Youngovi dijagrami i reprezentacije simetrične grupe

Fran, Luka

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Luka Fran

YOUNGOVI DIJAGRAMI I REPREZENTACIJE SIMETRIČNE GRUPE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Slaven Kožić

Zagreb, rujan 2021.

Ovaj diplomski ispit obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________, predsjednik
2. ____________________, član
3. ____________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ____________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________
2. ____________________
3. ____________________

Sadržaj

UVOD

Grupa predstavlja jedan od fundamentalnih matematičkih pojmova sa širokim rasponom primjena u brojnim područjima, kao što su algebra, analiza, algebarska geometrija itd. Jedan važan aspekt proučavanja teorije grupa jest njena teorija reprezentacija. Teorija reprezentacija je relativno nova grana matematike, čije promatranje je započelo u 20. stoljeću. U ovom radu ćemo se fokusirati na reprezentacije konačnih grupa, kako bismo lakše razumjeli njezinu strukturu i njezina svojstva. Pojam reprezentacije grupe možemo, pojednostavljeno, definirati kao način na koji grupa *djeluje* na vektorski prostor.

Glavni cilj ovog rada je proučiti reprezentacije simetrične grupe i njihovu ulogu u proučavanju simetrične grupe. Spomenut ćemo nekoliko osnovnih rezultata iz teorije reprezentacija i njihovu primjenu u području reprezentacija simetrične grupe. Glavni alat kojeg ćemo pritom koristiti su Youngovi dijagrami i pripadne tablice, koji će nam omogućiti da proučimo tzv. Spechtove module simetrične grupe.

Kako bismo prezentirali glavne rezultate ovog rada, prvo ćemo precizno definirati osnovne pojmove i rezultate iz teorije reprezentacija grupa. Sljedeće želimo definirati što je karakter reprezentacije konačne grupe i izložiti rezultate teorije reprezentacija konačnih grupa koji će nam također biti potrebni za naše izlaganje. Nakon svega toga u radu ćemo uvesti osnovne pojmove iz područja Youngovih dijagrama i tablica te proučiti njihovu ulogu u teoriji reprezentacija simetrične grupe.

U prvom poglavlju slijedit ćemo većinom gradivo knjiga [1] i [3]. Definirati ćemo tenzorski produkt, dokazati njegovu egzistenciju i jedinstvenost te se prisjetiti nekih njegovih osnovnih svojstava. Također ćemo definirati neke osnovne pojmove kao što su reprezentacija, subreprezentacija, preplitanje, direkta suma, klasa konjugiranosti, realacija ekvivalencije itd. Ovi pojmovi će biti od posebne važnosti kroz diplomski rad. Na kraju poglavlja ćemo dokazati Schurovu lemu koja predstavlja fundamentalan alat iz područja reprezentacija grupa.

U drugom poglavlju fokusiramo se na gradivo knjige [1]. Cilj nam je definirati karakter reprezentacije i, pomoću njega, proučiti neka osnovna svojstva reprezentacija konačnih grupa. Defnirati ćemo centralne funkcije i prezentirati nekoliko rezultata o karakterima reprezentacija konačnih grupa. Rezultate ovog poglavlja primijeniti ćemo u sljedećem poglavlju za proučavanje reprezentacija simetrične grupe.

Treće poglavlje slijedi gradivo knjige [2]. U ovom poglavlju ćemo definirati simetričnu grupu, Youngove dijagrame i Youngove tablice. Nakon toga ćemo uvesti i proučavati djelovanje simetrične grupe na Youngove tablice. Na kraju ćemo definirati Spechtove module i objasniti koja je njihova uloga u teoriji reprezentacija simetrične grupe. Između ostalog, dokazat ćemo da postoji bijektivna veza između particija prirodnog broja n i ireducibilnih reprezentacija grupe S_n, koja se realizira pomoću Spechtovih modula.

1 REPREZENTACIJE GRUPA

1.1 Tenzorski produkt

Ovaj dio poglavlja slijedi poglavlje 1. iz knjige [3]; više informacija o tenzorskom produktu dostupno je i u knjizi [6]. Definirat ćemo što je tenzorski produkt i navesti neka njegova svojstva.

Definicija 1.1. *Neka su V, W i Z proizvoljni vektorski prostori nad istim poljem Γ i neka je definirano preslikavanje*

$$\varphi : V \times W \to Z.$$

*Za preslikavanje φ kažemo da je **bilinearno** ako zadovoljava sljedeća dva svojstva*

$$\varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda\varphi(x_1, y) + \mu\varphi(x_2, y), \text{ za sve } x_1, x_2 \in V,\ y \in W,\ \lambda, \mu \in \Gamma,$$
$$\varphi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda\varphi(x, y_1) + \mu\varphi(x, y_2), \text{ za sve } x \in V,\ y_1, y_2 \in W,\ \lambda, \mu \in \Gamma.$$

*Također, ako vrijedi da je $Z = \Gamma$, tada φ zovemo **bilinearni funkcional**.*

Sada ćemo razmotriti jednu važnu konstrukciju u teoriji reprezentacija, a to je tenzorski produkt. U nastavku poglavlja svi vektorski prostori koje promatramo su kompleksni, konačnodimenzionalni i definirani nad istim poljem Γ.

Neka je $\otimes$ bilinearno preslikavanje $\otimes : V \times W \to T$ za kojeg vrijdi $x \otimes y = \otimes(x, y)$. Kažemo da $\otimes$ zadovoljava **univerzalno svojstvo**, ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:
(i_1) Vektori $x \otimes y$ ($x \in V$, $y \in W$) generiraju T, odnosno $Im\otimes = T$.
(i_2) Neka je φ bilinearno preslikavanje $\varphi : V \times W \to H$, tada postoji linearno preslikavanje $f : T \to H$ takvo da vrijedi $\varphi = f \circ \otimes$.

Ova dva uvjeta možemo ekvivalentno zapisati kao sljedeći jedan uvjet:
(i) Neka je H vektorski prostor i $\varphi : V \times W \to H$ bilinearno preslikavanje, tada postoji **jedinstveni** linearni operator $f : T \to H$ takav da vrijedi $\varphi = f \circ \otimes$.

Dokažimo da su ovi uvjeti zaista ekvivalentni. Prvo pretpostavimo da su uvjeti (i_1) i (i_2) zadovoljeni i neka su $f_1 : T \to H$ i $f_2 : T \to H$ linearna preslikavanja takva da vrijedi:

$$\varphi(x, y) = f_1(x \otimes y) \qquad \text{i} \qquad \varphi(x, y) = f_2(x \otimes y).$$

Tada imamo

$$f_1(x \otimes y) = f_2(x \otimes y), \text{ za sve } x \in V,\ y \in W.$$

Iz svojstva (i_1) slijedi da je $f_1 = f_2$, pa je f jedinstveno određena s φ.

Dokažimo i obrat, pretpostavimo da je svojstvo (i) zadovoljeno. Svojstvo (i_2) očito direktno vrijedi iz svojstva (i). Kako bismo dokazali svojstvo (i_1), definiramo T_1 koji je vektorski potprostor od T generiran vektorima $x \otimes y$, za $x \in V$ i $y \in W$. Tada imamo bilinearno preslikavanje $\varphi : V \times W \to T_1$ takvo da vrijedi

$$i\varphi(x,y) = x \otimes y, \text{ za sve } x \in V, y \in W.$$

gdje je $i : T_1 \to T$ inkluzija. Postoji linearno preslikavanje $f : T \to T_1$ takvo da vrijedi

$$f(x,y) = f(x \otimes y), \text{ za sve } x \in V, y \in W.$$

Primjenjujući preslikavanje i na ovu relaciju, dobivamo

$$(i \circ f)(x \otimes y) = (i \circ \varphi)(x,y) = x \otimes y.$$

S druge strane, očito vrijedi

$$l(x \otimes y) = x \otimes y, \text{ za sve } x \in V, y \in W.$$

gdje je l funkcija identiteta na T. Jedinstvenost u (i) nas navodi na $i \circ f = l$. Slijedi da je preslikavanje i surjekcija i vrijedi $T_1 = T$. Time smo dokazali da vrijedi (i_1).

PRIMJER 1.1.
Neka su W i H vektorski prostori nad poljem Γ i f bilinearno preslikavanje $\Gamma \times W \to W$ dano s $f(\lambda, y) = \lambda y$. Znamo da vrijedi $f(1,y) = y$, pa f zadovoljava svojstvo (i_1). Kako bismo pokazali (i_2), neka je $\varphi : \Gamma \times W \to H$ proizvoljno bilinearno preslikavanje i definiramo linearno preslikavanje $g : W \to H$ takvo da

$$g(y) = \varphi(1,y).$$

Tada, za $\lambda \in \Gamma$ i $y \in W$ vrijedi

$$\varphi(\lambda, y) = \lambda\varphi(1,y) = \lambda g(y) = g(\lambda y) = g(f(\lambda, y)),$$

čime smo dokazali i (i_2) svojstvo.

U nastavku ćemo navesti nekoliko lema, čiji dokazi slijede direktno iz definicije tenzorskog produkta. Pretpostavljamo da je $\otimes : V \times W \to T$ bilinearno preslikavanje za kojeg vrijedi univerzalno svojstvo.

Lema 1.1. *Neka su a_i $(i = 1, \dots, r)$ linearno nezavisni vektori iz V i neka su b_i $(i = 1, \dots, r)$ proizvoljni vektori u W. Tada iz relacije*

$$\sum_i a_i \otimes b_i = 0$$

slijedi da je $b_i = 0$ $(i = 1, \dots, r)$.

Dokaz. Iz pretpostavke leme da su a_i linearno nezavisni možemo izabrati r linearnih funkcionala $f^i : V \to \Gamma$ takvih da je

$$f^i(a_j) = \delta^i_j, \text{ za sve } i, j = 1, \dots, r.$$

Proučimo sada bilinearni funkcional

$$\Phi(x,y) = \sum_{i=1}^{r} f^i(x)g^i(y), \text{ za sve } x \in V, y \in W,$$

gdje su g^i proizvoljni linearni funkcionali $g^i : W \to \Gamma$. Zbog svojstva (i_2) postoji linearni funkcional h na T takav da

$$h(x \otimes y) = \sum_{i=1}^{r} f^i(x)g^i(y).$$

Tada je,

$$h(\sum_{j=1}^{r} a_j \otimes b_j) = \sum_{i,j=1}^{r} f^i(a_j)g^i(b_j) = \sum_{i=1}^{r} g^i(b_i).$$

Iz činjenice da je $\sum_{j=1}^{r} a_j \otimes b_j = 0$, slijedi da je

$$\sum_{i=1}^{r} g^i(b_i) = 0.$$

Kako su g_i proizvoljni, dobivamo

$$b_i = 0, \text{ za sve } i = 1, \dots, r.$$

■

Korolar 1.1. *Za $a \neq 0$ i $b \neq 0$ vrijedi da je $a \otimes b \neq 0$.*

Lema 1.2. *Neka su V, W i T vektorski prostori koji zadovoljavaju univerzalno svojstvo i neka je $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ baza od V. Tada se svaki vektor $z \in T$ može zapisati u obliku*

$$z = \sum_{\alpha} e_\alpha \otimes b_\alpha, \text{ za sve } b_\alpha \in W,$$

gdje je konačno mnogo $b_\alpha \neq 0$. Također, vektori b_α su jedinstveno određeni sa z.

