SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Sonja Časek

GENERALIZACIJE I ANALOGONI U GEOMETRIJI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, rujan 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Veliko hvala mojoj mentorici prof. dr. sc. Sanji Varošanec na svim savjetima, velikodušnoj pomoći i utrošenom vremenu tijekom pisanja diplomskog rada. Hvala mojim roditeljima, mami Mirjani i tati Slavku, što su mi omogućili studiranje u Zagrebu, zbog Vas sam upravo ovo. Hvala sestri Petri i cijeloj obitelji na potpori i podršci. Također, hvala mojim prijateljima uz koje je studiranje bilo zabavnije, a najviše hvala mojem dečku Stjepanu koji mi je bio najveća motivacija!
Hvala što ste vjerovali u mene!

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Generalizacije i analogoni u geometriji **2**

2 Pitagorin poučak **4**
2.1 Generalizacije Pitagorina poučka 7
2.2 Prostorni analogoni Pitagorina poučka 14

3 Teorem o simetrali kuta u trokutu **20**
3.1 Simetrala unutarnjih kuteva u trokutu 20
3.2 Simetrala vanjskog kuta u trokutu 23
3.3 Simetralna ravnina diedarskog kuta u tetraedru 24

4 Težište trokuta **26**

5 Heronova formula **31**
5.1 Brahmaguptina formula 33
5.2 Bretschneiderova formula 36

6 Četverokuti **39**
6.1 Pravokutnik i kvadrat 39

7 Newtonova formula **46**
7.1 Newtonova formula u ravnini 46
7.2 Newtonova formula u prostoru 47

Bibliografija **49**

Uvod

U ovom radu bavit ćemo se generalizacijama i alanogonima u geometriji školske matematike. Kao što je poznato, mnoge geometrijske tvrdnje mogu se generalizirati ili na temelju njih stvoriti analogne tvrdnje. Tako se već od nižih razreda učenici susreću s raznim generalizacijama jer se do svih zaključaka dolazi induktivno, tj. učenici uz pomoć nastavnika, koristeći konkretne objekte, otkrivaju nove pojmove, opisuju njihova svojstva, a onda na temelju njih izvode jednostavne generalizacije.
Generalizacija je jedna od osnovnih znanstvenih metoda istraživanja. Osim raznih primjena u matematici, vrlo je raširena i u svakodnevnom životu. Dolazi od latinske riječi *generalisatio* što znači poopćavanje, uopćivanje i od riječi *generalis* što znači sveobuhvatan, općenit, opći. Tako je generalizacija prijelaz s danog skupa objekata na njegov nadskup, tj. metoda kojom se izgrađuju općenitiji pojmovi i općenitije tvrdnje. Ovim načinom razmišljanja koristimo se i u svakodnevnom životu, primjerice:

Ljeti je uvijek vruće, ili *u Rijeci stalno pada kiša*.

Kao što vidimo iz primjera, općenite tvrdnje ne moraju uvijek biti istinite, međutim nas ne zanimaju izuzetci već neko općenito razmišljanje. Pošto za općenitije tvrdnje ne znamo vrijede li u trenutku kada ih otkrijemo, nužno ih je dokazati za sve elemente nadskupa.
Generalizacija je usko povezana i s analogijom. Analogija joj u pravilu prethodi. Riječ analogija dolazi također od grčke riječi *analogia* što znači pravilnost, sklad. Analogija je jedna vrsta sličnosti. Zaključivanje po analogiji je postupak pri kojem se iz opažanja da se dva objekta podudaraju u određenom broju svojstava izvodi zaključak da se podudaraju i u drugim svojstvima koji se prethodno nisu opažali. Međutim, zaključivanje po analogiji ne mora nužno značiti da ako vrijedi dio svojstava da će vrijediti i sva ostala pa nas to može dovesti do pogrešnih zaključaka. Prvi koji je objavio svoja proučavanja različitih analogija je Euler pa njega nazivamo "ocem" analogije.
U ovom radu osvrnut ću se na razne geometrijske tvrdnje koje ću dokazati, na temelju njih postaviti pridružene generalizacije ili analogone te sve dokazati. Fokus će biti na teoremima školske matematike, dok će njihove generalizacije i analogoni možda i izaći van tog okvira.

Poglavlje 1

Generalizacije i analogoni u geometriji

Jedan od prvih mnogokuta s kojima se susrećemo u školskoj matematici je trokut. Upravo zbog toga što ga učenici proučavaju od rane školske dobi, u školskoj se literaturi pojavljuju različte definicije, primjerene razini obrazovanja u kojoj se ttaj pojam uvodi. Neke od njih su:

(i) Neka su u ravnini zadane tri točke A, B i C koje ne leže na istom pravcu. Te tri točke određuju dužine $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Dio ravnine omeđen dužinama $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ naziva se **trokut** ABC.

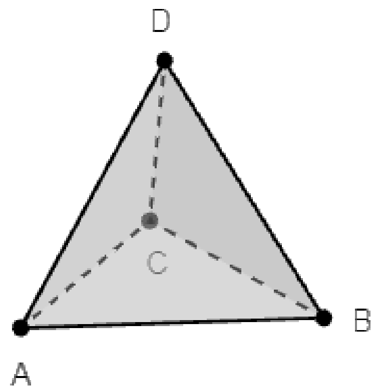
(ii) **Trokut** je mnogokut koji ima tri vrha.

(iii) **Trokut** je konveksna ljuska triju nekolinearnih točaka u ravnini.

U drugoj definiciji, pojam trokuta, je specijalni slučaj mnogokuta, tj. mnogokut je generalizacija trokuta.

U trećoj definiciji promatra se konveksna ljuska triju nekolinearnih točaka u ravnini. Ukoliko iz ravnine prijeđemo u prostor te umjesto triju nekolinearnih točaka promatamo četiri nekomplanarne točke, tada koristeći analogiju dolazimo do analognog objekta - tetraedra. Dakle, **tetraedar** je konveksna ljuska četiriju nekomplanarnih točaka u prostoru.

Budući da trokut i tetraedar imaju vrlo slične definicije smatramo ih analognima.



Slika 1.1: Tetraedar

Razmotrimo još neke prirodne analogone i generalizacije. Jednakostranični trokut je trokut čije su sve stranice i svi kutovi međusobno sukladni. Isto svjstvo ima i kvadrat pa i pravilni šesterokut. Zbog sličnosti tih dvaju svojstva: ”sukladne stranice”, ”sukladni kutovi”, jednakostranični trokut, kvadrat i pravilni šesterokut međusobno su analogni. Nadskup koji sadrži sve jednakostranične trokute, kvadrate i pravilne šesterokute jest skup svih pravilnih mnogokuta. Stoga je pravilni mnogokut generalizacija i jednakostraničnog trokuta i kvadrata i pravilnog šesterokuta.

Promotrimo definiciju kružnice. Ako je u ravnini dana jedna čvrsta točka te ako je r pozitivan broj, tada je kružnica skup točaka ravnine koje su do točke S udaljene točno r.

Zamijenimo li riječ ”ravnina” u gornjoj rečenici, dobivamo upravno definiciju sfere. Stoga su kružnica i sfera analogni objekti. Na isti način zaključujemo da su krug i kugla analogni.

Slično, promjenom prostora u kojem se objekt definira dolazimo do zaključka da su vektori u ravnini analogoni vektora u prostoru.

Neke druge prirodne analogone i generalizacije detaljno ćemo opisati u narednim poglavljima.

Poglavlje 2

Pitagorin poučak

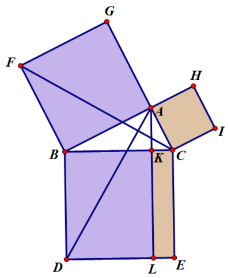
Jedan od osnovnih teorema euklidske geometrije je Pitagorin poučak. Pitagorin poučak dobio je ime po starogrčkom filozofu i matematičaru Pitagori.
Iako je Pitagorin teorem bio poznat i starim Babiloncima, teorem je dobio naziv upravo po Pitagori jer se smatra da je upravo Pitagora prvi koji ga je uspio i dokazati.

Teorem 2.0.1 (Pitagorin teorem). *Površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama. Dakle,*

$$c^2 = a^2 + b^2, \tag{2.1}$$

pri čemu su a i b duljine kateta pravokutnog trokuta, a c je duljina hipotenuze.

Postoji mnogo dokaza Pitagorina teorema, a ovdje ćemo predstavit dva od njih. Prvi dokaz koji ćemo predstaviti je dokaz čija se verzija nalazi u Euklidovim *Elementima*.



Slika 2.1: Euklidov dokaz

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ pravokutan trokut, s pravim vrhom pri kutu C (slika 2.1). Kvadrati $CBDE$, $BAGF$ i $ACIH$ konstruirani su nad stranicama trokuta $\triangle ABC$. Uočimo da je $|AB| = |FB|$ jer je $ABFG$ kvadrat. Povucimo paralelu sa stranicom $\overline{BD}$ kroz točku A. Ta paralela siječe $\overline{BC}$ i $\overline{DE}$ u točkama K i L. Spojimo točke C i F te točke A i D. Sada slijedi da je $|\angle ABD| = 90° + |\angle ABC|$. Prema poučku o sukladnosti trokuta $S - K - S$ slijedi da su trokuti $\triangle ABD$ i $\triangle FBC$ sukladni jer je $|AB| = |FB|$, $|BC| = |BD|$ i $\angle ABD \cong \angle FBC$. Uočimo da je trokut $\triangle BDK$ polovina pravokutnika $BDLK$ pa je tako i površina $\triangle BDK$ upola manja od površine pravokutnika $BDLK$. Primjetimo također da su površine trokuta $\triangle BDK$ i $\triangle BDA$ jednake jer su to trokuti koji imaju sukladne osnovicu i jednaku duljinu visine pa je tako i površina trokuta $\triangle BDA$ dvostruko manja od površine pravokutnika $BDLK$. Stoga vrijedi

$$P(BAGF) = 2 \cdot P(\triangle FBC) = 2 \cdot P(\triangle BDA) = P(BDLK).$$

Budući da je duljina stranice kvadrata $BAGF$ jednaka $|AB|$ vrijedi da je površina pravokutnika jednaka $|AB|^2$. Slično se pokaže da je

$$P(CKLE) = P(ACIH) = |AC|^2.$$

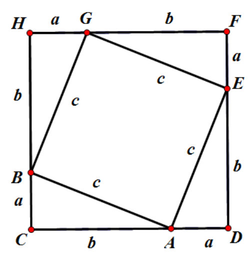
Konačno slijedi,

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BD| \cdot |BK| + |KL| \cdot |KC| = |BD| \cdot |BK| + |BD| \cdot |KC|$$

$$= |BD| \cdot (|BK| + |KC|) = |BD| \cdot |BC| = |BC|^2$$

Čime smo dokazali tvrdnju teorema. □

Drugi dokaz je vizualni dokaz Pitagorina poučka. Vrlo često se ovaj dokaz nalazi u udžbenicima za osnovnu školu.



Slika 2.2: Kvadrat i Pitagorin poučak

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ pravokutan trokut s pravim vrhom pri kutu C. Nacrtajmo kvadrat $CDFH$ duljine stranica $a + b$ kao na slici 2.2.

