimo dobijemo 8100 sekunda. Tada dobivene sekunde podijelimo sa 60 i dobijemo 135 minuta, što je jednako 2 stupnja i 15 minuta, odnosno 2 cijela i 1 „četvrtina”. Kod množenja npr. 2 stupnja i 45 minuta s 3 stupnja 10 minuta i 30 sekundi, bitno je da se oba broja pretvore na najmanju vrijednost i tek onda množe. U ovom slučaju prvi broj se množenjem stupnjeva sa 60 i zbrajanjem s danih 45 minuta dobivamo 165 minuta, a drugi broj se množenjem stupnjeva sa 60 i zbrajanjem s danih 10 minuta dobiva 190 minuta koje se zatim zbroje i dodaju danim 30 sekundi te se dobiva 11430 sekundi. Zatim se pomnoži 165 minuta s 11430 sekundi te se dobije 1885950 stotinki koje se pretvore u 8 stupnjeva 43 minute 52 sekunde i 30 stotinki. Al-Hvarizmi je također opisao i dijeljenje razlomaka. Tu kaže da je bitno da su svi razlomci iskazani preko najnižeg (mi bismo rekli: onog s najvećim nazivnikom), tj. ako želimo podijeliti dva broja i jedan od njih ima najnižu vrijednost minute, a drugi sekunde, onda oba broja moraju biti pretvorena u sekunde kako bi ih mogli podijeliti, odnosno kako bi rezultat bio cijeli broj. Jedan od primjera za dijeljenje je da 15 „trećina” podijelimo sa 6 „trećina”, odnosno dijelimo 15 sa 6 i dobivamo 2 i pol. Isto vrijedi za minute i sekunde, ako želimo podijeliti 10 sekundi s 5 minuta, prvo pretvorimo minute u sekunde, ali u ovom slučaju bi trebali podijeliti 10 sekundi s 300 sekundi što nije moguće pa 10 sekundi pretvorimo u 600 stotinki pa podijelimo 600 stotinki s 300 sekundi i dobijemo rezultat 2 minute. Sljedeći primjer kojeg al-Hvarizmi navodi je dijeljenje 10 minuta s 5 „trećina”, tj. stotinki. Prvo minute pretvorimo „trećine”, odnosno 10 množimo s 3600 te dobijemo 36000 „trećina” koje kad se podijele s 5 „trećina” daju 7200 stupnjeva. Kada bi želio zapisati npr. 12 stupnjeva 30 minuta 45 sekundi 0 „trećina” i 50 „četvrtina” zapisivao bi ih na sljedeći način

$$\left\{\begin{array}{c} 12 \\ 30 \\ 45 \\ 00 \\ 50 \end{array}\right\}.$$

U nastavku je al-Hvarizmi dao nekoliko primjera za sve četiri računske operacije, čiji je opis za to vrijeme bio dobar jer je opisivao korak po korak, dok danas imamo puno kraće i jednostavnije opise računanja za sve četiri računske operacije kao i za računanje s razlomcima. Iako ranije u prijevodu „Aritmetike” koji smo ovdje koristili najavljuje da će opisati i računanje drugih korijena, tog dijela nema, što uz ostale „rupe” dodatno potvrđuje da se ovdje radi o nepotpunom prijepisu nekog ranijeg prijevoda. Usprkos tome, već iz ovog prijevoda jasno se razabire zašto je bio toliko utjecajan, što je bio sadržaj, a i zašto se algoritam danas naziva prema al-Hvarismiju, *algorismu*: Svi računi opisani su preko koraka, odnosno dani su algoritmi kako provoditi računske operacije u indoarapskom dekadskom pozicijskom sustavu.

# Poglavlje 4

# Zaključak

Al-Hvarizmi je poznat kao utemeljitelj algebre. Početci algebre se javljaju još kod Diofanta, ali s al-Hvarizmijem započinje razvoj prave algebre kao matematičke discipline. Njegovo djelo o algebri se bavi rješavanjem linearnih i kvadratnih jednadžbi koje je podijelio na 6 osnovnih tipova i u njima koristi operacije *al-džabr* i *al-mukabala*.

Za razliku od algebre, aritmetika je postojala puno prije al-Hvarizmija. Pojam aritmetike su uveli Pitagorejci. No, Al-Hvarizmi je svojim djelom o aritmetici utjecao na širenje indoarapskog dekadskog pozicijskog sustava u Europi te je uveo nulu kao znamenku. Iako se al-Hvarizmijeva alebra i aritmetika po mnogočemu, posebno po nedostatku simbolike, razlikuju od suvremenih, iz opisa sadržaja njegovih dvaju glavnih djela vidljivo je da je u njima postavio osnove suvremenog pristupa.

Kroz ovaj rad, možemo vidjeti veliku sličnost u primjerima koje je dao al-Hvarizmi s današnjim načinom računanja, počevši od jednadžbi čije je rješenje jako slično današnjim formula za rješenja kvadratnih jednadžbi. Dok su zbrajanje i oduzimanje gotovo identični, kod množenja i dijeljenja možemo primijetiti da danas imamo puno kraći način računanja, ali temeljen na al-Hvarizmijevom. Smatram da bez al-Hvarizmijevog doprinosa algebri i aritmetici, one ne bi bile u potpunosti onakve kakve su danas.

# Bibliografija

[1] A. B. Arndt, *Al-Khwarizmi: The Mathematics Teacher*, Vol. 76, No. 9, 668–670, (1983)

[2] A. Baki, *Journal of Islamic Academy of Sciences*, 5:3, 225-228,(1992.)

