Društveni izbor

Dutković, Ksenija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ksenija Dutković

DRUŠTVENI IZBOR

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Rudi Mrazović

Zagreb, rujan, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Svima koji su mi bili podrška tijekom pisanja ovog rada

Sadržaj

Uvod

Teorija društvenog izbora bavi se načinom donošenja kolektivnih odluka na temelju preferencija pojedinaca. Pretpostavimo da društvo treba izglasovati novog vladara. Ako društvo u odabiru novog vladara bira između dva kandidata, glasovanje većinom je dobar te pravedan izbor. No, što ako imamo više od dva kandidata? Trebaju li glasači rangirati sve kandidate, ili je dovoljno da odaberu samo jednu, njima najpoželjniju opciju? U oba slučaja postavlja se pitanje koji sustav glasovanja bi se trebao primijeniti da bi donesena konačna odluka na dobar način odražavala preferencije glasača? U ovom radu će biti prezentiran model društvenog izbora koji se bavi problemom preslikavanja preferencija svakog glasača u jednu preferenciju koja bi odražavala preferenciju cijelog društva. Pokazat ćemo glavni rezultat ovog problema, Arrowljev teorem nemogućnosti koji kaže da uz određene zahtjeve na metodu određivanje grupne preferencije ne postoji dobro rješenje. No što ako grupa glasača ne bi trebala rangirati sve kandidate, već izabrati samo jednu osobu, koja bi predstavljala najpoželjniju alternativu grupe, bi li onda postojalo dobro rješenje. Proširivanjem rezultata Arrowljevog teorema pokazat će se da to ni ovdje neće biti slučaj. Također bi se moglo postaviti pitanje o manipulaciji, to jest, može li pojedinac manipulirati izborom grupe ako ne pokaže svoje prave preferencije. Proširenjem teorema nemogućnosti na funkcije društvenog izbora pokazat ćemo Gibbard-Satterthwaiteov teorem koji kaže da je svaki izbor koji nije manipulativan, zapravo izbor diktatora. Sva ova pitanja razmatrat ćemo u slučaju kada svaki individualac na raspolaganju ima jedan glas. No, je li to uvijek pravedno? Imaju li na sastancima dioničara jednaku moć osoba koja posjeduje 50% dionica i osoba koja posjeduje 10% dionica? Kako bi funkcionirao sustav u kojem osobe imaju različit broj glasova na raspolaganju? Pokazat ćemo kakvi su to ponderirani sustavi glasovanja te kako odrediti koliku moć ima određeni individualac u takvim sustavima.

Poglavlje 1

O načinima glasovanja

Različite grupe ljudi često se nađu u situacijama da biraju između više ponuđenih mogućnosti: građani na izborima biraju jednog ili više političkih kandidata, odbori za zapošljavanje biraju između prijavljenih kandidata za posao. U svim navedenim primjerima, svaka osoba ima svoj poredak danih mogućnosti u odnosu na ostale, a svi zajedno kao grupa moraju donijeti odluku koja će najbolje odražavati preferenciju grupe. Na konačnu odluku uvelike odlučuje metoda koja se primjenjuje prilikom izbora. Primjerima ćemo pokazati neke načine glasovanja i probleme koji se javljaju upotrebom svakog od njih.

Primjer 1.1. Tvrtka X sastoji se od 5 različitih odjela A, B, C, D, E. Budući da poslovna godina nije bila vrlo uspješna, direktor ima mogućnost zaposlenja samo jedne nove osobe. Budući da se svi odjeli nalaze u jednakoj situaciji, direktor, ne želeći uskratiti mogućnost zaposlenja niti jednom odjelu, ostavlja odjelima da se dogovore koji odjel će dobiti novog zaposlenika. Postavlja se pitanje na koji način odlučiti koji odjel treba dobiti novog zaposlenika. Svaki odjel ima redoslijed za koji smatra da bi se trebao uzeti u obzir pri odabiru odjela koji bi trebao dobiti dodatnog zaposlenika. Te su preferencije dane u sljedećoj tablici.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
A	A	E	B	C	D
B	B	D	C	A	E
C	C	B	D	E	A
D	D	C	B	E	A
E	E	A	D	B	C

Tablica 1.1: Preferencije odjela

Stoga se voditelj svih odjela mora odlučiti za način glasovanja kojim će biti donesena konačna odluka. Prvi način za koji se odlučuje je **većinsko glasovanje**, gdje svaki odbor daje glas jednom odjelu te odjel s najviše glasova pobjeđuje. Međutim, kako nije isključeno glasovanje za vlastiti odjel, voditelj odjela uviđa kako bi takvo glasovanje dovelo do izjednačenog rezultata budući da bi svaki odjel dao glas sebi, stoga odustaje od glasovanja većinom.
Zatim se odlučuje da bi odluku mogli dobiti **Condorcetovom metodom**, to jest, birajući Condorcetovog pobjednika. Condorcetovim pobjednikom, ako postoji, zovemo onu opciju koja bi pobijedila sve opcije u glasovanju po parovima. Uvjeren u to da će konačna odluka dobivena izborom Condorcetovog pobjednika biti pravedna, voditelj svih odjela odlučuje se za ovu metodu.
Budući da odjel A gubi od svakog odjela u glasovanju po parovima, a odjel E gubi od svakog odjela osim od A, voditelj odjela zaključuje da odjeli A i E ne bi trebali dobiti mogućnost zaposlenja nove osobe. Gledajući odjele A i B, odjel B pobjeđuje rezultatom 3-2, međutim, glasovanjem između odjela B i C, C pobjeđuje rezultatom 3-2, dok D pobjeđuje C. Dok D pobjeđuje E, gubi od B. Stoga, svaki od preostalih odjela gubi u barem jednom glasovanju po parovima te ni ovaj način glasovanja nije donio konačni rezultat.
Lagano na izmaku snaga, voditelj odjela odlučuje se za **Bordin način glasovanja**, koji je predložio sljedeći način glasovanja. Svaki glasač rangira kandidate od najpoželjnijeg prema najmanje poželjnom. Kandidat dobiva k bodova (zvanih Bordini bodovi) od glasača ako glasač rangira kandidata više od točno k ostalih kandidata. Bordin poredak kandidata dobiven je zbrajanjem svih bodova dobivenih od svih glasača. (Bordin) pobjednik je kandidat s najviše osvojenih (Bordinih) bodova.
Zbrajanjem glasova pomoću preferencija iskazanih u tablici, voditelj odjela dolazi do sljedećih rezultata: B (12 bodova), D (11 bodova), C (10 bodova), E (9 bodova) te A (8 bodova). Međutim, takav rezultat bi se dogodio kada bi svaki odjel iskreno glasovao u skladu sa svojim preferencijama, što ne mora biti slučaj kod glasovanja. Odjel E vidi mogućnost taktiziranja te stoga na glasovanju stavlja D na prvo mjesto, a B na peto mjesto, što rezultira time da odjel D dobiva 13 bodova, dok odjel B dobiva samo 11 bodova što je ishod koji više paše odjelu E. Bijesni načinom manipulacije glasova, odjel B traži ponovno glasovanje. Njihov plan je na glasovanju staviti odjel D na peto mjesto i pobijediti rezultatom 11-10. Međutim, voditelj odjela brzo shvaća da bi odjel D jednostavno mogao staviti odjel C na zadnje mjesto kod glasovanja što bi u teoriji moglo voditi do pobjede odjela C ako bi i oni svoje glasove poredali strateški. Voditelj odjela odustaje i od ovog način glasovanja te direktoru vraća povratnu informaciju o neuspješnim pokušajima donošenja konačne odluke o izboru odjela koji dobiva novog zaposlenika.

Primjer 1.2. Pretpostavimo da odbor od 30 ljudi mora odlučiti o dobitniku nagrade za najuspješnijeg djelatnika pri čemu mogu birati između tri kandidata koja ćemo označiti redom s A, B, odnosno C. Svaki član odbora će rangirati kandidate. Preferencije odbora dane su u tablici.

Broj kandidata odbora	**A**	**B**	**C**
4	C	A	B
9	C	B	A
9	A	B	C
8	B	A	C

Tablica 1.2: Preferencije članova odbora

U glasovanju po parovima, B pobjeđuje A sa 17-13, dok C gubi od A i B s istim rezultatom, 17-13. Vidimo da bi u ovom slučaju Condorcetov pobjednik bio kandidat B. No jedan problem koji se javlja kod odabira Condorcetovog pobjednika jest taj, ako on i postoji, nije uvijek jasno treba li on biti izabran.
Ako bi se članovi odbora odlučili za većinsko glasovanje, u tom slučaju pobjednik bi bio kandidat C koji bi osvojio 12 glasova, a ne Condorcetov pobjednik B.
Također, još jedan mogući način glasovanja je izbor kandidata u **dva kruga glasovanja**, gdje u prvom krugu glasači glasuju za njima najpoželjnijeg kandidata. Zatim se dva kandidata koja su osvojila najviše bodova u prvom krugu međusobno natječu u drugom krugu i pobjednik je kandidat s više bodova osvojenim u drugom krugu. Ovakvim načinom glasovanja, u prvom krugu dobivamo da je kandidat A dobio 9, B 8, a C 13 glasova što bi značilo da u drugi krug idu kandidati A i C. U drugom krugu bi pobijedio kandidat A s osvojenih 17 glasova nasuprot kandidata C koji je osvojio 13 glasova. Vidimo da ni ovim načinom glasovanja nije izabran Condorcetov pobjednik.

U prethodnim primjerima, glavno pitanje je bilo odabir jednog kandidata od više ponuđenih izbora. Iako ćemo se u radu baviti i tim pitanjem, na njega ćemo se vratiti kasnije, dok ćemo se prvo baviti općenitijim problemom, Pretpostavimo da svaka osoba u društvu za dani skup alternativa ima svoj poredak alternativa i društvo želi od svih individualnih poredaka izvesti jedan poredak koji bi predstavljao preferencije cijelog društva.
Na primjer, pretpostavimo da su učitelji upitani da poredaju učenike u razredu po akademskom uspjehu. Svaki učitelj rangira učenike prema uspjehu koji je ostvaren na predmetu koji taj profesor predaje, te je razumno da će se poretci međusobno razlikovati od profesora do profesora, budući da nisu svi učenici jednako dobri u svim predmetima. Učitelji bi sada željeli naći način kako njihove individualne poretke preslikati u jedan poredak koji bi poredao učenike od najboljeg prema najlošijem.
Pokazat ćemo da ne postoji način odabira poretka koji bi odražavao ukupnu preferenciju društva, a koji zadovoljava tri vrlo prirodna demokratska zahtjeva. Jedno od tih uvjeta je da ne bi trebao postojati diktator. Ako odlučimo ukloniti taj uvjet, tada se pokazuje da je jedini poredak koji zadovoljava preostala dva uvjeta diktatorski.

