Parcijalne geometrije

Cvijin, Vedrana

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Vedrana Cvijin

Parcijalne geometrije

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, srpanj 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik

2. ______________________________ , član

3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Sadržaj

1 Uvod

U ovom radu upoznat ćemo se s parcijalnim geometrijama. Kroz studij, uz metodiku nastave matematike, posebno su me zanimali kolegiji iz područja geometrije i linearne algebre zbog čega sam odabrala ovu temu.

Najprije ćemo u drugom poglavlju rada obraditi incidencijske strukture koje su specijalni slučajevi parcijalnih geometrija. Te strukture su Steinerovi 2-dizajni, mreže i generalizirani četverokuti. U cjelini o Steinerovim 2-dizajnima navest ćemo najmanji primjer, Fanovu ravninu. Detaljnije ćemo proučiti projektivne i afine ravnine, specijalne slučajeve Steinerovih 2-dizajna. U cjelini o mrežama pokazat ćemo kad je mreža afina ravnina, definirat ćemo pojam latinskih kvadrata i karakterizirati postojanje mreže preko međusobno ortogonalnih latinskih kvadrata. Najmanji primjer generaliziranog četverokuta je Cremona-Richmondova konfiguracija. Opisat ćemo beskonačnu klasu generaliziranih četverokuta kojoj pripada ta konfiguracija koristeći se potpuno izotropnim potprostorima.

U trećem poglavlju proučavat ćemo jako regularne grafove. Petersonov graf je primjer jako regularnog grafa s parametrima $(10, 3, 0, 1)$. U propozicijama iskazat ćemo nužne uvjete za postojanje jako regularnih grafova preko njihovih parametara. Opisat ćemo što je disjunktna unija potpunih grafova i multipartitni graf. Karakterizirat ćemo jako regularne grafove preko njihovih matrica susjedstva i svojstvenih vrijednosti.

U četvrtom, glavnom poglavlju, upoznat ćemo se s definicijom parcijalnih geometrija te pokazati kako je svaka incidencijska struktura iz drugog poglavlja, specijalni slučaj parcijalne geometrije. Zatim ćemo definirati graf točaka i pravaca parcijalne geometrije dokazati da su ti grafovi jako regularni. Iskazat ćemo i Boseov teorem koji pokazuje kad je jako regularan graf geometrijski. Na samom kraju proučit ćemo dvije konstrukcije pravih parcijalnih geometrija koje ne pripadaju dosad spomenutim incidencijskim strukturama: konstrukciju Van Lint-Schrijvereve parcijalne geometrije s parametrima $(5, 5, 2)$ i konstrukciju beskonačne familije pravih parcijalnih geometrija od maksimalnih lukova u projektivnim ravninama.

2 Konačne incidencijske strukture

Definicija 2.1. *Incidencijska struktura je trojka* (T, P, I), *gdje je* T *skup čije elemente zovemo točkama,* P *je skup čije elemente zovemo pravcima, a* $I \subseteq P \times L$ *je incidencijska relacija.*

Ako je par $(A, p) \in I$ kažemo da točka A leži na pravcu p ili da pravac p prolazi kroz točku A. Može se reći i da je A incidentna s p ili da je p incidentan s A. Još jedan način zapisa ovoga je AIp.

Definicija 2.2. *Neka su* (T_1, P_1, I_1) *i* (T_2, P_2, I_2) *incidencijske strukture. Kažemo da su one izomorfne ako postoje bijekcije* $\varphi : T_1 \to T_2$ *i* $\psi : P_1 \to P_2$ *takve da vrijedi* $AI_1p \iff \varphi(A)I_2\psi(p)$, *za sve* $A \in T_1$, $p \in P_1$. *Uređen par* (φ, ψ) *nazivamo izomorfizmom između tih dviju incidencijskih struktura. Izomorfizam s incidencijske strukture na samu sebe nazivamo automorfizmom te incidencijske strukture.*

Skup svih automorfizama incidencijske strukture s kompozicijom kao binarnom operacijom čini grupu koju nazivamo punom grupom automorfizama. U ovom radu ograničit ćemo se na konačne incidencijske strukture, kod kojih su skupovi točaka T i pravaca P konačni. Neka je ukupan broj točaka v, a pravaca b.

Definicija 2.3. *Neka je* (T, P, I) *konačna incidencijska struktrura sa skupom točaka* $T = \{A_1, ..., A_v\}$ *i skupom pravaca* $P = \{p_1, ..., p_b\}$. *Incidencijska matrica te incidencijske strukture je* $v \times b$ *matrica* $A = [a_{ij}]$, *gdje je*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } A_iIp_j, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Definicija 2.4. *Dualna incidencijska struktura od* (T, P, I) *je incidencijska struktura* (P, T, I^*), *pri čemu je* $I^* = \{(p, A) | (A, p) \in I\}$.

Ako je A incidencijska matrica incidencijske strukture, onda je transponirana matrica A^τ incidencijska matrica dualne incidencijske strukture.

2.1 Konfiguracije

Definicija 2.5. *Parcijalni linearni prostor je incidencijska struktura za koju vrijede sljedeća svojstva:*

(1) *svaki pravac je incidentan s bar dvije točke i svaka točka je incidentna s bar dva pravca,*

(2) *kroz svake dvije točke prolazi najviše jedan pravac.*

Propozicija 2.6. *U parcijalnom linearnom prostoru svaka dva pravca sijeku se u najviše jednoj točki.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoje dva pravca p i q koji se sijeku u dvije točke A i B. Tada kroz točke A i B prolaze dva pravca p i q, što je u kontradikciji sa svojstvom (2) iz definicije 2.5. □

Stupanj točke predstavlja broj pravaca koji prolaze kroz nju, a stupanj pravca predstavlja broj točaka koje leže na tom pravcu.

Definicija 2.7. *Konfiguracija s parametrima (v_r, b_k) je parcijalni linearni prostor s v točaka i b pravaca, za koji vrijedi je svaka točka stupnja r, a svaki pravac stupnja k.*

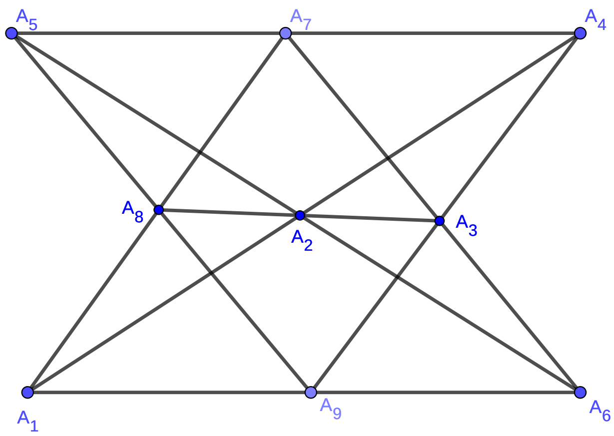
U ovom radu ograničit ćemo se na konfiguracije s $k \geq 3$ i $r \geq 3$. Slijede dva primjera konfiguracija.

Primjer 2.8. *Paposova konfiguracija je primjer konfiguracije s parametrima $(9_3, 9_3)$. Incidencijska matrica Paposove konfiguracije je*

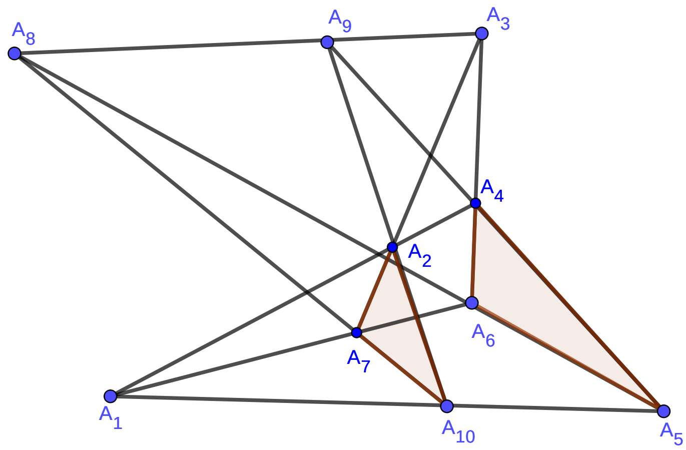
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primjer 2.9. *Desarguesova konfiguracija je primjer konfiguracije s parametrima $(10_3, 10_3)$. Incidencijska matrica Desarguesove konfiguracije je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Slika 1: Paposova konfiguracija.



Slika 2: Desarguesova konfiguracija.

Propozicija 2.10. *Ako postoji konfiguracija s parametrima* (v_r, b_k), *onda vrijedi* $vr = bk$.

Dokaz. Ova jednakost dokazuje se prebrojavanjem elemenata incidencijske relacije I na dva načina. Broj točaka konfiguracije je v i svaka je incidentna s r pravaca. Istodobno, ukupan broj pravaca je b i na svakom leži k točaka. Dakle, $|I| = vr = bk$. □

Propozicija 2.11. *Ako postoji konfiguracija s parametrima* (v_r, b_k)*, onda vrijede nejednakosti* $b \leq \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$ *i* $v \leq \frac{b(b-1)}{r(r-1)}$.