Uočimo sa su pravokutni trokuti $\triangle ABC$, $\triangle AED$, $\triangle EGF$ i $\triangle GBF$ međusobno sukladni po teoremu o sukladnosti trokuta S-K-S jer se podudaraju u dvjema stranicama i kutu između njih (pravi kut). Četverokut $AEGB$ je kvadrat. Naime, iz sukladnosti spomenutih trokuta slijedi da su sve stranice četverokuta sukladne. Za kut $\angle BAE$ vrijedi:

$$| \angle BAE | = 180° - | \angle CBA | - | DAE | = 180° - 90° = 90°$$

Površina kvadrata $CDFH$ može se izračunati na dva načina. Površina velikog kvadrata može se izračunati kao:

$$P(CDFH) = (a + b)^2$$

ili kao zbroj površina četiri pravokutna trokuta i kvadrata, tj.

$$P(CDFG) = P(ABC) + P(AED) + P(EGF) + P(GBF) + P(AEGB).$$

Kako su trokuti sukladni možemo pisati:

$$P(CDFG) = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2 = 2ab + c^2$$

Izjednačavanjem površina kvadrata $CDFG$ dobivamo da je:

$$(a + b)^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

pa konačno dobivamo da je:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

čime smo dokazali početni teorem. □

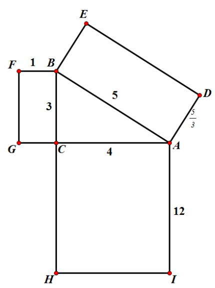
2.1 Generalizacije Pitagorina poučka

Što ako bismo umjesto kvadrata nad pripadajućim stranicama promatrali neke druge likove, npr. trokute, pravokutnike, trapeze, peterokute, šesterokute...? Bi li i dalje vrijedio Pitagorin poučak?
Odgovor je da, međutim to ne mogu biti bilo kakvi likovi, neka svojstva i dalje moraju ostati sačuvana. Kao što znamo, svi kvadrati su četverokuti i to slični četverokuti, štoviše oni su i pravilni četverokuti, pa tako možemo promatrati i ostale slične četverokute i pravilne mnogokute kao što su pravilni peterokut, šesterokut... Kada poopćujemo, tj. generaliziramo teorem, kao što to radimo u ovom slučaju, najbitnije je da nam svojstva koja prenosimo u nadskup ostaju sačuvana.
Navest ćemo sada neke generalizacije Pitagorinog teorema:
1. Ako su četverokuti nad stranicama pravokutnog trokuta slični, tada je površina četverokuta nad hipotenuzom jednaka zbroju površina četverokuta nad katetama.
2. Površina pravilnog n-terokuta nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina pravilnih n-terokuta nad katetama.
3. Ako su mnogokuti nad stranicama pravokutnog trokuta slični, tada je površina mnogokuta nad hipotenuzom jednaka zbroju površina mnogokuta nad katetama.

Na prvi bismo pogled mogli zaključiti da su ove tvrdnje istinite. Uobičajni argument za takav zaključak jest činjenica da se površine sličnih mnogokuta odnose kao kvadrati duljina odgovarajućih stranica. Međutim, pokažimo kontraprimjerima da prva i treća tvrdnja nisu istinite. Nad stranicama pravokutnog trokuta ABC opišimo pravokutnike $ADEB$, $BFGC$, $CHIA$ tako da vrijedi:

$$|AB| = k \cdot |BC|, \quad |AD| = k \cdot |BF|$$

$$|AC| = m \cdot |BF|, \quad |CH| = m \cdot |BC|$$



Slika 2.3: Primjer sličnih pravokutnika nad stranicama egipatskog trokuta

Pravokutnici $ADEB$ i $BFGC$ su slični (jer imaju sve kutove suklanje i stranice proporcionalne) s koeficijentom k. I pravokutnici $ADEB$ i $CHIA$ s koeficijentom sličnosti m. Na slici je dana jedna takva situacija za egipatski trokut uz $k = \frac{5}{3}$ i $m = 4$. U tom slučaju je:

$$P(BFGC) + P(CHIA) = 3 + 48 = 51 < \frac{25}{3} = P(ADEB),$$

tj. ne vrijedi prva tvrdnja.

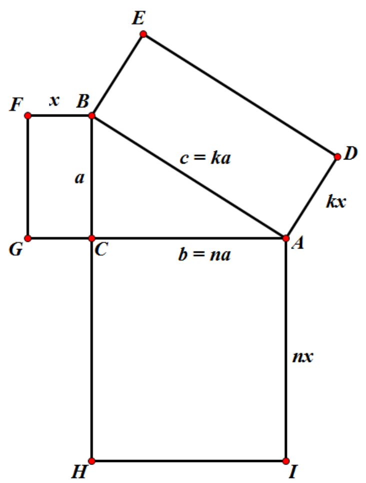
Uočimo da su u ovom kontraprimjeru odgovarajuće stranice tih triju sličnih pravokutnika bile $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ i $\overline{CH}$ te $\overline{BF}$, $\overline{AD}$ i $\overline{AC}$.

Može li se prva tvrdnja preformulirati ili dopuniti tako da postane istinita?

Promotrimo situaciju kada su $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ odgovarajuće stranice sličnih pravokutnika. Tada je:

$$|AB| = k \cdot |BC|, \ \ |AD| = k \cdot |BF|$$

$$|AC| = n \cdot |BC|, \ \ |CH| = n \cdot |BF|$$



Slika 2.4: Primjer sličnih pravokutnika

Vrijedi:

$$P(BFGC) + P(CHIA) = ax + n^2ax = ax(1 + n^2)$$

$$P(ADEB) = k^2ax$$

Prema Pitagorinom poučku slijedi:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$k^2a^2 = a^2 + n^2a^2$$

$$k^2 = 1 + n^2$$

te je $P(BFGC) + P(CHIA) = P(ADEB)$, tj. zbog zbog površina sličnih pravokutnika nad hipotenuzom jednak je površini sličnog pravokutnika nad hipotenuzom. U ovom je slučaju bilo bitno da su stranice trokuta $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ upravo one stranice sličnih pravokutnika koje su odgovarajuće. I taj uvijet treba dodati u prvu tvrdnju kako bi postala istinita. Stoga istinita generalizacija Pitagorina poučka glasi:

Neka su nad stranicama pravokutnog trokuta opisani međusobno slični četverokuti kojima su odgovarajuće stranice upravo stranice trokuta. Tada je površina četverokuta nad hipotenuzom jednaka zbroju površina četverokuta nad katetama.

U prethodnom tekstu smo obu tvrdnju dokazali za slične pravokutnike, a sad evo i dokaza za četverokute.

Površine sličnih mnogokuta odnose se kao kvadrati duljina odgovarajućih stranica. U našem slučaju duljine stranica trokuta označena su redom sa a, b, c, pri čemu su a i b katete, a c je hipotenuza. Stoga vrijedi:

$$\frac{P_c}{P_a} = \frac{c^2}{a^2} \quad i \quad \frac{P_c}{P_b} = \frac{c^2}{b^2}$$

Izrazimo a^2 iz prve jednakosti i b^2 iz druge jednakosti i uvrstimo ih u formulu (1). Tada dobivamo da je:

$$c^2 = \frac{c^2 P_a}{P_c} + \frac{c^2 P_b}{P_c}$$

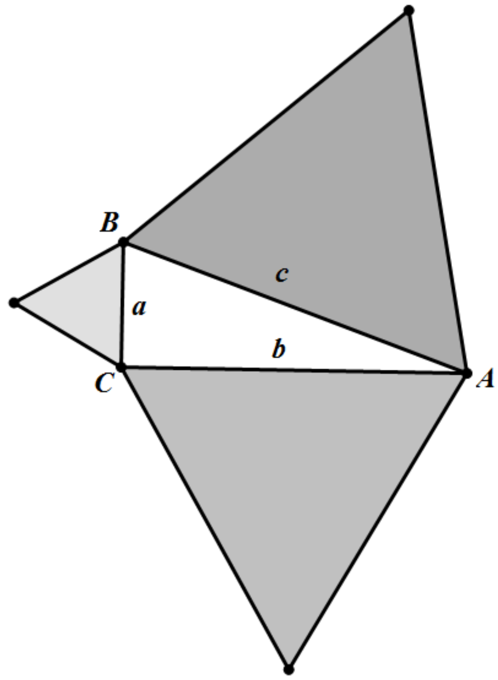
Dijeljenjem lijeve i desne strane s c^2 te sređivanjem izraza obivamo upravo

$$P_c = P_a + P_b$$

pa smo tako dokazali navedene tvrdnje. Tvrdnju 3. također treba dopuniti kao i tvrdnju 1. budući da je ona generalizacija tvrdnje 1.

Sljedeći primjer često se nalazi u zbirkama zadataka za 8. razred budući da učenici na toj razini obrazovanja poznaju formulu za površinu jednakostraničnog trokuta.

Primjer 1. *Površina jednakostraničnog trokuta nad hipotenuzom jednaka je zbroju površina jednakostraničnih trokuta nad katetama.*



Slika 2.5: Pitagorin poučak za trokute

Dokaz. Neka su a i b duljine kateta pravokutnog trokuta, a c duljina hipotenuze. Tada su površine jednakostraničnih trokuta nad katetama a i b i hipotenuzom c redom jednake:

$$P_a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad P_b = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}, \quad P_c = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}.$$

Za pravokutan trokut vrijedi

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Množenjem s $\frac{\sqrt{3}}{4}$ dobivamo

$$\frac{c^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4},$$

a to je upravo tražena jednakost

$$P_c = P_a + P_b.$$

□

U srednjoj školi učenici poznaju trigonometriju pravokutnog trokuta pa mogu dokazati generaizaciju koju smo naveli pod brojem 2. Dokaz tvrdnje glasi:

Površina pravilnog mnogokuta može se odrediti po formuli:

$$P_{mnogokuta} = \frac{s^2 \cdot n}{4\,\mathrm{tg}\,\frac{180}{n}},$$

pri čemu je s duljina stranice mnogokuta, a n broj strana mnogokuta. Tada su površine pravilnih mnogokuta nad stranicama pravokutnog trokuta ABC jednake:

$$P_a = \frac{a^2 \cdot n}{4\,\mathrm{tg}\,\frac{180}{n}},\;\; P_b = \frac{b^2 \cdot n}{4\,\mathrm{tg}\,\frac{180}{n}},\;\; P_c = \frac{c^2 \cdot n}{4\,\mathrm{tg}\,\frac{180}{n}}.$$

Stoga

$$P_a + P_b = \frac{a^2 \cdot n}{4\,\mathrm{tg}\,\frac{180}{n}} + \frac{b^2 \cdot n}{4\,\mathrm{tg}\,\frac{180}{n}} = \frac{n}{4\,\mathrm{tg}\,\frac{180}{n}}(a^2 + b^2).$$

Primjenom Pitagorina teorema $c^2 = a^2 + b^2$ slijedi da je:

$$P_a + P_b = \frac{n}{4\,\mathrm{tg}\,\frac{180}{n}} c^2 = P_c$$

čime smo dokazali početnu tvrdnju.