Zatim ćemo istražiti situacije u kojima nije potrebno rangirati sve ponuđene mogućnosti, već je dovoljno izabrati jednu mogućnost, koja predstavlja ono što je za društvo najbolje. Puno je primjera takvih situacija, poput odabira predsjednika/gradonačelnika, odabira grada za održavanje Olimpijskih igara, odabira učenika generacije i slično. Također ćemo pokazati da i u ovakvom slučaju ne postoji način koji zadovoljava tri prirodna demokratska uvjeta te da je jedini način koji zadovoljava presotala dva uvjeta, ako uklonimo nediktatorstvo kao željeni uvjet, diktatorski.
Na kraju ćemo pogledati situacije u kojima neće svi individualci imati na raspolaganju jednak broj glasova, već će broj glasova biti određen nekim pravilima. Budući da će u takvim situacijama neki individualci imati veću moć od drugih, bavit ćemo se pitanjem kako odrediti koliku moć ima određeni individualac.

Poglavlje 2

Funkcije društvenog blagostanja

U ovom poglavlju bavimo se proučavanjem određivanja društvene preferencije na temelju preferencija individualaca, gdje se ograničavamo na slučaj kada je broj individualaca u društvu konačan.
Neka je A neprazan i konačan skup alternativa te $N = \{1, 2, 3, ..., n\}$ konačan skup individualaca. Da bismo mogli uspoređivati poretke alternativa različitih pojedinaca trebamo uvesti pojam relacije preferencije.

Definicija 2.1. Relacija preferencije $\gtrsim_{P_i}$ individualca i na skupu A je binarna relacija koja zadovoljava sljedeća svojstva:
- Za svaki par elemenata $a, b \in A$, ili je $a \gtrsim_{P_i} b$ ili je $b \gtrsim_{P_i} a$ (potpunost)
- $a \gtrsim_{P_i} a$ (refleksivnost)
- Ako je $a \gtrsim_{P_i} b$ i $b \gtrsim_{P_i} c$, onda je $a \gtrsim_{P_i} c$ (tranzitivnost)

Relacija stroge preferencije $\succ_{P_i}$ individualca i na skupu A je binarna relacija koja zadovoljava sljedeća svojstva:
- Za svaki par različitih elemenata $a, b \in A$, ili je $a \succ_{P_i} b$ ili je $b \succ_{P_i} a$.
- $a \not\succ_{P_i} a$ (irefleksivnost)
- Ako je $a \succ_{P_i} b$ i $b \succ_{P_i} c$, onda je $a \succ_{P_i} c$.

Za relaciju preferencije P za koju vrijedi $a \gtrsim_P b$ i $b \gtrsim_P a$ reći ćemo da su a i b ekvivalentne u odnosu na P i to označavamo sa $a \approx_P b$.
Ako je skup alternativa $A = \{-m, -m + 1, ..., m - 1, m\}$ konačan skup prirodnih brojeva, tada je $\leq$ relacija preferencije na skupu A, dok je $<$ relacija stroge preferencije.

Primjer 2.2. Ako na skupu $A = \{-m, -m+1, ..., m-1, m\}$ definiramo relaciju $\gtrsim_{P_i}$ sa $a \gtrsim_{P_i} b$, ako i samo ako je $|a| \leq |b|$, pokazat ćemo da je P relacija preferencije.
Moramo pokazati da je ovako definirana relacija P potpuna, refleksivna i tranzitivna.

- Potpunost
  Neka su $a, b \in A$ dvije alternative. Kako je A skup prirodnih brojeva, a i b su usporedivi i vrijedi $|a| \leq |b|$ ili $|a| \geq |b|$, to jest, $a \succsim_{P_i} b$ ili $b \succsim_{P_i} a$.

- Refleksivnost
  Vrijedi $|a| \leq |a|$ pa je $a \succsim_{P_i} a$.

- Tranzitivnost
  Neka su $a, b, c \in A$ takvi da je $a \succsim_{P_i} b$ i $b \succsim_{P_i} c$. Moramo pokazati da je tada $a \succsim_{P_i} c$. Znamo da vrijedi $|a| \leq |b|$ i $|b| \leq |c|$ pa je zbog tranzitivnosti relacije $\leq$ vrijedi $|a| \leq |c|$, odnosno $a \succsim_{P_i} c$.
  Uočimo još da je $k \succsim_{P_i} -k$.

Kao što se vidi iz prethodnog primjera moguće je da vrijedi $a \succsim_P b$ iako je $a \neq b$.
Sa $\mathcal{P}^*(A)$ označavamo skup svih preferencija na A, dok sa $\mathcal{P}(A)$ označavamo skup svih strogih preferencija na A.

Definicija 2.3. Strogi profil preferencija je n-torka $P^N = (P_i)_{i \in N}$ strogih relacija preferencija, jedna za svakog individualca. Skup svih strogih profila preferencija je Kartezijev produkt

$$(\mathcal{P}(A))^N = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \times \cdots \times \mathcal{P}(A).$$

Strogi profil preferencija nam govori kako svaki individualac u društvu rangira dane mogućnosti. Mi želimo strogi profil preferencija svakog individualca spojiti u jednu relaciju preferencije, koju bi zvali "društvena relacija preferencije", to jest, ona bi nam govorila kako bi društvo kao jedno rangiralo dane kandidate uzimajući u obzir poretke svakog individualca.

Definicija 2.4. Funkcija društvenog blagostanja je funkcija F koja svaki strogi profil preferencije $P^N = (P_i)_{i \in N} \in (\mathcal{P}(A))^N$ preslikava u relaciju preferencije u $\mathcal{P}^*(A)$.

Drugim riječima, funkcija društvenog blagostanja objedinjuje mišljenja svih pojedinaca u društvu. Ako su dani strogi profili preferencija $P^N = (P_i)_{i \in N}$, društvo će rangirati alternative u A po relaciji preferencije $F(P^N)$. Ako rangira a iznad b, tj. $a \succ_{F(P^N)} b$, reći ćemo da društvo preferira a u odnosu na b.
Iako smo u definiciji pretpostavili da pojedinac ne može biti indiferentan između dvije alternative, sljedeći primjer nam pokazuje kako društvena relacija preferencije, bez obzira na tu pretpostavku može biti indiferentna.

Primjer 2.5. Pogledajmo primjer većinskog glasovanja u slučaju $|A| = 2$, to jest, kada možemo birati samo između dvije mogućnosti. Neka je $A = \{x, y\}$. Za svaki strogi profil preferencija P^N s $m(P^N)$ označit ćemo broj individualaca koji preferiraju x u odnosu na y,

$$m(P^N) = |\{i \in N : x \succ_{P_i} y\}|.$$

Većinsko glasovanje je funkcija društvenog blagostanja F definirana s:
- Ako je $m(P^N) > \frac{n}{2}$ tada društvo preferira x u odnosu na y: $x \succ_{F(P^N)} y$
- Ako je $m(P^N) < \frac{n}{2}$ tada društvo preferira y u odnosu na x: $y \succ_{F(P^N)} x$
- Ako je $m(P^N) = \frac{n}{2}$ tada je društvo indiferentno između x i y: $x \approx_{F(P^N)} y$

U prethodnom primjeru, u slučaju da nismo htjeli da društvo bude indiferentno između dvije alternative, tada da bi F bila funkcija društvenog blagostanja morali bismo usporediti x i y i u slučaju kada je $m(P^N) = \frac{n}{2}$.
Međutim, u takvim slučajevima bi moglo dolaziti do proizvoljnog rangiranja, a budući da nam to nije u interesu, dopuštamo indiferentnost društvene preferencije, iako nema indiferentnosti na individualnoj razini.
Uočimo da bi u slučaju nepostojanja indiferentnosti na društvenoj razini jedan mogući scenarij u slučaju $m(P^N) = \frac{n}{2}$ mogao biti da društvo donosi odluku o rangu dviju alternativa na temelju preferencija samo jednog pojedinca, to jest, preferencija pojedinca bi diktirala društvenu odluku, što nije ono što želimo.
Također, može se dogoditi da u društvu postoji osoba koja diktira društvenu odluku ne uzimajući u obzir preferencije drugih u društvu. Takvu osobu nazivamo diktatorom.
Diktatorstvo je jednostavna funkcija društvenog blagostanja: ako diktator preferira a u odnosu na b, tada društvo mora preferirati a u odnosu na b.

Definicija 2.6. Funkcija društvenog blagostanja F je diktatorska ako postoji pojedinac $i \in N$ takav da je $F(P^N) = P_i$ za svaki strogi profil preferencije P^N. Drugim riječima, za svaki par alternativa $a, b \in A$ i svaki strogi profil preferencija P^N

$$a \succ_{P_i} b \Longrightarrow a \succ_{F(P^N)} b$$

Individualca i zovemo diktatorom.

Sada kada smo uveli pojam funkcije društvenog blagostanja, pitamo se koja bi bila ”prirodna” svojstva koja bismo htjeli da funkcija društvenog blagostanja zadovoljava i kakve zaključke možemo izvući ako pretpostavimo da funkcija zadovoljava ta svojstva.
Jedno vrlo razumno svojstvo za koje bi htjeli da vrijedi za funkciju društvenog blagostanja je to da ako svi pojedinci u društvu preferiraju a u odnosu na b, da tada i društvo preferira a u odnosu na b.

Definicija 2.7. Funkcija društvenog blagostanja F zadovoljava svojstvo jednoglasnosti ako vrijedi sljedeće: za svake dvije alternative $a, b \in A$ i svaki strogi profil preferencije $P^N = (P_i)_{i \in N}$, ako za svaki $i \in N$ vrijedi $a \succ_{P_i} b$, tada $a \succ_{F(P^N)} b$.

Još jedno svojstvo koje bismo željeli da funkcija društvenog blagostanja zadovoljava je to da način na koji društvo odlučuje preferira li a u odnosu na b ovisi samo o tome kako pojedinci rangiraju a u odnosu na b.

Definicija 2.8. Za funkciju društvenog blagostanja F kažemo da je nezavisna od nebitnih alternativa ako za svaki par alternativa $a, b \in A$ i svaki par strogih profila preferencija P^N i Q^N

$$a \succ_{P_i} b \iff a \succ_{Q_i} b, \forall i \in N,$$

povlači

$$a \succsim_{F(P^N)} b \iff a \succsim_{F(Q^N)} b.$$

Drugim riječima, ako je svaki pojedinac na pitanje preferira li više a u odnosu na b odgovorio isto i u P^N i u Q^N, tada bi društvena preferencija a u odnosu na b trebala biti identična prema $F(P^N)$ i $F(Q^N)$.
Recimo da na izborima za predsjednika razreda učenici biraju između četiri kandidata: Ivana, Ane, Marka i Tine te da je Marko osvojio više glasova od Ane, dok za ostale učenike glasovi još nisu prebrojani. Nakon brojanja glasova koje su ostvarili Ivan i Tina, rang između Marka i Ane trebao bio ostati nepromijenjen, jer je nezavisan od broja glasova koje su ostvarili Tina i Ivan, to jest i nakon ukupnih rezultata, Marko bi trebao biti bolje rangiran od Ane.
Ako se prisjetimo diktatorstva kao funkcije društvenog blagostanja, jednostavno se pokazuje da ono zadovoljava prethodno navedena svojstva.
Ta svojstva također zadovoljava i pravilo većinskog glasovanja u slučaju $|A| = 2$.
Pitamo se možemo li naći nekakvo pravilo glasovanja koje nam za tri ili više kandidata daje funkciju društvenog blagostanja koja zadovoljava svojstvo jednoglasnosti i nezavisnosti od nebitnih alternativa? Sljedeći teorem nam daje odgovor na prethodno pitanje.