Dokaz. Zbog svojstva (i_1), z možemo zapisati kao konačnu sumu

$$z = \sum_{\nu} x_\nu \otimes y_\nu, \; x_\nu \in V, \; y_\nu \in W.$$

Svaki vektor x_ν možemo zapisati kao

$$x_\nu = \sum_{\alpha} \lambda_\nu^\alpha e_\alpha, \text{ za neke } \lambda_\nu^\alpha \in \Gamma.$$

Tada imamo

$$z = \sum_{\nu,\alpha} \lambda_\nu^\alpha e_\alpha \otimes y_\nu = \sum_{\nu,\alpha} e_\alpha \otimes \lambda_\nu^\alpha y_\nu = \sum_{\alpha} e_\alpha \otimes b_\alpha,$$

gdje je

$$b_\alpha = \sum_{\nu} \lambda_\nu^\alpha y_\nu.$$

Dokazali smo prvu tvrdnju leme i da je konačno mnogo $b_\alpha \neq 0$. Da bi dobili jedinstvenost pretpostavimo da je

$$\sum_\alpha e_\alpha \otimes b_\alpha = \sum_\alpha e_\alpha \otimes b'_\alpha,\ b_\alpha, b'_\alpha \in W.$$

Tada vrijedi

$$\sum_\alpha e_\alpha \otimes (b_\alpha - b'_\alpha) = 0,$$

pa prema prethodnoj lemi slijedi da je $b_\alpha = b'_\alpha$, za sve $\alpha \in A$. ■

Lema 1.3. *Svaki vektor $z \in T$ koji je različit od 0 može se zapisati u obliku*

$$z = \sum_{i=1}^{r} x_i \otimes y_i, \text{ za sve } x_i \in V,\ y_i \in W,$$

gdje su x_i, za sve $i = 1, \ldots, r$ linearno nezavisni i y_i, za sve $i = 1, \ldots, r$ također linearno nezavisni.

Dokaz. Zapišimo vektor z u obliku $z = \sum_{i=1}^{r} x_i \otimes y_i$ gdje je r minimalan.
Za $r = 1$, iz bilinearnosti slijedi da je $x_1 \neq 0$ i $y_1 \neq 0$.
U slučaju $r \geq 2$ pretpostavimo da su vektori x_i linearno zavisni. Tada možemo pretpostaviti da

$$x_r = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda^i x_i, \text{ za neke skalare } \lambda^i.$$

Tada imamo da je

$$z = \sum_{i=1}^{r-1} x_i \otimes y_i + \sum_{i=1}^{r-1} \lambda^i x_i \otimes y_r = \sum_{i=1}^{r-1} x_i \otimes (y_i + \lambda^i y_r) = \sum_{i=1}^{r-1} x_i \otimes y'_i.$$

Što je u kontradikciji s minimalnosti od r. Stoga, vrijedi da su vektori x_i linearno nezavisni. Analogno bi pokazali da su vektori y_i linearno nezavisni. ■

U nastavku ćemo pokazati jedinstvenost i egzistenciju bilinearnog preslikavanja za kojeg vrijedi univerzalno svojstvo. Pretpostavimo da su $\otimes : V \times W \to T$ i $\widetilde{\otimes} : V \times W \to \widetilde{T}$ bilinearna preslikavanja koja zadovoljavaju univerzalno svojstvo. Zbog svojstva (i_2) postoje linearna preslikavanja

$$f : T \to \widetilde{T} \quad \text{i} \quad g : \widetilde{T} \to T$$

takva da

$$f(x \otimes y) = x \,\widetilde{\otimes}\, y \quad \text{i} \quad g(x \,\widetilde{\otimes}\, y) = x \otimes y, \text{ za sve } x \in V, y \in W.$$

Ove dvije relacije nas navode na

$$gf(x \otimes y) = x \otimes y \qquad \text{i} \qquad fg(x \mathbin{\widetilde{\otimes}} y) = x \mathbin{\widetilde{\otimes}} y.$$

Nadalje, zbog svojstva (i_1) slijedi da je

$$g \circ f = i \qquad \text{i} \qquad f \circ g = i,$$

gdje je s i označena identiteta na T u prvoj, odnosno, identiteta na $\widetilde{T}$ u drugoj jednakosti. Iz ovoga slijedi da su f i g inverzni linearni izomorfizmi.
Kako bismo pokazali egzistenciju koristit ćemo slobodan vektorski prostor $C(V \times W)$ nad $V \times W$. Preciznije, $C(V \times W)$ je vektorski prostor čiju jednu bazu čini skup $V \times W$. Neka $N(V, W)$ označava potprostor od $C(V \times W)$ generiran vektorima

$$(\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda(x_1, y) - \mu(x_2, y), \text{ za sve } x_1, x_2 \in V, y \in W, \lambda, \mu \in \Gamma,$$

i

$$(x, \lambda y_1 + \mu y_2) - \lambda(x, y_1) - \mu(x, y_2), \text{ za sve } x \in V, y_1, y_2 \in W, \lambda, \mu \in \Gamma.$$

Definiramo prostor

$$T = C(V \times W)/N(V, W)$$

i neka je $\pi : C(V \times W) \to T$ kanonska projekcija.
Definiramo funkciju $\otimes : V \times W \to T$ sa

$$x \otimes y = \pi(x, y).$$

Pokazat ćemo da je $\otimes$ bilinearno preslikavanje koje zadovoljava univerzalno svojstvo. Imamo da je

$$\pi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda\pi(x_1, y) - \mu\pi(x_2, y) \in N(V, W), \text{ za sve } x_1, x_2 \in V, y \in W, \lambda, \mu \in \Gamma,$$

pa slijedi da je

$$(\lambda x_1 + \mu x_2) \otimes y = \pi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda\pi(x_1, y) + \mu\pi(x_2, y) = \lambda x_1 \otimes y + \mu x_2 \otimes y, \text{ za sve } x_1, x_2 \in V, y \in W, \lambda, \mu \in \Gamma.$$

Analogno bismo pokazali da je $\otimes$ linearan u drugoj varijabli.
Kako bismo pokazali svojstvo (i_1), uočimo da je svaki vektor $z \in T$ oblika

$$z = \pi(\sum_{\nu,\mu} \lambda^{\nu\mu}(x_\nu, y_\mu)), \text{ za sve } x_\nu \in V, y_\mu \in W.$$

Iz ovoga slijedi

$$\sum_{\nu,\mu} \lambda^{\nu\mu} x_\nu \otimes y_\mu = \sum_{\nu,\mu} \lambda^{\nu\mu} \pi(x_\nu, y_\mu = \pi \sum_{\nu,\mu} \lambda^{\nu\mu}(x_\nu, y_\mu) = z.$$

Ovime smo pokazali svojstvo (i_1), odnosno, $Im\pi = T$. Kako bismo pokazali svojstvo (i_2), uzimamo proizvoljno bilinearno preslikavanje $\psi : V \times W \to H$. Zato jer uređeni parovi $(x, y), x \in V, y \in W$ čine bazu za $C(V \times W)$ postoji jedinstveno linearno preslikavanje

$$g : C(V \times W) \to H$$

takvo da vrijedi

$$g(x, y) = \psi(x, y), \text{ za sve } x \in V, y \in W.$$

Iz bilinearnosti od ψ slijedi $N(V, W) \subset Ker(g)$. Naime, ako je

$$z = (\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda(x_1, y) - \mu(x_2, y), \text{ za sve } x_1, x_2 \in V, y \in W, \lambda, \mu \in \Gamma.$$

generator od $N(V, W)$, tada je

$$\begin{aligned} g(z) &= g(\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda g(x_1, y) - \mu g(x_2, y) \\ &= \psi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda\psi(x_1, y) - \mu\psi(x_2, y) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Analogno, možemo pokazati da je

$$g[(x, \lambda y_1 + \mu y_2) - \lambda(x, y_1) - \mu(x, y_2)] = 0, \text{ za sve } x \in V, y_1, y_2 \in W, \lambda, \mu \in \Gamma$$

pa slijedi da je $N(V, W) \subset Ker(g)$. Stoga, g inducira linearno preslikavanje

$$f : C(V \times W)/N(V, W) \to H$$

takvo da je

$$f \circ \pi = g.$$

Slijedi da je

$$(f \circ \otimes)(x, y) = f\pi(x, y) = g(x, y) = \psi(x, y), \text{ za sve } x \in V, y \in W.$$

Ovime smo dobili da je $\otimes$ bilinearno preslikavanje koje zadovoljava univerzalno svojstvo. Sada smo spremni definirati tenzorski produkt.

Definicija 1.2. *Neka su V i W vektorski prostori.* ***Tenzorski produkt*** *prostora V i W je uređen par $(T, \otimes)$, gdje je T vektorski prostor, a $\otimes$ je bilinearno preslikavanje $\otimes : V \times W \to T$ koje zadovoljava univerzalno svojstvo.*

Vektorski prostor T koji je do na izomorfizam jedinstveno određen s V i W, također zovemo tenzorski produkt od V i W i označavamo ga sa $V \otimes W$.

U nastavku ćemo pokazati da vrijedi svojstvo komutativnosti za tenzorski produkt, odnosno da imamo sljedeći izomorfizam vektorskih prostora

$$V \otimes W \cong W \otimes V.$$

Proučit ćemo bilinearna preslikavanja

$$\varphi : V \times W \to W \otimes V \qquad \text{i} \qquad \psi : W \times V \to V \otimes W$$

zadana kao

$$\varphi(x, y) = y \otimes x \qquad \text{i} \qquad \psi(y, x) = x \otimes y, \text{ za sve } x \in V, y \in W.$$

Uzimajući u obzir svojstvo (i_2), dolazimo do linearnih preslikavanja $f : V \otimes W \to W \otimes V$ i $g : W \otimes V \to V \otimes W$ definiranih kao

$$f(x \otimes y) = y \otimes x \qquad \text{i} \qquad g(y \otimes x) = x \otimes y, \text{ za sve } x \in V, y \in W.$$

Zajedno sa svojstvom (i_1), ove relacije impliciraju da je $g \circ f = i$ i $f \circ g = i$. Stoga su f i g inverzni izomorfizmi čime smo dokazali da su tenzorski produkti $V \otimes W$ i $W \otimes V$ izomorfni.

PRIMJER 1.2.
Uzimamo da je $V = \mathbb{C}^2$ i $W = \mathbb{C}^3$. Neka su e_1, e_2 i f_1, f_2, f_3 standardne kanonske baze od V i W. Tada vektori $e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, e_1 \otimes f_3, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2, e_2 \otimes f_3$, čine bazu tenzorskog produkta prostora V i W. Specijalno, tenzorski produkt $V \otimes W$ je dimenzije 6.

Općenito, može se dokazati da je tenzorski produkt vektorskih prostora dimenzija m i n vektorski prostor dimenzije $m \cdot n$. Štoviše, ako vektori $v_1, \ldots, v_m$ čine bazu prvog, a vektori $w_1, \ldots, w_n$ bazu drugog prostora, onda vektori $v_i \otimes w_j$, gdje su $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, čine bazu njihovog tenzorskog produkta.

U nastavku ovog poglavlja ćemo prikazati redukciju bilinearnih preslikavanja na linearna preslikavanja. Fiksiramo vektorske prostore V i W, te neka je Z treći vektorski prostor. U nastavku ćemo s $B(V, W; Z)$ označavati skup svih bilinearnih funkcija s $V \times W$ u Z. Tada postoji izomorfizam vektorskih prostora

$$\Phi : L(V \otimes W; Z) \overset{\cong}{\to} B(V, W; Z).$$

definiran s

$$\Phi(f) = f \circ \otimes \qquad f \in L(V \otimes W; Z).$$

Svojstvo (i_2) povlači da je Φ surjektivna pošto tvrdi da svako linearno preslikavanje $\varphi : V \times W \to Z$ možemo faktorizirati preko tenzorskog produkta. Kako bismo dokazali da je Φ injektivna pretpostavimo da vrijedi $f \circ \otimes = 0$ za neko linearno preslikavanje $f : V \otimes W \to Z$.