Još jedna vrlo važna generalizacija Pitagorina poučka je kosinusov poučak koji glasi:

Teorem 2.1.1 (**Kosinusov poučak**). *Kvadrat duljine stranice trokuta jednak je zbroju kvadrata duljina drugih dviju stranica umanjenom za dvostruki umnožak duljina tih stranica i kosinusa kuta između tih stranica:*

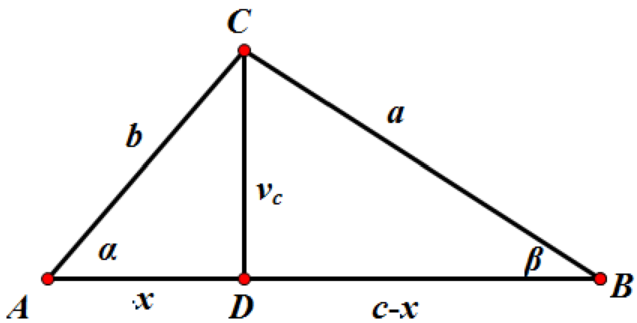
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati jednu od tri navedene jednakosti. Mi ćemo dokazati prvu jednakost:

1^o Neka je α šiljasti kut.



Slika 2.6: Kosinusov poučak za šiljasti trokut

Uočimo pravokutne trokute $\triangle ADC$ i $\triangle CBD$. Iz njih slijedi da je

$$v_c^2 = b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$$

tj.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx. \tag{2.2}$$

Nadalje, uočimo pravokutan trokut $\triangle ADC$. U njemu vrijedi $\cos\alpha = \frac{x}{b}$ iz čega slijedi da je $x = b\cos\alpha$. Uvrštavanjem u (2.2) dobivamo konačnu jednakost

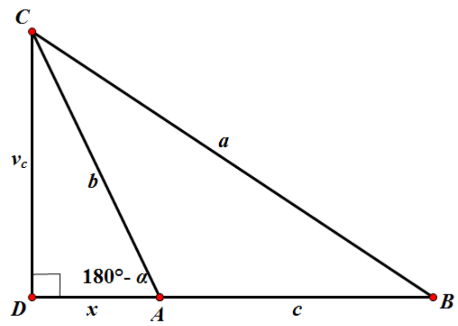
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

2^o Neka je α pravi kut.

Tada upravo dobivamo specijalan slučaj kosinusovog poučka, tj. dobivamo
Pitagorin poučak za pravokutan trokut.

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

3^o Neka je α tupi kut.



Slika 2.7: Kosinusov poučak za tupokutan trokut

Uočimo pravokutne trokute $\triangle ADC$ i $\triangle CBD$. Iz njih slijedi jednakost

$$v_c^2 = b^2 - x^2 = a^2 - (c + x)^2$$

iz čega slijedi da je

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$$

U pravokutnom trokutu $\triangle ADC$ vrijedi da je $\cos 180^o = \frac{x}{b}$ pa je

$$x = b\cos(180^o - \alpha) = -b\cos\alpha$$

iz čega konačno slijedi da je

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

$\square$

Pitagorin je poučak specijalan slučaj kosinusovog poučka za kut od $\gamma = 90^o$ jer je $\cos 90^o = 0$.

2.2 Prostorni analogoni Pitagorina poučka

Do sada smo pomatrali Pitagorin poučak u ravnini i njegove generalizacije. Pravokutan trokut možemo promatrati na tri različita načina. Možemo ga promatrati kao polovinu pravokutnika, kao trokut kojemu su stranice iz jednog vrha okomite i kao trokut čije dvije otvorene stranice čine otvorenu izlomljenu liniju. Ovakvi različiti pogledi na trokut dovode nas do analogije s tri tijela u prostoru.

1. Ako promatramo pravokutan trokut kao polovinu pravokutnika, njegov analogon je polovina kvadra, tj. uspravna trostrana prizma kojoj je osnovka pravokutan trokut (slika 2.8).

2. Ako promatramo pravokutan trokut kao trokut kojemu su sve stranice iz jednog vrha okomite, njegov analogon je tetraedar kojemu su svi bridovi iz jednog vrha međusobno okomiti (slika 2.9). Drugim riječima, pravokutni trokut promatramo kao trokut s pravim kutom, a njegov je analogon tetraedar s prostornim pravim kutom.

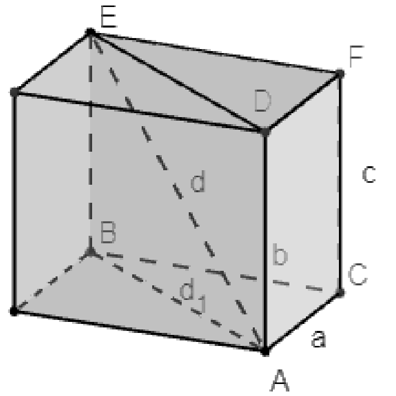
3. Ako promatramo pravokutan trokut kao trokut kojemu su dvije stranice međusobno okomite, njegov analogon je tetraedar u kojem postoji više parova međusobno okomitih bridova (slika 2.11).

Promotrimo svaki slučaj zasebno:

Pravokutan trokut kao polovina pravokutnika

Tvrdnja 1. Neka je $ABCDEF$ trostrana prizma dobivena kao polovina kvadra i neka je $a = |CA|$, $b = |CB|$, $c = |CF|$, $d_1 = |AB|$ i $d = |AE|$. Tada vrijedi:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \tag{2.3}$$



Slika 2.8: Trostrana prizma

Dokaz. Uočimo dva pravokutna trokuta $\triangle\ ABE$ i $\triangle\ ABC$. Primjenom Pitagorina poučka na navedene trokute dobivamo da je

$$d^2 = d_1^2 + c^2 \tag{2.4}$$

$$d_1^2 = a^2 + b^2 \tag{2.5}$$

Uvrštavanjem d_1 iz jednakosti (2.5) u jednakost (2.4) dobivamo da je

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

čime smo dokazali početnu tvrdnju. □

Možemo uočiti da prvi prostorni analogon Pitagorina poučka povezuje duljinu prostorne dijagonale kvadra s duljinom bridova iz jednog vrha kvadra. Uočavamo da smo zbog prelaska iz ravnine u prostor, formula za Pitagorin poučak proširili s još jednom veličinom.

Pravokutan trokut kao trokut kojemu su stranice iz jednog vrha okomite

Formulu Pitagorina poučka $c^2 = a^2 + b^2$ možemo interpretirati na ovaj način: c, a, b su duljine stranica trokuta. Unija stranica $\overline{AB} \bigcup \overline{BC} \bigcup \overline{AC}$ čini rub trokuta ABC. U formuli $c^2 = a^2 + b^2$ je kvadrat mjere najdulje stranice jednak zbroju kvadrata mjera preostalih stranica (djelova ruba). Prenesimo ovo razmišljanje u situaciju kada je promatrani objekt tetraedar $OABC$ kojemu su bridovi iz vrha O međusobno okomiti. Rub tog tijela je

$\triangle ABC \bigcup \triangle OAB \bigcup \triangle OBC \bigcup \triangle OAC$ i površinom najveći trokut, od ta četiri koji čine rub je trokut ABC nasuprot vrha prostornog pravog kuta. Mjere trokuta su njihove površine pa možemo postaviti dvije hipoteze. U jednoj je kvadrat mjere najvećeg trokuta jednak zbroju kvadrata mjera preostalih trokuta tj.

$$P^2(\triangle ABC) = P^2(\triangle OAB) + P^2(\triangle OAC) + P^2(\triangle OBC).$$

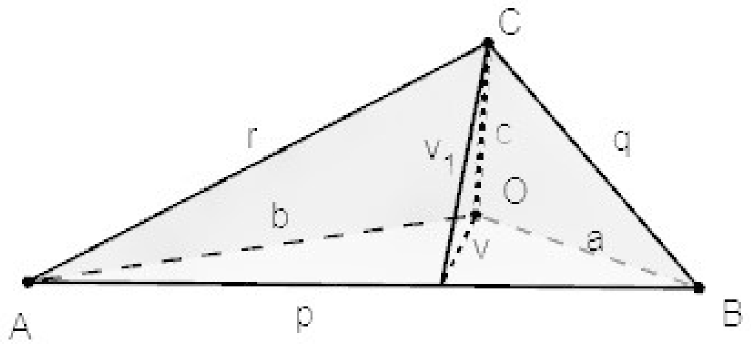
U drugoj ćemo kvadrat zamijeniti kubom. Naime, moguće je da je kvadrat u Pitagorinom poučku bio povezan s dimenzijom prostora, tj. s 2, pa je logično u prostornoj analogiji broj 2 zamijeniti brojem 3. Drugim riječima postavljamo analogiju:

$$P^3(\triangle ABC) = P^3(\triangle OAB) + P^3(\triangle OAC) + P^3(\triangle OBC).$$

Dokažimo prvu hipotezu.

Tvrdnja 2. Neka je $OABC$ tetraedar kojemu su plošni kutevi kod vrha O pravi. Te neka su duljine bridova koji izlaze iz vrha O redom a, b, c, a ostale duljine bridova označimo s p, q, r. Tada vrijedi da je kvadrat površine strane nasuprot vrha O jednak zbroju kvadrata površina preostalih triju strana.

$$P^2(\triangle ABC) = P^2(\triangle OAB) + P^2(\triangle OAC) + P^2(\triangle OAC)$$



Slika 2.9: Tetraedar

Dokaz. Neka su $P(\triangle OAB) = \dfrac{ab}{2}$, $P(\triangle OAC) = \dfrac{ac}{2}$ i $P(\triangle OBC) = \dfrac{bc}{2}$ redom površine pravokutnih trokuta $\triangle OAB$, $\triangle OAC$ i $\triangle OBC$. Tada su kvadrati njihovih površine redom $P^2(\triangle OAB) = \dfrac{a^2b^2}{4}$, $P^2(\triangle OAC) = \dfrac{a^2c^2}{4}$ i $P^2(\triangle OBC) = \dfrac{b^2c^2}{4}$. Uočimo da je visina v iz vrha O u trokutu $\triangle OAB$ jednaka $v = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, a visina v_1 u trokutu $\triangle ABC$ iz vrha C jednaka $v_1^2 = c^2 + v^2$, tj. uvrštavanjem v u v_1 dobivamo da je $v_1 = c^2 + \dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$. Uočimo trokut $\triangle ABC$. Njegova površina jednaka je $P(\triangle ABC) = \dfrac{pv_1}{2}$. Slijedi da je kvadrat njegove površine jednak

$$\begin{aligned} P^2(\triangle ABC) &= \frac{p^2v_1^2}{4} = \frac{1}{4}(a^2+b^2)\left(c^2 + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \\ &= P^2(\triangle OAB) + P^2(\triangle OAC) + P^2(\triangle OBC) \end{aligned}$$

čime smo pokazali početnu tvrdnju. □

Drugu ćemo hipotezu opovrgnuti.

Promatrajmo tetraedar $OABC$ u kojem je $a = b = c$. Tada je $p = r = q = a\sqrt{2}$ i $P(\triangle OAB) = P(\triangle OAC) = P(\triangle OBC) = \frac{a^2}{2}$, $P(\triangle ABC) = \frac{1}{4}(a\sqrt{2})^2\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Tada je:

$$P^3(\triangle OAB) + P^3(\triangle OAC) + P^3(\triangle OBC) = 3\left(\frac{a^2}{2}\right)^3 = \frac{3a^6}{8},$$

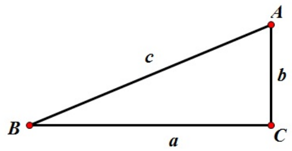
$$P(\triangle ABC) = \frac{3\sqrt{3}a^6}{8}$$

te očito ne vrijedi

$$P^3(\triangle ABC) = P^3(\triangle OAB) + P^3(\triangle OAC) + P^3(\triangle OBC).$$

Pravokutan trokut kao trokut kojemu su dvije stranice međusobno okomite

Interpretirajmo Pitagorin poučak na još jedan način.