Dokaz. Ukupan broj parova različitih točaka je $v(v-1)$ jer prvu točku biramo na v načina, a drugu točku na $v-1$ načina. Ukupan broj pravaca je b, a parove točaka koje leže na svakom pravcu, to jest, kolinearne točke, možemo birati na $k(k-1)$ načina. Broj parova kolinearnih točaka ne može biti veći od ukupnog broja parova točaka, pa vrijedi nejednakost $bk(k-1) \leq v(v-1)$, odnosno $b \leq \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$. Dualno dokazujemo i drugu nejednakost. □

U ovom radu proučavat ćemo konfiguracije koje zadovoljavaju neka dodatna svojstva, tj. aksiome o incidenciji točaka i pravaca. Nekoliko vrsta takvih incidencijskih struktura upoznat ćemo u cjelinama 2.2, 2.3 i 2.4, a u četvrtom poglavlju upoznat ćemo njihovu generalizaciju, parcijalne geometrije.

2.2 Steinerovi 2-dizajni

Definicija 2.12. *Steinerov* 2*-dizajn je konačna incidencijska struktura sa svojstvima:*

- *ukupan broj točaka je* v*,*
- *na svakom pravcu leži točno* k *točaka,*
- *kroz svake dvije točke prolazi točno jedan pravac.*

Parametre Steinerovog 2-dizajna označavat ćemo $S(k, v)$.

Propozicija 2.13. *Kroz svaku točku Steinerovog* 2*-dizajna prolazi točno* $r = \frac{v-1}{k-1}$ *pravaca.*

Dokaz. Označimo s r_A broj pravaca koji prolaze kroz točku A. Elemente skupa

$$\{(B, p) \mid B \in T, B \neq A, AIp, BIp\}$$

prebrojimo na dva načina. Točku B možemo odabrati na $v-1$ načina i time je jednoznačno određen pravac p. Pravac p kroz točku A možemo odabrati na r_A načina, a na svakom leži $k-1$ točaka B različitih od A. Zato parova ima $r_A(k-1)$. Izjednačavanjem dobivamo $r_A = \frac{v-1}{k-1}$. □

Propozicija 2.14. *Ukupan broj pravaca Steinerovog* 2*-dizajna je* $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$.

Dokaz. Neka je b ukupan broj pravaca. Prema prethodnoj propoziciji Steinerov 2-dizajn je (v_r, b_k) konfiguracija za $r = \frac{v-1}{k-1}$. Po propoziciji 2.10 vrijedi $vr = bk$, tj. $b = \frac{vr}{k} = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$. $\square$

Korolar 2.15. *Ako postoji Steinerov* 2*-dizajn* $S(v, k)$*, onda* $k-1$ *dijeli* $v-1$ *i* $k(k-1)$ *dijeli* $v(v-1)$*.*

Vidimo da su Steinerovi 2-dizajni $S(k, v)$ specijalni slučaj konfiguracije (v_r, b_k), za $r = \frac{v-1}{k-1}$ i $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$. U propoziciji 2.11 vidjeli smo da za općenite konfiguracije vrijedi njednakost $b \leq \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$, a za Steinerove 2-dizajne vrijedi jednakost $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$. Štoviše, dostizanje te nejednakost karakterizira Steinerove 2-dizajne među konfiguracijama.

Propozicija 2.16. *Konfiguracija s parametrima* (v_r, b_k) *je Steinerov* 2*-dizajn ako i samo ako vrijedi* $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$.

Dokaz. Slijedi iz dokaza propozicije 2.11 i definicije Steinerovog 2-dizajna. Kako kroz svake dvije točke prolazi točno jedan pravac, sve točke su kolinearne pa vrijedi jednakost. Obrnuto, ako vrijedi jednakost, onda su svake dvije točke kolinearne i konfiguracija je Steinerov 2-dizajn. $\square$

Primjer 2.17. *Slijedi primjer incidencijske matrice Steinerovog* 2*-dizajna* $S(3, 13)$*:*

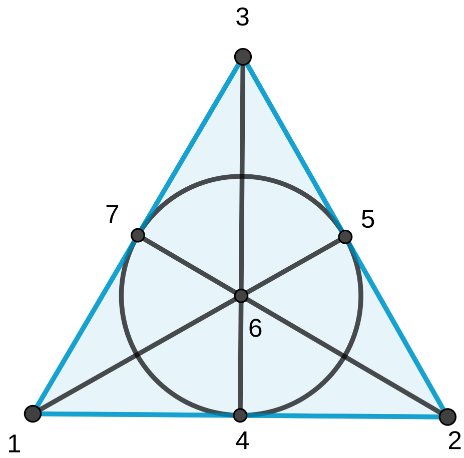
$$\begin{bmatrix}
1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0
\end{bmatrix}.$$

Teorem 2.18. *(Fisherova nejednakost) Ako postoji Steinerov* 2*-dizajn* $S(k, v)$ *s* b *pravaca, onda vrijedi* $v \leq b$*.*

Dokaz ovog teorema može se naći u [12].

Definicija 2.19. *Steinerov* 2*-dizajn za koji vrijedi jednakost* $v = b$ *nazivamo konačnom projektivnom ravninom.*

Primjer 2.20. *Fanova ravnina je Steinerov* 2*-dizajn* $S(3, 7)$ *takav da je skup točaka* $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$*, a skup pravaca je skup tročlanih podskupova* $P = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 6, 7\}, \{1, 3, 7\}\}$*. Fanova ravnina primjer je najmanje projektivne ravnine.*



Slika 3: Fanova ravnina.

Incidencijska matrica Fanove ravnine je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Propozicija 2.21. *Steinerov* 2*-dizajn* $S(k, r)$ *je konačna projektivna ravnina ako i samo ako postoji* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ *takav da je* $k = n + 1$ *i* $v = n^2 + n + 1$*.*

Taj broj n nazivamo redom konačne projektivne ravnine.

Dokaz. Označimo $n = k - 1$. Po definiciji projektivne ravnine vrijedi $v = b$, a po propoziciji 2.14 vrijedi $v = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$. Slijedi $v = k(k-1) + 1 = k^2 - k + 1 = n^2 + n + 1$. Obrnuto, Steinerov 2-dizajn s $k = n + 1$ i $v = n^2 + n + 1$ po propoziciji 2.14 ima $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)} = n^2 + n + 1 = v$ pravaca, pa je konačna projektivna ravnina. $\square$

Neka je q prim potencija, a $\mathbb{F}_q$ konačno polje. Ako je $n = q$, onda postoji projektivna ravnina reda n koja se može konstruirati iz trodimenzionalnog vektorskog prostora nad $\mathbb{F}_q$: točke su jednodimenzionalni potprostori, a pravci dvodimenzionalni. Takva projektivna ravnina naziva se klasičnom ili Desarguesovom ravninom i označava $PG(2, q)$. Na primjer, Fanova ravnina je $PG(2, 2)$.

Definicija 2.22. *Incidencijska struktura naziva se afinom ravninom ako je Steinerov 2-dizajn u kojem vrijedi Playfairov aksiom: za svaku točku T i pravac p koji nisu incidentni postoji točno jedan pravac kroz T koji ne siječe p.*

Propozicija 2.23. *Steinerov 2-dizajn $S(k, v)$ je afina ravnina ako i samo ako postoji $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ takav da je $k = n$ i $v = n^2$.*

Dokaz. Neka u Steinerovom 2-dizajnu $S(k, v)$ vrijedi Playfairov aksiom i označimo $n = k$. Kroz točku T po propoziciji 2.13 prolazi $r = \frac{v-1}{k-1}$ pravaca. Jedan od njih ne siječe pravac p, a ostali ga sijeku. Budući da na p leži k točaka, zaključujemo da je $r = k + 1$, tj. $\frac{v-1}{k-1} = k + 1$ iz čega slijedi $v = k^2 = n^2$. Obrnuto, pretpostavimo da je $k = n$ i $v = n^2$, tj. $v = k^2$. Iz propozicije 2.13 tada slijedi $r = k + 1$, pa zaključujemo da za svaku točku T i pravac p koji nisu incidentni točno jedan pravac kroz T ne siječe p. □

Broj n iz prethodne propozicije nazivamo redom afine ravnine. Projektivne i afine ravnine povezuje poznata konstrukcija „brisanja/dodavanja pravca u beskonačnosti".

Teorem 2.24. *Neka je $\mathcal{P}$ projektivna ravnina reda n i l_∞ bilo koji njezin pravac. Incidencijska struktura $\mathcal{P} \setminus l_\infty$ koju dobijamo izbacivanjem pravca l_∞ i svih točaka koje leže na njemu je afina ravnina reda n. Obrnuto, za svaku afinu ravninu A reda n postoji projektivna ravnina $\mathcal{P}$ reda n i njezin pravac l_∞ tako da je $A = \mathcal{P} \setminus l_\infty$.*

Dokaz se može naći u [12].