Prema (i_1), prostor $V \otimes W$ je generiran produktima $x \otimes y$, za sve $x \in V, y \in W$ pa slijedi da je $f = 0$.

Vezu između bilinearnog preslikavanja $\varphi : V \times W \to Z$ i linearnog preslikavanja $f : V \otimes W \to Z$, iz gornje diskusije, izražavamo pomoću sljedećeg komutativnog dijagrama:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\otimes"'] & Z \\ V \otimes W \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Slika 1: Komutativni dijagram

Propozicija 1.1. *Neka je $\varphi : V \times W \to Z$ bilinearno preslikavanje i $f : V \otimes W \to Z$ inducirano linearno preslikavanje. Preslikavanje f je surjektivno ako i samo ako φ zadovoljava svojstvo (i_1). Nadalje, f je injektivno ako i samo ako φ zadovoljava svojstvo (i_2).*

Dokaz. Dokaz prve tvrdnje slijedi iz sljedeće relacije

$$Im(\varphi) = Im(f).$$

Kako bismo dokazali drugu tvrdnju pretpostavimo da je f injektivna. Tada je uređeni par $(Im(\varphi), \varphi)$ tenzorski produkt prostora V i W. Stoga, svako bilinearno preslikavanje $\psi : V \times W \to K$ inducira linearno preslikavanje $g : Im(\varphi) \to K$ takvo da je

$$\psi(x, y) = g\varphi(x, y).$$

Ako je f proširenje od g do linearnog preslikavanja $f : Z \to K$, onda slijedi da je

$$\psi(x, y) = f\varphi(x, y)$$

pa φ zadovoljava svojstvo (i_2).

Obratno, pretpostavimo da φ zadovoljava svojstvo (i_2). Tada bilinearno preslikavanje $\otimes : V \times W \to V \otimes W$ inducira linearno preslikavanje $h : Z \to V \otimes W$ takvo da

$$x \otimes y = h\varphi(x, y).$$

S druge strane, imamo $\varphi(x, y) = f(x \otimes y)$ pa slijedi da je

$$x \otimes y = hf(x \otimes y).$$

Stoga je $h \circ f = i$, pa je f injektivna. ∎

1.2 Osnovni pojmovi

U ovom dijelu ćemo definirati neke osnovne pojmove i definicije iz teorije reprezentacija grupa, koje ćemo koristiti u nastavku, kako bismo lakše mogli razumjeti temu. Navedene pojmove i definicije možete pronaći u točki 1.1 knjige [1], knjizi [6] ili skripti [4].

Definicija 1.3. *Neka su $(V, \cdot)$ i $(W, \times)$ grupe. Preslikavanje $f : V \to W$ je* ***homomorfizam*** *grupe V u grupu W ako je*

$$f(a \cdot b) = f(a) \times f(b),$$

za svaki izbor $a, b \in V$. Ukoliko je f bijekcija, tada to preslikavanje još nazivamo ***izomorfizam*** *grupe V u grupu W.*
Homomorfizam $f : V \to V$ se naziva ***endomorfizam*** *grupe V.* ***Automorfizmom*** *nazivamo bijektivni endomorfizam.*

Definicija 1.4. *Neka je X vektorski prostor nad poljem Γ, gdje je Γ polje realnih ili polje kompleksnih brojeva.* ***Skalarni produkt*** *je preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \Gamma$ s svojstvima:*
1.$\langle x, x\rangle \geq 0$, *za sve $x \in X$*
2.$\langle x, x\rangle = 0$ *ako i samo ako $x = 0$*
3.$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, *za sve $x, y \in X$*
4.$\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$, *za sve $x, y \in X$ i svaki $\alpha \in \Gamma$*
5.$\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$ *za sve $x, y, z \in X$*
Vektorski prostor na kojemu je definiran skalarni produkt naziva se ***unitarni prostor****.*

Sa $\overline{\langle y, x\rangle}$ označavamo broj kompleksno konjugiran broju $\langle x, y\rangle$.

Definicija 1.5. *Neka je W unitaran prostor nad poljem Γ. Za vektore $u, v \in W$ kažemo da su ortogonalni ako vrijedi $\langle u, v\rangle = 0$. Tada definiramo ortogonalni komplement $W^{\perp}$ prostora W kao:*

$$W^{\perp} = \{x \in W : \langle x, y\rangle = 0, \text{ za sve } y \in W\}$$

Definicija 1.6. *Za skup vektora $\{e_1, \ldots, e_k\}$ kažemo da je* ***ortonormiran*** *ako vrijedi*

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \text{ za sve indekse } i, j = 1, \ldots, k$$

pri čemu je δ_{ij} Kroneckerov simbol (0 za $i \neq j$, 1 za $i = j$).

Za svaki ortonormirani skup vrijedi da je linearno nezavisan.

Definicija 1.7. *Za element a grupe G kažemo da je* ***konjugiran*** *elementu $b \in G$ ako postoji $c \in G$ takav da je $a = c^{-1}bc$. Za dva elementa a i b kažemo da se nalaze u istoj* ***klasi konjugiranosti*** *ako je a konjugiran elementu b.*

Uvodimo definicije binarne relacije i pojma ekvivalencije.

Definicija 1.8. *Neka su A i B neki skupovi, a R neki podskup skupa $A \times B = \{(a,b)|a \in A, b \in B\}$. Svaki podskup R skupa $A \times B$ zove se **binarna relacija** između elemenata skupa A i elemenata skupa B ili relacija sa A u B. Za $x \in A$ kažemo da je u relaciji R s $y \in B$ i pišemo xRy, ako je $(x,y) \in R$.*

Definicija 1.9. *Neka je A neki skup. Za relaciju $R \subseteq A \times A$ kažemo da je **relacija ekvivalencije** ako je ona refleksivna, simetrična i tranzitivna, odnosno, ako vrijedi:*

1) *Za relaciju $R \subseteq A \times A$ kažemo da je **refleksivna** ako je aRa, za svaki $a \in A$.*

2) *Za relaciju $R \subseteq A \times A$ kažemo da je **simetrična** ako ima svojstvo: ako je aRb, tada je i bRa, za sve $a, b \in A$.*

3) *Za relaciju $R \subseteq A \times A$ kažemo da je **tranzitivna** ako ima svojstvo: ako je aRb i bRc, tada je i aRc, za sve $a, b, c \in A$.*

Lako se vidi da je konjugiranost relacija ekvivalencije na grupi G pa je G disjunktna unija svojih klasa konjugiranosti.

Definicija 1.10. *Neka je Γ neko proizvoljno polje i neka je V neki konačnodimenzionalan vektorski prostor nad Γ. Sa $L(V)$ označimo algebru linearnih operatora na V. Za proizvoljan $A \in L(V)$ definiramo*

$$GL(V) := \{A \in L(V) | A \text{ je invertibilan operator}\}.$$

*Drugim riječima, linearni operatori A iz $GL(V)$ su oni koji su još i bijekcije, a $GL(V)$ zovemo **opća linearna grupa**.*

$GL(V)$ je zatvoren na operaciju množenja, sadrži jediničan operator, tj. identitetu $V \to V$ te vidimo da ako je $A \in GL(V)$, onda je također i $A^{-1} \in GL(V)$, pa je taj skup zaista grupa.

Definicija 1.11. ***Reprezentacijom** konačne grupe G na kompleksnom konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V nazivamo homomorfizam grupa $\rho : G \to GL(V)$, gdje je $GL(V)$ ili $Aut(V)$ grupa svih automorfizama od V. Tada kažemo da preslikavanje ρ definira na vektorskom prostoru V strukturu G-modula.*

Ukoliko preslikavanje ρ zadovoljava svojstvo iz definicije 1.11., tada za vektorski prostor V također kažemo da je reprezentacija grupe G te u tome slučaju ćemo obično umjesto $\rho(g)v$ pisati gv. Dimenziju od V nazivamo stupnjem preslikavanja ρ.

Preslikavanje φ između dvije reprezentacije V i W grupe G (također zvana i $G-$linearno preslikavanje) je linearan operator $\varphi : V \to W$ takav da je $g\varphi(v) = \varphi(gv)$ za sve $g \in G$ i $v \in V$. Takvo preslikavanje φ ćemo zvati **preplitanjem** reprezentacija V i W.

Definicija 1.12. ***Subreprezentacija** od reprezentacije V grupe G je vektorski potprostor W od V koji je invarijantan na djelovanje grupe G, tj. takav da vrijedi $gw \in W$ za sve $g \in G$ i $w \in W$. Za reprezentaciju V kažemo da je **ireducibilna** ako ne postoji netrivijalan invarijantni potprostor W od V.*

Definicija 1.13. *Neka su V i W dvije reprezentacije grupe G. Tada se* ***direktna suma*** *tih dviju reprezentacija označava $V \oplus W$, a definira se kao*

$$g(v, w) = (gv, gw), \text{ za sve } g \in G,\ v \in V \text{ i } w \in W.$$

Tenzorski produkt *reprezentacija V i W definiramo kao*

$$g(v \otimes w) = (gv) \otimes (gw), \text{ za sve } g \in G,\ v \in V \text{ i } w \in W.$$

Neka su V i W reprezentacije neke grupe G, tada se lagano može provjeriti da su njihova direktna suma $V \oplus W$ i njihov tenzorski produkt $V \otimes W$, dani prethodnom definicijom također reprezentacije od G. Za reprezentaciju V, njezin n-ti produkt $V^{\otimes n}$ je ponovno reprezentacija od G (zbog $g(v \otimes w) = gv \otimes gw$). Isto vrijedi i za n-tu direktnu sumu reprezentacija $V^{\oplus n}$.

Definicija 1.14. *Neka je π reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V nad poljem Γ. Na dualnom prostoru $V^* = L(V, \Gamma)$ definiramo* ***dualnu reprezentaciju*** *π^t reprezentacije π :*

$$\pi^t(a)f = f \circ \pi(a^{-1}), \quad \text{tj.} \quad (\pi^t(a)f)(v) = f(\pi(a^{-1})v), \text{ za sve } a \in G,\ v \in V,\ f \in V^*.$$

Nakon što smo definirali dualnu reprezentaciju i tenzorski produkt od dvije reprezentacije, tada, ako su V i W reprezentacije od neke grupe G, na prostoru $Hom(V, W)$ možemo definirati strukturu reprezentacije od G pomoću izomorfizma vektorskih prostora $Hom(V, W) \cong V^* \otimes W$. Djelovanje od G je tada dano sljedećom formulom:

$$(g\varphi)(v) = g\varphi(g^{-1}v), \text{ za sve } v \in V.$$

Možemo napomenuti da je dualna reprezentacija zapravo poseban slučaj od situacije kada je $W = \mathbb{C}$ trivijalna reprezentacija, npr; $gw = w$, za sve $w \in \mathbb{C}$, pa je V^* G-modul.

Valja istaknuti kako sljedeći izomorfizam, osim za vektorske prostore, vrijedi i za reprezentacije:

$$V \otimes (U \oplus W) \cong (V \otimes U) \oplus (V \otimes W).$$

Neka je X konačan skup i neka G djeluje na X, tj. neka je dan homomorfizam grupa $G \to Aut(X)$. Tada možemo definirati pripadnu permutacijsku reprezentaciju.