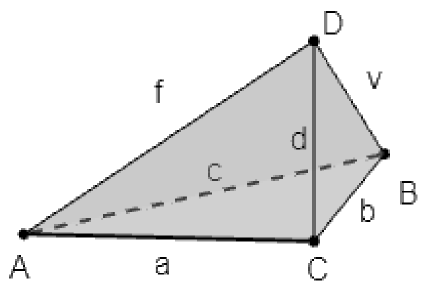


Slika 2.10: Pravokutan trokut

Zapišimo ga ovako $a^2 - c^2 + b^2 = 0$, tj. kao alternirajuću sumu kvadrata duljina stranica te izjednačimo s nulom.
Možemo postaviti slični analogon koji vrijedi za jednu posebnu vrstu tetraedra čije stranice su pravokutni trokuti.

Tvrdnja 3. Neka je $ABCD$ tetraedar u kojem vrijedi $\overline{AC} \perp \overline{BC}$, $\overline{BC} \perp \overline{BD}$, $\overline{BD} \perp \overline{BA}$ i $\overline{AC} \perp \overline{CD}$. Uvodimo oznake kao na slici te površine strana tetraedra nasuprot vrhova A, B, C, D označimo redom s P_A, P_B, P_C, P_D. Tada vrijedi:

$$P_A^2 - P_C^2 + P_B^2 - P_D^2 = 0. \tag{2.6}$$



Slika 2.11: Tetraedar

Dokaz. Uočavamo da su površine trokuta P_A, P_B, P_C, P_D nasuprot vrhova A, B, C, D redom jednake:

$$P_A = \frac{bv}{2}, P_B = \frac{ad}{2}, P_C = \frac{cv}{2}, P_D = \frac{ab}{2},$$

a kvadrati tih površina jednaki:

$$P_A = \frac{b^2v^2}{4}, P_B = \frac{a^2d^2}{4}, P_C = \frac{c^2v^2}{4}, P_D = \frac{a^2b^2}{4}$$

Zapišimo sve površine preko stranica a, b, c i visine v. Tada vrijedi:

$$P_A = \frac{b^2v^2}{4}, P_B = \frac{a^2d^2}{4} = \frac{a^2(v^2+b^2)}{4} = \frac{a^2v^2}{4} + \frac{a^2b^2}{4},$$

$$P_C = \frac{c^2v^2}{4} = \frac{v^2(a^2+b^2)}{4} = \frac{a^2v^2}{4} + \frac{b^2v^2}{4}, P_D = \frac{a^2b^2}{4}$$

Zbrajanjem i oduzimanjem kvadrata površina u dobivamo da vrijedi jednakost (2.6). □

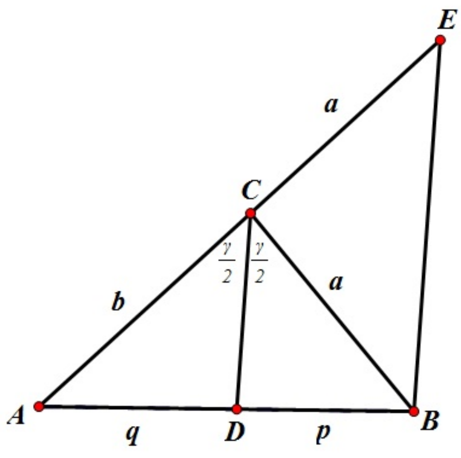
Poglavlje 3

Teorem o simetrali kuta u trokutu

Pravokutan trokut specijalna je vrsta trokuta, međutim možemo promatrati i neka svojstva koja vrijede općenito za trokute u ravnini. Za trokut vrijede razna svojstva, a najzanimljivija su vezana uz duljine njihovih stranica i veličina kuteva. Promotrimo neka posebna svojstva za koje postoje i analogna svojstva.

3.1 Simetrala unutarnjih kuteva u trokutu

Teorem 3.1.1 (**Teorem o simetrali unutarnjih kuteva u trokutu**)**.** *Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih dviju.*



Slika 3.1: Simetrala unutarnjeg kuta

Prvi dokaz: Teorem ćemo dokazati pomoću Talesovog teorema o proporcionalnosti.

Zadan je trokut $\triangle ABC$. Simetrala kuta γ pri vrhu C siječe stranicu $\overline{AB}$ točki D i dijeli stranicu $\overline{AB}$ na odsječke duljine q i p. Produljimo stranicu $\overline{AC}$ do točke E tako da je $|BC| = |EC| = a$. Uočimo da je trokut $\triangle BCE$ jednakokračan. Kut $\angle CEB \cong \angle CBE$ jer je trokut $\triangle BCE$ jednakokračan. Prema teoremu o vanjskom kutu trokuta slijedi da je $|\angle ACB| = |\angle CBE| + |\angle CEB| = \gamma$ tj. $|\angle CBE| = \frac{1}{2}\gamma$. Kako je $|\angle CBE| = |\angle BCD| = \frac{1}{2}\gamma$, slijedi da su dužine $\overline{CD}$ i $\overline{BE}$ paralelne. Zbog Talesovog teorema o proporcionalnosti vrijedi:

$$\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|AD|}{|AB|},$$

$$\frac{|AC|}{|AC| + |CE|} = \frac{|AD|}{|AD| + |DB|},$$

$$\frac{|AC| + |CE|}{|AC|} = \frac{|AD| + |DB|}{|AD|},$$

nadalje slijedi da je:

$$1 + \frac{|CE|}{|AC|} = 1 + \frac{|DB|}{|AD|}.$$

Kako je $|CE| = |CB|$, vrijedi:

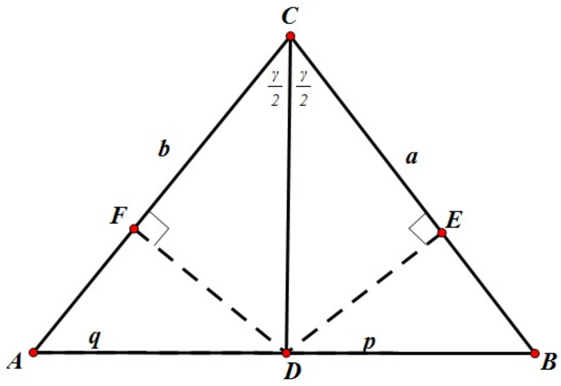
$$\frac{|CB|}{|AC|} = \frac{|DB|}{|AD|},$$

odnosno

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

čime smo pokazali početnu tvrdnju.

Drugi dokaz: Teorem možemo dokazati pomoću karakterističnog svojstva simetrale kutova.



Slika 3.2: Simetrala unutarnjeg kuta

Oznake neka budu kao u prvom dokazu. Budući da se točka D nalazi na simetrali kuta γ, ona je jednako udaljena od krakova tog kuta. Označimo s E i F nožišta okomica iz točke D na krakove CB i CA redom. Prema upravo rečenom:

$$|DE| = |DF|.$$

Zapišimo površine trokuta ADC i DBC na dva načina:

$$P(\triangle ADC) = \frac{q \cdot v_c}{2} = \frac{|AC| \cdot |FD|}{2}$$

$$P(\triangle DBC) = \frac{p \cdot v_c}{2} = \frac{|BC| \cdot |DE|}{2}.$$

Postavimo li te površine u omjer dobivamo

$$\frac{q \cdot v_c}{2} : \frac{p \cdot v_c}{2} = \frac{|AC| \cdot |FD|}{2} : \frac{|BC| \cdot |DE|}{2},$$

tj. nakon skraćivanja imamo

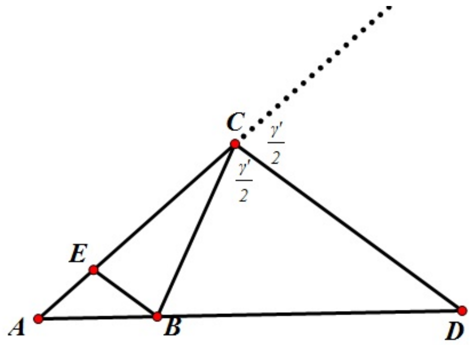
$$\frac{q}{p} = \frac{b}{a}$$

što je i trebalo dokazati.

Analogno se može postaviti pitanje vrijedi li tvrdnja samo za unutarnje kuteve ili vrijedi slična tvrdnja i za vanjski kut trokuta. Promotrimo sljedeći teorem.

3.2 Simetrala vanjskog kuta u trokutu

Teorem 3.2.1 (**Teorem o simetrali vanjskog kuta u trokutu**). *Simetrala vanjskog kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu izvana u omjeru preostalih dviju stranica.*



Slika 3.3: Simetrala vanjskog kuta

Dokaz. Zadan nam je trokut $\triangle ABC$. Dužina $\overline{CD}$ je simetrala vanjskog kuta pri vrhu C. Vanjski kut pri vrhu C označimo s γ'. Točku E dobili smo tako da smo povukli paralelu s CD kroz vrh B, pa vrijedi da je $|\angle CBE| = |\angle BEC| = |\angle DCB| = \frac{\gamma'}{2}$, trokut $\triangle EBC$ je jednakokračan s osnovicom $\overline{EB}$ i vrijedi da je $|BC| = |EC|$.
Prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti vrijedi da je:

$$\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|AD|}{|AB|},$$

$$\frac{|AC|}{|AC| - |AE|} = \frac{|AD|}{|AD| - |BD|}.$$

Unakrsnim množenjem dobivamo :

$$|AC| \cdot |AD| - |AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |AC| - |AD| \cdot |AE|$$

Sređivanjem dobivamo:

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|CE|}$$

Kako je $|BC| = |EC|$ dobivamo:

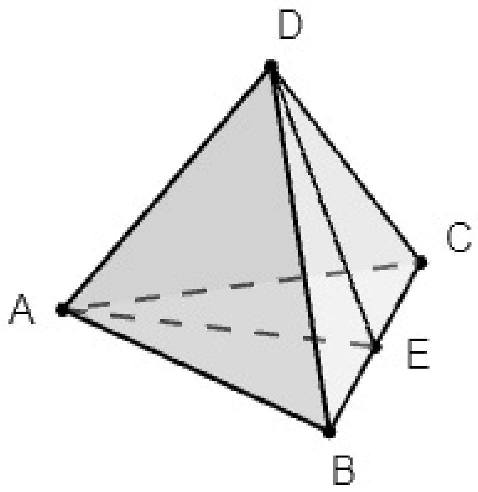
$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

$\square$

Primjetimo da je prethodni dokaz vrlo sličan, analogan prvom dokazu za simetralu unutarnjeg kuta u trokutu. Postupak koji smo upotrijebili u drugom dokazu teorema o simetrali kuta pomoći će nam pri dokazu stereometrijskog analogona tog teorema.
Možemo imati i analogon teorema o simetrali unutarnjeg kuta u trokutu u prostoru.