2.3 Mreže

Definicija 2.25. *(r, k)-mreža je (v_r, b_k) konfiguracija u kojoj vrijedi Playfairov aksiom: za svaku točku T i pravac p koji nisu incidentni postoji točno jedan pravac kroz T koji ne siječe p.*

Ranije spomenuta Paposova konfiguracija ujedno je i primjer $(3, 3)$-mreže. Za pravce p i q kažemo da su paralelni i pišemo $p \parallel q$ ako se podudaraju ili se ne sijeku, tj. nisu incidentni s istom točkom.

Propozicija 2.26. *Relacija paralelnosti $\parallel$ u (r,k)-mreži je relacija ekvivalencije na skupu pravaca.*

Dokaz. Relacija $\parallel$ je očito refleksivna i simetrična. Dokazat ćemo da tranzitivnost slijedi iz Playfairova aksioma. Neka vrijedi Playfairov aksiom i neka za pravce p_1, p_2, p_3 vrijedi $p_1 \parallel p_2$ i $p_2 \parallel p_3$. Pretpostavimo da su p_1, p_2, p_3 međusobno različiti i da ne vrijedi $p_1 \parallel p_3$, tj. da se p_1 i p_3 sijeku u nekoj točki T. Tada imamo kontradikciju s Playfairovim aksiomom: točka T i pravac p_2 nisu incidentni, a kroz T prolaze dva pravca p_1 i p_3 koji ne sijeku p_2. □

Propozicija 2.27. *Skup pravaca (r,k)-mreže particioniran je na klase paralelnosti. Svaka točka leži na točno jednom pravcu iz svake klase paralelnosti. Broj klasa je r.*

Dokaz. Klasa ekvivalencije nekog člana a iz skupa A sadrži sve članove tog skupa koji su ekvivalentni s a po relaciji ekvivalencije, u ovom slučaju po relaciji paralelnosti. Neka je $\mathcal{P}$ bilo koja klasa paralelnosti i T bilo koja točka. Uzmimo bilo koji pravac $p \in \mathcal{P}$. Ako p prolazi kroz T, onda je to jedinstveni pravac iz klase $\mathcal{P}$ na kojem leži točka T. U suprotnom po Playfairovom aksiomu postoji pravac p' koji prolazi kroz T i ne siječe p, pa je p' jedinstveni pravac iz $\mathcal{P}$ na kojem leži točka T. Budući da je r broj pravaca koji prolaze kroz točku T, zaključujemo da je broj klasa paralelnosti r. □

Propozicija 2.28. *U (r,k)-mreži broj pravaca u svakoj klasi paralelnosti je k, ukupan broj točaka je $v = k^2$, a ukupan broj pravaca je $b = r \cdot k$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{P}$ neka klasa paralelnosti i pravac q koji nije u toj klasi. Na pravcu q nalazi se k točaka pa prema propoziciji 2.27 kroz svaku od njih prolazi točno jedan pravac iz klase $\mathcal{P}$. Dobivamo $|\mathcal{P}| \geq k$. Pretpostavimo da postoji $p \in \mathcal{P}$ koji ne siječe q. Tada je $q \in \mathcal{P}$ što je kontradikcija. Slijedi $|\mathcal{P}| = k$. Dokažimo sada da je ukupan broj točaka $v = k^2$. Uspostavimo bijekciju između skupa točaka i uređenih parova $\{1, 2, ..., k\} \times \{1, 2, ..., k\}$, kojih ima k^2. Neka su $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$ i $\mathcal{Q} = \{q_1, q_2, ..., q_k\}$ dvije klase paralelnosti. Neka točka T leži na pravcu $p_i \in \mathcal{P}$ i pravcu $q_j \in \mathcal{Q}$. Pridružujemo $T \mapsto (i, j)$. Obrnuto, paru indeksa pridružujemo točku koja je sjecište pravaca p_i i q_j. Pravci se sijeku jer nisu paralelni. Kompozicija ta dva pridruživanja je indentiteta, pa su ta pridruživanja bijekcije. Dakle, $T \mapsto (i, j)$ je bijekcija pa je ukupan broj točaka $v = k^2$. Prema propoziciji 2.27 broj klasa paralelnosti je r, a u svakoj klasi paralelnosti broj pravaca je k, pa je ukupan broj pravaca $b = r \cdot k$. □

Primjer 2.29. *Afina ravnina reda n primjer je $(n+1, n)$-mreže. Brisanjem pojedinih klasa paralelnosti dobivamo (r, n)-mreže za $r \leq n$.*

Definicija 2.30. *Latinski kvadrat reda n je $n \times n$ matrica popunjena elementima skupa $\{1, ..., n\}$ na način da se svaki element pojavljuje točno jednom u svakom retku i stupcu. Dva latinska kvadrata $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ reda n ortogonalni su ako za bilo koje x, $y \in \{1, ..., n\}$ postoji jedinstveni par indeksa (i, j) takav da je $a_{ij} = x$ i $b_{ij} = y$.*

Teorem 2.31. *(r, k)-mreža postoji ako i samo ako postoji skup od $r - 2$ međusobno ortogonalna latinska kvadrata reda k.*

Dokaz se može naći u [12].

Lema 2.32. *Za skup od m međusobno ortogonalnih latinskih kvadrata reda k vrijedi $m \leq k - 1$.*

Dokaz. Neka su latinski kvadrati L_1, L_2,..., L_m međusobno ortogonalni i neka se prvi redak svakog od njih sastoji redom od elemenata $1, 2, ..., k$. Uočimo poziciju $(2, 1)$ u svakoj od m matrica. Na toj poziciji ne može biti element 1 jer se on već nalazi na poziciji $(1, 1)$ u svakoj od navedenih matrica. Preostaje $k - 1$ mogućih koeficijenata, a niti jedan od njih ne može se naći više puta na poziciji $(2, 1)$ u danim matricama jer bi se ponavljanjem nekog elementa x pojavio par oblika (x, x), suprotno pretpostavci da su svaka dva latinska kvadrata ortogonalna. Slijedi $m \leq k - 1$. □

Korolar 2.33. *U (r, k)-mreži vrijedi $r \leq k + 1$. Jednakost se dostiže ako i samo ako je afina ravnina reda k.*

Dokaz. Nejednakost $r \leq k + 1$ slijedi iz teorema 2.31 i leme 2.32. Alternativno, dobivamo je iz propozicija 2.11 i 2.28, a karakterizaciju slučaja u kojem se dostiže jednakost iz propozicije 2.16. □

2.4 Generalizirani četverokuti

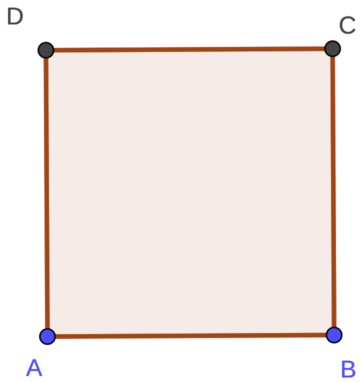
Definicija 2.34. *Generalizirani četverokut s parametrima $GQ(s, t)$ je (v_r, b_k) konfiguracija s $k = s + 1$ i $r = t + 1$, u kojoj vrijedi da za svaku točku T i pravac p koji nisu incidentni postoji točno jedan pravac kroz T koji siječe p.*

Propozicija 2.35. *Generalizirani četverokut reda (s, t) ima ukupno $v = (s + 1)(st + 1)$ točaka i $b = (t + 1)(st + 1)$ pravaca.*

Dokaz. Fiksiramo pravac p i prebrojavamo parove (T, q), pri čemu je T točka koja nije na p, a q pravac kroz T koji siječe p. Točku T možemo izabrati na $v - k = v - s - 1$ načina. Po zahtjevu iz definicije 2.34, time je jednoznačno određen pravac q, pa je broj parova $v - s - 1$. Pravac q koji siječe p možemo izabrati na $k(r - 1) = (s + 1)t$ načina, a točku T na q različitu od sjecišta p i

q na $k-1=s$ načina. Zato je broj parova jednak $(s+1)ts$. Izjednačavanjem dobivamo $v-s-1=(s+1)st$, iz čega sijedi $v=(s+1)(st+1)$. Formulu za b dokazujemo dualno. $\square$

Primjer 2.36. *Četverokut je najmanja incidencijska struktura koja zadovolja sve aksiome definicije 2.34, međutim, kako u ovom radu promatramo konfiguracije s* $k \geq 3$ *i* $r \geq 3$*, četverokut je degenerirani primjer generaliziranog četverokuta.*

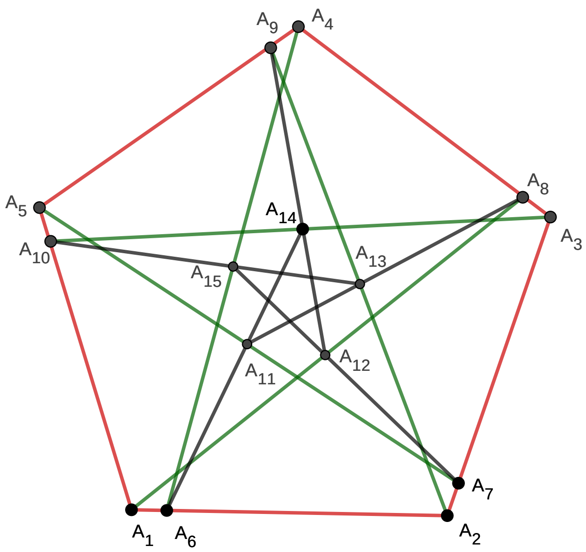


Slika 4: Četverokut.