Definicija 1.15. *Neka je V vektorski prostor sa bazom $\{e_x : x \in X\}$ i neka G djeluje na V sa*

$$g\Sigma a_x e_x = \Sigma a_x e_{gx}.$$

Djelovanje grupe G nazivamo ***permutacijskom reprezentacijom***.

Definicija 1.16. *Označimo s R kompleksan vektorski prostor svih funkcija s grupe G u polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Tada je* ***regularna reprezentacija*** *grupe G na prostoru R definirana s*

$$(gf)(h) = f(g^{-1}h), \text{ za sve } g, h \text{ iz } G \text{ i sve } f \text{ iz } R.$$

U nastavku će nam biti potreban pojam reprezentacije prstena na vektorskom prostoru.

Definicija 1.17. *Reprezentacija prstena A s jedinicom na vektorskom prostoru V je preslikavanje $\pi\colon A \to L(V)$ takvo da vrijedi*

$$\pi(a)(x+y) = \pi(a)x+\pi(a)y, \quad \pi(a+b) = \pi(a)+\pi(b), \quad \pi(ab) = \pi(a)\pi(b) \quad i \quad \pi(1) = id_V$$

za sve elemente $a, b \in A$ i $x, y \in V$. Tada kažemo da je V (lijevi) A-modul.

1.3 Schurova Lema

Ovaj dio poglavlja slijedi točku 1.2 knjige [1]. Također u ovom dijelu poglavlja promatramo reprezentacije konačnih grupa na kompleksnom prostoru $\mathbb{C}$.

Ranije smo demonstrirali kako reprezentacije od G možemo dobiti pomoću drugih njenih reprezentacija koristeći jednostavne linearno algebarske operacije poput direktne sume. Stoga ćemo se fokusirati na reprezentacije koje se ne mogu izraziti pomuću direktne sume ostalih reprezentacija ili pomoću drugih operacija. Takve reprezentacije nazivamo **nerastavljive** reprezentacije. Vrijedi sljedeće:

Reprezentacija je nerastavljiva ako i samo ako je ireducibilna. Sve ovo nam objašnjava sljedeća propozicija. Prije propozicije uvodimo definiciju pojma koji nam je potreban.

Propozicija 1.2. *Neka je G konačna grupa, V njezina reprezentacija i W subreprezentacija od V. Tada postoji skalarni produkt na V te invarijantan potprostor W' od V, koji je ortogonalan na W, takav da vrijedi $V = W \oplus W'$, tj. takav da je W' ortogonalni komplement od W u V.*

Dokaz. Uvodimo skalarni produkt H na V, koji je invarijantan na djelovanje grupe G, tj. takav da je $H(gv, gw) = H(v, w)$ za sve $v, w \in V$ i $g \in G$. Neka je H_0 bilo koji skalarni produkt na V. Možemo pronaći takav H tako da uzmemo tzv. srednju vrijednost preko cijelog G

$$H(v, w) = \sum_{g \in G} H_0(gv, gw).$$

Tada je $W^\perp$ ortogonalni komplement prostora W u V. ∎

Korolar 1.2. *Svaka reprezentacija konačne grupe na konačnodimenzionalnom prostoru je izomorfna direktnoj sumi ireducibilnih reprezentacija.*

Prethodni korolar direktno slijedi iz propozicije 1.2.

Navedeno svojstvo se naziva **potpuna reducibilnost**. Uočimo da aditivna grupa $\mathbb{R}$ nema ovo svojstvo jer reprezentacija

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ostavlja x-os fiksnom, ali ne postoji komplementaran potprostor.

Definicija 1.18. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem te neka je $B\colon V \to W$ linearan operator. Sliku od B definiramo kao*

$$Im(B) = \{B(v) : v \in V\},$$

dok jezgru od B definiramo kao

$$Ker(B) = \{v \in V : B(V) = 0\}.$$

Lagano se provjerava da je jezgra potprostor od V i slika potprostor od W, odnosno, $Ker(B) \subseteq V$ i $Im(B) \subseteq W$ u prethodnoj definiciji.

Jedna od posljedica leme koju ćemo upravo dokazati je jedinstvenost dekompozicije proizvoljne reprezentacije V na direktnu sumu ireducibilnih reprezentacija.

Lema 1.4. ***Schurova Lema***
Neka su V i W ireducibilne reprezentacije od konačne grupe G i $\varphi : V \to W$ preplitanje. tada

1) Ili je φ izomorfizam ili je $\varphi = 0$.
2) Ako $V = W$, tada je $\varphi = \lambda I$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$, gdje je I indentiteta.

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi direktno iz činjenice da su $Ker\varphi$ i $Im\varphi$ invarijantni potprostori.
Za drugu tvrdnju, jer je $\mathbb{C}$ algebarski zatvoren, φ mora imati svojstvenu vrijednost λ, odnosno za neki $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi - \lambda I$ ima nepraznu jezgru. Stoga je prema prvoj tvrdnji $\varphi = \lambda I$. ■

Sve što smo do sada dokazali možemo sažeti u idućoj propoziciji.

Propozicija 1.3. *Za bilo koju reprezentaciju V konačne grupe G, postoji dekompozicija*

$$V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \ldots \oplus V_k^{\oplus a_k},$$

gdje su V_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ ireducibilne reprezentacije. Dekompozicija od V na direktnu sumu od k sumanada je jedinstvena, kao što su i prostori V_i i njihovi multipliciteti a_i.

Dokaz. Iz Schurove leme slijedi da ako je W još jedna reprezentacija od G, sa dekompozicijom $W = \bigoplus_j W_j^{\oplus b_j}$, i $\varphi : V \to W$ preplitanje, tada φ mora preslikati svaki $V_i^{\oplus a_i}$ u neki $W_j^{\oplus b_j}$ za koji vrijedi da je $W_j \cong V_i$ i $a_i = b_j$. Odatle slijedi tražena jedinstvenost gornje dekompozicije. Njena egzistencija slijedi iz korolara 1.2. ■

2 REPREZENTACIJE KONAČNIH GRUPA

2.1 Karakter reprezentacije

U ovom poglavlju slijedimo poglavlje 2. knjige [1]. Promatrat ćemo isključivo reprezentacije konačnih grupa i upoznat ćemo se sa teorijom karaktera, koja će nam pomoći u razumjevanju reprezentacija konačne grupe G. Naslućujemo da pronalaženjem svih svojstvenih vrijednosti djelovanja od G bi nam omogućilo da možemo opisati traženu reprezentaciju. Pronalaženje svih tih svojstvenih vrijednosti za sve elemente $g \in G$ nije efikasno, ali je ujedno i nepotrebno. Ukoliko znamo svojstvene vrijednosti $\{\lambda_i\}$ elementa $g \in G$, tada znamo i svojstvene vrijednosti $\{\lambda_i^k\}$ od g^k, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Ključna opservacija ovdje je da je dovoljno poznavati sumu svojstvenih vrijednosti svakog elementa iz G, jer iz suma $k-$tih potencija $\sum\limits_i \lambda_i^k$ možemo odrediti svojstvene vrijednosti $\{\lambda_i\}$ od g. To nas navodi na sljedeću definiciju.

Definicija 2.1. *Neka je V reprezentacija od G. Definiramo kompleksnu funkciju $\chi_V : G \to \mathbb{C}$ kao*

$$\chi_V(g) = Tr(g|_V), \text{ gdje je } g \in G.$$

Funkcija χ_V zove se karakter reprezentacije V.

Drugim riječima, vrijednost karaktera na elementu $g \in G$ jednaka je sumi svojstvenih vrijednosti njegovog djelovanja na V.

Za svaki karakter reprezentacije imamo $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g)$, pa je χ_V konstantna na svakoj klasi konjugiranosti u grupi G. Svaku funkciju s tim svojstvom zovemo **centralna funkcija**. Također vrijedi $\chi_V(1) = dimV$.

Propozicija 2.1. *Neka su V i W reprezentacije od G. Tada vrijedi:*

$$\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W \qquad \chi_{V\otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W \qquad \chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$$

Dokaz. Fiksiramo proizvoljni $g \in G$ i na njemu provjeravamo ranije navedene jednakosti za karakter reprezentacije. Za element $g \in G$ neka njegovo djelovanje na V ima svojstvene vrijednosti $\{\lambda_i\}$, a njegovo djelovanje na W svojstvene vrijednosti $\{\mu_j\}$. Možemo zaključiti da su tada $\{\lambda_i + \mu_j\}$ i $\{\lambda_i \cdot \mu_j\}$ svojstvene vrijednosti od $V \oplus W$ i $V \otimes W$, iz čega slijede prve dvije formule propozicije.

Slično dobivamo da su $\{\lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}\}$ svojstvene vrijednosti za g od V^*, jer su sve svojstvene vrijednosti $n-$ti korijeni iz jedinice, gdje je n red od g. Vrijedi

$$\sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j = \frac{(\sum\limits_i \lambda_i)^2 - \sum\limits_i \lambda_i^2}{2}$$

pa iz činjenice da g^2 ima svojstvene vrijednosti $\{\lambda_i^2\}$, dolazimo i do posljednje formule. ∎

Prema ranijem komentaru karakter reprezentacije grupe G možemo promatrati kao funkciju na klasama konjugiranosti grupe G. Ovo nas navodi da informacije o ireducibilnim reprezentacijama grupe G prikažemo u obliku **tablice karaktera**. To je tablica koja na vrhu ima klasu konjugiranosti $[g]$ od G elementa g, dok je broj elemenata u svakoj klasi konjugiranosti iznad nje. Ireducibilna reprezentacija V od G se nalazi u stupcu lijevo, dok u odgovarajućem kvadratiću tablice, nalazi se vrijednost karaktera reprezentacije χ_V na klasi konjugiranosti $[g]$.

Grupu permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ nazivamo **simetrična grupa stupnja** n i označavamo ju kao S_n. U nastavku ćemo prikazati primjer tablice karaktera za S_3. Primjer slijedi točku 2.1 rada [7].

PRIMJER 2.1.
Započnimo s dvije jednostavne reprezentacije od S_3 koje zovemo *trivijalna* i *alternirajuća* reprezentacija. Trivijalna reprezentacija U je jednodimenzionalna reprezentacija koja svaki element preslika u identitetu. Alternirajuću reprezentaciju U' definiramo kao jednodimenzionalnu reprezentaciju $gv = sgn(g)v$, gdje $sgn(g)$ označava predznak permutacije g. Preciznije, alternirajuća reprezentacija preslikava parne permutacije u identitetu, a neparne u minus identitetu.

Kako postoje tri klase konjugiranosti od S_3, pozivajući se na svojstvo da je do na izomorfizam broj ireducibilnih reprezentacija od grupe G jednak broju klasa konjugiranosti od G, znamo da postoji još jedna ireducibilna reprezentacija od S_3. Navedeno svojstvo ćemo dokazati u propoziciji 2.4. u nastavku rada. Pogledajmo *prirodnu* reprezentaciju od S_3 u kojoj S_3 djeluje na $\mathbb{C}^3$ permutirajući koordinate. Takva reprezentacija ima dimenziju 3, ali postoji invarijantan potprostor ove reprezentacije generiran s $(1, 1, 1)$. Prema tome, na potprostoru $V = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 | a+b+c = 0\}$ imamo reprezentaciju od S_3 dimenzije 2.

Prvo izračunajmo karaktere od U i U'. Tri klase konjugiranosti od S_3 su identiteta s jednim elementom, klasa konjugiranosti prezentirana transpozicijom (12) koja sadrži tri elementa i klasa konjugiranosti koja sadrži dva ciklusa (duljine 3), u oznaci (123), s dva elementa. Lagano vidimo da je karakter trivijalne reprezentacije 1 za sve tri klase konjugiranosti, dok karakter alternirajuće reprezentacije je $(1, -1, 1)$.