[3] K. Bin, Al Khwarizmi, A Medieval Polymath Umar, *https://tawarikhkhwani.com/al-khwarizmi-a-medieval-polymath/* (svibanj 2021.)

[4] L. Bridget, B. Corona, *Father of Algebra and Trigonometry*, United States, (2016.)

[5] F. M. Brückler, *Povijest matematike I*, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku (2007.)

[6] F. M. Brückler, *Arapska matematika, online-predavanja iz Povijesti matematike za ak. god. 2020./21.*, `https://www.youtube.com/watch?v=vjeUBDv4HCE`

[7] C. Burnett, Leonard of Pisa (Fibonacci) and Arabic Arithmetic, *https://muslimheritage.com/leonard-of-pisa-fibonacci-and-arabic-arithmetic* (svibanj 2021.)

[8] J. N. Crossley, A. S. Henry, *Thus Spake al-Khwarizmi: A Translation of the Text of Cambridge University Library Ms. Ii.vi.5*, Departments of Mathematics and Computer ScienceIDepartment of Classical Studies, Monash University, Clayton, Victoria, Australia 3168, 1990.

[9] I. Habib, A tribute to Father of the Modern Algorithm Al-Khwarizmi, *https://codepen.io/ibnhabib/full/dWZmYW/* (svibanj 2021.)

[10] A. Heffer, *A Conceptual Analysis of Early Arabic Algebra*, Center for Logic and Philosophy of Science Ghent University, Belgium, 2006.

[11] B. Hughes, *Gerard of Cremona's translation of Al-Khwarizmi's al-jabr* California State University, Northridge

[12] D. E. Joyce, Euclid's Elements Book II *https://mathcs.clarku.edu/ djoyce/elements/bookII/propII4.html* (lipanj 2021.)

[13] L. C. Karpinski, *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khowarizmi*, University of Michigan, 1915.

[14] B. Mehri, *From Al-Khwarizmi to Algorithm*, Sharif University of Technology, Iran, 2017.

[15] D. M. Nabirahni, B. R. Evans, A. Persaud, *Al-Khwarizmi (Algorithm) and the Development of Algebra*, Mathematics Teaching Research Journal, 2019.

[16] J. J. O'Connor, E. F. Robertson, Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi, dostupno na *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Khwarizmi/* (travanj 2021.)

[17] R. Rashed, *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*, Boston Studies in the Philosophy of Science, (1994.)

[18] K. Reck, Al-Khwarizmi-Father of Algebra, dostupno na *http://kathyreck.weebly.com/al-khwarizmi—father-of-algebra.html/* (svibanj 2021.)

[19] D. J. Struik, *A Source Book in Mathematics 1200–1800.*, Princeton Univ. Press, Princeton (1986.)

[20] B. L. van der Waerden, *A History of Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, (1985.)

[21] Story of Mathematics, Muhammad ibn Musa Al-Hwarizmi: Muslim mathematician, dostupno na *https://www.storyofmathematics.com/islamic-alkhwarizmi.html* (svibanj 2021.)

[22] MacTutor History of Mathematics, dostupno na *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Khwarizmi/* (lipanj 2021.)

# Sažetak

U ovom diplomskom radu u prvom poglavlju je opisan život velikog matematičara al-Hvarizmija, povijesne okolnosti u vrijeme njegovog djelovanja, njegovi doprinosi ne samo matematici nego i astronomiji i geografiji. Zatim su spomenuti i njegovi prethodnici, suvremenici i sljedbenici koji su imali utjecaja na njega, odnosno on na njih te je dan i kratki opis njegovog matematičkog doprinosa algebri i aritmetici.

U drugom poglavlju je opisano njegovo djelo „Algebra”. Opisan je sadržaj djela i izdvojeni su i detaljno razrađeni određeni primjeri koji su pronađeni u prijevodima tog djela.

U trećem poglavlju je opisano njegovo djelo „Aritmetika”, tj. sadržaj djela: opis indijskog dekadskog pozicijskog sustava, pravila za osnovne četiri računske operacije i metode računanja s razlomcima uz navođenje nekoliko primjera za sve.

# Summary

In this thesis, the first chapter describes the life of the great mathematician al-Khwarizmi, the historical circumstances at the time of his life, his contributions, not only to mathematics, but also to astronomy and geography. Then we describe his predecessors, contemporaries and followers who had an influence on him, and those whom he had an influence upon, as well as a short description of his mathematical contribution to algebra and arithmetic.

The second chapter describes his book „Algebra". The contents of the test are described and, a selection of examples found in the translations of that work are singled out and explained in detail.

The third chapter describes his work „Arithmetic", including the content of the test: the description of the Indian decimal number system, the rules for the basic four arithmetic operations, and the methods of calculation with fractions, giving a few examples for all of them.

# Životopis

Moje ime je Valentina Bošnjak. Rođena sam 28. listopada 1994. u Mostaru, u Bosni i Hercegovini. Svoje školovanje sam započela 2001.godine u III. osnovnoj školi, a 2009. upisala sam jezični smjer u Gimnaziji fra Grge Martića Mostar.

Nakon završene srednje škole, 2013. sam upisala preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Matematičkom odsjeku Fakulteta prirodoslovno-matematičkih i odgojnih znanosti u Mostaru. Sveučilišnom prvostupnicom matematike postala sam 2017. godine. 2018. godine sam upisala diplomski sveučilišni studij Matematike, nastavnički smjer, na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. U zimskom semestru akademske godine 2020./2021. pohađala sam praksu iz matematike u Osnovnoj školi Augusta Šenoe u Zagrebu, dok sam u ljetnom semestru iste akademske godine praksu pohađala u XI. gimnaziji u Zagrebu.