Incidencijska matrica četverokuta je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pravi primjer generaliziranog četverokuta je Cremona-Richmondova konfiguracija $GQ(2,2)$ prikazana na slici 5.



Slika 5: Cremona-Richmondova konfiguracija.

Incidencijska matrica Cremona-Richmondove konfiguracije je

$$A = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}.$$

Sada ćemo opisati beskonačnu klasu generaliziranih četverokuta.

Neka je V vektorski prostor dimenzije 4 nad poljem $\mathbb{F}_q$ reda q. Projektivni prostor $PG(3,q)$ je sustav jednodimenzionalnih, dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih potprostora prostora V. Ovi potprostori redom predstavljaju točke, pravce i ravnine projektivnog prostora $PG(3,q)$. Incidencija je dana inkluzijom, na primjer: točka T leži na pravcu p ako je odgovarajući jednodimenzionalni potprostor od V sadržan u odgovarajućem dvodimenzionalnom potprostoru od V. Postoji $q^4 - 1$ vektora koji nisu nulvektor u V i svaki jednodimenzionalni prostor sadrži $q-1$ nenul vektora, pa je broj točaka $(q^4-1)/(q-1) = (q+1)(q^2+1)$. Konstruirat ćemo incidencijsku strukturu koja sadrži sve navedene točke, ali samo neke od pravaca iz $PG(3,q)$. Neka je

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ako je q parno, onda u polju $\mathbb{F}_q$ vrijedi $1 = -1$. Nadalje, zanimaju nas dvodimenzionalni potpuno izotropni potprostori od V. Dvodimenzionalan potprostor $S \leq V$ generiran vektorima u i v je potpuno izotropan ako i samo ako je $u^T H v = 0$. Za nenul vektor u, definiramo skup $u^\perp = \{v \in V | u^T H v = 0\}$. Vrijedi $det(H) = 1$, pa H ima inverz i $u^T H$ je nenul vektor. S obzirom da se $u^\perp$ sastoji od vektora ortogonalnih na $u^T H$, ovaj skup je trodimenzionalni potprostor od V koji sadrži u. Prebrojavamo parove vektora u, v takve da je $S = \langle u, v \rangle$ dvodimenzionalan potpuno izotropan potprostor. Vektor u možemo odabrati na $(q^4 - 1)$ načina, a vektor v koji je u $u^\perp$, ali nije kolinearan s u na $q^3 - q$ načina, pa je broj parova vektora koji generiraju dvodimenzionalni potpuno izotropni prostor $(q^4-1)(q^3-q)$. Svaki dvodimenzionalni prostor generiran je s $(q^2-1)(q^2-q)$ parova vektora, pa je ukupan broj dvodimenzionalnih potpuno izotropnih potprostora $\frac{(q^4-1)(q^3-q)}{(q^2-1)(q^2-q)} = \frac{\cancel{(q^2-1)}(q^2+1)\cancel{q}(q^2-1)}{\cancel{(q^2-1)}\cancel{q}(q-1)} = (q^2+1)(q+1)$. Možemo reći da $PG(3,q)$ sadrži $(q^2+1)(q+1)$ točaka i isto toliko potpuno izotropnih pravaca. Dvodimenzionalan prostor sadrži $q+1$ potprostora dimenzije 1, pa na svakom potpuno izotropnom pravcu leži $q+1$ točaka. S obzirom da je broj točaka i pravaca jednak, slijedi da kroz svaku točku prolazi $q+1$ potpuno izotropnih pravaca.

Neka je $W(q)$ incidencijska struktura koja se sastoji od točaka i potpuno izotropnih pravaca od $PG(3,q)$. Vrijedi sljedeća tvrdnja.

Teorem 2.37. *$W(q)$ je generalizirani četverokut reda (q,q).*

Dokaz. Neka su točka T i pravac p takvi da nisu incidentni. Neka je točka T generirana vektorom u. Bilo koja točka kolinearna s T u incidencijskoj strukturi $W(q)$ generirana je vektorom iz $u^\perp$. Trodimenzionalni prostor $u^\perp$ siječe dvodimenzionalan potprostor p u jednodimenzionalnom potprostoru, iz čega slijedi da postoji jedinstvena točka na pravcu p kolinearna s T. $\square$

Ako primijenimo konstrukciju na polje reda 2, što je najmanji takav primjer, dobivamo generalizirani četverokut reda $(2, 2)$ s 15 točaka i 15 pravaca. To je upravo Cremona-Richmonodova konfiguracija sa slike 5.

3 Jako regularni grafovi

Definicija 3.1. *Graf* $\Gamma = (V, E)$ *se sastoji od konačnog skupa vrhova* V *i skupa bridova* E*, gdje je svaki brid podskup skupa vrhova kardinalnosti* 2*. Ako je* $\{x, y\} \in E$ *kažemo da su vrhovi* x *i* y *susjedni.*

Definicija 3.2. *Neka je* Γ *graf sa skupom vrhova* $V = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$*. Matrica susjedstva je* $n \times n$ *matrica* $A(\Gamma) = [a_{ij}]$*, gdje je*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{ako su } x_i \textit{ i } x_j \textit{ susjedni,} \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Definicija 3.3. *Potpun graf je graf kojemu je svaki par vrhova susjedan. Nulgraf je graf koji nema niti jedan brid. Potpun graf s* n *vrhova označamo s* K_n*, a nulgraf s* N_n*.*

Primjer 3.4. *Pogledajmo primjer potpunog grafa* K_7*. Matrica susjedstva grafa* K_7 *je matrica koja se sastoji od jedinica na svim mjestima osim na dijagonali:*

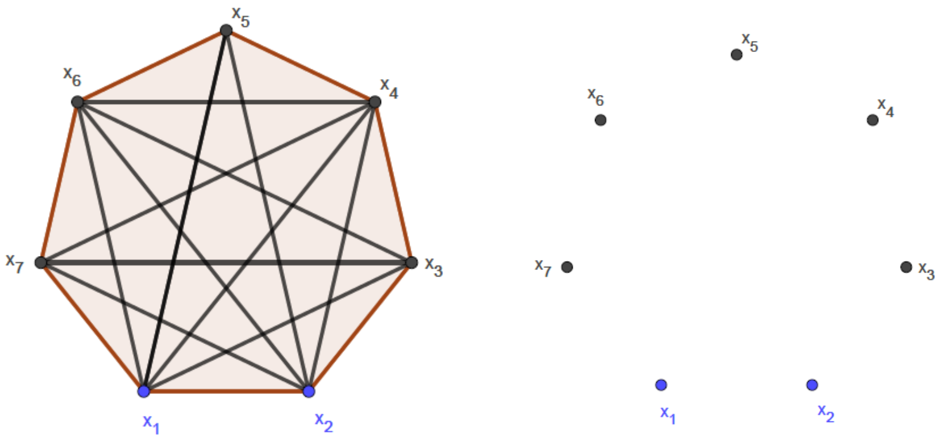
$$A(K_7) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica susjedstva grafa N_7 *je nulmatrica reda* 7*.*

Stupanj vrha x je broj bridova koji sadrže taj vrh. Regularan graf je graf čiji svi vrhovi imaju isti stupanj k. Kažemo i da je takav graf k-regularan.

Definicija 3.5. *Jako regularni graf s parametrima* (n, k, λ, μ) *je graf* Γ *s* n *vrhova koji je* k*-regularan i ima svojstvo da svaka dva vrha imaju točno* λ *zajedničkih susjeda ako su susjedni, ili* μ *zajedničkih susjeda ako nisu susjedni.*

Primjer 3.6. *Primjer jako regularnog grafa s parametrima* $(10, 3, 0, 1)$ *je*



Slika 6: Potpuni graf K_7 i nulgraf N_7.