Nadalje, računamo χ_V. Imamo da je $\mathbb{C}^3 = U \oplus V$, gdje sa U označavamo trivijalnu reprezentaciju na prostoru razapetom vektorom $(1, 1, 1)$, pa je $\chi_{\mathbb{C}^3} = \chi_U + \chi_V$. Dobivamo

$$\chi_{\mathbb{C}^3} = (Tr(Id), Tr(\rho(12)), Tr(\rho(123))) = (3, 1, 0).$$

Iz ovog dobivamo da je $\chi_V = (2, 0, -1)$ jer je $\xi_U = (1, 1, 1)$. Kako bismo provjerili da su U, U' i V tražene ireducibilne reprezentacije, koristimo teorem 2.1. iz sljedeće točke kako bismo dobili

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1.$$

i

$$\langle \chi_U, \chi_{U'} \rangle = \langle \chi_U, \chi_V \rangle = \langle \chi_{U'}, \chi_V \rangle = 0.$$

Dobivamo sljedeću tablicu karaktera za S_3.

S_3	1	(12)	(123)
U	1	1	1
U'	1	-1	1
V	2	0	-1

2.2 Formule projekcije i njihove posljedice

U ovome dijelu poglavlja započet ćemo sa proučavanjem određenih projekcija ireducibilne reprezentacije, te ćemo kasnije komentirati koje su posljedice ove formule. Ovaj dio poglavlja će sljediti točke 2.2 i 2.4 knjige [1].

Za početak, za proizvoljnu reprezentaciju V grupe G definiramo:

$$V^G = \{v \in V : gv = v, \text{ za sve } g \in G\}.$$

Postavljamo si pitanje, postoji li način da eksplicitno odredimo V^G? Možemo uočiti da za proizvoljnu reprezentaciju V od G i proizvoljni $g \in G$, endomorfizam $g : V \to V$ generalno nije preplitanje. S druge strane, ukoliko uzmemo srednju vrijednost svih tih endomorfizama, tj., preciznije, ako definiramo

$$\varphi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \in End(V),$$

endomorfizam φ opet neće biti preplitanje zbog $\Sigma g = \Sigma hgh^{-1}$. Međutim, vrijedi sljedeća propozicija:

Propozicija 2.2. *Preslikavanje φ je projekcija s V na V^G.*

Dokaz. Neka je $v = \varphi(w) = \frac{1}{|G|}\Sigma gw$. Tada, za proizvoljni $h \in G$ vrijedi

$$hv = \frac{1}{|G|}\Sigma hgw = \frac{1}{|G|}\Sigma gw,$$

pa je slika preslikavanja φ sadržana u V^G. Također, ako je $v \in V^G$, tada $\varphi(v) = \frac{1}{|G|}\Sigma v = v$, pa vrijedi da je $V^G \subseteq Im(\varphi)$ i $\varphi \circ \varphi = \varphi$. ■

Sada imamo način da eksplicitno pronađemo direktnu sumu trivijalnih subreprezentacija od naše dane reprezentacije, ali ono što mi dodatno želimo još napraviti je pojednostaviti tu formulu. Ukoliko želimo odrediti vrijednost m jednak broju kopija trivijalne reprezentacije koje se pojavljuju u dekompoziciji od V, to možemo riješiti numerički jer je vrijednost m zapravo trag od projekcije φ. Dobivamo:

$$m = dimV^G = Tr(\varphi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} Tr(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g). \tag{2.1}$$

Uočimo, za sve ireducibilne reprezentacije V izuzev trivijalne ireducibilne reprezentacije, suma po svim $g \in G$ vrijednosti karaktera reprezentacije χ_V iznosi 0.

Koristeći ovo dolazimo do nove formule. Neka su V i W reprezentacije od G i neka na $Hom(V, W)$ reprezentacija od G jednako definirana kao i u prvom poglavlju. Označimo s $Hom_G(V, W)$ sva preplitanja s V u W.

Ako je V ireducibilna reprezentacija, tada prema Schurovoj lemi vrijedi da je $dimHom_G$ (V, W) multiplicitet od V u W. Slično, ako je W ireducibilna reprezentacija, tada je $dimHom_G$ (V, W) multiplicitet od W u V. U slučaju da su V i W ireducibilne reprezentacije, imamo

$$dimHom_G(V, W) = \begin{cases} 1, \text{ ako V} \cong \text{W} \\ 0, \text{ ako V} \ncong \text{W.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Tada je, prema propoziciji 2.1., karakter $\chi_{Hom(V,W)}$ reprezentacije $Hom(V, W) = V^* \otimes W$ dan formulom

$$\chi_{Hom(V,W)}(g) = \overline{\chi_V(g)} \cdot \chi_W(g).$$

Sada, koristeći formulu (2.1) u ovom slučaju, dobivamo

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_V(g)} \cdot \chi_W(g) = \begin{cases} 1, \text{ ako V} \cong \text{W} \\ 0, \text{ ako V} \ncong \text{W} \end{cases} \tag{2.3}$$

Označimo s $\mathbb{C}_c(G)$ skup svih centralnih funkcija na grupi G. Definiramo skalarni produkt na $\mathbb{C}_c(G)$ kao

$$(\alpha, \beta) = \tfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\alpha(g)}\beta(g).$$

Posljedica formule (2.3) je idući teorem

Teorem 2.1. *S obzirom na ranije navedeni skalarni produkt, karakteri ireducibilnih reprezentacija od G su ortonormirani.*

Ortonormiranost tri ireducibilne reprezentacije od S_3 možemo iščitati iz tablice karaktera koju imamo u Primjeru 2.1. Brojevi iznad svake klase konjugiranosti nam govore koliko puta da brojimo vrijednosti tog stupca.

Korolar 2.1. *Broj ireducibilnih reprezentacija od G je manji ili jednak od broja klasa konjugiranosti.*

Uskoro ćemo pokazati da ne postoje centralne funkcije različite od 0 ortogonalne na karaktere reprezentacija, pa iz ove tvrdnje dobivamo da vrijedi jednakost u Korolaru $2.1.$.

Korolar 2.2. *Svaka reprezentacija je jedinstveno određena svojim karakterom.*

Doista, ako je $V \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \ldots \oplus V_k^{\oplus a_k}$ (dekompozicija od V na direktnu sumu ireducibilnih subreprezentacija), onda različite subreprezentacije V_i imaju međusobno različite karaktere. Tada je $\chi_V = \sum\limits_i a_i \chi_{V_i}$ te su svi χ_{V_i} linearno nezavisni.

Korolar 2.3. *Reprezentacija V je ireducibilna ako i samo ako* $(\chi_V, \chi_V) = 1$.

Neka je $V \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \ldots \oplus V_k^{\oplus a_k}$ kao i ranije, tada vrijedi da je $(\chi_V, \chi_V) = a_i^2$. Multiplicitet a_i možemo izračunati pomoću idućeg korolara.

Korolar 2.4. *Multiplicitet od a_i od V_i iz V je skalarni produkt od χ_V sa χ_{V_i}, odnosno $a_i = (\chi_V, \chi_{V_i})$.*

Dolazimo do još nekoliko formula ako ranije navedena svojstva primijenimo na regularnu reprezentaciju R od G. Karakter reprezentacije R jednak je

$$\chi_R(g) = \begin{cases} 0, \text{ ako g} \neq e \\ |G|, \text{ ako g} = e. \end{cases} \tag{2.4}$$

Možemo uočiti da R nije ireducibilna ukoliko je $G \neq \{e\}$. Ukoliko vrijedi da je $R = \oplus V_i^{\oplus a_i}$, gdje su V_i međusobno različite ireducibilne reprezentacije, tada je

$$a_i = (\chi_{V_i}, \chi_R) = \frac{1}{|G|}\chi_{V_i}(e) \cdot |G| = dimV_i \tag{2.5}$$

Korolar 2.5. *Svaka ireducibilna reprezentacija V od G pojavljuje se u regularnoj reprezentaciji točno $dimV$ puta.*

Ovo nas navodi na zaključak da za svaku konačnu grupu postoji konačno mnogo neizomorfnih ireducibilnih reprezentacija. Kao posljedicu ove tvrdnje imamo sljedeću formulu

$$|G| = dim(R) = \sum_i dim(V_i)^2. \tag{2.6}$$

Primjenjujući ovo na vrijednost karaktera regularne reprezentacije dobivene na elementu $g \in G$ gdje je $g \neq e$, dobivamo

$$0 = \sum_i dim(V_i) \cdot \chi_{V_i}(g), \text{ ako } g \neq e. \tag{2.7}$$

PRIMJER 2.2.
Sjetimo se da je $|S_3| = 3! = 6$ te da smo u primjeru 2.1. konstruirali tri ireducibilne neizomorfne reprezentacije od S_3 dimenzija $1, 1$ i 2. Kako je $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$, iz formule (2.6)

slijedi da su to, do na izomorfizam, jedine ireducibilne reprezentacije simetrične grupe S_3.

PRIMJER 2.3.
Ortogonalnost redova od tablice karaktera je ekvivalentna ortogonalnosti stupaca iste tablice (pod pretpostavkom da imamo isti broj redaka i stupaca). Ovo nam govori sljedeće
(i) Za svaki $g \in G$,

$$\sum_{\chi} \overline{\chi(g)} \chi(g) = \frac{|G|}{c(g)},$$

gdje suma obuhvaća sve karaktere ireducibilnih reprezentacija, dok $c(g)$ je broj elemenata u klasi konjugiranosti od g.
(ii) Ako su $g, h \in G$ koji nisu međusobno konjugirani, tj. ne nalaze se u istoj klasi konjugiranosti, tada vrijedi

$$\sum_{\chi} \overline{\chi(g)} \chi(h) = 0,$$

Također, možemo uočiti da za $g = e$, dolazimo do formula (2.6) i (2.7).

U nastavku ovog poglavlja završavamo analizu karaktera ireducibilnih reprezentacija konačnih grupa i definirat ćemo općenitiju formulu za projekciju proizvoljne reprezentacije V na direktnu sumu faktora u V koji su izomorfni danoj ireducibilnoj reprezentaciji. Glavna ideja je generalizacija endomorfizma. Umjesto da uzmemo srednju vrijednost po svim elementima grupe G, zanimat će nas koje linearne kombinacije endomorfizama $g : V \to V$ su preplitanja? Odgovor na pitanje nam daje sljedeća propozicija.

Propozicija 2.3. *Neka je $\alpha : G \to \mathbb{C}$ proizvoljna funkcija na grupi G. Za proizvoljnu reprezentaciju V od G definiramo*

$$\varphi_{\alpha,V} = \sum_{g \in G} \alpha(g) \cdot g : V \to V, \text{ za sve } g \in G.$$

Tada je $\varphi_{\alpha,V}$ preplitanje za sve V ako i samo ako je α centralna funkcija.

Dokaz. Ispisujemo sve uvjete koje $\varphi_{\alpha,V}$ mora zadovoljavati da bi bio preplitanje i na kraju ćemo doći do traženog dokaza. Vrijedi da je

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha,V}(hv) &= \sum_{g \in G} \alpha(g) \cdot g(hv) \\ &= \sum_{g \in G} \alpha(hgh^{-1}) \cdot hgh^{-1}(hv). \end{aligned}$$

Zamjenjujemo hgh^{-1} sa g, čime dobivamo

$$\begin{aligned} & h\Big(\sum_{g \in G} \alpha(hgh^{-1}) \cdot g(v)\Big) \\ = {} & h\Big(\sum_{g \in G} \alpha(g) \cdot g(v)\Big). \end{aligned}$$

Ako je α centralna funkcija, gornja formula je jednaka

$$h(\varphi_{\alpha,V}(v)).$$

Dokazali samo da je $\varphi_{\alpha,V}$ preplitanje za sve V ako je α centralna funkcija.