3.3 Simetralna ravnina diedarskog kuta u tetraedru

Teorem 3.3.1 (**Teorem o simetralnoj ravnini diedarskog kuta u tetraedru**). *Simetralna ravnina diedarskog kuta u tetraedru $ABCD$ kojeg tvore poluravnine ACD i ABD dijeli nasuprotnu stranu BCD na dva trokuta čije se površine odnose kao površine odgovarajućih susjednih strana tetraedra.*



Slika 3.4: Tetraedar

Dokaz. Neka je $ABCD$ tetraedar. ADE je simetralna ravnina diedarskog kuta kojeg čine ravnine ADB i ADC. Svojstvo simetralne ravnine je da su sve točke te ravnine jednako udaljene do ploha koje određuju tu ravninu. Kako je ADE simetralna ravnina za nju vrijedi:

$$d(E, ABD) = d(E, ADC) = v.$$

Uočimo sada tetraedre $ABED$ i $AECD$. Njihovi volumeni jednaki su:

$$V(ABED) = \frac{P(ABD) \cdot v}{3} = \frac{P(BED) \cdot v_a}{3}$$

$$V(AECD) = \frac{P(ACD) \cdot v}{3} = \frac{P(DEC) \cdot v_a}{3}$$

Iz navedenih jednakosti dobivamo traženi omjer.

$$\frac{P(BED)}{P(DEC)} = \frac{P(ABD)}{P(ACD)}$$

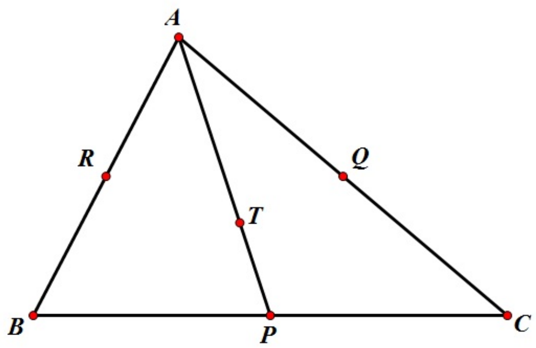
□

Poglavlje 4

Težište trokuta

Teorem 4.0.1 (**Teorem o težištu trokuta**). *Tri težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki koju nazivamo težište. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru* $2:1$ *računajući od vrha trokuta.*

Dokaz. Ideja dokaza je sljedeća: na svakoj težišnici promatrat ćemo radij-vektor točke koja dijeli tu težišnicu u omjeru $2:1$ računajući od vrha trokuta. Pokazat ćemo da su ti radij-vektori jednaki, a iz toga slijedi da se krajnje točke tih radij-vektora podudaraju, tj. radi se o jednoj točki koja leži na sve tri težišnice.



Slika 4.1: Težište

Neka je T točka na težišnici $\overline{AP}$ koja ju dijeli u omjeru $2:1$ računajući od vrha A. Tada je

$$\vec{r_T} = \frac{\vec{r_A} + 2\vec{r_P}}{3}.$$

Budući da je P polovište od $\overline{BC}$ vrijedi $\vec{r_P} = \dfrac{\vec{r_B} + \vec{r_C}}{2}$ pa je

$$\vec{r_T} = \frac{\vec{r_A} + 2\frac{\vec{r_B}+\vec{r_C}}{2}}{3} = \frac{\vec{r_A} + \vec{r_B} + \vec{r_C}}{3}.$$

Neka je S točka na težišnici $\overline{BQ}$ koja ju dijeli u omjeru $2:1$ računajući od vrha B. Tada je

$$\vec{r_S} = \frac{\vec{r_B} + 2\vec{r_Q}}{3}.$$

Budući da je Q polovište od $\overline{AC}$ vrijedi $\vec{r_Q} = \dfrac{\vec{r_A} + \vec{r_C}}{2}$ pa je

$$\vec{r_Q} = \frac{\vec{r_B} + 2\frac{\vec{r_A}+\vec{r_C}}{2}}{3} = \frac{\vec{r_A} + \vec{r_B} + \vec{r_C}}{3}.$$

Neka je V točka na težišnici $\overline{CR}$ koja ju dijeli u omjeru $2:1$ računajući od vrha C. Tada je

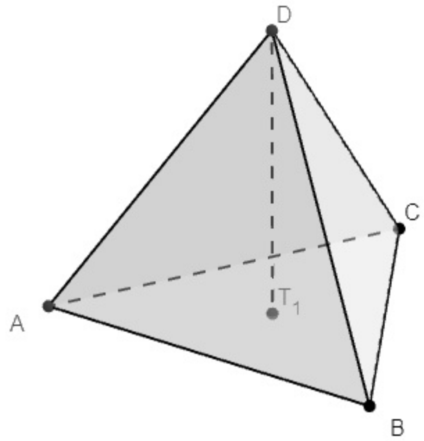
$$\vec{r_V} = \frac{\vec{r_C} + 2\vec{r_V}}{3}.$$

Budući da je R polovište od $\overline{AB}$ vrijedi $\vec{r_V} = \dfrac{\vec{r_A} + \vec{r_B}}{2}$ pa je

$$\vec{r_V} = \frac{\vec{r_C} + 2\frac{\vec{r_A}+\vec{r_B}}{2}}{3} = \frac{\vec{r_A} + \vec{r_B} + \vec{r_C}}{3}.$$

U sva tri slučaja dobili smo da je $\vec{r_T} = \vec{r_S} = \vec{r_V}$, a to znači da je $T = S = V$. $\square$

Teorem o težištu tokuta ima svoj stereometrijski analogon. Analogon trokutu je tetraedar. Kako definirati težišnicu tetraedra? U trokutu težišnica spaja vrh i polovište nasuprotne stranice. Polovište dužine možemo smatrati težištem dužine. Stoga ćemo težišnicu tetraedra definirati kao dužinu koja spaja vrh tetraedra s težištem nasuprotne strane tetraedra.



Slika 4.2: $\overline{DT_1}$ je težišnica tetraedra $ABCD$

Analogna tvrdnja glasi:

Teorem 4.0.2. *Težišnice tetraedra sijeku se u jednoj točki koju nazivamo težište tetraedra. Težište tetraedra dijeli svaku težišnicu u omjeru* $3 : 1$ *računajući od vrha tetraedra.*

Dokaz. Dokaz se zasniva na istoj ideji kojom je dokazan prethodni teorem.
Na svakoj težišnici se promatra točka koja ju dijeli u omjeru $3 : 1$ i pokaže se da sve te točke imaju isti radij-vektor, tj. radi se o istoj točki.
Neka je T_1 težište trokuta ABC i točka T točka na težišnici $\overline{DT_1}$ koja ju dijeli u omjer $3 : 1$. Tada je

$$\vec{r_T} = \frac{\vec{r_D} + 3\vec{r_{T_1}}}{1+3},$$

a budući da je iz prethodnog teorema $\vec{r_{T_1}} = \dfrac{\vec{r_A} + \vec{r_B} + \vec{r_C}}{3}$, slijedi da je

$$\vec{r_T} = \frac{\vec{r_D} + 3\frac{\vec{r_A}+\vec{r_B}+\vec{r_C}}{3}}{4} = \frac{\vec{r_A} + \vec{r_B} + \vec{r_C} + \vec{r_D}}{4}.$$

Neka je T_2 težište trokuta BCD i točka U točka na težišnici $\overline{AT_2}$ koja ju dijeli u omjer $3 : 1$. Tada je

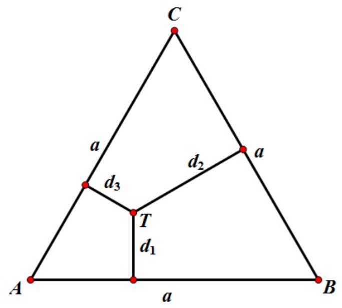
$$\vec{r_U} = \frac{\vec{r_A} + 3\vec{r_{T_2}}}{4},$$

a budući da je $\vec{r_{T_2}} = \dfrac{\vec{r_B} + \vec{r_C} + \vec{r_D}}{3}$, slijedi da je

$$\vec{r_U} = \frac{\vec{r_A} + \vec{r_B} + \vec{r_C} + \vec{r_D}}{4}.$$

Na analogan način se pokazuje i da je točka na težišnicama $\overline{BT_3}$ i CT_4 koje dijele težišnicu u omjeru 3 : 1 imaju radij-vektor $\dfrac{\vec{r_A} + \vec{r_B} + \vec{r_C} + \vec{r_D}}{4}$, tj. da se radi o jednoj točki. □

Sljedeći primjer također govori o svojstvu jedne istaknute točke iz unutrašnjosti trokuta. Zbroj udaljenosti bilo koje točke jednakostraničnog trokuta do njegovih stranica ne ovisi o izboru točke.



Slika 4.3: Udaljenost točke

Dokaz. Uočimo trokute $\triangle ATB$, $\triangle ATC$ i $\triangle BTC$. Njihove površine jednake su:

$$P(\triangle ATB) = \frac{ad_1}{2},\ \ P(\triangle ATC) = \frac{ad_3}{2},\ \ P(\triangle BTC) = \frac{ad_2}{2}.$$

Uočimo da površinu trokuta ABC možemo odrediti kao zbroj površina manjih trokuta, tj.

$$P(\triangle ABC) = P(\triangle ATB) + P(\triangle ATC) + P(\triangle BTC).$$

Nadalje slijedi

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{ad_1}{2} + \frac{ad_3}{2} + \frac{ad_2}{2}.$$

Sređivanjem dobivamo da je zbroj udaljenosti u jednakostraničnom trokutu jednak:

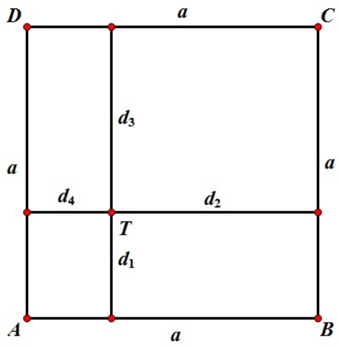
$$d_1 + d_2 + d_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

□

Slične tvrdnje možemo postaviti i za kvadrat te za pravilne mnogokute.

Teorem 4.0.3. *Zbroj udaljenosti bilo koje točke kvadrata do njegovih stranica ne ovisi o izboru točke.*

Dokaz. Tvrdnja se dokazuje na analogan način kao i prethodna.