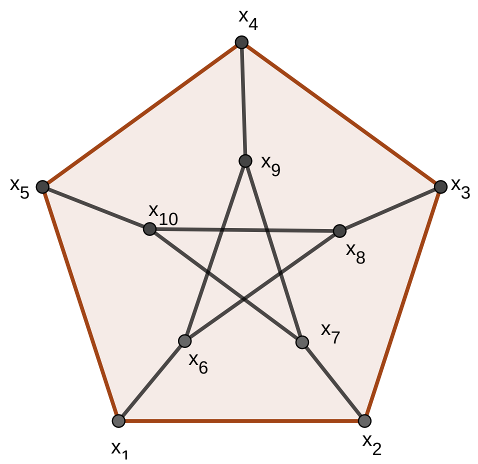
Petersenov graf na slici 7. Matrica susjedstva Petersenovog grafa je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definicija 3.7. *Komplement $\overline{\Gamma}$ grafa Γ je graf s istim vrhovima kao i Γ, međutim, ako su vrhovi x i y susjedni u Γ, onda nisu susjedni u $\overline{\Gamma}$, i obratno, ako nisu susjedni u Γ, onda su susjedni u $\overline{\Gamma}$.*

Propozicija 3.8. *Neka je Γ jako regularni graf s parametrima (n, k, λ, μ). Tada je komplement $\overline{\Gamma}$ jako regularan s parametrima $(n, n-1-k, n-2k+\mu-2, n-2k+\lambda)$.*

Dokaz. Stupanj regularnosti komplementnog grafa je $\overline{k} = n - 1 - k$. Dva nesusjedna vrha u Γ imaju μ zajedničkih susjeda, a osim toga, svaki od njih ima još $k - \mu$ susjeda. To znači da ta dva vrha u grafu Γ nisu susjedna s $n-2-2(k-\mu)-\mu$ vrhova. U komplementnom grafu $\overline{\Gamma}$ ta dva vrha su susjedni



Slika 7: Petersenov graf.

i imaju isti broj zajedničkih susjeda, pa je parametar $\overline{\lambda} = n - 2k + \mu - 2$. Dva susjedna vrha u Γ imaju λ zajedničkih susjeda, pa je broj vrhova koji su susjedni samo jednom od ta dva vrha $2k - 2\lambda$. Dakle, broj vrhova koji nisu susjedni tim vrhovima je $\overline{\mu} = n - (2k - 2\lambda) - \lambda = n - 2k + \lambda$. $\square$

Propozicija 3.9. *Ako postoji jako regularan graf s parametrima (n, k, λ, μ), onda vrijedi*

$$(n - k - 1)\mu = k(k - \lambda - 1).$$

Dokaz. Fiksirajmo vrh z i prebrojavajmo parove susjednih vrhova (x, y), pri čemu je x susjedan sa z, a y nije susjedan sa z. Jednakost dobivamo prebrojavanjem na dva načina. Prvi način je da najprije izaberemo vrh x, a to možemo učiniti na k načina koliki je broj susjednih vrhova vrha z. Vrh y možemo izabrati na $k - 1 - \lambda$ načina, jer vrh x ima k susjedna, ali moramo izbaciti sam vrh z kao i λ zajedničkih susjeda od x i z. Drugi način je da prvo odaberemo vrh y, a to možemo učiniti na $n - k - 1$ načina. Vrh x možemo izabrati na μ načina jer je x zajednički susjed dva nesusjedna vrha y i z. Izjednačavanjem dobivamo traženu jednakost.

$\square$

Definicija 3.10. *Za kvadratnu matricu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, neka su skalar $\theta \in \mathbb{R}$ i vektor $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ takvi da vrijedi $Av = \theta v$. Za θ kažemo da je svojstvena vrijednost matrice A, a v pridruženi svojstveni vektor. Spektar matrice A je skup svih svojstvenih vrijednosti od A.*

Definicija 3.11. *Spektar grafa Γ je skup svih svojstvenih vrijednosti matrice susjedstva tog grafa.*

Definicija je dobra jer ne ovisi o poretku vrhova grafa Γ. Ukoliko promijenimo redoslijed vrhova, matrica susjedstva će se promijeniti, ali će preko permutacijske matrice biti slična polaznoj matrici susjedstva. Slične matrice imaju isti spektar, pa on ne ovisi o poretku vrhova grafa Γ.

Propozicija 3.12. *Graf Γ je k-regularan ako i samo ako je k svojstvena vrijednosti matrice susjedstva A pridružena svojstvenom vektoru $j = (1, 1, ..., 1)$.*

Dokaz. Graf je k-regularan ako svaki vrh ima k susjeda, dakle u svakom stupcu i retku matrice susjedstva A nalazi se k jedinica. Ako matricu susjedstva pomnožimo s vektorom j, dobit ćemo vektor $(k, k, ..., k) = k(1, 1, ..., 1) = kj$ iz čega slijedi da je k svojstvena vrijednost pridružena svojstvenom vektoru j. $\square$

Definicija 3.13. *Šetnja je niz vrhova $(x_0, x_1, ...x_k)$ takav da su vrhovi x_{i-1} i x_i susjedni za $i = 1, 2, ..., k$. Broj k je duljina šetnje. Graf je povezan ako za svaka dva vrha x i y postoji šetnja kojoj je prvi vrh x, a zadnji y.*

Potpun graf se također može smatrati jako regularnim s parametrima $(n, n-1, n-2, \mu)$, međutim, ne ubrajamo ga u prave primjere jer u njemu ne postoje nesusjedni vrhovi pa je parametar μ neodređen.

Disjunktna unija nekog broja povezanih grafova s istim brojem vrhova je pravi jako regularan graf.

Disjunktna unija m potpunih grafova, pri čemu svaki od tih grafova ima n vrhova $(m, n > 1)$ je jako regularan graf $\Gamma = m \cdot K_n$ s parametrima $(mn, n-1, n-2, 0)$. Unija se sastoji od m grafova s n vrhova, pa je ukupan broj vrhova mn. Kako ovi potpuni grafovi nisu povezani, broj susjeda disjunktne unije jednak je broju susjeda unutar potpunog grafa, a to je $n-1$. Analogno, dva susjedna vrha imaju zajedničke susjede samo unutar jednog potpunog grafa, pa je $\lambda = n - 2$, a kako unutar potpunog grafa ne postoje vrhovi koji nisu susjedni, vrijedi $\mu = 0$. Ako jako regularan graf ima parametar $\mu = 0$, onda je on disjunktna unija potpunih grafova.

Komplement disjunktne unije potpunih grafova $m \cdot K_n$ je potpuni multiparititni graf $\overline{\Gamma} = K_{\underbrace{n, n, ..., n}_{\text{m}}}$. U multipartitnom grafu, bridovi spajaju vrhove iz različitih blokova, a unutar jednog bloka ne postoji brid koji spaja vrhove. Potpuni multipartitni graf je multiparitni graf u kojem su vrhovi iz jednog bloka spojeni bridom s vrhovima iz svih drugih blokova.

Taj graf je jako regularan s parametrima $(mn, mn - n, mn - 2n, mn - n)$, što slijedi iz propozicije 3.8. Iz te propozicije i prethodno spomenute karakterizacije jako regularnih grafova s $\mu = 0$ slijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 3.14. *Jako regularni graf s parametrima (n, k, λ, μ) je potpuni multipartitni graf ako i samo ako je $k = \mu$.*

Propozicija 3.15. *Graf Γ je jako regularan s parametrima (n, k, λ, μ) ako i samo ako njegova matrica susjedstva zadovoljava $A^2 = kI + \lambda A + \mu(J - I - A)$ (J je matrica popunjena samo jedinicima, a I je jedinična matrica).*

Dokaz. Označimo elemente matrice A^2 s $a_{i,j}^{(2)}$. Dijagonalni element $a_{i,i}^{(2)}$ je broj šetnji duljine 2 od i-tog vrha do i-tog vrha, a element $a_{i,j}^{(2)}$ je broj šetnji duljine 2 od i-tog vrha do j-tog vrha, odnosno broj zajedničkih susjeda i-tog vrha i j-tog vrha. Dijagonalni elementi na desnoj strani su k, a na mjestu (i, j) izvan dijagonale je λ ako su i-ti i j-vrh susjedni, a μ ako nisu. Matrična jednakost vrijedit će samo ako su svi vrhovi stupnja k, susjedni vrhovi imaju λ zajedničkih susjeda, a nesusjedni vrhovi imaju μ zajedničkih susjeda. □

Teorem 3.16. *Neka je $\Gamma \neq K_n$ povezan k-regularan graf s matricom susjedstva A. Graf Γ je jako regularan s parametrima (n, k, λ, μ) ako i samo ako ima točno tri svojstvene vrijednosti $\theta_0 = k$, θ_1 i θ_2. U tom slučaju vrijedi $\lambda = k + \theta_1 + \theta_2 + \theta_1\theta_2$ i $\mu = k + \theta_1\theta_2$.*

Dokaz se može naći u [9].

Teorem 3.17. *Neka su f i g kratnosti svojstvenih vrijednosti θ_1 i θ_2 redom. Vrijedi:*

$$f, g = \frac{1}{2}\left(n - 1 \pm \frac{(n-1)(\mu - \lambda) - 2k}{\sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 4(k - \mu)}}\right).$$

Teorem 3.18 (Apsolutna ocjena)**.** *Neka je Γ jako regularni graf s n vrhova, sa svojstvima da su Γ i $\overline{\Gamma}$ povezani i da matrica susjedstva grafa Γ ima svojstvenu vrijednost kratnosti f $(f > 1)$. Tada vrijedi $n \leq f(f + 3)$.*

Teorem 3.19 (Kreinove nejednakosti)**.** *Neka je Γ jako regularni graf takav da su Γ i $\overline{\Gamma}$ povezani. Neka su svojstvene vrijednosti grafa Γ k, θ_1, θ_2. Onda vrijedi:*

(1) $(\theta_1 + 1)(k + \theta_1 + 2\theta_1\theta_2) \leq (k + \theta_1)(\theta_2 + 1)^2$,

(2) $(\theta_2 + 1)(k + \theta_2 + 2\theta_1 s) \leq (k + \theta_2)(\theta_1 + 1)^2$.