Obrat se može dokazati tako da se, ukoliko α nije centralna funkcija, eksplicitno konstruira reprezentacija V od G za koju $\varphi_{\alpha,V}$ nije preplitanje.

■

Kao direktna posljedica prethodne propozicije, slijedi nam sljedeća propozicija

Propozicija 2.4. *Broj ireducibilnih reprezentacija od G jednak je broju klasa konjugiranosti od G. Također, karakteri reprezentacija čine ortonormiranu bazu za $\mathbb{C}_c(G)$.*

Dokaz. Neka je $\alpha : G \to \mathbb{C}$ centralna funkcija i $(\alpha, \chi_V) = 0$ za sve ireducibilne reprezentacije V. Želimo pokazati da je tada $\alpha = 0$. Promatramo endomorfizam

$$\varphi_{\alpha,V} = \sum_{g \in G} \alpha(g) \cdot g : V \to V$$

koji je ovako definiran. Prema Schurovoj lemi $\varphi_{\alpha,V} = \lambda \cdot I$ i ako je $n = dimV$, tada vrijedi

$$\begin{aligned}\lambda &= \tfrac{1}{n} \cdot Tr(\varphi_{\alpha,V}) \\ &= \tfrac{1}{n} \sum_{g \in G} \alpha(g)\chi_V(g) \\ &= \tfrac{|G|}{n} \overline{(\alpha, \chi_{V*})} = 0.\end{aligned}$$

Stoga je $\varphi_{\alpha,V} = 0$, odnosno vrijedi $\sum_{g \in G} \alpha(g) \cdot g = 0$ za sve reprezentacije V od G, pa će to vrijediti i za regularnu reprezentaciju $V = R$. U reprezetaciji R elementi $\{g \in G\}$, koje možemo promatrati i kao elemente od $End(R)$, su linearno nezavisni. Tako su npr. elementi $\{g(e)\}$ također svi nezavisni. Zbog ovog slijedi da mora vrijediti $\alpha(g) = 0$, za sve $g \in G$, što smo i željeli dokazati.

■

3 REPREZENTACIJE SIMETRIČNE GRUPE

3.1 Simetrična grupa

Ovaj dio poglavlja slijedi točku 7.1 knjige [2]. Neka je $S \neq \emptyset$ neki skup. Definiramo

$$Perm(S) := \{f : S \to S | \text{ f je bijekcija}\}.$$

Neka je $f : S \to S$ bijekcija, tada postoji inverzna funkcija $f^{-1} : S \to S$ koja je također bijekcija.

Nadalje, za bilo koje funkcije $f, g : S \to S$ definirana je njihova kompozicija $g \circ f : S \to S$. Za tri funkcije $f, g, h : S \to S$, vrijedi asocijativnost kompozicije, tj. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Konačno, funkcija identiteta $id = id_S : S \to S$, $id(x) = x$, za sve $x \in S$, zadovoljava svojstvo $f \circ id = id \circ f = f$, za bilo koji f. Sve ovo navedeno nam govori da je $(Perm(S), \circ)$ grupa. Ta se grupa zove **grupa permutacija**, ili **simetrična grupa** skupa S.

Posebno, ako je skup S konačan, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je zapravo $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. U tom slučaju standardno se permutacije f od S zapisuju u obliku

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{pmatrix}.$$

Nadalje, grupu permutacija skupa $\{1, \ldots, n\}$ ćemo označavati sa S_n. Također, permutacija $\tau \in S_n$ zove se **transpozicija** ako postoje $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ takvi da je $\tau(i) = j, \tau(j) = i$ i $\tau(k) = k$ za sve $k \neq i, j$.

NAPOMENA 3.1: Vrijede sljedeće tvrdnje za simetrične grupe
1.$|S_n| = n!$
2. Grupa S_n je generirana transpozicijama, tj. svaku se permutaciju $\sigma \in S_n$ može napisati kao kompoziciju $\sigma = \tau_p \circ \ldots \circ \tau_1$, za neke transpozicije $\tau_1, \ldots, \tau_p$.
3. Općenito, grupa $(Perm(S), \circ)$ nije komutativna.

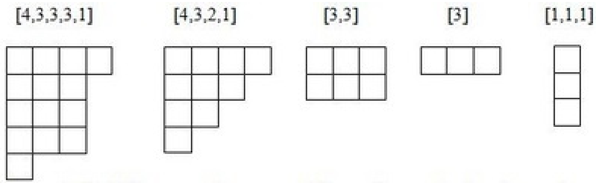
3.2 Youngovi dijagrami

Prije nego što krenemo na djelovanje simetrične grupe na Youngove dijagrame, ovdje ćemo definirati što točno jesu Youngovi dijagrami. Sadržaj obrađen u ovoj točki slijedi točke 4.1 i 4.2 članka [8].

Definicija 3.1. ***Particija*** *broja $n \in \mathbb{N}$ je svaki konačan niz $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ prirodnih brojeva takvih da ja $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k$ i $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k$. Broj $n = |\lambda|$ je* ***vrijednost*** *particije, a $k = l(\lambda)$ je* ***duljina*** *particije.*

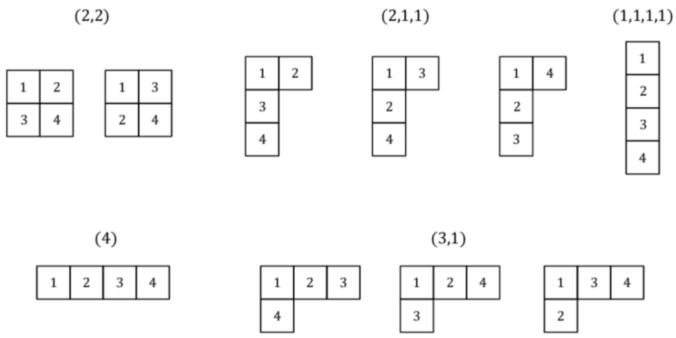
Tako na primjer broj 5 ima 7 particija, koje su (5), $(4, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 1, 1)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1, 1)$. Particije možemo reprezentirati i pomoću Youngovih dijagrama.

Definicija 3.2. ***Youngov dijagram*** *je konačna kolekcija kvadratića, poredanih s lijeva na desno u redove te se broj kvadratića u redovima smanjuje odozgo prema dolje. Tako će particija* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ *imati* k *redova te će* i*-ti redak imati* λ_i *kvadratića. Tada za Youngov dijagram kažemo da je* ***oblika*** λ*.*



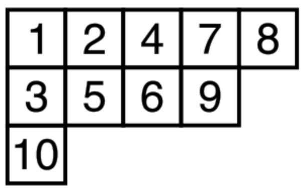
Slika 2: Primjeri Youngovih dijagrama

Definicija 3.3. *Neka je* λ *particija broja* n*.* ***Youngova tablica*** t *oblika* λ *je dobivena ispunjujući kvadratiće Youngova dijagrama oblika* λ *brojevima* $1, 2, \ldots, n$ *gdje se svaki broj pojavljuje točno jedanput. U ovom slučaju kažemo da je* t λ*-tablica.*



Slika 3: Primjeri Youngovih tablica

Definicija 3.4. *Standardna tablica je Youngova tablica čije vrijednosti se povećavaju kroz svaki red s lijeva na desno i svaki stupac odozgo prema dolje.*



Slika 4: Primjer standardne tablice particije $\lambda = (5, 4, 1)$

Za gornji Youngov dijagram definirat ćemo grupu stupaca, koja je zapravo lista svih vrijednosti Youngove tablice zapisane od donjih prema gornjim vrijednostim, tako da idemo po stupcima s lijeva na desno. Tako grupa stupaca za našu Youngovu tablicu je $(10\,3\,1\,5\,2\,6\,4\,9\,7\,8)$.

3.3 Djelovanje simetrične grupe na Youngove tablice

Ova točka usko slijedi točku 7.1 knjige [2] i točku 4.3 članka [8].

U ovom poglavlju ćemo opisati kako simetrična grupa S_n djeluje na Youngove dijagrame enumerirane brojevima $1, 2, \ldots, n$ bez ponavljanja te ćemo dokazati osnovnu kombinatornu lemu koju ćemo koristiti u nastavku ovog poglavlja.

Kroz ovo poglavlje će T i T' označavati enumeracije Youngovog dijagrama sa n kvadratića sa brojevima $\{1, 2, \ldots, n\}$ bez ponavljanja. Njih ćemo u nastavku kratko zvati enumeriranim Youngovim dijagramima, tj. enumeracijama Youngovih dijagrama. Simetrična grupa S_n djeluje na enumerirani Youngov dijagram T, tako da za svaki $\sigma \in S_n$ $\sigma \cdot T$ je enumerirani Youngov dijagram u kojem se $\sigma(i)$ nalazi u istom kvadratiću u kojem se u T nalazi i. Za numeriranje T imamo podgrupu $R(T)$ od S_n, koju ćemo zvati grupom redaka od T, koja sadrži one permutacije koje permutiraju vrijednosti svakog retka. Ako je $\lambda = (\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k > 0)$ particija od T, onda je $R(T)$ produkt simetričnih grupa $S_{\lambda_1} \times \ldots \times S_{\lambda_k}$. Takvu podgrupu od S_n obično nazivamo Youngova podgrupa. Na sličan način možemo definirati grupu stupaca $C(T)$ koja se sastoji od permutacija stupaca od T. Za ove grupe vrijede sljedeće jednakosti:

$(1) R(\sigma \cdot T) = \sigma \cdot R(T) \cdot \sigma^{-1}$.

$(2) C(\sigma \cdot T) = \sigma \cdot C(T) \cdot \sigma^{-1}$.

PRIMJER 3.1.
U ovom primjeru prikazat ćemo djelovanje simetrične grupe S_4 na enumerirani Youngov dijagram T. Neka je T Youngov dijagram enumeriran na sljedeći način

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

i neka $\sigma \in S_4$ permutacija $\sigma = (3421)$. Tada enumerirani Youngov dijagram $\sigma \cdot T$ glasi

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Definicija 3.5. *Neka su λ i λ' particije broja n, takve da vrijedi $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$ i $\lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq \ldots$. Za particiju λ kažemo da je **dominirajuća** prema particiji λ' ako je*

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_k \geq \lambda'_1 + \ldots + \lambda'_k, \text{ za sve } k \geq 1$$

*i tada pišemo $\lambda \trianglerighteq \lambda'$. Ukoliko vrijedi stroga nejednakost za sve $k \geq 1$, tada kažemo da je λ **strogo dominirajuća** prema λ' i pišemo $\lambda \triangleright \lambda'$.*

Sljedeća lema je jedna od osnovnih tvrdnji koje koristimo u teoriji reprezentacija simetrične grupe.

Lema 3.1. *Neka su T i T' enumeracije Youngovih dijagrama oblika λ i λ'. Pretpostavimo da λ nije strogo dominirajuća prema λ'. Tada vrijedi točno jedna od sljedećih tvrdnji:*
(i) Postoje dva cijela broja koja se pojavljuju u istom retku od T' i u istom stupcu od T.
(ii) $\lambda = \lambda'$ i postoje neki $p' \in R(T')$ i $q \in C(T)$ takvi da $p' \cdot T' = q \cdot T$.