Teorem 2.9 (**Arrow**). *Ako je $|A| \geq 3$, tada je svaka funkcija društvenog blagostanja koja zadovoljava svojstvo jednoglasnosti i nezavisnosti od nebitnih alternativa diktatorska.*

Teorem se može iskazati i tako da nam je nediktatorstvo željeno svojstvo.

Definicija 2.10. Funkcija društvenog blagostanja F zadovoljava svojstvo nediktatorstva ako nije diktatorska.

U skladu s prethodnom definicijom, iskazujemo alternativnu verziju Teorema 2.9.

Teorem 2.11. *Ako je $|A| \geq 3$, tada ne postoji funkcija društvenog blagostanja koja zadovoljava svojstvo jednoglasnosti, nezavisnosti od nebitnih alternativa i nediktatorstva.*

Teorem 2.11 se zove Arrowljev teorem nemogućnosti. Ovaj teorem nam govori da ako ne želimo društvo u kojem vlada diktator, kod traženja funkcije društvenog blagostanja na danom skupu profila preferencija moramo se odreći ili jednoglasnosti ili nezavisnosti od nebitnih alternativa ili ograničiti domenu profila preferencija na kojem je funkcija definirana.

Primjer 2.12. U svakom od navedenih primjera vidimo kako nisu zadovoljena sva tražena svojstva na funkciju društvenog blagostanja,
• Većinsko glasovanje zadovoljava svojstvo jednoglasnosti, nediktatorstva i nezavisnosti od nebitnih alternativa, ali dobivena relacija preferencije neće biti tranzitivna (Condorcetov paradoks).
• Bordina metoda glasovanja zadovoljava svojstvo jednoglasnosti i nediktatorstva, ali ne zadovoljava svojstvo nezavisnosti od nebitnih alternativa.
• Ako bi uzeli diktatorstvo gdje diktator nameće društvenu indiferenciju, tada takva funkcija društvenog blagostanja zadovoljava svojstvo jednoglasnosti i nezavisnosti od nebitnih alternativa.
• Funkcija društvenog blagostanja koja ignorira individualne preferencije i uvijek daje istu relaciju preferencije zadovoljava svojstvo nediktatorstva i nezavisnosti od nebitnih alternativa, ali ne zadovoljava svojstvo jednoglasnosti.

Kako bi mogli dokazati Teorem 2.9 moramo uvesti nekoliko pojmova i oznaka.

Definicija 2.13. Koalicija je skup individualca $S \subseteq N$.

Definicija 2.14. Neka je F funkcija društvenog blagostanja te neka su $a, b \in A$ dvije različite alternative. Koalicija $S \subseteq N$ se naziva odlučujuća za a u odnosu na b (relativno na F) ako je za svaki $P^N \in (\mathcal{P}(A))^N$ za koji je zadovoljeno:
1. $a \succ_{P_i} b$ za svaki $i \in S$,
2. $b \succ_{P_j} a$ za svaki $j \notin S$,
vrijedi $a \succ_{F(P^N)} b$. Koalicija S se naziva odlučujuća (u odnosu na F) ako postoji par alternativa za koji je odlučujuća.

Skup individualaca S je odlučujuć za a u odnosu na b ako vrijedi da svaki član iz S preferira a u odnosu na b, dok svi članovi koji nisu u S preferiraju b u odnosu na a, tada društvo preferira a u odnosu na b.
Možemo postaviti pitanje, postoji li uvijek barem jedna odlučujuća koalicija.

Propozicija 2.15. *Neka je F funkcija društvenog blagostanja koja zadovoljava svojstvo jednoglasnosti. Za svaki $a, b \in A$, koalicija N je odlučujuća za a u odnosu na b, dok prazna koalicija $\emptyset$ nije odlučujuća za a u odnosu na b.*

Dokaz. Dokaz slijedi direktno iz definiciji jednoglasnosti. □

Teorem 2.16. *Neka je F funkcija društvenog blagostanja koja zadovoljava svojstvo nezavisnosti od nebitnih alternativa te neka su $a, b \in A$ dvije alternative. Koalicija $S \subseteq N$ je odlučujuća za a u odnosu na b ako i samo ako postoji strogi profil preferencija P^N koji zadovoljava:*
(a1) $a \succ_{P_i} b$ za svaki $i \in S$,
(a2) $b \succ_{P_j} a$ za svaki $j \notin S$,
(a3) $a \succ_{F(P^N)} b$.

Slijedi da ako koalicija S nije odlučujuća za a u odnosu na b i strogi profil preferencija P^N zadovoljava:
(b1) $a \succ_{P_i} b$ za svaki $i \in S$,
(b2) $b \succ_{P_j} a$ za svaki $j \notin S$,
tada $b \succsim_{F(P^N)} a$

Dokaz. $\Rightarrow$
Pretptostavimo da je S odlučujuća za a u odnosu na b. Neka je P^N strogi profil preferencija koji zadovoljava (a1) i (a2). Budući da je koalicija S odlučujuća za a u odnosu na b, zadovoljeno je i (a3) i stoga P^N zadovoljava (a1)-(a3).
$\Leftarrow$
Za obratni smjer trebamo pokazati da ako postoji strogi profil preferencija koji zadovoljava (a1)-(a3), tada je S odlučujuća za a u odnosu na b. To jest, trebamo pokazati da za svaki strogi profil preferencija Q^N koji zadovoljava (a1) i (a2), također zadovoljava i (a3). Međutim to slijedi iz činjenice da F zadovoljava svojstvo nezavisnosti od nebitnih alternativa.
Drugi dio teorema slijedi iz prvog dijela. □

Propozicija 2.17. *Pretpostavimo da je $|A| \geq 3$ te da F zadovoljava svojstvo jednoglasnosti i nezavisnosti od nebitnih alternativa. Ako je koalicija V odlučujuća za a^* u odnosu na b^*, tada je V odlučujuća za svaki par alternativa iz A.*

Dokaz. Neka su a i b dvije alternative.
Prvo ćemo pokazati da ako je V odlučujuća za a u odnosu na b, tada je V odlučujuća za a u odnosu na c, za svaku alternativu $c \in A \setminus \{a\}$.
Ako je $c = b$ tvrdnja slijedi po pretpostavci. Inače, neka je $c \in A \setminus \{a, b\}$. Promotrimo sljedeći strogi profil preferencija P^N:

$$\begin{cases} a \succ_{P_i} b \succ_{P_i} c & i \in V, \\ c \succ_{P_i} b \succ_{P_i} a & i \notin V. \end{cases}$$

Sve ostale mogućnosti u A su poredane proizvoljno za svakog individualca.
Budući da je a odlučujuća za b, slijedi $a \succ_{F(P^N)} b$. Po pretpostavci F zadovoljava svojstvo

nezavisnosti od nebitnih alternativa pa vrijedi $b \succ_{F(P^N)} c$. Budući da je $F(P^N)$ tranzitivna relacija, zaključujemo $a \succ_{F(P^N)} c$. Tada iz Teorema 2.16 slijedi da je V odlučujuća za a u odnosu na c.

Sada pokazujemo da ako je V odlučujuća za a u odnosu na b, tada je b odlučujuća u odnosu na c za svaki $c \in A \setminus \{a, b\}$.
Neka je $c \in A \setminus \{a, b\}$. Promotrimo sljedeći strogi profil preferencija P^N:

$$\begin{cases} a \succ_{P_i} b \succ_{P_i} c & i \in V, \\ c \succ_{P_i} b \succ_{P_i} a & i \notin V. \end{cases}$$

Sve ostale mogućnosti u A su poredane proizvoljno za svakog individualca.
Iz prvog dijela dokaza slijedi da je V odlučujuća za a u odnosu na c pa je stoga $a \succ_{F(P^N)} c$. Budući da F zadovoljava svojstvo nezavisnosti od nebitnih alternativa, $b \succ_{F(P^N)} a$. Kako je F tranzitivna relacija slijedi $b \succ_{F(P^N)} c$. Tada po Teoremu 2.16 slijedi da je V odlučujuća za b u odnosu na c.

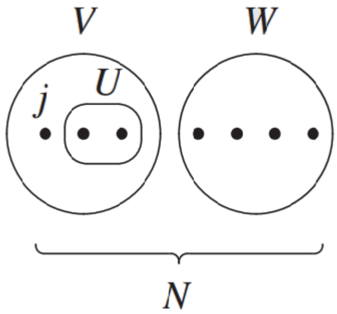
Koristeći tvrdnje koje smo pokazali, dokazat ćemo tvrdnju teorema.
Neka su $a \neq b$ neke dvije alternative iz A. Pokazat ćemo da je V odlučujuća za a u odnosu na b. Podsjetimo se da je po teoremu V odlučujuća za a^* u odnosu na b^*.
• Ako je $a = a^*$, iz prvog dijela i činjenice da je V odlučujuća za a^* u odnosu na b^*, zaključujemo da je V odlučujuća za a u odnosu na b.
• Ako je $a \neq a^*$ i $b \neq a^*$, tada prvi dio dokaza i činjenica da je V odlučujuća za a^* u odnosu na b^* daju da je V odlučujuća za a^* u odnosu na a. Zbog toga drugi dio dokaza daje da je V odlučujuća za a u odnosu na b.
• Ako $a \neq a^*$ i $b = a^*$, tada postoji alternativa $c \in A \setminus \{a, b\}$, budući da A sadrži barem 3 mogućnosti (uočimo da je moguće da je $c = b^*$). Iz prvog dijela i činjenice da je V odlučujuća za a^* u odnosu na b^*, imamo da je V odlučujuća za b u odnosu na c. Tada iz drugog dijela slijedi da je V odlučujuća za c u odnosu na a. Konačno, iz drugog dijela sada slijedi da je V odlučujuća za a u odnosu na b. □

Sada možemo prijeći na dokaz Teorema 2.9

Dokaz Teorema 2.9 (Arrowljev teorem). Neka je F funkcija društvenog blagostanja koja zadovoljava svojstvo jednoglasnosti i nezavisnosti od nebitnih alternativa. Dokaz teorema provest ćemo u dva dijela. Prvo ćemo pokazati da postoji odlučujuća koalicija koja sadrži samo jednog člana, a zatim ćemo pokazati da taj član mora biti diktator.

Tvrdnja 2.18. *Postoji odlučujuća koalicija V koja sadrži samo jednog individualca.*

Dokaz. Neka je V neprazna odlučujuća koalicija koja sadrži minimalan broj članova. Budući da je prema Teoremu 2.15 koalicija N odlučujuća, a koalicija $\emptyset$ nije odlučujuća, mora postojati koalicija V s traženim svojstvima. Ako koalicija V sadrži samo jednog člana, dokaz je gotov. Stoga pretpostavimo da V sadrži barem dva člana.
Neka je $j \in V$. Uvodimo oznake $U = V \setminus \{j\}$ i $W = N \setminus V$. Grafički prikaz možemo vidjeti na slici 2.1.