Slika 4.4: Udaljenost točke

Uočimo

$$d_1 + d_3 = a \quad a_2 + d_4 = a$$

pa je

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 2a$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Poglavlje 5

Heronova formula

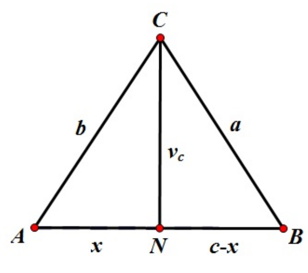
Jedan od najpoznatijih grčkih matematičara bio je Heron iz Aleksandrije koji je živio od 10. do 70. godine nove ere. Uglavnom se bavio praktičnom matematikom. Njegov važni doprinos matematici je upravo formula za određivanje površine trokuta koja je i po njemu dobila naziv, a naziva se Heronova formula. Formula glasi:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

pri čemu je s poluopseg trokuta, a jednak je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, a a, b i c su duljine stranica trokuta. Heronova formula može se zapisati i u obliku teorema koji glasi:

Teorem 5.0.1 (Heronova formula). *Ako su u trokutu duljine stranica jednake a, b i c, tada je površina tog trokuta dana sa:*

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$



Slika 5.1: Trokut

Dokaz. Prvo promatramo slučaj kada je trokut ABC šiljastokutan. Ostali se slučaji dokazuju analogno. Nožište vrha C na stranicu $\overline{AB}$ je točka N. Uočimo trokut $\triangle ANC$ je pravokutan s pravim kutem pri vrhu N i duljinama stranicama x, v_c i b. Prema Pitagorinom poučku vrijedi:

$$v_c^2 = b^2 - x^2. \tag{5.1}$$

Kako je i trokut $\triangle CNB$ pravokutan s pravim kutem pri vrhu N i duljinama stranica $c - x, a$ i v_c, na njega također možemo primjeniti Pitagorin poučak, te on glasi:

$$v_c^2 = a^2 - (c - x)^2. \tag{5.2}$$

Izjednačavanjem (5.1) i (5.2) slijedi:

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$$

$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cx$$

Izrazimo x iz jednaksti

$$2cx = b^2 - a^2 + c^2$$

$$x = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c} \tag{5.3}$$

Uvrštavanjem (5.3) u (5.1) dobivamo sljedeće:

$$v_c^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}\right)^2$$

$$v_c^2 = \left(b - \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}\right) \cdot \left(b + \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}\right)$$

$$v_c^2 = \left(\frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2c}\right) \cdot \left(\frac{2bc - a^2 + b^2 + c^2}{2c}\right)$$

$$v_c^2 = \left(\frac{a^2 - (b - c)^2}{2c}\right) \cdot \left(\frac{(b + c)^2 - a^2}{2c}\right)$$

$$v_c^2 = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2c} \cdot \frac{(b + c - a)(b + c + a)}{2c}$$

$$v_c^2 = \frac{(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{4c}$$

$$v_c^2 = \frac{2s(2s - 2a)(2s - 2b)(2s - 2c)}{4c}$$

$$v_c^2 = \frac{16s(s-a)(s-b)(s-c)}{4c^2}$$
$$v_c^2 = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}$$
$$\frac{cv_c}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Čime smo dokazali Heronovu formulu. □

Postoje razna poopćenja Heronove formule. Najpoznatija od njih je Brahmaguptina formula za tetivni četverokut. Tu su još i Bretschneiderova formula za konveksni četverokut.

5.1 Brahmaguptina formula

Heronova formula poseban je slučaj Brahmaguptine formule. Brahmaguptina formula dobila je naziv po indijskom matematičaru Brahmagupti koji je živio od 589. do 668. godine. Smatra se da je on prvi koji je definirao nulu kao broj te odredio pravila za zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje s nulom i negativnim brojevima. Najvažniji doprinos u geometriji je upravo generalizacija Heronove formule za tetivne četverokute koja glasi:

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \tag{5.4}$$

pri čemu je $s = \dfrac{a+b+c+d}{2}$, a, b, c i d su duljine stranica tetivnog četverokuta.

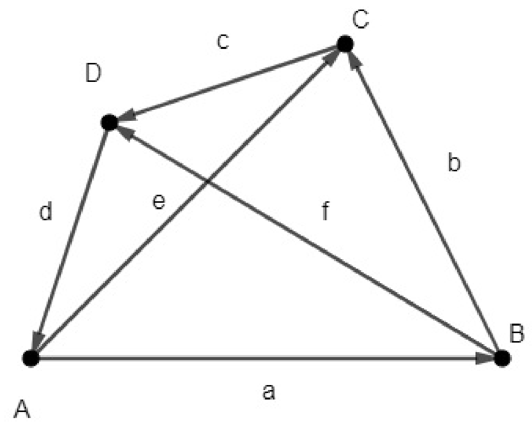
Brahmaguptinu formulu ćemo dokazati kao posljedicu Ptolomejevog teorema.

Dokaz. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Za svaki tetivni četverokut vrijedi da se oko njega može opisati kružnica, a površina se računa pomoću sljedeće formule:

$$P(ABCD) = \frac{1}{4}\sqrt{4e^2f^2 - (b^2+d^2-a^2-c^2)^2}$$

pri čemu su a, b,c i d duljine stranice tetivnog četverokuta, a e i f duljine dijagonala. Dokazat ćemo prvo formulu za površinu konveksnog četverokuta.

Dokaz. Neka je $ABCD$ konveksni četverokut kao na slici.



Slika 5.2: Konveksni četverokut

Tada je $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=0$, $\vec{e}=\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}-\vec{d}$, a $\vec{f}=\vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}-\vec{d}$. Površina četvreokuta $ABCD$ izražena pomoću vektorskog produkta jednaka je $\frac{1}{2}|\vec{e}\times\vec{f}|$.
Nadalje imamo:

$$P^2=\frac{1}{4}|\vec{e}\times\vec{f}|^2=\frac{1}{4}(\vec{e}\times\vec{f})\cdot(\vec{e}\times\vec{f}).$$

Služeći se Lagrangeovim identitetom površinu možemo zapisati na sljedeći način

$$P^2=\frac{1}{4}[(\vec{e}\times\vec{e})\cdot(\vec{f}\times\vec{f})-(\vec{e}\times\vec{f})\cdot(\vec{e}\times\vec{f})]=\frac{1}{4}[|\vec{e}|^2|\vec{f}|^2-(\vec{e}\cdot\vec{f})^2].$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{e}|^2|\vec{f}|^2 - (\vec{e}\cdot\vec{f})^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4|\vec{e}|^2|\vec{f}|^2 - (2\vec{e}\cdot\vec{f})^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4|\vec{e}|^2|\vec{f}|^2 - [2(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c})]^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4|\vec{e}|^2|\vec{f}|^2 - [2\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) + 2\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})]^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4|\vec{e}|^2|\vec{f}|^2 - [-2\vec{b}\cdot(\vec{c}+\vec{d}) + 2\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})]^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4|\vec{e}|^2|\vec{f}|^2 - [-2\vec{b}\cdot\vec{c} - 2\vec{b}\cdot\vec{d} + 2\vec{a}\cdot\vec{c} + 2\vec{b}\cdot\vec{c}]^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4|\vec{e}|^2|\vec{f}|^2 - [-2\vec{b}\cdot\vec{d} + 2\vec{a}\cdot\vec{c}]^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4|\vec{e}|^2|\vec{f}|^2 - [|\vec{b}|^2 + |\vec{d}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{c}|^2 + (\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{c}) - (\vec{b}+\vec{d})\cdot(\vec{b}+\vec{d})]^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4|\vec{e}|^2|\vec{f}|^2 - [|\vec{b}|^2 + |\vec{d}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{c}|^2 + |\vec{a}+\vec{c}|^2 - |\vec{b}+\vec{d}|^2]^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4|\vec{e}|^2|\vec{f}|^2 - [|\vec{b}|^2 + |\vec{d}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{c}|^2 + |\vec{a}+\vec{c}|^2 - |-(\vec{a}+\vec{c})|^2]^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4|\vec{e}|^2|\vec{f}|^2 - [|\vec{b}|^2 + |\vec{d}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{c}|^2]^2}
\end{aligned}$$

Kako je $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$, $|\vec{c}| = c$, $|\vec{d}| = d$, $|\vec{e}| = e$ i $|\vec{f}| = f$ dobivamo upravo početnu formulu, tj.

$$P(ABCD) = \frac{1}{4}\sqrt{4e^2f^2 - (b^2+d^2-a^2-c^2)^2}$$

što je i trebalo dokazati. □

Također, $ABCD$ je tetivni četverokut ako i samo ako vrijedi Ptolomejev teorem koji glasi:

$$|AC|\cdot|BD| = |AB|\cdot|CD| + |BC|\cdot|AD|$$

Prema tome imamo sljedeće:

$$P(ABCD) = \frac{1}{4}\sqrt{4e^2f^2 - (b^2+d^2-a^2-c^2)^2}$$

$$P(ABCD) = \frac{1}{4}\sqrt{(2ef - (b^2+d^2-a^2-c^2))(2ef + (b^2+d^2-a^2-c^2))}$$

Primjenimo Ptolomejev teorem za dijagonale e i f:

$$\begin{aligned}
P(ABCD) &= \frac{1}{4}\sqrt{(2(ac+bd)-(b^2+d^2-a^2-c^2))(2(ac+bd)+(b^2+d^2-a^2-c^2))} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2ac+2bd-b^2-d^2+a^2+c^2)(2ac+2bd+b^2+d^2-a^2-c^2)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{((a+c)^2-(b-d)^2)((b+d)^2-(a-c)^2)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{((a+c)-(b-d))((a+c)+(b-d))((b+d)-(a-c))((b+d)+(a-c))} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(a+c-b+d)(a+c+b-d)(b+d-a+c)(b+d+a-c)} \\
&= \sqrt{\frac{-a+b+c+d}{2}\cdot\frac{a-b+c+d}{2}\cdot\frac{a+b-c+d}{2}\cdot\frac{a+b+c-d}{2}}
\end{aligned}$$

Kako je $s = \dfrac{a+b+c+d}{2}$, to slijedi da je:

$$P(ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

čime smo pokazali početnu tvrdnju. □

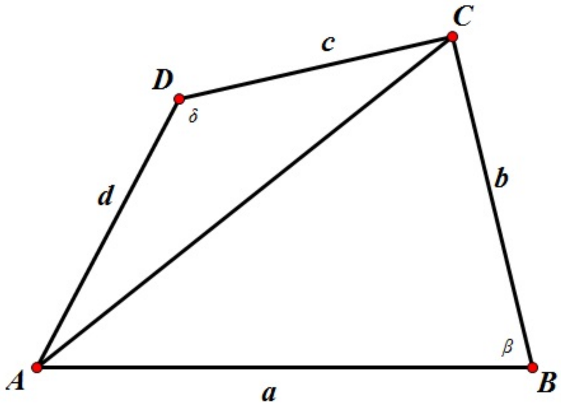
5.2 Bretschneiderova formula

Još bolje poopćenje Heronove formule je Bretschneiderova formula koja je, također i poopćenje Bragmaguptine formule. Formula služi za određivanje površine općenitog četverokuta, a nazvana je po njemačkom matematičaru i odvjetniku Carlu Antunu Bretschneideru koji je živio od 1808. do 1878. godine.

Bretschneiderova formula za površinu četverokuta $ABCD$ glasi:

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\varphi}$$

pri čemu je $s = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ poluopseg četverokuta, a, b, c i d su duljine stranica četverokuta, a φ je aritmetička sredina bilo koja dva nasuprotna kuta.



Slika 5.3: Konveksni četverokut

Dokaz. Podijelimo četverokut $ABCD$ na dva trokuta, tj. na trokut $\triangle ABC$ i trokut $\triangle ADC$ i $\varphi = \dfrac{\beta + \delta}{2}$. Površinu četverokuta možemo odrediti kao

$$P = P_1 + P_2$$

pri čemu su $P_1 = \frac{1}{2}ab\sin\beta$ i $P_2 = \frac{1}{2}cd\sin\delta$ površine manjih trokuta, tj.