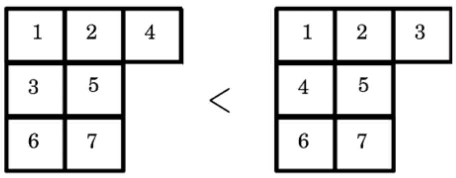
Dokaz. Pretpostavimo da (i) ne vrijedi. Vrijednosti prvog retka od T' moraju se pojaviti u različitim stupcima od T, pa postoji $q_1 \in C(T)$ takav da se te vrijednosti pojave u prvom retku od $q_1 \cdot T$. Vrijednosti od drugog retka od T' moraju se pojaviti u različitim stupcima od T, pa tako postoji $q_2 \in C(q_1 \cdot T) = C(T)$, koja neće pomicati vrijednosti jednake onima iz prvog retka od T', tako da se sve te vrijednosti sada pojave u prva dva retka od $q_2 \cdot q_1 \cdot T$. Ponavljamo ovaj postupak i dobivamo $q_1, \ldots, q_k$ u $C(T)$ takve da vrijednosti prvih k redaka od T' se pojave u prvih k redaka od $q_k \cdot \ldots \cdot q_1 \cdot T$. T i $q_k \cdot \ldots \cdot q_1 \cdot T$ imaju iste oblike pa slijedi da vrijedi $\lambda'_1 + \ldots + \lambda'_k \leq \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$. Ovo je istinito za sve k, pa slijedi da je $\lambda' \trianglelefteq \lambda$.

Kako smo pretpostavili da λ nije strogo dominirajuća od λ', dobivamo $\lambda = \lambda'$

Uzimajući da je k broj redaka od λ i $q = q_k \cdot \ldots \cdot q_1$, možemo uočiti da $q \cdot T$ i T' imaju iste vrijednosti u svakom retku. Stoga postoji $p' \in R(T')$ takav da vrijedi $p' \cdot T' = q \cdot T$. ■

Definicija 3.6. *Neka je $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ particija broja n. Tada za enumerirani Youngov dijagram particije λ kažemo da je **oblika** λ. Kažemo da je oblik λ veći ili jednak od oblika λ' ako vrijedi da je $\lambda_i \geq \lambda'_i$ za sve $i \geq 1$. Također, ako je $\lambda_i > \lambda'_i$ za sve $i \geq 1$, tada kažemo da oblik λ **dominira** oblik λ'.*

Definiramo linearni uređaj na nizu svih enumeracija Youngovih dijagrama sa n kvadratića, tako da pišemo $T' \geq T$ ako vrijedi jedno od sljedećeg:
1) oblik od T' je veći od oblika od T u smislu definicije 3.6.
2) T' i T imaju isti oblik i najveća vrijednost koja se nalazi u različitim kvadratićima od ove dvije enumeracije se pojavi ranije u grupi stupaca od T' nego u grupi stupca od T.



Slika 7: Usporedba dvije Youngove tablice s grupama stupaca (6317524) i (6417523)

Važno svojstvno ovog uređaja, koje slijedi iz definicije, jest da ako je T standardna tablica, tada za svaki $p \in R(T)$ i $q \in C(T)$,

$$p \cdot T \geq T \qquad \text{i} \qquad q \cdot T \leq T. \tag{3.1}$$

Zaista, najveća vrijednost od T pomaknut za p će se pomaknuti u lijevo, dok najveća vrijednost od T pomaknut za q se pomiče prema gore.

Korolar 3.1. *Ako su T' i T standardne Youngove tablice sa svojstvom $T' > T$, onda postoji par cijelih brojeva u istom retku od T' i u istom stupcu od T.*

Dokaz. Znamo da $T' > T$ pa oblik od T ne može dominirati oblik od T'. Pretpostavimo da ne postoji takav par cijelih brojeva. Tada se nalazimo u slučaju (ii) prethodno dokazane leme $p' \cdot T' = q \cdot T$. T i T' su Youngove tablice, pa prema (3.1) imamo $q \cdot T \leq T$ i $p' \cdot T' \geq T'$, a to je u kontradikciji s pretpostavkom $T' > T$. ∎

3.4 Spechtovi moduli

U ovoj točki poglavlja slijedimo točku 7.2 knjige [2] i točke 4.4 i 4.6 članka [8]. Kroz ovu točku promatrat ćemo kompleksne reprezentacije grupa.
Neka su T i T' dvije enumeracije Youngovog dijagrama oblika λ. Tada kažemo da su T i T' **ekvivalentni po redovima**, oznaka $T \sim T'$, ako svi odgovarajući redovi od T i T' sadrže jednake elemente. **Tabloid** oblika λ je klasa ekvivalencija enumeracija Youngovih dijagrama i označavamo ju s $\{T\} = \{T' | T' \sim T\}$. Vrijedi da je $\{T'\} = \{T\}$ kada $T' = p \cdot T$ za neki $p \in R(T)$.

Tabloide obično crtamo tako da uklonimo vertikalne linije između kvadratića, naglašavajući da je samo sadržaj svakog retka bitan.

$$\begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 4 & 7 \\ \hline 3 & 6 & \\ \cline{1-2} 2 & 5 & \\ \cline{1-2}\end{array} = \begin{array}{|ccc|}\hline 4 & 7 & 1 \\ \hline 6 & 3 & \\ \cline{1-2} 2 & 5 & \\ \cline{1-2}\end{array} \neq \begin{array}{|ccc|}\hline 4 & 7 & 1 \\ \hline 6 & 5 & \\ \cline{1-2} 2 & 3 & \\ \cline{1-2}\end{array} \neq \begin{array}{|ccc|}\hline 4 & 7 & 1 \\ \hline 2 & 3 & \\ \cline{1-2} 6 & 5 & \\ \cline{1-2}\end{array}$$

Slika 8: Primjer jednakih i različitih tabloida

Simetrična grupa S_n djeluje na nizu tabloida prema formuli:

$$\sigma \cdot \{T\} = \{\sigma \cdot T\}.$$

Neka $A = \mathbb{C}[S_n]$ označava grupovni prsten od S_n, koji sadrži sve kompleksne linearne kombinacije $\Sigma x_\sigma \sigma$ pri čemu je množenje definirano kompozicijom permutacija iz S_n. Neka imamo neku enumeraciju T Youngovog dijagrama od n kvadratića (sa cijelim brojevima $1, 2, \ldots, n$ bez ponavljanja), definiramo elemente a_T i b_T u A formulama

$$a_T = \sum_{p \in R(T)} p \qquad \text{i} \qquad b_T = \sum_{q \in C(T)} sgn(q) q \tag{3.2}$$

gdje $sgn(q)$ označava predznak od q. Ovi elementi i produkt $c_T = b_T \cdot a_T$ se zovu Youngovi simetrizatori.

NAPOMENA 3.2:
a) Za $p \in R(T)$ i $q \in C(T)$ vrijedi da je

$$p \cdot a_T = a_T \cdot p \qquad \text{i} \qquad q \cdot b_T = b_T \cdot q = sgn(q) b_T.$$

b) Vrijedi da je $a_T \cdot a_T = \#R(T) \cdot a_T$ i $b_T \cdot b_T = \#C(T) \cdot b_T$.

Želimo pronaći jednu ireducibilnu reprezentaciju za svaku klasu konjugiranosti u S_n. Klase konjugiranosti odgovaraju particijama λ broja n. Klasa konjugiranosti $C(\lambda)$ sadrži permutacije koje kada rastavimo na cikluse, dobivamo cikluse duljina $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, gdje je $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k > 0)$.

Definiramo M^λ kao kompleksni vektorski prostor sa bazom koja se sastoji od svih tabloida $\{T\}$ oblika λ, gdje je λ particija broja n. S_n djeluje na skup tabloida, pa tako djeluje onda i na M^λ, pretvarajući M^λ u lijevi A-modul. Za svaki enumerirani Youngov dijagram T od λ postoji element v_T u M^λ definiran formulom:

$$v_T = b_T \cdot \{T\} = \sum_{q \in C(T)} sgn(q)\{q \cdot T\}. \tag{3.3}$$

NAPOMENA 3.3: Za sve T i sve $\sigma \in S_n$ vrijedi da je $\sigma \cdot v_T = v_{\sigma \cdot T}$.

Lema 3.2. *Neka su T i T' enumeracije oblika λ i λ' i pretpostavimo da λ nije strogo dominantna u odnosu na λ'. Ukoliko postoji par cijelih brojeva u istom retku od T' i u istom stupcu od T, onda je $b_T \cdot \{T'\} = 0$. U slučaju da ne postoji takav par cijelih brojeva, onda vrijedi $b_T \cdot \{T'\} = \pm v_T$.*

Dokaz. U slučaju kada postoji takav par cijelih brojeva, neka je t transpozicija koja ih permutira. Tada vrijedi $b_T \cdot t = -b_T$, jer je t u grupi stupaca od T, ali $t \cdot \{T'\} = \{T'\}$ jer je t u grupi redaka od T'. To nas dovodi do:

$$b_T \cdot \{T'\} = b_T \cdot (t \cdot \{T'\}) = (b_T \cdot t) \cdot \{T'\} = -b_T \cdot \{T'\}$$

pa vrijedi da je $b_T \cdot \{T'\} = 0$.

U slučaju da ne postoji takav par cijelih brojeva, neka su p' i q kao u tvrdnji (ii) Leme 3.1. iz poglavlja 3.3.. Tada vrijedi:

$$b_T \cdot \{T'\} = b_T \cdot \{p' \cdot T'\} = b_T \cdot \{q \cdot T\} = b_T \cdot q \cdot \{T\} = sgn(q) b_T \cdot \{T\} = sgn(q) \cdot v_T.$$

■

Pomoću korolara 3.1. iz poglavlja 3.3. zaključujemo:

Korolar 3.2. *Neka su T i T' standardne Youngove tablice sa svojstvom $T' > T$, tada vrijedi da je $b_T \cdot \{T'\} = 0$.*

Definiramo Spechtov modul S^λ kao potprostor od M^λ razapet elementima v_T, dok T prolazi svim enumeracijama oblika λ. Iz napomene 3.3. slijedi da je S^λ invarijantan na S_n, tj. da je on A-podmodul od M^λ. Slijedi da je $S^\lambda = A \cdot v_T$ za bilo koju standardnu Youngovu tablicu T.

NAPOMENA 3.4: Za $\lambda = (n)$, $S^{(n)}$ je trivijalna reprezentacija od S_n, za $\lambda = (1^n)$, $S^{(1^n)}$ je alternirajuća reprezentacija od S_n. U slučaju $n = 3$ te dvije repezentacije smo već vidjeli u primjeru 2.1.

Svi v_T su različiti od nula pa su moduli S^λ svi različiti od 0. Moduli nisu u parovima međusobno izomorfni. Lema 3.2. zajedno s napomenom 3.2. nas dovodi do zaključka da za bilo koji enumerirani Youngov dijagram T oblika λ imamo:

$$b_T \cdot M^\lambda = b_T \cdot S^\lambda = \mathbb{C} \cdot v_T \neq 0; \tag{3.4}$$

$$b_T \cdot M^{\lambda'} = b_T \cdot S^{\lambda'} = 0, \text{ ako } \lambda' > \lambda. \tag{3.5}$$

Ove jednakosti impliciraju da je svaki S^λ ireducibilan. Ukoliko $S^\lambda = V \oplus W$, tada je $\mathbb{C} \cdot v_T = b_T \cdot S^\lambda = b_T \cdot V \oplus b_T \cdot W$ pa V ili W mora sadržavati v_T. U slučaju da V sadrži v_T, tada je $S^\lambda = A \cdot v_T = V$.