Slika 2.1

Budući da V sadrži minimalno dva člana, koalicija U je neprazna. Kako po definiciji V sadrži minimalan broj članova između svih nepraznih odlučujućih koalicija, slijedi da su koalicije U i $\{j\}$ neodlučujuće.
Jer je $|A| \geq 3$, možemo izabrati tri različite alternative a, b, c. Uzmimo strogi profil preferencija $P^N = (P_i)_{i \in N}$ definiran sa:

$$\begin{cases} a \succ_{P_i} b \succ_{P_i} c & i = j, \\ c \succ_{P_i} a \succ_{P_i} b & i \in U, \\ b \succ_{P_i} c \succ_{P_i} a & i \in W \end{cases}$$

Sve ostale mogućnosti u A su poredane proizvoljno za svakog individualca.
Budući da je V odlučujuća, odlučujuća je za svaki par alternativa (Teorem 2.17). Točnije, odlučujuća je za a u odnosu na b. Kako je $a \succ_{P_i} b$ za svakog individualca $i \in V = U \cup \{j\}$ i $b \succ_{P_i} a$ za svakog individualca $i \in N \setminus V = W$, imamo $a \succ_{F(P^N)} b$. Kako koalicija U nije odlučujuća, posebno nije odlučujuća za c u odnosu na b. Zbog toga što vrijedi $c \succ_{P_i} b$ za svakog individualca $i \in U$ i $b \succ_{P_i} c$ za svakog individualca $i \in N \setminus U = W \cup \{j\}$, Teorem 2.16 daje $b \succsim_{F(P^N)} c$, a zbog toga što je $F(P^N)$ tranzitivna relacija, zaključujemo $a \succ_{F(P^N)} c$. Uočimo da je $a \succ_{P_i} c$ za $i = j$ i $c \succ_{P_i} a$ za sve $i \neq j$. Po Teoremu 2.16 zaključujemo da je $\{j\}$ odlučujuća koalicija za a u odnosu na c, stoga je odlučujuća koalicija, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $\{j\}$ neodlučujuća koalicija. Zbog toga slijedi $|V| = 1$. □

Neka je $V = \{j\}$ odlučujuća koalicija koja se sastoji samo od jednog člana. Pokazat ćemo da je j diktator.

Tvrdnja 2.19. *Neka je $V = \{j\}$ odlučujuća koalicija. Individualac j je diktator, to jest, $F(P^N) = P_j$ za svaki $P^N = (P_i)_{i \in N} \in (\mathcal{P}(A))^N$.*

Dokaz. Neka je P^N strogi profil preferencija i neka su $a, b \in A$ dvije različite alternative takve da je $a \succ_{P_j} b$. Želimo pokazati da je tada $a \succ_{F(P^N)} b$.
Kako A sadrži najmanje tri alternative, postoji $c \in A \setminus \{a, b\}$
Pogledajmo sljedeći strogi profil preferencija Q^N:

$$\begin{cases} a \succ_{Q_i} c \succ_{Q_i} b & i = j, \\ c \succ_{Q_i} a \succ_{Q_i} b & i \neq j, a \succ_{P_i} b, \\ c \succ_{Q_i} b \succ_{Q_i} a & i \neq j, b \succ_{P_i} a, \end{cases}$$

Sve ostale mogućnosti u A su poredane proizvoljno za svakog individualca.
Kako je $V = \{j\}$ odlučujuća za bilo koje dvije alternative, posebno je odlučujuća za a u odnosu na c i stoga je $a \succ_{F(Q^N)} c$. Budući da F zadovoljava svojstvo jednoglasnosti slijedi $c \succ_{F(Q^N)} b$, a zbog tranzitivnosti relacije $F(Q^N)$ zaključujemo $a \succ_{F(Q^N)} b$.
Dobili smo da individualac j preferira a u odnosu na b prema P_j i prema Q_j a individualac $i \neq j$ preferira a u odnosu na b prema P_i ako i samo ako preferira a u odnosu na b prema Q_i. Kako F zadovoljava svojstvo nezavisnosti od nebitnih alternativa i vrijedi $a \succ_{F(Q^N)} b$, dobivamo da $a \succ_{F(P^N)} b$ što smo i trebali pokazati. $\square$

Pokazali smo da postoji odlučujuća koalicija koja sadrži samo jednog člana te da je taj član diktator čime je dokaz Teorema 2.9 gotov.

$\square$

Možemo si postaviti pitanje jesmo li tražili previše: željeli smo da funkcija društvenog blagostanja rangira sve alternative. Što ako bismo ublažili naše zahtjeve i tražili da društvo izabere samo najpoželjniju alternativu? Bismo li dobili sličan rezultat kao i ovom slučaju? Ovim pitanjima bavit ćemo se u sljedećem poglavlju.

Poglavlje 3

Funkcije društvenog izbora

U mnogim slučajevima, kao što smo već i bili spomenuli, nije potrebno rangirati sve dane mogućnosti, već nam je dovoljno odabrati samo jednu, i to onu najpoželjniju. Vjerojatno najpoznatiji primjer je izbor predsjednika/gradonačelnika/župana. Također, tu možemo uključiti izbore za razne prestižne nagrade gdje žiri od kandidata u konkurenciji bira najboljeg. U ovom poglavlju bavit ćemo se problemom izbora jedne mogućnosti koja najbolje predstavlja društvo od danih ponuđenih mogućnosti, ali također da budemo sigurni da su zadovoljena neka željena svojstva. Podsjetimo se kako smo s A označili neprazan i konačan skup alternativa na kojem individualci definiraju svoje preferencije.

Definicija 3.1. Funkcija društvenog izbora je funkcija $G : (\mathcal{P}(A))^n \longrightarrow A$.

Funkcija društvenog izbora svakom strogom profilu preferencija pridružuje jednu alternativu, koja je prema društvu najpoželjnija. Razumno je zahtijevati da je funkcija društvenog izbora monotona; ako su P^N i Q^N dva profila preferencija u kojima rang od a u Q_i nije niži od ranga u P_i, za svaki i, te ako je $F(P^N) = a$, tada bi također trebalo vrijediti $F(Q^N) = a$.

Definicija 3.2. Funkcija društvenog izbora G je monotona ako za svaki par strogih profila preferencija P^N i Q^N za koje vrijedi

$$a \succ_{P_i} c \Longrightarrow a \succ_{Q_i} c, \forall c \neq a, \forall i \in N,$$

ako je $G(P^N) = a$, tada je $G(Q^N) = a$.

Diktatorstvo je primjer funkcije društvenog izbora.

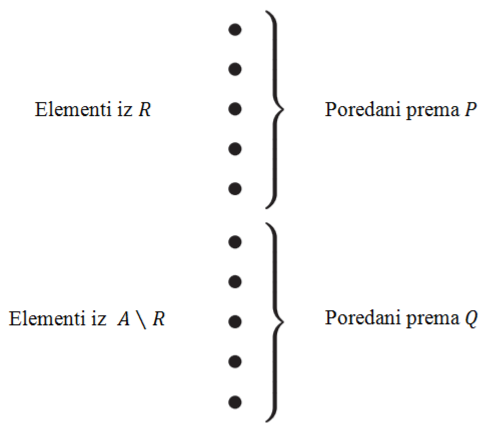
Definicija 3.3. Funkcija društvenog izbora G je diktatorska ako postoji individualac i takav da je za svaki strogi profil preferencija P^N, $G(P^N)$ je najpoželjnija alternativa individualca i. Takav individualac i zove se diktator.

Kao i kod funkcija društvenog blagostanja prirodno je zahtijevati da i funkcije društvenog izbora zadovoljavaju svojstvo da ako svaki individualac preferira a u odnosu na sve ostale alternative, da tada i društvo preferira a.

Definicija 3.4. Funkcija društvenog izbora G zadovoljava svojstvo jednoglasnosti ako za svaku alternativu $a \in A$ i svaki strogi profil preferencija $P^N = (P_i)_{i \in N}$: ako je $a \succ_{P_i} b$ za svakog individualca $i \in N$ i za svaku alternativu $b \neq a$, tada je $G(P^N) = a$.

Teorem 3.5. *Ako je* $|A| \geq 3$*, sve monotone funkcije društvenog izbora koje zadovoljavaju svojstvo jednoglasnosti su diktatorske.*

Prije dokaza teorema trebamo uvesti neke definicije i svojstva monotonih funkcija društvenog izbora.
Neka su P i Q dva stroga profila preferencija na skupu alternativa A te neka je $R \subseteq A$. Na skupu A definiramo strogu relaciju preferencije na sljedeći način: poredamo elemente iz R prije elemenata koji se ne nalaze u R. Relacija stroge preferencije na elementima iz R dana je s P, dok je relacija stroge preferencije elemenata koji se ne nalaze u R dana s Q. Primjer tako definirane relacije vidimo na slici 3.1. Ovako definiranu strogu relaciju preferencije označavamo sa $Z(P, Q; R)$, a dajemo i formalnu definiciju.



Slika 3.1: Relacija preferencije $Z(P, Q; R)$

Definicija 3.6. Neka su P i Q stroge relacije preferencije te neka je $R \subseteq A$ podskup alternativa. Sa $Z(P, Q; R)$ dana je sljedeća stroga relacija preferencije:

- $Z(P, Q; R)$ se podudara s relacijom preferencije P na skupu elemenata koji se nalaze u R: ako su $a, b \in R$ tada je

$$a \succ_{Z(P,Q;R)} b \iff a \succ_P b.$$

• $Z(P, Q; R)$ se podudara s relacijom preferencije s Q na skupu elemenata iz $A \setminus R$: ako su $a, b \notin R$ tada je

$$a \succ_{Z(P,Q;R)} b \iff a \succ_Q b.$$

• Alternative koje se nalaze u R su poželjnije od onih koje se ne nalaze u R: ako su $a \in R$ i $b \notin R$ tada je $a \succ_{Z(P,Q;R)} b$.

Primjer 3.7. Pretpostavimo da nam je dan skup alternativa $A = \{a, b, c, d, e\}$ te neka je $R = \{b, d\}$. Neka su P i Q dvije relacije stroge preferencije dane redom sa

$$\begin{aligned} e \succ_P d \succ_P c \succ_P b \succ_P a, \\ d \succ_P a \succ_P e \succ_P c \succ_P b. \end{aligned}$$

Tada je relacija $Z(P, Q; R)$ dana sa

$$e \succ_{Z(P,Q;R)} c \succ_{Z(P,Q;R)} a \succ_{Z(P,Q;R)} d \succ_{Z(P,Q;R)} b.$$

Dajemo definiciju analognu Definiciji 3.6, ali za strogi profil preferencija.

Definicija 3.8. Neka su P^N i Q^N dva stroga profila preferencije i neka je $R \subseteq A$ podskup alternativa. Sa $Z(P^N, Q^N; R)$ označavamo strogi profil preferencija u kojem su stroge preferencije individualaca $Z(P_i, Q_i; R)$, za svaki $i \in N$.