Dokazi prethodna tri teorema se mogu naći u [3].

4 Parcijalne geometrije

4.1 Definicija i osnovna svojstva

U ovom poglavlju upoznat ćemo se s definicijom parcijalne geometrije kao i s nekim osnovnim primjerima.

Definicija 4.1. *Parcijalna geometrija $pg(s,t,\alpha)$ je (v_r, b_k) konfiguracija s $k = s+1$, $r = t+1$ takva da za svaku točku T i pravac p koji nisu incidentni postoji točno α točaka na p kolinearnih s T.*

Propozicija 4.2. *Dualna struktura od $pg(s,t,\alpha)$ je $pg(t,s,\alpha)$.*

Dokaz. Dualna struktura konfiguracije s parametrima (v_r, b_k) je konfiguracija s parametrima (b_k, v_r), iz čega slijedi da je dualna struktura od $pg(s,t,\alpha)$ $pg(t,s,\alpha)$. Očito postoji točno α pravaca kroz T koji sijeku pravac p. □

Propozicija 4.3. *U parcijalnog geometriji $pg(s,t,\alpha)$ vrijedi $\alpha \leq s+1$ i $\alpha \leq t+1$.*

Dokaz. Kako je u parcijalnoj geometriji $pg(s,t,\alpha)$ svaki pravac incidentan s $k = s+1$ točkom, broj točaka α na tom pravcu sa svojstvom iz definicije 4.1 mora biti manji ili jednak od ukupnog broja točaka na tom pravcu. Druga nejednakost dokazuje se dualno. □

Teorem 4.4. *Broj točaka i pravaca u parcijalnoj geometriji $pg(s,t,\alpha)$ je $v = \frac{(s+1)(st+\alpha)}{\alpha}$ i $b = \frac{(t+1)(st+\alpha)}{\alpha}$*

Dokaz. Fiksiramo pravac p i prebrojavamo parove (T,q), pri čemu je T točka koja nije na p, a q pravac kroz T koji siječe p. Točku T možemo izabrati na $v-(s+1)$ načina, a broj pravaca kroz tu točku koji sijeku pravac p je α, pa je to $(v-(s+1))\alpha$ parova. S druge strane, na pravcu p leži $(s+1)$ točka, a kroz svaku od tih točaka prolazi t pravaca jer pravac p ne ubrajamo, pa pravac q možemo izabrati na $(s+1)t$ načina. Na tom izabranom pravcu, točku možemo izabrati na s načina jer ne ubrajamo točku na pravcu p, pa je to $(s+1)ts$. Izjednačavanjem dobivamo $(v-(s+1))\alpha = (s+1)st$, iz čega sijedi $v\alpha = (s+1)(st+\alpha)$. Daljim sređivanjem dobivamo $v = \frac{(s+1)(st+\alpha)}{\alpha}$. Formulu za b dokazujemo dualno. □

Kao što smo već spomenuli, parcijalna geometrija je generalizacija struktura obrađenih u drugom poglavlju.

Propozicija 4.5. *Generalizirani četverokut $GQ(s,t)$ je parcijalna geometrija $pg(s,t,\alpha)$ s $\alpha = 1$.*

Dokaz. Slijedi direktno iz definicija 2.34 i 4.1. $\square$

Propozicija 4.6. *Incidencijska struktura je Steinerov 2-dizajn ako i samo ako je parcijalna geometrija $pg(s,t,\alpha)$ s $\alpha = s+1$.*

Dokaz. Neka su točka T i pravac p takvi da nisu incidentni. Na pravcu p imamo $s+1$ točku. Kako prema definiciji Steinerovog 2-dizajna kroz svake dvije točke prolazi točno jedan pravac, slijedi da su sve točke na pravcu p kolinearne s T iz čega slijedi $\alpha = s+1$. Obrnuto, ako imamo $pg(s,t,s+1)$, onda kroz svake dvije točke prolazi točno jedan pravac. Odaberimo dvije točke P i Q. Neka je q bilo koji pravac koji prolazi kroz točku Q, a ne prolazi kroz P. Na tom pravcu, osim točke Q leži još s točaka, a zbog svojstva $\alpha = s+1$, svaka točka na pravcu q mora biti kolinearna s točkom P, pa su i točke P i Q kolinearne. Iz toga slijedi da je ovakva struktura Steinerov 2-dizajn. $\square$

Dualna struktura Steinerovog 2-dizajna je parcijalna geometrija $pg(s,t,\alpha)$ s $\alpha = t+1$.

Propozicija 4.7. *Incidencijska struktura je (r,k)-mreža ako i samo ako je parcijalna geometrija $pg(s,t,\alpha)$ s parametrima $s = k-1$, $t = r-1$ i $\alpha = t$.*

Dokaz. U (r,k)-mreži promatramo točku T i pravac p koji nisu incidentni. Kroz točku T prolazi $t+1$ pravaca. Kako je jedan od tih pravaca paralelan s pravcem p, postoji t pravaca koji prolaze kroz točku T i sijeku pravac p. Dakle na pravcu p postoji t točaka kolinearnih s T, pa je $\alpha = t$. Obrnuto, pretpostavimo da je $\alpha = t$. S obzirom da t pravaca siječe pravac p, a kroz točku T prolazi $t+1$ pravaca, slijedi da je točno jedan pravac kroz točku T paralelan pravcu p, pa je ova struktura (r,k)-mreža. $\square$

Dualna struktura (r,k)-mreže je parcijalna geometrija $pg(s,t,\alpha)$ gdje je $\alpha = s$. Ova struktura se naziva i transverzalnim dizajnom.

U parcijalnoj geometriji $pg(s,t,\alpha)$, vrijedi $\alpha \leq s+1$ i $\alpha \leq t+1$. Ako vrijedi jednakost, tada je parcijalna geometrija Steinerov 2-dizajn ili njegov dual. Ako je $\alpha = s$ ili $\alpha = t$, tada je parcijalna geometrija (r,k)-mreža ili njezin dual, a ako je $\alpha = 1$, tada je generalizirani četverokut. Ako vrijedi $1 < \alpha < min\{s,t\}$, tada se takva parcijalna geometrija naziva pravom parcijalnom geometrijom.

Primjer najmanje prave parcijalne geometrije, koja nije niti jedna od prethodne tri navedene strukture je parcijalna geometrija $pg(4,6,3)$ s 45 točaka i 63 pravaca.

4.2 Grafovi pridruženi parcijalnoj geometriji

Definicija 4.8. *Graf točaka Γ_1 parcijalne geometrije je graf čiji su vrhovi točke geometrije, gdje su dva vrha susjedna ako su kolinearni.*

Teorem 4.9. *Graf točaka Γ_1 parcijalne geometrije $pg(s,t,\alpha)$ je jako regularan graf s parametrima*

$$((s+1)(st+\alpha)/\alpha, (t+1)s, s-1+t(\alpha-1), (t+1)\alpha).$$

Dokaz. Točke parcijalne geometrije odgovaraju vrhovima grafa. Prema teoremu 4.4, $v=(s+1)(st+\alpha)/\alpha$, što odgovara parametru n jako regularnog grafa.

Dvije točke geometrije su susjedne ako su kolinearne, to jest, spojene pravcem, a nesusjedne ako su nekolinearne. Kroz bilo koju točku P parcijalne geometrije prolazi $t+1$ pravaca od kojih svaki sadrži s drugih točaka (izuzimajući točku P). Slijedi da P ima točno $(t+1)s$ susjeda, to jest, ovaj graf je k-regularan za $k=(t+1)s$.

Ako su točke P i Q kolinearne, povezane su nekim pravcem p. Taj pravac sadži $s-1$ točaka koje nisu P i Q. Te točke kolinearne su i s P i s Q. Kroz točku P, osim pravca p, prolazi t pravaca, a svaki od njih sadrži $\alpha-1$ točaka kolinearnih s Q koje nisu P. Iz ovoga se vidi da je broj točaka kolinearnih s P i Q jednak $(\alpha-1)t+s-1$, što odgovara parametru λ jako regularnog grafa.

Promatrajmo sada dvije točke P i Q koje su nekolinearne, dakle ne postoji pravac koji ih povezuje. Svaki od $t+1$ pravaca koji prolaze kroz P sadrži α točaka kolinearnih s Q, dakle broj točaka kolinearnih s P i Q koji odgovara parametru μ jako regularnog grafa je $(t+1)\alpha$. Ovime smo dokazali da je graf s ovim parametrima jako regularan graf.