Time smo došli do ireducibilne reprezentacije za svaku particiju od n. Pošto postoji jednak broj particija broja n i klasa konjugiranosti u S_n i, prema propoziciji 2.4. broj klasa konjugiranosti je jednak broju ireducibilnih reprezentacija, to su onda sve ireducibilne reprezentacije. To ujedno i dokazuje sljedeći teorem:

Teorem 3.1. *Za svaku particiju λ od n, S^λ je ireducibilna reprezentacija od S_n. Svaka ireducibilna reprezentacija od S_n je izomorfna točno jednom S^λ.*

Lema 3.3. *Neka je $\vartheta : M^\lambda \to M^{\lambda'}$ preplitanje reprezentacija od S_n. Ako S^λ nije sadržan u jezgri od ϑ, tada vrijedi da je $\lambda' \trianglelefteq \lambda$.*

Dokaz. Neka je T enumeracija od λ. Jer v_T nije u jezgri od ϑ, vrijedi da je $b_T \cdot \vartheta(\{T\}) = \vartheta(v_T) \neq 0$. Stoga, postoji enumeracija T' od λ' takva da je $b_T \cdot \{T'\} \neq 0$. Ukoliko $\lambda \neq \lambda'$ i λ ne dominira λ', tada smo u slučaju (i) od leme 3.1; pa dobivamo kontradikciju s lemom 3.2. ■

Korolar 3.3. *Postoje nenegativni cijeli brojevi $k_{\nu\lambda}$, za $\nu \triangleright \lambda$ takvi da:*

$$M^\lambda \cong S^\lambda \oplus \bigoplus_{\nu \triangleright \lambda} (S^\nu)^{\oplus k_{\nu\lambda}}.$$

Dokaz. Za svaki ν, neka je $k_{\nu\lambda}$ multiplicitet ireducibilne reprezentacije S^ν u rastavu od M^λ. Uzimajući proizvoljni enumerirani Youngov dijagram T oblika λ i koristeći jednakost (3.4) dokažimo da je $k_{\lambda\lambda} = 1$. Postoji projekcija sa M^ν na S^ν jer je svaki S^ν sadržan u M^ν. Pretpostavimo da se S^ν pojavljuje i u rastavu od M^λ. Tada je kompozicija projekcije $M^\nu \to S^\nu$ i ulaganja S^ν u M^λ preplitanje $M^\nu \to M^\lambda$ koje ne sadrži S^ν u svojoj jezgri. Iz leme 3.3. slijedi da je $\lambda \trianglelefteq \nu$, što završava naš dokaz. ■

Teorem 3.2. *Elementi v_T, gdje T ide po svim standardnim tablicama oblika λ, čine bazu za S^λ.*

Dokaz. Element v_T je linearna kombinacija od $\{T\}$ (sa koeficijentom 1) i elemenata $\{q \cdot T\}$ za $q \in C(T)$ (sa koeficijentima ± 1).

Uzmimo u obzir da je $q \cdot T \leq T$, za svaki netrivijalni element q. Lagano se dokaže da su elementi v_T linearno nezavisni promatrajući maksimalni T koji ima koeficijent različit od 0 u izrazu $\Sigma x_T v_T = 0$. Ovo nam pokazuje da je dimenzija od S^λ veća ili jednaka broju f^λ standardnih tablica oblika λ.

Činjenicu da ovi elementi razapinju S^λ možemo dokazati iz toga da je suma kvadrata dimenzija ireducibilnih reprezentacija jednaka redu grupe:

$$n! = \sum_\lambda (dim(S^\lambda))^2 \geq \sum_\lambda (f^\lambda)^2 = n!$$

gdje nam posljednja jednakost slijedi iz Robinsonove jednakosti, čiji se dokaz može pronaći u točki 4.3 knjige [2]. Slijedi da je $dim(S^\lambda) = f^\lambda$, za sve λ, što dokazuje da elementi v_T moraju razapinjati S^λ. ■

Zato jer je M^λ reprezentacija pridružena djelovanju od S_n na skup tabloida, trag elementa ϑ od S_n jednak je broju tabloida koji su fiksirani s ϑ. Ukoliko napišemo ϑ kao produkt ciklusa, neki tabloid je fiksiran upravo ako se elementi svakog ciklusa pojave u istom retku tabloida. Broj takvih tabloida možemo iskazati na sljedeći način. Neka je ϑ u klasi konjugiranosti $C(\mu)$ i neka je m_q multiplicitet cijelog broja q u μ. Neka je $r(p,q)$ broj ciklusa duljine q čiji elementi se nalaze u p-tom retku tabloida. Stoga broj tabloida fiksiranih s ϑ je:

$$(*) \qquad \sum \prod_{q=1}^{n} \frac{m_q!}{r(1,q)! \cdot \ldots \cdot r(n,q)!},$$

gdje suma ide po svim matricama $(r(p,q))_{1,\ldots,n}$ nenegativnih cijelih brojeva, koji zadovoljavaju:

$$r(p,1) + 2r(p,2) + 3r(p,3) + \ldots + nr(p,n) = \lambda_p,\ r(1,q) + r(2,q) + \ldots + r(n,q) = m_q.$$

Sada za bilo koji q imamo binomnu formulu:

$$(x_1^q + \ldots + x_n^q)^{m_q} = \sum \frac{m_q!}{r(1,q)! \cdot \ldots \cdot r(n,q)!} x_1^{qr(1,q)} \cdot \ldots \cdot x_n^{qr(n,q)},$$

gdje suma ide po svim n-torkama $(r(p,q))_{1 \leq p,q \leq n}$ takvim da je $\sum_p r(p,q) = m_q$.

Broj (*) je onda koeficijent od $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}$ u polinomu

$$p_\mu(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{q=1}^{n} (x_1^q + \ldots + x_n^q)^{m_q}. \tag{3.6}$$

Ovime smo dokazali:

Propozicija 3.1. *Vrijednost karaktera reprezentacije M^λ na klasi konjugiranosti $C(\mu)$ je jednaka koeficijentu od x^λ u polinomu* (3.6)

Popis slika

Popis tablica

slika 2 preuzeta sa stranice `https://stackoverflow.com/questions/15705001/programming-for-young-tableaux` (08.09.2020.)
slika 3 preuzeta sa stranice `https://www.researchgate.net/figure/Standard\-Young-tableaux-of-size-n-4_fig2_260678759` (12.09.2020.)
slika 4 preuzeta sa stranice `https://en.wikipedia.org/wiki/Young_tableau` (12.09.2020.)
slika 7 preuzeta sa stranice `https://www.researchgate.net/figure/aExample-of-a-Young-tableau-a3-2-2-bIntegers-di-N-that-enter-the-numerator-of_fig4_265015099` (03.09.2021.)
slika 8 preuzeta iz točke 4.3 članka [8]

Literatura

[1] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory A First Course*, Springer, New York, 2004.

[2] W. Fulton, *Young Tableaux With Applications To Representation Theory And Geometry*, Cambridge University Press, New York, 1997.

[3] W.H. Greub, *Multilinear Algebra, 2nd Edition*, Springer-Verlag, New York, 1978.

[4] Borka Jadrijević, *Uvod u algebru s analitičkom geometrijom*, skripta, PMF, Sveučilište u Splitu, dostupno na `http://marjan.fesb.hr/~borka/files/UAAG%20strukture_pred7_16_17.pdf` (kolovoz, 2021.)

[5] Hrvoje Kraljević, *Odabrana poglavlja teorije reprezentacija*, skripta, PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu, 2017. Dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~hrk/nastava/2006-07/Od_pogl_t_rep_2006_07.pdf` (kolovoz, 2021.)

[6] Svetozar Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.

[7] Manjil P. Saikia, *Representations of the Symmetric Group*, Diploma Thesis, The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics Trieste, Italy, 2015. Dostupno na `https://homepage.univie.ac.at/manjil.saikia/thesis/saikia-diploma-thesis.pdf` (kolovoz, 2021.)

[8] Yufei Zhao, *Young Tableaux and the Representations of the Symmetric Group*, 2008. Dostupno na `http://yufeizhao.com/research/youngtab-hcmr.pdf?fbclid=IwAR0M\wr8a73f2Wj1UMTWHqIEa-HMXMxvBQOOTNPBucSN3IamQK8nqgi1fAjU` (rujan, 2020.)

SAŽETAK

Glavni cilj ovog rada bio je proučiti reprezentacije simetrične grupe i njihovo djelovanje na Youngove tablice. U prva dva poglavlja definirali smo pojam tenzorskog produkta i naveli nekoliko svojstava koja tenzorski produkt zadovoljava. Prezentirali smo što je reprezentacija grupe te koja su njezina obilježja. Nakratko smo približili Schurovu lemu i objasnili njezin značaj za reprezentacije grupa. Definirali smo karakter reprezentacije i što je centralna funkcija te ih detaljno proučili za reprezentacije konačne grupe. Definicije i rezultati iz ova dva poglavlja bili su nam potrebni da bismo mogli proučiti reprezentacije simetrične grupe.

Nakon toga, u trećem poglavlju smo preusmjerili fokus na reprezentacije simetrične grupe, definirali Youngove dijagrame te uveli i analizirali djelovanje simetrične grupe na Youngove tablice. Predstavili smo Spechtove module i kroz nekoliko propozicija objasnili njihovu vezu s teorijom reprezentacija. U ovom poglavlju smo predstavili glavne pojmove, konstrukcije i rezultate koji su nam bili potrebni da definiramo i proučimo djelovanje simetrične grupe na Youngove tablice, što smo željeli prezentirati ovim radom.

SUMMARY

The main goal of this thesis was to study representations of the symmetric groups and their action on Young tableaux. In the first two chapters of the thesis, we define tensor products and recall some of their properties. We introduced the notion of representation of a group and we presented its properties. We took a closer look at Schur's lemma and explained its connection with group representations. Finally, we defined the character of representation and class functions on a group, and we investigated closely these notions in the case of finite groups. The definitions and results from these two chapters present important tools for studying representations of symmetric groups.

In the third chapter we turned our focus on representations of symmetric groups, we defined Young diagrams and introduced and analyzed the action of symmetric groups on Young tableaux. We presented the notion of the Specht module and through several propositions explained its connection with representation theory. In this chapter, we presented main concepts, constructions, and results that were necessary to define and investigate the action of a symmetric group on Young tableaux, which was the main goal of this thesis.

ŽIVOTOPIS

Ime mi je Luka Fran, rođen sam 21.08.1994. u gradu Bjelovar. Pohađao sam IV. osnovnu školu Bjelovar i nakon toga 2009.-2013. ekonomsku i birotehničku školu Bjelovar, smjer ekonomist. Između 2013.-2016. studirao sam na Sveučilištu u Rijeci, Odjel za matematiku, gdje sam stekao titulu baccalaureus. Nakon toga sam 2016. na prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu upisao diplomski smjer Matematička statistika koji je trenutno u tijeku.

Uz materinji hrvatski jezik, također govorim i pismen sam na engleskom jeziku. Kroz moje školovanje u Bjelovaru, Rijeci i Zagrebu stekao sam osnovno znanje Microsoft Office paketa, kao i osnovna znanja programskih jezika $C++$, Python, Mathlab, SAS, R i programa LaTeX te brojne druge vještine iz područja matematike i ekonomije. Također sam 2019. stekao vozačku dozvolu dozvolu B kategorije. Od prijašnjih radnih iskustva jedino mogu spomenuti L'Officina Kildare, Kildare Village, Irska, gdje sam radio kao konobar u periodu od 6 mjeseci između 2020.-2021.