Neka je $a \in R$ alternativa iz R i pretpostavimo da je $G(P^N) = a$. Uspoređujući sa strogim profilom preferencija P^N, u strogoj relaciji preferencije $Z(P_i, Q_i; R)$, poredak alternativa iz R je viši u odnosu na alternative koje se ne nalaze u R. Ako je funkcija društvenog izbora monotona, za očekivati bi bilo da nakon ovog poboljšanja društvo izabere a. To svojstvo iskazujemo u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 3.9. *Neka je G monotona funkcija društvenog izbora, neka su P^N i Q^N dva stroga profila preferencije te $R \subseteq A$. Ako je $a \in R$ i $G(P^N) = a$, tada je $G(Z(P^N, Q^N; R)) = a$. Ekvivalentno, ako $G(Z(P^N, Q^N; R)) \neq a$ i $a \in R$, tada $G(P^N) \neq a$.*

Dokaz. Budući da je G monotona znamo da vrijedi $G(Q^N) = a$. Sada se vidi da je $G(Z(P^N, Q^N; R)) = a$. □

Teorem 3.10. *Neka je G monotona funkcija društvenog izbora koja zadovoljava svojstvo jednoglasnosti, neka je P^N strogi profil preferencija te $a, b \in A$. Ako je*

$$a \succ_{P_i} b, \ \forall i \in N,$$

tada je $G(P^N) \neq b$.

Drugim riječima, teorem nam kaže da ako postoji alternativa b, koju su svi članovi društva rangirali niže od alternative a, tada društvo neće izabrati alternativu b.

Dokaz. Definiramo $Q^N := Z(P^N, P^N; a)$. Po profilu preferencija Q^N, svakom individualcu je a najbolji izbor. Budući da G zadovoljava svojstvo jednoglasnosti, vrijedi $G(Q^N) = a$. Pretpostavimo suprotno, to jest $G(P^N) = b$. Budući da svi individualci preferiraju a u odnosu na b i prema P^N i prema Q^N te kako su relacije preferencija svih individualaca na skupu alternativa $A \setminus \{a\}$ jednake prema P^N i Q^N, slijedi da za svakog individualca i,

$$b \succ_{P_i} c \iff b \succ_{Q_i} c, \forall c \neq b$$

Kako je G monotona, zaključujemo $G(Q^N) = b$, što je u kontradikciji s $G(Q^N) = a$. Iz toga zaključujemo kako je naša polazna pretpostavka netočna te vrijedi $G(P^N) \neq b$. □

Ako je $Z(P^N, Q^N; R)$ strogi profil preferencije, tada svaki individualac preferira svaku opciju koja se nalazi u R u odnosu na opcije koje se ne nalaze u R.

Korolar 3.11. *Neka je G monotona funkcija društvenog izbora koja zadovoljava svojstvo jednoglasnosti. Neka su P^N i Q^N dva stroga profila preferencija te neka je $R \subseteq A$. Ako je R neprazan, tada je $G(Z(P^N, Q^N; R)) \in R$.*

Dokaz Teorema 3.5. Dokaz teorema provest ćemo u nekoliko koraka. Pokazat ćemo da je monotona funkcija društvenog izbora G koja zadovoljava svojstvo jednoglasnosti diktatorska. Koristeći funkciju G konstruirat ćemo funkciju društvenog blagostanja F. Potom ćemo pokazati da ako je G monotona i zadovoljava svojstvo jednoglasnosti, tada F zadovoljava svojstvo jednoglasnosti i nezavisnosti od nebitnih alternativa. Zatim ćemo koristeći Teorem 2.9 zaključiti da je F diktatorska. Na kraju ćemo pokazati da je diktator u funkciji društvenog blagostanja F, diktator i u funkciji društvenog izbora G.
Neka je $W^N \in (\mathcal{P}(A))^N$ fiksan strogi profil preferencije.

1. korak: Definiranje funkcije F.
Za svaki strogi profil preferencije P^N, definiramo binarnu relaciju $F(P^N)$ na sljedeći način. Za svaki par različitih alternativa $a, b \in A$,

$$G(Z(P^N, W^N, \{a, b\})) = a \implies a \succ_{F(P^N)} b, \tag{3.1}$$

$$G(Z(P^N, W^N, \{a, b\})) = b \implies b \succ_{F(P^N)} a. \tag{3.2}$$

Da bi ovako definirana relacija bila refleksivna, dodatno stavljamo

$$a \succsim_{F(P^N)} a, \ \forall a \in A. \tag{3.3}$$

Pokazat ćemo da je F funkcija društvenog blagostanja tako što ćemo pokazati potpunost i tranzitivnost relacije $F(P^N)$.

Po Korolaru 3.11, $G(Z(P^N, W^N; \{a, b\})) \in \{a, b\}$. Jednadžbe (3.1) i (3.2) tada podrazumijevaju da za svaki par različitih alternativa a, b iz A ili je $a \succ_{F(P^N)} b$ ili je $b \succ_{F(P^N)} a$, to jest, $F(P^N)$ je potpuna relacija preferencije na R. Uočimo da kod ovako definirane relacije $F(P^N)$ nema indiferencije na društvenoj razini, društvo strogo preferira a u odnosu na b ili obrnuto.

2. korak: $F(P^N)$ je tranzitivna relacija.
Pretpostavimo suprotno, neka su $a, b, c \in A$ te neka je $a \succ_{F(P^N)} b$, $b \succ_{F(P^N)} c$, ali $c \succ_{F(P^N)} a$. Ne može vrijediti $a = c$, jer bi tada vrijedilo $a \succ_{F(P^N)} b$ i $b \succ_{F(P^N)} a$, što je nemoguće. Zaključujemo da su a, b i c tri različite alternative.
Budući da je $a \succ_{F(P^N)} b$, vrijedi $G(Z(P^N, W^N; \{a, b\})) = a$. Uočimo još da vrijedi i sljedeće:

$$Z(P^N, W^N; \{a, b\}) = Z(Z(P^N, P^N; \{a, b, c\}), W^N; \{a, b\}). \tag{3.4}$$

To vrijedi zbog toga što je na komplementu skupa $\{a, b\}$ relacija preferencije na obje strane jednakosti određena sa W^N, dok je na skupu $\{a, b\}$ relacija na obje strane jednakosti određena sa P^N.
Jednadžba 3.4 i $a \succ_{F(P^N)} b$ daju

$$G(Z(Z(P^N, P^N; \{a, b, c\})), W^N; \{a, b\}) = a. \tag{3.5}$$

Posebno je:

$$G(Z(Z(P^N, P^N; \{a, b, c\})), W^N; \{a, b\}) \neq b. \tag{3.6}$$

Iz Propozicije 3.9 slijedi:

$$G(Z(P^N, P^N; \{a, b, c\})) \neq b. \tag{3.7}$$

Pokazali smo sljedeće:

$$a \succ_{F(P^N)} b \Longrightarrow G(Z(P^N, P^N; \{a, b, c\})) \neq b. \tag{3.8}$$

Budući da vrijedi $b \succ_{F(P^N)} c$ slično se pokaže i

$$G(Z(P^N, P^N; \{a, b, c\})) \neq c. \tag{3.9}$$

te zbog $c \succ_{F(P^N)} a$ vrijedi

$$G(Z(P^N, P^N; \{a, b, c\})) \neq a. \tag{3.10}$$

Iz (3.7),(3.9) i (3.10) zaključujemo

$$G(Z(P^N, P^N; \{a, b, c\})) \notin \{a, b, c\}. \tag{3.11}$$

S druge strane, po Korolaru 3.11, $G(Z(P^N, P^N; \{a, b, c\})) \notin \{a, b, c\}$, što je u kontradikciji s (3.11). Zaključujemo da je početna pretpostavka da relacija $F(P^N)$ nije tranzitivna bila

pogrešna.
Pokazali smo da je $F(P^N)$ potpuna i tranzitivna relacija, stoga je F funkcija društvenog blagostanja.

3.korak: Funkcija F zadovoljava svojstvo jednoglasnosti.
Neka su $a \neq b$ dvije različite alternative iz A te neka je P^N strogi profil preferencija koji zadovoljava $a \succ_{P_i} b$ za svaki $i \in N$. To znači da je za svaki $i \in N$, alternativa a najpoželjnija u odnosu na strogi profil preferencija $Z(P_i, W_i; \{a, b\})$. Iz Teorema 3.10 slijedi $G(Z(P^N, W^N, \{a, b\})) = a$, a iz (3.1) zatim dobivamo da je $a \succ_{F(P^N)} b$.

4.korak: Funkcija F zadovoljava svojstvo nezavisnosti od nebitnih alternativa.
Neka su $a, b \in A$ dvije različite alternative te P^N i Q^N dva stroga profila preferencije koja zadovoljavaju

$$a \succ_{P_i} b \Longleftrightarrow a \succ_{Q_i} b, \forall i \in N \tag{3.12}$$

Slijedi da za svaki $i \in N$,

$$Z(P_i, W_i; \{a, b\}) = Z(Q_i, W_i; \{a, b\}) \tag{3.13}$$

Jednakost (3.13) vrijedi zbog toga što su u oba stroga profila preferencije alternative a i b poželjnije od svih ostalih. Strogi profil preferencije na skupu alternativa različitom od $\{a, b\}$ određen je na obje strane jednakosti s W_i, a po (3.12) rang između a i b je isti u oba slučaja.
Po definiciji od F,

$$a \succ_{F(P^N)} b \Longrightarrow a \succ_{F(Q^N)} b, \tag{3.14}$$

te stoga F zadovoljava svojstvo nezavisnosti od nebitnih alternativa.

5.korak: F je diktatorska.
Budući da je F funkcija društvenog blagostanja koja zadovoljava svojstvo jednoglasnosti i nezavisnosti od nebitnih alternativa te vrijedi $|A| \geq 3$ možemo primijeniti Teorem 2.9, koji nam govori da je F diktatorska. Drugim riječima, postoji individualac i takav da

$$F(P^N) = P_i, \forall P^N \in (\mathcal{P}(A))^N$$

6.korak: Diktator i iz F je diktator i u G
Neka je P^N strogi relacija preferencije, te neka je za individualca i najpoželjnija alternativa a. Da bi vidjeli da je individualac i diktator u G trebamo pokazati da je $G(P^N) = a$. Neka je $b \neq a$ neka alternativa. Budući da je a poželjnija od b prema individualcu i vrijedi $a \succ_{P_i} b$. Budući da je i diktator u F, zaključujemo da je $a \succ_{F(P^N)} b$. Iz definicije od F

slijedi $G(Z(P^N, W^N, \{a, b\})) = a \neq b$ dok po Korolaru 3.11 imamo $G(P^N) \neq b$. Budući da to vrijedi za svaku alternativu $b \neq a$, zaključujemo da vrijedi $G(P^N) = a$. Time smo pokazali da je G diktatorska funkcija društvenog izbora čime je dokaz Teorema 3.5 završen. □

Teorem 3.5 nam govori da su diktatorske funkcije društvenog izbora jedine monotone funkcije društvenog izbora koje zadovoljavaju svojstvo jednoglasnosti. Primjerom ćemo pokazati da postoje monotone funkcije društvenog izbora koje nisu diktatorske, ali one ne zadovoljavaju svojstvo jednoglasnosti.