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\beta + \frac{1}{2}cd\sin\delta.$$

Kvadriranjem i množenjem lijeve i desne strane s 4 dobivamo:

$$16P^2 = 4a^2b^2\sin^2\beta + 4c^2d^2\sin^2\gamma + 8abcd\sin\beta\sin\gamma \tag{5.5}$$

Primjenimo kosinusov poučak za oba trokuta:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta$$

$$|AC|^2 = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos\beta - 2cd\cos\delta \tag{5.6}$$

Nadalje vrijedi:

$$\begin{aligned} 4(s-c)(s-d) &= (a+b-c+d)(a+b+c-d) \\ &= a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2ab + 2cd \\ &= 2ab\cos\beta - 2cd\cos\delta + 2ab + 2cd \\ &= 2ab(1+\cos\beta) + 2cd(1-\cos\delta) \end{aligned}$$

Slično i za:

$$4(s-a)(s-b) = 2ab(1-\cos\beta) + 2cd(1+\cos\delta)$$

Množenjem ovih dviju jednakosti dobivamo:

$$4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) = 4a^2b^2(1-\cos\beta)$$

$$+4c^2d^2(1-\cos\delta) + 4abcd((1+\cos\beta)(1+\cos\delta) + (1-\cos\beta)(1-\cos\delta))$$
$$= 4a^2b^2\sin^2\beta + 4c^2d^2\sin^2\delta + 8abcd(1+\cos\beta\cos\delta)$$

Vraćanjem u (5.5) imamo:

$$16P^2 = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - 8abcd(\cos\beta\cos\delta - \sin\beta\sin\delta + 1)$$

Primjenom trigonometrijskih identiteta:

$$\cos\beta\cos\delta - \sin\beta\sin\delta = \cos(\beta+\delta)$$

i

$$\cos x + 1 = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

dobivamo:

$$16P^2 = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - 16abcd\cos^2\frac{\beta+\delta}{2}$$

Dijeljenjem s 4 i korjenovanjem dobivamo upravo traženu formulu za površinu četverokuta koja glasi:

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\varphi}.$$

□

Uočimo da ako je zbroj nasuprotnih kuteva jednak 180° dobivamo tetivni četverokut i gubi se posljednji član pod korijenom pa dobivamo Brahmaguptinu formulu za određivanje površine tetivnog četverokuta. Nadalje, ako je u tetivnom četverokutu duljina jedne stranice jednaka 0, dobivamo upravo trokut za kojeg vrijedi Heronova formula.
Zaključujemo: Brahmaguptina i Bretschneiderova formula su generalizacije Heronove formule.

Poglavlje 6

Četverokuti

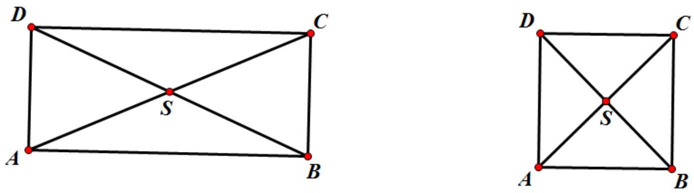
Prijeđimo s trokuta na četverokute. Možemo se pitati što je zajedničko paralelogramu, kvadratu, rombu, trapezu i četverokutu. Paralelogram je četverokut koji ima dva para nasuprotnih stranica jednakih duljina. Kvadrat je četverokut koji ima sve četiri stranice jednake duljine i sva četiri kuta prava. Romb je četverokut koji ima sve četiri stranice jednake duljine. Trapez je četverokut koji ima bar jedan par nasuprotnih stranica paralelan. Zaključujemo da su svi ovi geometrijski likovi četverokuti, svaki od njih je specijalan slučaj četverokuta, tj. četverokut je generalizacija svih navedenih geometrijskih likova. Možemo tako proučavati i neka svojstva zasebno i pitati se vrijede li ona analogno na nekom drugom liku.

6.1 Pravokutnik i kvadrat

Pravokutnik je specijalan slučaj paralelograma koji ima jedan pravi kut, dok je **kvadrat** je specijalan slučaj pravokutnika kojemu su sve stranice jednakih duljina. Tako i za kvadrat vrijede određena svojstva koja karakteriziraju pravokutnik.

Neka od njih su:

- svi unutarnji kutevi su pravi,
- nasuprotne stranice su paralelne i jednakih duljina,
- dijagonale se međusobno raspolavljaju i jednakih su duljina.



Slika 6.1: Pravokutnik i kvadrat

Prijeđemo li iz ravnine u prostor, kvadar je analogon pravokutnika, a kocka je analogon kvadrata. Tako možemo promatrati svojstva koja vrijede u ravnini i generalizirati ih za prostor.

Pravokutnik i kvadar

Pravokutnik je četverokut koji ima dva para nasuprotnih stranica jednakih duljina i bar jedan kut pravi. Površinu pravokutnika s duljinama stranica a i b računamo po formuli:

$$P = a \cdot b$$

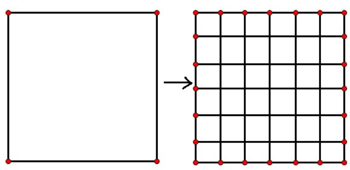
Teorem 6.1.1. *Ako postoji površina P i ako je $\Pi = ABCD$ pravokutnik takav da je $|AB| = a$ i $|CD| = b$, onda je $P(ABCD) = a \cdot b$.*

Dokaz. Neka je K kvadrat stranice duljine 1. Stranice mu podijelimo na n jednakih dijelova duljine $\frac{1}{n}$. Paralelama se kvadrat podijeli na n^2 sukladnih kvadrata K_n.

$$1 = P(K) = n^2 \cdot P(K_n)$$

tj.

$$P(K_n) = \frac{1}{n^2}.$$



Slika 6.2: Kvadrat

1° Ako je $a, b \in \mathbb{Q}$, tada je $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{m'}{n}$, $m, m' \in \mathbb{N}$

- stranicu a podijelimo na m dijelova duljine $\frac{1}{n}$.
- stranicu b podijelimo na m' dijelova duljine $\frac{1}{n}$.

$$P(ABCD) = m \cdot m' \cdot P(K_n) = m \cdot m' \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{m \cdot m'}{n^2} = a \cdot b$$

2° Ako je $a, b \in \mathbb{R}$, tada $\forall n \in \mathbb{N}$ postoje a_n i $b_n \in \mathbb{N}$ takvi da

$$\frac{a_n \cdot b_n}{n^2} \leqslant a \cdot b \leqslant \frac{(a_{n+1})(b_{n+1})}{n^2}$$

Neka je $\Pi_n = AB_nC_nD_n$ pravokutnik sa stranicama $|AB_n| = \frac{a_n}{n}$ i $|B_nC_n| = \frac{b_n}{n}$, a $\Pi'_n = AB'_nC'_nD'_n$ pravokutnik sa stranicama $|AB'_n| = \frac{a_{n+1}}{n}$, i $|B'_nC'_n| = \frac{b_{n+1}}{n}$.
Tada vrijedi:

$$P(\Pi_n) \leqslant P(\Pi) \leqslant P(\Pi'_n)$$

$$\frac{a_n \cdot b_n}{n^2} \leqslant P(\Pi) \leqslant \frac{a_{n+1} \cdot b_{n+1}}{n^2}.$$

Tako smo dobili ograde za $a \cdot b$ i $P(\Pi)$ pa je razlika tih brojeva ograničena na sljedeći način:

$$|P(\Pi) - ab| \leqslant \frac{a_{n+1} \cdot b_{n+1}}{n^2} - \frac{a_n \cdot b_n}{n^2} = \frac{a_nb_n + a_n + b_n + 1 - a_nb_n}{n^2}$$

$$= \frac{a_n + b_n + 1}{n^2} \leqslant \frac{na + nb + 1}{n^2}.$$

Dobili smo:

$$0 \leqslant |P(\Pi) - ab| \leqslant \frac{na + nb + 1}{n^2}.$$

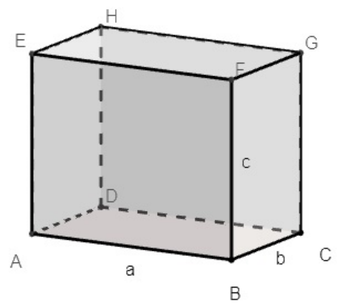
Pustimo li n u beskonačno imamo:

$$0 \leqslant |P(\Pi) - ab| \leqslant \lim_{x \to 0} \frac{na + nb + 1}{n^2} = 0.$$

Odakle slijedi:

$$P(\Pi) = a \cdot b$$

□



Slika 6.3: Kvadar

Prijeđemo li iz ravnine u prostor definiramo **kvadar** kao uspravnu četverostranu prizmu kojoj su baze pravokutnici. Kvadar je određen duljinom triju bridova iz istog vrha, tj. duljinom, visinom i širinom.

Tako je analogna formula u prostoru, formula za izračunavanje volumena kvadra s duljinama bridova a, b i c:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Dokaz. Dokaz je analogan s dokazom za površinu pravokutnika.

Imamo jediničnu kocku duljine brida 1. Povucimo paralelne ravnine takve da kocku podijelimo na male kockice kojima su duljine bridova jednake $\frac{1}{n}$. Takvih malih kockica ima n^3 i sve su međusobno sukladne, a za sukladne poliedre vrijedi da imaju jednake volumene pa male kockice imaju međusobno jednake volumene. Kako je volumen velike kocke jednak 1, volumeni malih kockica jednaki su $\frac{1}{n^3}$.

1° slučaj.
Bridovi kvadra su racionalnih duljina, tj. $a = \frac{p}{n}$, $b = \frac{q}{n}$ i $c = \frac{r}{n}$. Paralelnim ravninama kvadar podijelimo na kockice kojih ima pqr, a volumen svake je $\frac{1}{n^3}$. Iz čega slijedi:

$$V = p \cdot q \cdot r \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} \cdot \frac{r}{n} = a \cdot b \cdot c, \qquad a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

2°slučaj.
Bridovi kvadra su realni brojevi koji nisu racionalni, $a, b, c \in \mathbb{R}$, tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje p_n,q_n,$r_n \in \mathbb{N}$ takvi da je:

$$\frac{p_n}{n} \leqslant a \leqslant \frac{p_{n+1}}{n}$$

$$\frac{q_n}{n} \leqslant b \leqslant \frac{q_{n+1}}{n}$$
$$\frac{r_n}{n} \leqslant c \leqslant \frac{r_{n+1}}{n}$$

pri čemu su p_n, q_n i r_n duljine stranica upisanog kvadra, a p_{n+1}, q_{n+1} i r_{n+1} duljne stranica opisanog kvadra.
Nadalje vrijedi:

$$V_{upisanog} \leqslant V \leqslant V_{opisanog} \tag{6.1}$$

Pomnožimo sve lijeve strane, sve desne strane i sve srednje strane, tj, dobivamo

$$V_{upisanog} \leqslant abc \leqslant V_{opisanog} \tag{6.2}$$

$$V_{opisanog} - V_{upisanog} < \frac{n^2(ab + ac + bc) + n(a + b + c) + 1}{n^3} \tag{6.3}$$

$$|V - abc| < \frac{n^2(ab + ac + bc) + n(a + b + c) + 1}{n^3} \tag{6.4}$$

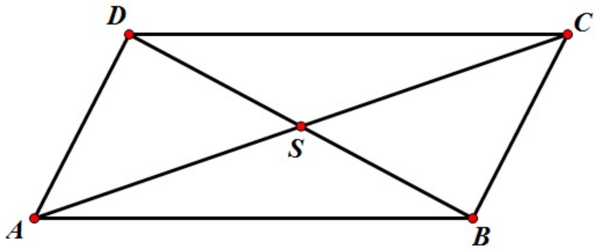
Pustimo limes po n u beskonačno. Dobivamo da je razlika manja ili jednaka 0, a mora biti veća ili jednaka 0 pa po teoremu o sendviču vrijedi da je

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

□

Dijagonale paralelograma i paralelepipeda

U paralelogramu vrijedi da se dijagonale raspolavljaju. Stereometrijski analogon paralelograma je paralelepiped. U njemu postoje četiri prostorne dijagonale. Tvrdnja analogna tvrdnji o dijagonalama paralelograma jest da se prostorne dijagonale paralelepipeda sijeku u jednoj točki i raspolavljaju.
Dokažimo najprije da se dijagonale paralelograma raspolavljaju.