□

Dualno, graf pravaca Γ_2 parcijalne geometrije je graf čiji su vrhovi pravci, a susjedni su ako su konkurentni. Ovo je graf točaka dualne geometrije, stoga je također jako regularan.

Teorem 4.10. *Graf pravaca Γ_2 parcijalne geometrije $pg(s,t,\alpha)$ je jako regularan s parametrima $((t+1)(st+\alpha)/\alpha, t(s+1), t-1+s(\alpha-1), \alpha(s+1))$.*

Propozicija 4.11. *Parcijalna geometrija je Steinerov 2-dizajn ako i samo ako je $\Gamma_1 = K_v$. Dualno, parcijalna geometrija je dual Steinerovog 2-dizajna ako i samo ako je $\Gamma_2 = K_b$.*

Dokaz. U Steinerovom 2-dizajnu, svake dvije točke su kolinearne, što znači da su u odgovarajučem grafu točaka Γ_1 svaka dva vrha susjedna. Graf u kojemu su svaka dva vrha susjedna je potpuni graf, a kako je broj točaka, odnosno vrhova u Steinerovom 2-dizajnu v, slijedi $\Gamma_1 = K_v$. Obratno, ako je $\Gamma_1 = K_v$, onda su svake dvije točke kolinearne pa je parcijalna geometrija Steinerov 2-dizajn.

□

Propozicija 4.12. *Parcijalna geometrija $pg(k-1, r-1, \alpha)$ je (r,k)-mreža ako i samo ako je graf pravaca Γ_2 potpuni multipartitni graf $K_{r\times k}$. Dualno, parcijalna geometrija je dual (r,k)-mreže ako i samo ako je graf točaka $\Gamma_1 = K_{k\times r}$.*

Dokaz. U (r,k)-mreži vrijedi Playfairom aksiom i vrijedi da je relacija paralelnosti relacija ekvivalencije na skupu pravaca. U grafu pravaca pridruženog ovoj mreži, spojeni su pravci koji se sijeku, a u komplementu tog grafa, spojeni su oni pravci koji se ne sijeku, to jest koji su paralelni. Taj graf se rastavlja na klase ekvivalencije. Unutar jedne klase, svaka dva pravca su paralelna. Dva pravca iz različite klase ekvivalencije se sijeku. Kako je r broj klasa ekvivalencije, a k broj pravaca unutar svake klase ekvivalencije, onda ovaj graf pravaca odgovara potpunom mulitpartitnom grafu $K_{r\times k}$. Obratno, ako je $\Gamma_2 = K_{r\times k}$, tada postoji r blokova s k vrhova. Unutar bloka ne postoji nijedan brid što je ekvivalentno klasi paralelnih pravaca, iz čega slijedi da je ova parcijalna geometrija (r,k)-mreža.

□

Korolar 4.13. *Pridruženi graf točaka Γ_1 (r,k)-mreže je graf s parametrima $(k^2, r(k-1), k+r(r-3), r(r-1))$. Graf pravaca Γ_2 pridružen (r,k)-mreži je graf s parametrima $(rk, k(r-1), k(r-2), k(r-1))$.*

Jako regularni graf čiji su parametri $((s+1)(st+\alpha)/\alpha, (t+1)s, s-1+t(\alpha-1), (t+1)\alpha)$ naziva se pseudogeometrijski graf s parametrima (s,t,α). Ovaj graf ima odgovarajuće parametre, ali ne mora biti graf parcijalne geometrije $pg(s,t,\alpha)$. Na primjer, prema [2], postoje četiri jako regularna grafa s parametrima $(28, 15, 6, 10)$, ali ne postoji parcijalna geometrija $pg(3,4,2)$.

Jako regularni graf se naziva geometrijski ako je graf točaka parcijalne geometrije. Bose je dokazao da, ako je s dovoljno velik u usporedbi s t i α, vrijedi obrat:

Teorem 4.14. ***(Boseov teorem)*** *Pretpostavimo da je*

$$s > \frac{1}{2}(t+2)((t-1)+\alpha(t^2+1)).$$

Onda je pseudogeometrijski (s,t,α) graf geometrijski.

Važno poboljšanje Boseovog teorema dokazao je Neumaier.

Teorem 4.15. *Neka je Γ jako regularni graf sa parametrima (n, k, λ, μ) čija matrica susjedstva ima svojstvene vrijednosti k, θ_1, θ_2. Pretpostavimo da je θ_2 cijeli broj manji od -1 i da je*

$$\theta_1 \leq \frac{1}{2}\theta_2(\theta_2 + 1)(\mu + 1) - 1.$$

Tada je Γ graf točaka parcijalne geometrije čiji parametri zadovljavaju $\alpha = t + 1$ ili $\alpha = t$, tj. duala Steinerovog 2-dizajn ili (r, k)-mreže.

Neumaierov teorem poboljšava Boseov na dva načina: prvo, ne pretpostavlja da je graf pseudogeometrijski. U slučaju da je graf pseudometrijski, Neumaierova nejednakost se svodi na Boseovu. To znači da teorem uključuje rezultat o nepostojanju: jako regularni grafovi čiji parametri zadovoljavaju nejednakost, ali nisu pseudogeometrijski, ne postoje. Drugo, Neumaier je pokazao da su jedine parcijalne geometrije čiji parametri zadovoljavaju Boseovu nejednakost duali Steinerovog 2-dizajna i mreže.

Teorem 4.16. *Neka je m cijeli broj veći od 1. Tada, uz konačno mnogo iznimaka, jako regularan graf s najmanjom svojstvenom vrijednosti $-m$ je potpun multipartitni graf s blokovima veličine m ili graf pravaca Steinerovog 2-dizajna ili transverzalnog dizajna (duala mreže) s pravcima veličine m.*

Posebno, svi osim konačno mnogo jako regularnih grafova sa najmanjom svojstvenom vrijednosti -3 su potpuni multipartitni grafovi s blokovima veličine 3 ili grafovi latinskih kvadrata ili grafovi pravaca Steinerovog sustava trojki. Postoji veliki broj takvih neizomorfnih grafova.

4.3 Konstrukcije parcijalnih geometrija

Slijede opisi dvije konstrukcije parcijalnih geometrija: Van Lint-Schrijverove parcijalne geometrije s parametrima $pg(5, 5, 2)$ i konstrukcije parcijalnih geometrija od maksimalnih lukova u projektivnim ravninama.

Van Lint-Schrijverovu geometriju označit ćemo s $G = (T, P)$ gdje je P skup pravaca koji se sastoje od podskupova čiji su elementi 6 točaka iz T. Ova parcijalna geometrija sadrži 81 točku i 81 pravac.

Neka je $T = V$ četverodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}_3$ i neka je $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ neka njegova baza. Definirat ćemo $e_5 = -\sum_{i=1}^{4} e_i$ i $S = \{0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Onda je $P = \{x + S \mid x \in V\}$ skup pravaca iz $G = (T, P)$. Točke su vektori, a pravci translati skupa S. Svaki translat sadrži 6 vektora. Kroz zadanu točku $x_0 \in V$ prolazi 6 translata: $x + S$ za

$x = x_0 - y$, $y \in S$. Da bi ova incidencijska struktura bila konfiguracija, trebamo dokazati da kroz svake dvije točke prolazi najviše jedan pravac. Pretpostavimo suprotno, da kroz točke $a, b \in V$, $a \neq b$ prolaze dva pravca $x + S$ i $y + S$, $x \neq y$. To znači da je $a = x + e = y + e'$ za neke $e, e' \in S$ i $b = x + f = y + f'$ za neke $f, f' \in S$. Zbog $a \neq b$ je $e \neq f$ i $e' \neq f'$. Slijedi da je $x - y = e' - e = f' - f$, to jest vektor $x - y$ ima dva različita prikaza kao razlika elemenata iz S. S druge strane, može se provjeriti da su sve razlike elemenata iz S međusobno različite. Dobili smo kontradikciju, pa zaključujemo da kroz svake dvije točke prolazi najviše jedan pravac.

Za dokaz da je je G parcijalna geometrija $pg(5, 5, 2)$ još treba provjeriti da za svaki pravac p i točku T koji nisu incidentni postoje točno dvije točke na p kolinearne s T. Pokazuje se da to slijedi iz ove leme.

Lema 4.17. *Ako je linearna kombinacija vektora iz S jednaka nuli, onda ona mora biti oblika $\alpha \cdot 0 + \beta \cdot (e_1 + ... + e_5)$ za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_3$.*

Detalji ovog dokaza nalaze se u članku [11] u propoziciji na stranici 69. Još jedna parcijalna geometrija s parametrima $pg(5, 5, 2)$, neizomorfna parcijalnoj geometriji Van Linta i Schrijverija, konstruirana je u članku [8] .

Prelazimo na opis druge konstrukcije. Neka je $\mathcal{P}$ projektivna ravnina reda q. Podsjetimo se, to je incidencijska struktura koja se sastoji od $q^2 + q + 1$ točaka i isto toliko pravaca. Na svakom pravcu leži $q + 1$ točaka i kroz svaku točku prolazi $q + 1$ pravaca. Nadalje, kroz svake dvije točke prolazi točno jedan pravac, a svaka dva pravca sijeku se u jednoj točki.