Primjer 3.12. Neka je skup alternativa dan s $A = \{a, b, c\}$ i $N = \{1, 2\}$. Definiramo funkciju društvenog izbora F s

$$F(P^N) := \begin{cases} b & b \succ_{P_2} c, \\ c & c \succ_{P_2} b \end{cases}$$

Riječima, alternativa koju će društvo odabrati je alternativa koju preferira individualac 2 i ona se nalazi u $\{b, c\}$. Funkcija društvenog izbora F nije diktatorska budući da alternativa a neće biti izabrana ni u slučaju kada ju preferiraju oba individualca te stoga vidimo da niti jedan individualac nije diktator. Također, iz gornjeg zaključivanja slijedi da F ne zadovoljava svojstvo jednoglasnosti.

Poglavlje 4

(Ne)manipulativnost

U modelu predstavljenom u prethodnom poglavlju svaki individualac iskazuje svoje relacije preferencije na skupu alternativa te se prema tim preferencijama definira funkcija društvenog izbora koja izabire najbolju alternativu za društvo. U modelu je implicitno pretpostavljeno da će svaki pojedinac iskazati svoje prave relacije preferencije. No zašto bi individualac uvijek iskazao svoje preferencije istinito? Možda postoje slučajevi u kojima bi glasovanjem drugačijim od svojih pravih preferencija, individualac mogao učiniti da društvo izabere njemu prihvatljiviju alternativu, nego u slučaju kada bi iskazao svoje prave preferencije. Ako postoji takva mogućnost reći ćemo da je funkcija društvenog izbora manipulativna.
Neka je P^N strogi profil preferencija. S $P_{-i} = (P_j)_{j \neq i}$ označavamo strogi profil preferencija svih individualaca osim i. Sada strogi profil preferencija P^N možemo zapisati kao (P_i, P_{-i}).

Definicija 4.1. Funkciju društvenog izbora G zovemo manipulativnom ako postoje strogi profil preferencija P^N, individualac $i \in N$ i stroga relacija preferencije Q_i takvi da vrijedi

$$G(Q_i, P_{-i}) \succ_{P_i} G(P^N)$$

Prethodna definicija nam govori da funkcija društvenog izbora G manipulativna ako postoji strogi profil preferencija takav da individualac iskazivanjem stroge relacije preferencije koja se razlikuje od njegove prave preferencije može učiniti da društvo izabere njemu prihvatljiviju opciju, nego u slučaju kad bi iskazao svoje prave preferencije. Ako to nije moguće, funkciju društvenog izbora zovemo nemanipulativnom.

Napomena 4.2. Definicija 4.1 se dotiče mogućnosti u kojoj jedan individualac može utjecati na izbor društvu najpoželjnije alternative u slučaju neiskazivanja svojih pravih preferencija. No, kao što smo vidjeli u Primjeru 1.1 funkcijom društvenog izbora može manipulirati i skup individualaca.

Diktatorska funkcija društvenog izbora je nemanipulativna. Diktator nema koristi od iskazivanja preferencija koje se razlikuju od njegovih stvarnih preferencija budući da je u diktatorstvu alternativa koju društvo izabire uvijek najpoželjnija za diktatora. Također, niti jedan drugi individualac koji nije diktator ne dobiva ništa ako iskaže preferencije koje se razlikuju od njegovih stvarnih preferencija budući da njihovi glasovi nemaju utjecaj na izbor društvu najpoželjnije alternative. Sljedeći primjer pokazuje nam kako individualac može manipulirati funkcijom društvenog izbora.

Primjer 4.3. Ema (1), Luka (2) i Lucija (3) čine gradsku komisiju koja odlučuje o dodjeli nagrade za najboljeg poduzetnika na području grada na temelju poslovanja u prošloj godini. Komisija odluku donosi većinskim glasovanjem. U slučaju da svaki član komisije glasa za drugu alternativu, odlučujući glas ima predsjednik komisije, koji je u ovom slučaju Ema. U uži krug izbora ušle su tri osobe: Tea, Josip i Ana.
Neka je profil preferencija P^N sljedeći:

$$F(P^N): \quad \begin{array}{l} T \succ_{P_1} J \succ_{P_1} A, \\ J \succ_{P_2} T \succ_{P_2} A, \\ A \succ_{P_3} J \succ_{P_3} T. \end{array}$$

gdje je sa P_1 označena Emina relacija preferencije, s P_2 Lukina relacija preferencije i s P_3 Lucijina relacija preferencije. Ako bi Ema, Luka i Lucija iskazali svoje prave preferencije, izabrana osoba bila bi Tea. No ako bi Lucija promijenila svoje iskazane preferencije u

$$J \succ_{Q_3} A \succ_{Q_3} T$$

izabrana osoba bila bi Josip, kojeg Lucija preferira više nego Teu. Iz ovog primjera vidimo da je funkcija društvenog izbora u kojoj se primjenjuje većinsko glasovanje, gdje u slučaju izjednačenja odlučuje glas predsjednika, manipulativna.

Teorem 4.4 (**Gibbard, Satterthwaite**). *Neka je G nemanipulativna funkcija društvenog izbora koja zadovoljava svojstvo jednoglasnosti. Ako je $|A| \geq 3$, tada je G diktatorska.*

Prethodni teorem nam govori da ako bi htjeli primijeniti nediktatorsku funkciju društvenog izbora na skupu alternativa koji ima tri ili više članova, da će postojati situacije u kojoj će jedan (ili više) individualaca imati poticaj da iskažu preferencije koje se razlikuju od njihovih stvarnih preferencija.

Dokaz. Po Teoremu 3.5 dovoljno je pokazati da je svaka nemanipulativna funkcija društvenog izbora koja zadovoljava svojstvo jednoglasnosti monotona.
Neka je G nemanipulativna funkcija društvenog izbora koja zadovoljava svojstvo jednoglasnosti. Pretpostavimo da G nije monotona, to jest, da postoje dva različita stroga profila preferencije P^N i Q^N i dvije različite alternative a i b takve da

$$a \succ_{P_i} c \Longrightarrow a \succ_{Q_i}, \quad \forall c \neq a, \quad \forall i \in N \tag{4.1}$$

ali
$$G(P^N) = a, G(Q^N) = b.$$
Budući da su P^N i Q^N dva različita stroga profila preferencije postoji barem jedan individualac i za kojeg vrijedi $P_i \neq Q_i$. Od svih parova alternativa a, b i strogih profila preferencije P^N i Q^N za koje vrijede gore navedeni uvjeti, uzmimo one za koji je broj individualaca za koji vrijedi $P_i \neq Q_i$ najmanji.
Za takve P^N i Q^N, označimo s I skup individualaca za koje $P_i \neq Q_i$:
$$I = \{i \in N : P_i \neq Q_i\}$$
Po pretpostavci I sadrži barem jednog individualca.
Neka je j individualac iz I. Tvrdimo da je $G(P_j, Q_{-j}) = a$. Pretpostavimo suprotno, to jest, $G(P_j, Q_{-j}) = c \neq a$ (c je možda jednak b). Par alternativa a, c zajedno sa strogim profilima preferencije P^N i (P_j, Q_{-j}) zadovoljavaju gornje uvjete, ali je broj individualaca u ova dva profila, čije se stroge relacije preferencije razlikuju jednak $|I| - 1$ (budući da su preferencije individualca j u profilima P^N i (P_j, Q_{-j}) jednake), što je u kontradikciji s minimalnošću od I. Time dobivamo da vrijedi $G(P_j, Q_{-j}) = a$.
Zaključili smo da je $G(Q^N) = b$ i $G(P_j, Q_{-j}) = a$. Budući da je G nemanipulativna, ako društvo odlučuje prema profilu Q^N, individualac j nema poticaja da iskaže P_j kao svoj profil preferencije te je stoga
$$b = G(Q^N) \succ_{Q_j} G(P_j, Q_{-j}) = a. \tag{4.2}$$
Slično, budući da je G nemanipulativna, kada društvo odlučuje prema profilu (P_j, Q_{-j}), individualac j nema poticaja da iskaže Q_j kao svoj profil preferencije te je:
$$a = G(P_j, Q_{-j}) \succ_{P_j} G(Q^N) = b. \tag{4.3}$$
Iz (4.1) i (4.3) slijedi
$$a \succ_{Q_i} b. \tag{4.4}$$
(4.4) je u kontradikciji s (4.2) te stoga zaključujemo da je naša pretpostavka bila pogrešna, to jest G je monotona. □

Poglavlje 5

Ponderirani sustav glasovanja

Do sada smo se bavili načinima glasovanja gdje je svaki glasač imao jedan glas na raspolaganju. Suprotno od takvog načina bilo bi da svaka osoba ima x glasova, gdje x može biti različit za svaku osobu, što se formalno naziva ponderirano glasovanje. Jedan jednostavan primjer može biti gradsko vijeće koje se sastoji od šest članova, u kojem predsjednik vijeća na raspolaganju ima tri glasa, potpredsjednik na raspolaganju ima dva glasa te ostali članovi koji imaju samo jedan glas na raspolaganju. Ponderirano glasovanje nije neuobičajeno, primjere ponderiranog glasovanja možemo vidjeti na skupštinama dioničara, izboru Vijeća sigurnosti Ujedinjenih Naroda, izborima za predsjednika SAD-a i u mnogim drugim situacijama.

Na izborima za predsjednika SAD-a, kada građani na izborima daju glas za predsjednika, oni zapravo biraju tko će ući u elektorsko tijelo i predstavljati saveznu državu i zapravo glasovati za predsjednika. Svaka savezna država ima određen broj elektorskih glasova, koji je određen brojem predstavnika te savezne države u Kongresu. Neke države imaju više elektorskih glasova od drugih pa time imaju i veću moć od drugih. Postavlja se pitanje kako odrediti moć koju posjeduje određena savezna država.

Da bi mogli odrediti moć moramo prvo uvesti neke pojmove vezane za ponderirano glasovanje. U ovom poglavlju bavit ćemo se "da/ne" ponderiranim sustavom glasovanja, koji se baziraju na prihvaćanju/odbacivanju neke odluke ili izbora između dvije alternative, iako se ponderirani sustavi glasovanja koriste i kod biranja između više alternativa (izbor predsjednika SAD-a).

Definicija 5.1. Ponderirani sustav glasovanja s n glasača, u oznaci $[q : w_1, w_1, \dots, w_{n-1}, w_n]$ definiran je sljedećim elementima:

- Glasačima, koje označavamo s $P_1, P_2, \dots, P_n$.
- Težinama, $w_1, w_2, \dots, w_n$, gdje $w_i, i \in \{1, \dots, n\}$ označava broj glasova koji posjeduje i-ti glasač.

- Kvotom, q koja označava minimalan broj glasova da bi neka odluka bila prihvaćena.

Napomena 5.2. Radi bolje preglednosti uobičajeno je težine nabrajati od najveće prema najmanjoj, odnosno $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_{n-1} \geq w_n$
S V ćemo označavati ukupan broj glasova, $V = w_1 + \cdots + w_n$

Primjer 5.3. Pogledajmo neke primjere ponderiranih sustava glasovanja.

- $[15 : 9, 7, 4, 2]$
  Kvota za dani sustav glasovanja je 15, prvi glasač ima 9 glasova, drugi glasač 7, treći 4, dok četvrti glasač ima samo 2 glasa na raspolaganju.