Slika 6.4: Paralelogram

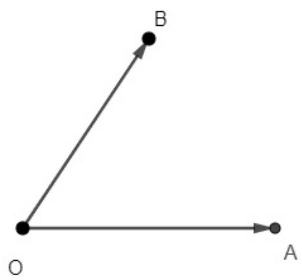
Uočimo da je $\triangle ASB \cong \triangle CSD$ jer je:

1. $|AB| = |CD|$
2. $\angle BAS \cong \angle SCD$ zbog poučka o transverzalama
3. $\angle ABS \cong \angle SDC$ kutovi uz transverzalu

pa prema teoremu o sukladnosti K-S-K o sukladnosti trokuta vrijedi da je :

$$|AS| = |SC| \quad i \quad |BS| = |SD|.$$

Dokažimo istu tvrdnju o raspolavljanju dijagonala paralelograma vektorskom metodom.



Slika 6.5: Vektori

Dokaz. Neka je $\overrightarrow{OA} = \vec{r_A}$ radij-vektor. Vrijedi: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \vec{r_B} - \vec{r_A}$.
Neka je P polovište od $\overline{AB}$. Tada je $\vec{r_P} = \dfrac{\vec{r_A} + \vec{r_B}}{2}$.
Neka je S polovište od $\overline{AC}$. Tada je $\vec{r_S} = \dfrac{\vec{r_A} + \vec{r_C}}{2}$.

Neka je T polovište od $\overline{BD}$. Tada je $\vec{r_T} = \dfrac{\vec{r_B} + \vec{r_D}}{2}$.
Znamo da je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ i $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r_B} - \vec{r_A} = \vec{r_C} - \vec{r_D} = \overrightarrow{DC} \tag{6.5}$$

$$\vec{r_S} = \frac{\vec{r_A} + \vec{r_C}}{2} = (17) = \frac{\vec{r_B} + \vec{r_D}}{2} = \vec{r_T}$$

S i T imaju jednake radij-vektore pa se radi o istim točkama. ($\vec{r_S} = \vec{r_T} \Longrightarrow S = T$)

Dokažimo sada tvrdnju za paralelepiped.

$\overline{AC_1}$, $\overline{BD_1}$, $\overline{CA_1}$ i $\overline{DB_1}$ su dijagonale paralelepipeda.

Neka je S polovište $\overline{AC_1}$, tada je

$$\vec{r_S} = \frac{\vec{r_A} + \vec{r_{C_1}}}{2} = \frac{(\overrightarrow{BA} + \vec{r_B}) + (\vec{r_{D_1}} + \overrightarrow{D_1C_1})}{2} = \frac{\vec{r_B} + \vec{r_{D_1}}}{2} = \vec{r_T}$$

gdje je T polovište dužine $\overline{BD_1}$. Zaključujemo da $\overline{AC_1}$ i $\overline{BD_1}$ imaju zajedničko polovište.
Neka je V polovište $\overline{DB_1}$, tada je

$$\vec{r_V} = \frac{\vec{r_D} + \vec{r_{B_1}}}{2} = \frac{(\overrightarrow{BD} + \vec{r_B}) + (\vec{r_{D_1}} + \overrightarrow{D_1B_1})}{2} = \frac{\vec{r_B} + \vec{r_{D_1}}}{2} = \vec{r_T}$$

gdje je T polovište dužine $\overline{BD_1}$.
Neka je U polovište $\overline{CA_1}$, tada je

$$\vec{r_U} = \frac{\vec{r_C} + \vec{r_{A_1}}}{2} = \frac{(\overrightarrow{CD} + \vec{r_B}) + (\vec{r_{D_1}} + \overrightarrow{A_1B_1})}{2} = \frac{\vec{r_B} + \vec{r_{D_1}}}{2} = \vec{r_T}$$

gdje je T polovište dužine $\overline{BD_1}$.

Konačno zaključujemo da $\overline{AC_1}$, $\overline{BD_1}$, $\overline{CA_1}$ i $\overline{DB_1}$ imaju zajedničko polovište, tj. dijagonale se sijeku u jednoj točki. $\square$

Poglavlje 7

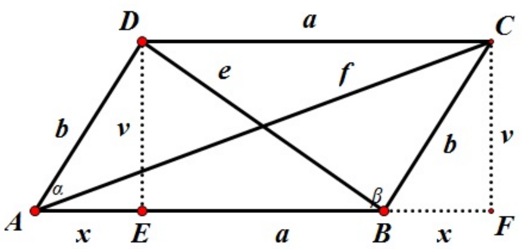
Newtonova formula

Isaac Newton rođen je 1642. godine, a umro je 1727. godine. Jedan je od najznačajnijih znanstvenika u povijesti. Bio je matematičar, fizičar i astronom. Bavio se raznim područjima od optike, mehanike, astronomije pa do matematike. Začetnik je integralnog i diferencijalnog računa, a mi ćemo proučiti jedno svojstvo paralelograma koje danas nosi njegovo ime.

7.1 Newtonova formula u ravnini

Teorem 7.1.1 (**Newtonova formula**). *Zbroj kvadrata duljina dijagonala jednak je zbroju kvadrata duljina stranica paralelograma, odnosno*

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$



Slika 7.1: Paralelogram

Dokaz. Neka je $ABCD$ paralelogram i neka su točke E i F nožišta točaka D i C na pravac AB. Uočimo da su trokuti $\triangle AED$ i $\triangle BDF$ sukladni prema teoremu
S-K-S. Primjenimo Pitagorin poučak na pravokutne trokute $\triangle AFC$, $\triangle AED$ i $\triangle BFC$. Dobivamo sljedeće:

$$e^2 = (a-x)^2 + v^2$$
$$f^2 = (a+x)^2 + v^2$$
$$b^2 = x^2 + v^2.$$

Zbrajanjem e^2 i f^2 dobivamo:

$$e^2 + f^2 = a^2 - 2ax + x^2 + v^2 + a^2 + 2ax + x^2 + v^2$$

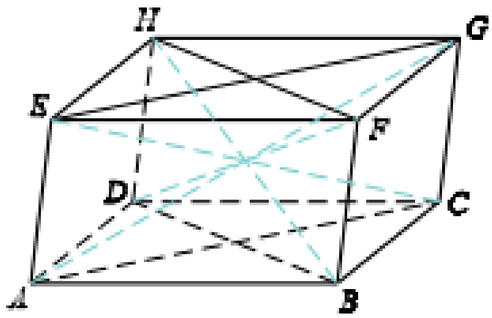
$$e^2 + f^2 = 2a^2 + 2(x^2 + v^2)$$
$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$$

što smo i trebali dokazati. □

Ovu relaciju nazivamo još i **relacija paralelograma**.

7.2 Newtonova formula u prostoru

Analogno relaciju možemo primjeniti i u prostoru. Ovdje ćemo umjesto paralelograma promatrati paralelepiped $ABCDEFGH$, a umjesto stranica i dijagonala, promatramo bridove i prostorne dijagonale.



Slika 7.2: Paralelepiped

Neka je $\sum b^2$ zbroj svih dvanaest bridova paralelepipeda, a $\sum d^2$ zbroj četiriju prostornih dijagonala paralelepipeda.

Tada analogon relacije paralelograma glasi:

$$\sum d^2 = \sum b^2.$$

Tvrdnja se lako dokaže najprije primjenom relacije paralelograma na
paralelograme $ACGE$ i $BDHF$ i njihovim zbrajanjem te zatim primjenom relacije paralelograma na paralelograme $ABCD$ i $EFGH$ i njihovim zbrajanjem.

Bibliografija

[1] Šefket Arslanagić, *Jedan poučak o paralelogramu i njegova primjena*, Matka 26, 2017./2018., br. 104

[2] B. Dakić i N. Elezović, Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka, za 1. razred gimnazije, Element, Zagreb, 2001.

[3] Jadranka Delač-Klepac, *Od kolača do pojma generalizacije (ili – od analogije do generalizacje)*, Matka 26, 2017./2018., br. 104,

[4] Dijana Ilišević i Mea Bombardeli, *Elementarna geometrija (skripta)*, verzija 1.0, 9.10.2007., dostupno na: `https://web.math.pmf.unizg.hr/~ilisevic/Slike/EGskripta.pdf` (lipanj 2018)

[5] Damira Keček, Ana Poldrugač, Predrag Vuković, *Poopćenje Pitagorinog poučka*, Tehnički glasnik 7, 2013., 103-107.

[6] Zdravko Kurnik, *Analogija*, Matematika i škola, 3, 1999./2000., 101-109

[7] Boris Pavković, Darko Veljan, *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

[8] Boris Pavković, Darko Veljan, *Elementarna matematika II : trigonometrija, stereometrija - geometrija prostora, analitička geometrija, elementarna teorija brojeva*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[9] Mirko Radić, *Euklidova geometrija trodimenzionalnog prostora : za studente Pedagoške akademije*, Školska knjiga, Zagreb, 1972.

[10] James Tanton, *Encyclopedia of mathematics*, Facts on files science library, 2005. dostupno na: `https://www.academia.edu/38658860/ENCYCLOPEDIA_OF_Mathematics`

[11] Art of problem solving, Bretschneider's formula, dostupno na: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=Bretschneider (lipanj, 2021.)

[12] Heron iz Aleksandrije, dostupno na:
https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=25206

Sažetak

Generalizacija i analogija dva su pojma koja su usko povezana. U matematici analogija i generalizacija prvenstveno imaju ulogu u otkrivanju novih matematičkih znanja. Ako uočimo neku pravilnost, možemo generalizirati općenito na sve, međutim to ne znači da će te tvrdnje biti uvijek istinite. Neke tvrdnje slijede iz već prethodno dokazanih pa analogijom dokazujemo slične tvrdnje. U ovom radu proučavali smo geometrijske tvrdnje koje imaju analogne tvrdnje i njih smo dokazivali. U prvom dijelu rada opisali smo neka svojstva trokuta i ta svojstva proširili na analogon trokutu u stereometriji koji je tetraedar. Osim trokuta proučavali smo i neka svojstva četverokuta koja smo opisali u drugom dijelu rada.

Summary

Generalization and analogy are two concepts which are closely related. In mathematics, they are being used to shorten the process of proof. It is not always necessary to prove everything. If we notice some regularities, we can generalize them in several directions, however this does not mean that these claims will always be true. Some claims follow from previously proven, so by analogy we prove similar claims. In this paper we studied geometric statements that have analogue statements and we have proven them. In the first part of the paper we described some properties of the triangle and extended these properties to the analogue of a triangle in the stereometry that is a tetrahedron. In addition to the triangle, we studied some of the properties of the quadrangle that we described in the second part of the work.

Životopis

Rođena sam 2. studenog 1995. u Varaždinu. Godine 2003. upisala sam područnu školu Antuna Gustava Matoša u Gornjoj Voći, malom mjestu blizu Ivanca. Godine 2010. upisujem gimnaziju u srednjoj školi Ivanec. Nakon završene gimnaziju upisujem studij Matematike, smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Sveučilišta u Zagrebu. Prediplomski studij Matematike, smjer nastavnički, završavam 19. kolovoza 2019. te iste godine upisujem diplomski studij Matematike, smjer nastavnički. Godine 2018. uz prediplomski studij Matematike, paralelno upisujem tečaj talijanskog jezika na Sveučilištu u Zagrebu u školi stranih jezika pri studentskom centru u Zagrebu u trajanju od dva semestra te uspješno polažem prvi i drugi stupanj.