Definicija 4.18. *Neka su k i d prirodni brojevi takvi da je $k > d > 1$. Luk veličine k i stupnja d, to jest, (k, d)-luk u projektivnoj ravnini $\mathcal{P}$ reda q je skup $\mathcal{A}$ od k točaka takvih da je d najveći broj kolinearnih točaka u $\mathcal{A}$.*

Propozicija 4.19. *Ako postoji (k, d)-luk $\mathcal{A}$ u projektivnoj ravnini $\mathcal{P}$ reda q, onda vrijedi $k \leq dq - q + d$.*

Dokaz. Neka je $T \in \mathcal{A}$ bilo koja točka iz luka. Na svakom od $q + 1$ pravaca kroz T leži najviše $d - 1$ drugih točaka iz luka različitih od T. Zato je $|\mathcal{A} \backslash \{T\}| = k - 1 \leq (d - 1)(q + 1)$, a iz toga slijedi $k \leq dq - q + d$. □

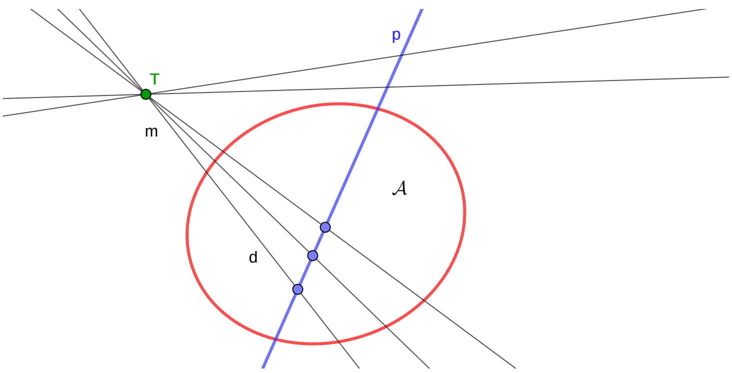
Luk najveće moguće veličine $k = dq - q + d$ nazivamo maksimalnim lukom stupnja d. Iz dokaza prethodne propozicije vidimo da svaki pravac projektivne ravnine $\mathcal{P}$ ili ne siječe maksimalni luk $\mathcal{A}$, ili ga siječe u točno d točaka.

Propozicija 4.20. *Ako u projektivnoj ravnini $\mathcal{P}$ reda q postoji maksimalni luk $\mathcal{A}$ stupnja d, onda d dijeli q.*

Dokaz. Neka je $T \notin \mathcal{A}$ bilo koja točka koja ne pripada maksimalnom luku. Od $q+1$ pravaca kroz točku T, neka m pravaca siječe $\mathcal{A}$ u d točaka, a preostali pravci ne sijeku $\mathcal{A}$. Onda je $|\mathcal{A}| = k = dq - q + d = d \cdot m$, iz čega slijedi $m = q - \frac{q}{d} + 1$. Vidimo da je $\frac{q}{d} = q + 1 - m$ prirodan broj, pa d dijeli q. $\square$

Teorem 4.21. *Neka je $\mathcal{A}$ maksimalan $(qd-q+d, d)$-luk u projektivnoj ravnini $\mathcal{P}$ reda $q = dd'$, $2 \leq d < q$ i neka je X skup točaka iz $\mathcal{P}$. Neka je $T = X \setminus \mathcal{A}$ skup točaka izvan luka $\mathcal{A}$ i neka je P skup svih pravaca iz $\mathcal{P}$ koji sijeku $\mathcal{A}$ u d točaka. Onda je (T, P) parcijalna geometrija $pg(s, t, \alpha)$ s parametrima $s = q - d$, $t = q - d'$ i $\alpha = (q - d)(d - 1)/d$.*

Dokaz. Iz dokaza propozicije 4.19 vidimo da je broj točaka na pravcu $s+1 = q + 1 - d$, pa sređivanjem dobivamo $s = q - d$. Iz dokaza propozicije 4.20 vidimo da je broj pravaca kroz točku $t+1 = m$, odnosno $t+1 = q - \frac{q}{d} + 1$, pa sređivanjem dobivamo $t = q - d'$. U konfiguraciji vrijedi da kroz svake dvije točke prolazi najviše jedan pravac. Ako izaberemo dvije točke iz parcijalne geometrije, s obzirom da su u projektivnoj ravnini, spojene su pravcem koji siječe luk, a ako ne siječe luk onda smo taj pravac izbacili i time je i ovaj uvjet zadovoljen. Neka je $T \notin \mathcal{A}$ bilo koja točka koja ne pripada maksimalnom luku i p pravac parcijalne geometrije koji siječe taj luk. Kroz točku T prolazi m pravaca, a od toga d pravaca siječe pravac p u luku, pa je $\alpha = m - d$, odnosno, sređivanjem dobivamo $\alpha = q - \frac{q}{d} + 1 - d$, pa je $\alpha = (q-d)(d-1)/d$. $\square$



Slika 8: Dokaz teorema 4.21

Maksimalni luk reda d ne postoji ni u jednoj Desarguesovoj ravnini reda q takvoj da je q neparan broj niti u jednoj od četiri projektivne ravnine reda 9, a postoji u svakoj Desarguesovoj ravnini reda $q = 2^t$.

Najmanji primjer prave parcijalne geometrije dobivamo od maksimalnog luka stupnja $d = 4$ u projektivnoj ravnini reda $q = 8$. To je parcijalna geometrija $pg(4, 6, 3)$ s 45 točaka i 63 pravca, spomenuta na kraju cjeline 4.1.

Literatura

[1] R.C. Bose, *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, Pacific Journal of Mathematics, **13** (1963), 389-419.

[2] A.E. Brouwer, *Parametres of strongly regular graph*, dostupno na https://www.win.tue.nl/ aeb/graphs/srg/srgtab.html (lipanj 2021.).

[3] P.J. Cameron, H.J. van Lint, *Designs, codes and their links*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[4] B. De Bruyn, *An introduction to incidence geometry*, Birkhauser, 2016.

[5] M. Gezek, V.D. Tonchev *On partial geometries arising from maximal arcs*, Journal of Algebraic Combinatorics (2021), https://doi.org/10.1007/s10801-020-00995-8 .

[6] C. Godsil, G. Royle, *Algebraic graph theory*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[7] D. Keedwell, J. Denes, *Latin squares and their applications*, North-Holland, 2015.

[8] V. Krčadinac, *A new partial geometry* $pg(5, 5, 2)$, Journal of Combinatorial Theory - Series A **183** (2021), https://doi.org/10.1016/j.jcta.2021.105493.

[9] V. Krčadinac, *Kvazisimetrični dizajni*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2016.

[10] V. Krčadinac, *Polarni prostori*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2012.

[11] J.H van Lint, A. Schrijver *Construction of strongly regular graphs, two-weight codes and partial geometries by finite fields*, Combinatorica **1** (1981), 63-73.

[12] J. Šiftar, V. Krčadinac, *Konačne geometrije*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2012.

Sažetak

U ovom radu bavimo se parcijalnim geometrijama. Najprije se upoznajemo s incidencijskim strukturama poput Steinerovih 2-dizajna, mreža i generaliziranih četverokuta, to jest, sa specijalnim slučajevima parcijalnih geometrija. Nakon tog obradili smo jako regularne grafove. U posljednjem, glavnom poglavlju povezujemo parcijalne geometrije sa spomenutim incidencijskim strukturama i grafovima. Objašnjavamo dvije konstrukcije pravih parcijalnih geometrija, koje ne pripadaju obrađenim posebnim slučajevima.

Summary

In this thesis we learn about partial geometries. First, we introduce incidence structures like Steiner's 2-designs, nets and generalized quadrangles, that is, special cases of partial geometries. After that we introduce strongly regular graphs. In the last, main chapter, we connect partial geometries with already mentioned incidence structures and graphs. We describe two constructions of proper partial geometries that don't belong to introduced special cases.

Životopis

Rođena sam 10.11.1993. u Subotici. Pohađala sam gimnaziju „Svetozar Marković" i u osnovnoj i srednjoj školi znala sam da je matematika moj poziv. Sudjelovala sam na državnim i saveznim natjecanjima iz matematike i osvajala nagrade.

Nakon srednje škole upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, nastavnički smjer, s ciljem da radim u nastavi. Posao u nastavi matematike sam započela 2018. godine, dok sam pohađala fakultet i od tada sam radila i u srednjim i osnovnim školama i u Subotici i u Zagrebu. Uz rad u školi, aktivno se bavim volonterskim radom s djecom i mladima. Za vrijeme studija u Zagrebu volonterski sam držala instrukcije iz matematike pri župi Sveta Mati Slobode, a volonterski rad nastavila sam i u Subotici gdje sam pokrenula Oratorij, program koji pomaže djeci razvijati svoje talente i kvalitetno provoditi vrijeme u kreativnim, glazbenim, sportskim, znanstvenim i drugim radionicama.