- $[10 : 9, 7, 4, 2]$
  Vidimo da je ovaj sustav glasovanja sličan prethodnom, jedina razlika je u tome što je kvota potrebna da bi se neka odluka prihvatila u ovakvom sustavu 10 glasova. Ali tu dolazimo do problema, kvota u ovom sustavu glasovanja je premala. Recimo da se prvi i treći glasač odluče glasovati za prihvaćanje, dok se drugi i četvrti glasač odluče glasovati za odbacivanje odluke. Vidimo da obje mogućnosti imaju dovoljno glasova da ispune kvotu te ovakav sustav glasovanja ne daje rješenje.

- $[23 : 9, 7, 4, 2]$
  Ovaj se sustav glasovanja, kao i prethodni, od početnog razlikuje samo u kvoti, koja u ovom sustavu iznosi 23 glasa. No vidimo da nam niti ovaj slučaj neće dati rješenje budući da je $9 + 7 + 4 + 2 = 22 < 23$ te kvota nikad neće biti ispunjena.

Iz prethodnih primjera i problema koje smo vidjeli da se javljaju u određenim slučajevima, postavljamo prirodne uvjete koje kvota mora zadovoljavati kako bi sustav glasovanja davao rješenje. Prvi je taj da mora biti moguće izglasovati neki prijedlog, to jest, $V \geq q$. Drugi uvjet je da ne smije postojati mogućnost da odluka bude prihvaćena i odbijena u isto vrijeme, odnosno, $\frac{V}{2} < q$. Ta dva uvjeta definiraju mogući skup vrijednosti koje kvota za određeni sustav glasovanja može poprimiti:

$$\frac{V}{2} < q \leq V, \quad (V = w_1 + \cdots + w_n)$$

Primjer 5.4. Pogledajmo još nekoliko primjera ponderiranih sustava glasovanja.

- $[10 : 11, 3, 2]$
  Uočimo da u ovakvom sustavu glasovanja, prvi glasač može donijeti odluku bez obzira na to kako će glasovati ostali glasači budući da je za donošenje odluke potrebno 10 glasova, a prvi glasač ih ima 11 na raspolaganju. Ako u sustavu glasovanja postoji takav glasač, nazivamo ga diktatorom.

- $[10 : 8, 3, 2]$
  Gledajući ovakav sustav glasovanja, vidimo da prvi glasač ima mogućnost spriječiti da neka odluka bude donesena, jer drugi i treći glasač zajedno nemaju dovoljno glasova da bi ispunili kvotu. Za glasača koji ima mogućnost spriječiti donošenje neke odluke kažemo da ima pravo veta.

- $[10 : 7, 6, 2]$
  Ovdje možemo uočiti kako treći glasač uopće nema utjecaja na to hoće li neka odluka biti donesena ili ne, budući da niti s prvim niti s drugim glasačem ne ispunjava kvotu, dok glasovi prvog i drugog glasača zadovoljavaju kvotu bez obzira na to kako će treći glasač glasovati. Ako u sustavu glasovanju postoji glasač čiji glasovi nemaju utjecaj na ishod rezultata nazivamo ga beskorisnim glasačem.

Definicija 5.5. Neka je $[q : w_1, w_1, \dots, w_{n-1}, w_n]$ ponderirani sustav glasovanja.
Glasača P_i nazivamo diktatorom ako vrijedi $w_i \geq q$.
Za glasača P_i kažemo da ima moć veta ako i samo ako $w_i < q$ i $V - w_i < q$.
Ako za glasača P_i vrijedi $V - w_i \geq q$, nazivamo ga beskorisnim glasačem.

Napomena 5.6. Uočimo iz prethodne definicije da ako je neki glasač diktator, onda on ima moć veta, dok obratna implikacija ne mora vrijediti.

Sada bi se mogli pitati kako odrediti koliku moć ima koji glasač. Kako bi mogli odgovoriti na to pitanje, pogledat ćemo dvije različite metode za određivanje moći određenog glasača u "da/ne" sustavu glasovanja. Svaka od tih metoda naziva se indeks moći zato što svakom glasaču dodjeljuje broj koji označava moć tog glasača. Prvo ćemo se upoznati s Banzhafovim indeksom moći, i njegovim računanjem, no da bismo mogli to napraviti moramo definirati neke pojmove.

Definicija 5.7. Neka su $\{P_1, \dots, P_n\}$ glasači u ponderiranom sustavu glasovanja $[q : w_1, w_1, \dots, w_{n-1}, w_n]$.
Koalicijom nazivamo skup glasača koji glasuju za istu alternativu.
Ako se svi glasači nalaze u koaliciji, tada takvu koaliciju nazivamo velika koalicija.
Težina koalicije je zbroj težina glasača koji se nalaze u koaliciji.
Koaliciju nazivamo pobjedničkom ako je težina koalicije veća ili jednaka od kvote, dok je u suprotnom zovemo gubitničkom koalicijom.

Napomena 5.8. Budući da su koalicije skupovi igrača, najpogodniji oblik zapisa koalicije je pomoću skupova. Recimo da su glasači P_1, P_2 i P_3 u koaliciji, to bi zapisali kao $\{P_1, P_2, P_3\}$, gdje je poredak kojim su glasači unutar skupa zapisani irelevantan.

Primjer 5.9. Neka je dan ponderirani sustav glasovanja $[10 : 7, 5, 2]$. U tablici navodimo sve moguće koalicije, njihove težine te jesu li pobjedničke (P) ili gubitničke (G).

Koalicija	**Težina**	**P/G**
$\{P_1\}$	7	G
$\{P_2\}$	5	G
$\{P_3\}$	2	G
$\{P_1, P_2\}$	12	P
$\{P_1, P_3\}$	9	G
$\{P_2, P_3\}$	7	G
$\{P_1, P_2, P_3\}$	14	P

Tablica 5.1: Lista koalicija

Vidimo da su od svih mogućih koalicija samo dvije pobjedničke. Uočimo i to da su u obje koalicije od važnosti prvi i drugi glasač, jer u slučaju da ijedan od ta dva glasača odluči izaći iz koalicije, ta koalicija više neće biti pobjednička.

Definicija 5.10. Neka je $[q : w_1, w_1, \dots, w_{n-1}, w_n]$ ponderiran sustav glasovanja i V neka pobjednička koalicija. Glasača $P_i \in V$ nazivamo ključnim glasačem za V ako koalicija V mora imati glas tog glasača da bi bila pobjednička. Za svakog glasača P_i možemo prebrojati u koliko različitih pobjedničkih koalicija je ključan glasač. Taj broj nazivamo ključan broj glasača i.

Sada možemo uvesti Banzhafov indeks moći. Banzhaf je smatrao da je kritičan broj igrača, a ne težina stvarno mjerilo moći nekog glasača. Osnovna ideja Banzhafovog indeksa moći temelji se na tome da ako glasači P_i i P_j imaju isti ključni broj, to bi značilo da imaju jednaku moć, ako P_i ima dvostruko veći ključni broj od P_j to bi značilo da P_i ima dvostruko veću moć od P_j. Sada možemo definirati Banzhafov indeks moći.

Definicija 5.11. Neka su $P_1, P_2, \dots, P_n$ glasači u ponderiranom sustavu glasovanja $[q : w_1, w_1, \dots, w_{n-1}, w_n]$. S $B_1, B_2, \dots, B_n$ označimo redom ključne brojeve glasača. Neka je $T = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$ zbroj svih ključnih brojeva. Banzhafov indeks moći (BPI), u oznaci β, je omjer ključnog broja glasača i zbroja svih ključnih brojeva, to jest za glasača i

$$\beta_i = \tfrac{B_i}{T}.$$

Pogledajmo na primjeru kako izračunati Banzhafov indeks moći.

Primjer 5.12. Neka je dan ponderirani sustav glasovanja $[8 : 5, 4, 3]$. Za svakog igrača ćemo izračunati njegov Banzhafov indeks moći.
Prvo trebamo naći sve pobjedničke koalicije. U našem slučaju to su koalicije $\{P_1, P_2\}, \{P_1, P_3\}$ i $\{P_1, P_2, P_3\}$.

Sada za svaku od tih koalicija trebamo vidjeti koji su joj ključni glasači. U sljedećoj tablici su navedene pobjedničke koalicje, zajedno sa težinama te ključnim glasačima.

Koalicija	**Težina**	**Ključni glasači**
$\{P_1, P_2\}$	9	P_1, P_2
$\{P_1, P_3\}$	8	P_1, P_3
$\{P_1, P_2, P_3\}$	12	P_1

Tablica 5.2: Pobjedničke koalicije

Sada za svakog glasača računamo njegov ključni broj, odnosno brojimo u koliko koalicija je ključan glasač. Dobivamo sljedeće ključne brojeve: $B_1 = 3, B_2 = 1, B_3 = 1$.
Da bi izračunali Banzhafov indeks treba nam još ukupan zbroj ključnih brojeva, T. $T = 3 + 1 + 1 = 5$.
Sada slijedi $\beta_1 = \frac{B_1}{T} = \frac{3}{5}, \beta_2 = \frac{B_2}{T} = \frac{1}{5}, \beta_3 = \frac{B_3}{T} = \frac{1}{5}$

Vidimo da za slučaj kada imamo tri glasača nije bio problem izračunati Banzhafov indeks moći. No povećanjem broja glasača, broj koalicija počinje brzo rasti, jer je broj koalicija za n glasača jednak $2^n - 1$ (ne gledamo praznu koaliciju) pa računanje Banzhafovog indeksa postaje kompliciranije, budući da za njegovo računanje trebamo sve pobjedničke koalicije.

Shapley-Shubikov indeks moći, drugu od spomenutih metoda za računanje moći glasača uveli su 1954. godine ekonomisti Lloyd Shapley i Martin Shubik. Shapley-Shubikov indeks temelji se na pretpostavci da je redoslijed ulaska glasača u koaliciju važan. Konkretno, glasač koji uđe u koaliciju i omogući joj da postigne kvotu smatra se najvažnijim. Shapley - Shubikov indeks mjeri kolika je vjerojatnost za svakog glasača da on bude najvažniji.
Prije nego uvedemo formalne definicije, trebamo promijeniti naš pristup glede koalicija. Za računanje Banzhafovog indeksa redoslijed kojim su glasači ulazili u koaliciju bio je nebitan, to jest koalicije $\{P_1, P_2\}$ i $\{P_2, P_1\}$ su nam bile ekvivalentne, budući da su sadržavale iste glasače. No, sada trebamo uzeti u obzir i redoslijed ulaska pojedinog glasača u koaliciju.

Definicija 5.13. Sekvencijalna koalicija je uređena lista glasača. Sekvencijalne koalicije zapisujemo u obliku $\langle P_1, P_2, \ldots, P_n \rangle$, gdje redoslijed kojim su glasači ulazili u koaliciju čitamo slijeva nadesno. Za glasača P_i iz sekvencijalne koalicije kažemo da je pivotni, ako nakon pribrojavanja njegovog glasa, koalicija ispunjava kvotu. Za svakog glasača možemo prebrojati koliko puta je on pivotni glasač u različitim koalicijama. Taj broj zovemo pivotni broj glasača i označavamo ga sa SS.

Napomena 5.14. Uočimo da ako imamo sustav sa n glasača, tada je broj sekvencijalnih koalicija jednak $n!$
Također, svaka sekvencijalna koalicija sadrži točno jednog pivotnog glasača.

Definicija 5.15. Shapley-Shubikov indeks glasača i, u oznaci σ računamo kao omjer pivotnog broja glasača i i zbroja pivotnih brojeva svih glasača.

Napomena 5.16. Budući da smo u Napomeni 5.14 vidjeli da za n glasača imamo $n!$ sekvencijalnih koalicija te da je u svakoj sekvencijalnoj koaliciji točno jedan pivotni igrač, iz toga slijedi da je ukupan zbroj pivotnih brojeva svih glasača jednak $n!$ pa prethodnu definiciju možemo iskazati na sljedeći način.

Definicija 5.17. Shapley-Shubikov indeks glasača i, u oznaci σ računamo kao omjer pivotnog broja glasača i i $n!$, gdje n označava ukupan broj glasača, odnosno za glasača i

$$\sigma_i = \frac{SS_i}{n!}.$$

Pogledajmo na primjeru kako izračunati Shapley-Shubikov indeks moći.

Primjer 5.18. Neka je dan ponderiran sustav glasovanja $[8 : 5, 4, 3]$. Izračunajmo Shapley-Shubikov indeks moći za svakog glasača.
Budući da je $n = 3$ to znači da ćemo imati $3! = 6$ sekvencijalnih koalicija.
Ispišimo prvo sve sekvencijalne koalicije i podcrtajmo u svakoj od njih pivotnog glasača.

$$\langle P_1, \underline{P_2}, P_3\rangle, \langle P_1, \underline{P_3}, P_2\rangle, \langle P_2, \underline{P_1}, P_3\rangle$$
$$\langle P_2, P_3, \underline{P_1}\rangle, \langle P_3, P_2, \underline{P_1}\rangle, \langle P_3, \underline{P_1}, P_2\rangle$$

Vidimo da je $SS_1 = 4, SS_2 = 1$ te $SS_3 = 1$.
Sada možemo izračunati Shapley-Shubikov indeks moći svakog glasača. $\sigma_1 = \frac{SS_1}{n!} = \frac{4}{6}, \sigma_2 = \frac{SS_2}{n!} = \frac{1}{6}, \sigma_3 = \frac{SS_3}{n!} = \frac{1}{6}$.

Kao i u slučaju Banzhafovog indeksa moći, za tri igrača bilo je jednostavno izračunati Shapley-Shubikov indeks moći za svakog glasača, no i u ovom slučaju situacija postaje kompliciranija povećanjem broja glasača. Primjerice, u slučaju $n = 5$, imamo $5! = 120$ sekvencijalnih koalicija.

Ako bolje pogledamo rezultate dobivene u Primjerima 5.12 i 5.18 vidimo da su oni slični, no općenito za neku slučajno odabranu situaciju, malo je vjerojatno da će metode dati približno slične, ili iste rezultate.

Primjer 5.19 (Vijeće sigurnosti Ujedinjenih Naroda). Vijeće sigurnosti Ujedinjenih Naroda sastoji se od petnaest zemalja članica. Pet od tih zemalja su stalne članice: Kina, Francuska, Rusija, Ujedinjeno Kraljevstvo i Sjedinjene Američke Države. Preostalih deset članica su privremene članice Vijeća koje imaju mandat od dvije godine. Nakon dvije

godine u Vijeće ulazi drugih deset zemalja članica Ujedinjenih Naroda i tako se rotiraju privremene zemlje članice Vijeća. Da bi neki prijedlog prošao u Vijeću sigurnosti, potrebno je da taj prijedlog odobre sve stalne članice Vijeća te barem još četiri privremene zemlje članice. Ako bilo koja od stalnih članica ne podrži prijedlog, on se odbacuje bez obzira koliko je članica glasovalo za prihvaćanje tog prijedloga.
Uočimo da to zapravo znači da stalne članice imaju moć veta. Očito je da stalne članice imaju veću moć od privremenih članica, no koliko je veća ta moć? Iako na raspolaganju nemamo težine glasova, uz malo matematike moći ćemo izračunati Banzhafov indeks moći.
Ovo je vrlo veliki sustav glasovanja, s petnaest zemalja članica i stotinama mogućih pobjedničkih koalicija, pa nam nije u interesu ispisati sve moguće pobjedničke koalicije. Za naše potrebe, pobjedničke koalicije možemo podijeliti na dva tipa:
1) Koalicije s pet stalnih članica i četiri privremene članice - takve koalicije imaju točan broj glasova za kvotu i svaka zemlja članica je kritična u takvoj koaliciji. Takvih koalicija u ovakvom sustavu glasovanja ima 210.
2) Koalicije s pet stalnih članica i pet ili više privremenih članica - u takvim koalicijama kritične su samo stalne zemlje članice budući da je težina koalicije strogo veća od kvote pa izlazak privremene zemlje članice iz koalicije ne bi utjecao na ishod glasovanja. U ovako definiranom sustavu glasovanja takvih koalicija ima 638.
Sada imamo dovoljno podataka da odredimo Banzhafov indeks moći za svaku zemlju članicu, jedino što ćemo ga računati drugačijim redoslijedom od onoga korištenog u Primjeru 5.12.
Prvo ćemo pronaći ukupan zbroj ključnih brojeva, T. Svaka od 210 koalicija tipa 1) ima 9 kritičnih zemalja članica, dok svaka od 638 koalicija tipa 2) ima 5 kritičnih zemalja članica, što daje $T = 210 \cdot 9 + 638 \cdot 5 = 1890 + 3190 = 5080$.
Svaka stalna zemlja članica je kritična u svakoj od ukupno 848 pobjedničkih koalicija (koalicije tipa 1) + koalicije tipa 2)). Zaključujemo da je ključni broj svake stalne zemlje članice 848, što je $848 \cdot 5 = 4240$ ukupno za sve stalne zemlje članice. Preostalih 840 $(5080 - 4240)$ dijelimo jednako između deset privremenih zemalja članica, što znači da je ključan broj svake privremen zemlje članice jednak 84.
Slijedi da Banzhafov indeks moći stalnih zemalja članica iznosi $\frac{848}{5080} = 16.7\%$ dok je Banzhafov indeks moći privremenih zemalja članica jednak $\frac{84}{5080} = 1.65\%$.
Vidimo da moć veta daje stalnim zemljama članicama otprilike 10 puta veću moć nego što ju imaju privremene zemlje članice.
Pogledajmo kako će moć biti distribuirana kod računanja Shapley-Shubikovog indeksa. Preskočit ćemo neke matematičke pojedinosti jer izlaze iz okvira ovog teksta.
Postoji 15! (oko 1.3 bilijuna) sekvencijalnih koalicija s 15 zemalja članica.
Privremena zemlja članica može biti pivotna ako i samo u koaliciju uđe deveta i ako se u koaliciji već nalaze sve stalne zemlje članice. Takvih sekvencijalnih koalicija je otprilike

2.44 milijarde.
Sada možemo izračunati Shapley-Shubikov indeks privremenih zemalja članica koji iznosi oko $\frac{2.44\,milijarde}{1.3\,bilijuna} \approx 0.0019 = 0.19\%$ za jednu zemlju, odnosno sveukupno privremene zemlje članice imaju 1.9% moći. To bi značilo da preostalih pet stalnih zemalja članica ima 98.2% moći, odnosno da Shapley-Shubikov indeks moći svake stalne zemlje članice iznosi otprilike 19.64%
Vidimo da prema Shapley-Shubikovom indeksu moći stalne zemlje članice imaju oko 100 puta veću moć nego privremene zemlje članice, što je još i veća razlika od one koju smo dobili računanjem Banzhafovog indeksa moći.

Sada bi se također mogli pitati, koji od navedenih indeksa je bolji? Tu ne postoji općeniti odgovor, budući da su oba indeksa korisna, i izbor je zapravo subjektivan. No ne smijemo zaboraviti da su početne pretpostavke za računanje gore navedenih indeksa različite. U praksi, izbor indeksa ovisi o tome koje pretpostavke bolje opisuju situaciju u kojoj trebamo izračunati nečiju moć.

Bibliografija

[1] P. Tannenbaum, *Excursions in Modern Mathematics*, Pearson, 2014.

[2] M. Maschler, E. Solan, S. Zamir, *Game Theory*, Cambridge University Press, 2013.

[3] N. McCarty, A. Meirowitz, *Political Game Theory*, Cambridge University Press, 2007.

[4] J. K. Hodge, R. E. Klima, *The Mathematics of Voting: A Hands-On Approach*, American Mathematical Society, 2018.

Sažetak

U ovome radu bavimo se pitanjem kako preferencije skupine individualaca spojiti u jednu preferenciju koja bi najbolje opisivala preferenciju društva.
Na početku, u prvom poglavlju upoznajemo se s nekim od najpoznatijih načina glasovanja i problemima koji se javljaju prilikom primjene istih.
U drugom poglavlju razmatramo funkciju društvenog blagostanja koja profile preferencije svih individualaca u društvu preslikava u jednu relaciju preferencije. Pokazujemo da kada postoje tri ili više alternative, ne postoji funkcija društvenog blagostanja koja zadovoljava određene uvjete.
Zatim u trećem poglavlju se bavimo funkcijom društvenog izbora koja sve profile preferencije skupine individualaca preslikava u jednu alternativu, i to onu koja bi društvu bila najpoželjnija. Tu također pokazujemo da takva funkcija ne postoji u slučaju kada imamo tri ili više alternativa i određene uvjete koje bismo htjeli da funkcija zadovoljava.
U četvrtom poglavlju, u obzir uzimamo i mogućnost manipulativnosti, odnosno gledamo što se događa ako individualci iskažu preferencije koje se razlikuju od njihovih stvarnih preferencija.
Na kraju, u petom poglavlju razmatramo slučaj ponderiranog glasovanja, gdje svaki individualac na raspolaganju ima određen broj glasova koji mu je dodijeljen prema nekim pravilima te proučavamo dva načina na koja možemo odrediti koliku moć ima određeni individualac u takvim sustavima glasovanja.

Summary

In this thesis we deal with the question of how to aggregate preferences of a group of individuals into a single preference that would best describe preference of the society.
At the beginning, in the first chapter we meet some of the most famous voting systems and problems encountered when applying them.
In the second chapter, we consider the social welfare function which maps profile preferences of all individuals into one preference relation. We show that when there are three or more alternatives, there is no social welfare function that meets certain conditions.
Then, in the third chapter, we're dealing with a social choice function that maps all the preference profiles into one alternative, that is most desirable by the society. We also show that such a function does not exist when we have three or more alternatives and certain conditions that we would like for the function to satisfy.
In chapter four, we consider the possibility of manipulation, we analyse what happens if individuals express preferences that differ from their real preferences.
In the end, in chapter five, we consider the case of the weighted voting, where each individual has certain number of votes that has been assigned to them by some rules and we study two ways to determine how much power an individual has in such voting systems.

Životopis

Dana 23. srpnja 1997. rođena sam u Zagrebu. Osnovnu školu završavam u Svetoj Nedelji te nakon završetka upisujem II. gimnaziju u Zagrebu koju završavam 2016. godine.
Iste godine upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij završavam 2019. godine te upisujem Diplomski sveučilišni studij Financijske i poslovne matematike na istom fakultetu.