Rieszove baze i bazni okviri Hilbertovih prostora

Han, Marta

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marta Han

RIESZOVE BAZE I BAZNI OKVIRI HILBERTOVIH PROSTORA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, rujan, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom radu uvest ćemo pojmove Rieszove baze, baznog okvira i približno Rieszove baze i dati pregled nekih od najvažnijih rezultata koji ih povezuju.

Teorija baznih okvira nalazi brojne primjene u raznim područjima matematike i inženjerstva kao što su teorija operatora, teorija uzorkovanja, teorija valića, kodiranje, rekonstrukcija signala i drugo. Pojam baznih okvira uveli su Duffin i Schaeffer 1952. godine u sklopu svog rada na neharmonijskim Fourierovim redovima [3], ali je popularnost stekao tek pola stoljeća kasnije, uvelike zahvaljujući radu I. Daubechies, A. Grossmanna i Y. Meyera.

U prvom poglavlju prisjetit ćemo se osnovnih rezultata teorije normiranih prostora na koje se oslanjaju ostala poglavlja i rezultati. U prvom dijelu poglavlja bez dokaza navodimo osnovne rezultate u vezi pojmova neprekidnosti i ograničenosti operatora, apsolutne i bezuvjetne konvergencije redova te ortonormiranog, fundamentalnog i maksimalnog niza u Hilbertovom prostoru. U drugom i trećem dijelu uvodimo pojam Rieszove baze i Besselovog niza koje obrađujemo na nešto detaljniji način.

U drugom poglavlju definiramo jedan od ključnih pojmova rada - bazni okvir. Bavimo se svojstvima baznih okvira i dajemo neke karakterizacije.

U trećem poglavlju uvodimo pojam približno Rieszove baze i tražimo poveznicu s pojmovima beselskog baznog okvira i bezuvjetnog baznog okvira.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi normiranih prostora

1.1 Normirani prostori. Bezuvjetna konvergencija

U ovom dijelu dajemo pregled osnovnih pojmova i rezultata o normiranim prostorima, koje koristimo u kasnijim poglavljima.

Definicija 1.1.1. *Norma na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:*

(a) $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$;

(b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\forall x \in X$;

(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$.

Uređeni par $(X, \|\cdot\|)$ naziva se normiran prostor.

Definicija 1.1.2. *Skalarni produkt na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ sa sljedećim svojstvima:*

(a) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in X$;

(b) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(c) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\forall x, y \in X$;

(d) $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$, $\forall x_1, x_2, y \in X$;

(e) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

Uređeni par $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *zovemo unitaran prostor.*

Definicija 1.1.3. *Neka su* X *i* Y *normirani prostori i* $f : X \to Y$.

Kažemo da je funkcija f *neprekidna u točki* $x_0 \in X$ *ako*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \textit{tako da} \quad \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Funkcija f *je neprekidna na skupu* $S \subseteq X$ *ako je neprekidna u svakoj točki* $x_0 \in X$.

Kažemo da je f *uniformno neprekidna na skupu* $S \subseteq X$ *ako vrijedi*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \textit{tako da} \quad x_1, x_2 \in S, \|x_1 - x_2\| < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon.$$

Definicija 1.1.4. *Neka je* $(x_n)_n$ *niz u normiranom prostoru* X.

Kažemo da niz $(x_n)_n$ *konvergira prema* $x \in X$ *i pišemo* $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ *ako*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \textit{takav da} \quad n_0 \leq n \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Kažemo da je niz $(x_n)_n$ *Cauchyjev ako*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \textit{takav da} \quad n_0 \leq m, n \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Definicija 1.1.5. *Kažemo da je normiran prostor potpun ako svaki Cauchyjev niz u njemu konvergira. Potpun normiran prostor zove se još i Banachov prostor. Potpun unitaran prostor se naziva Hilbertov prostor.*

Definicija 1.1.6. *Neka su* X *i* Y *normirani prostori. Kažemo da je linearan operator* $A : X \to Y$ *ograničen ako postoji* $M \geq 0$ *takav da vrijedi* $\|Ax\| \leq M\|x\|$, $\forall x \in X$. *Skup svih ograničenih operatora označavamo s* $\mathbb{B}(X, Y)$. *Ako je* $X = Y$, *pišemo* $\mathbb{B}(X)$.

Propozicija 1.1.7. *Neka su* X *i* Y *normirani prostori i* $A : X \to Y$ *linearan operator. Sljedeće su tvrdnje međusobno ekvivalentne:*

(a) A *je neprekidan u nekoj točki* $x_0 \in X$;

(b) A *je neprekidan na* X;

(c) A *je uniformno neprekidan na* X;

(d) A *je ograničen.*

Definicija 1.1.8. $\ell^2 = \{(x_n)_n \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$.

Definicija 1.1.9. *Neka je (x_n) niz u normiranom prostoru X. Kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira*

(a) apsolutno, ako red $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ konvergira u $\mathbb{R}$,

(b) bezuvjetno, ako red $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ konvergira u X za svaku permutaciju σ od $\mathbb{N}$.

Propozicija 1.1.10. *Neka je $(x_n)_n$ niz u Banachovom prostoru takav da red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira apsolutno. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira u X i vrijedi*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

Ako je X normiran prostor u kojem svaki apsolutno konvergentan red konvergira i obično, tada je X potpun, tj. Banachov prostor.

Teorem 1.1.11. *Neka je $(x_n)_n$ niz u Banachovom prostoru X. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira apsolutno, onda konvergira i bezuvjetno.*

Propozicija 1.1.12. *Neka je $(e_n)_n$ ortonormiran niz u Hilbertovom prostoru H te $(c_n)_n$ niz skalara. Red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ konvergira ako i samo ako je $(c_n)_n \in \ell^2$. Nadalje, red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ konvergira obično ako i samo ako konvergira bezuvjetno.*

Teorem 1.1.13. *Za niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ konvergira bezuvjetno} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty.$$

Teorem 1.1.14. *Neka je $(x_n)_n$ niz u Banachovom prostoru X. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(a) $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je sumabilna familija.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira bezuvjetno.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} x_{p(n)}$ konvergira za svaki podniz $(x_{p(n)})_n$ od $(x_n)_n$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ konvergira za svaki izbor predznaka $\varepsilon_n = \pm 1$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ konvergira za svaki ograničen niz skalara $(\lambda_n)_n$.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|$ konvergira uniformno na zatvorenoj jediničnoj kugli u dualnom prostoru X', tj. vrijedi $\lim_{N \to \infty} \sup\{\sum_{n=N}^{\infty} |f(x_n)| : f \in X', \|f\| \leq 1\} = 0$.

Korolar 1.1.15. *Neka je $(x_n)_n$ niz u normiranom prostoru X. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira bezuvjetno, onda za svaku permutaciju σ od $\mathbb{N}$ vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.*

Definicija 1.1.16. *Ortonormiran niz $(e_n)_n$ je ortonormirana baza unitarnog prostora X ako za svaki $x \in X$ postoji niz skalara $(c_n)_n$ takav da*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n. \tag{1.1}$$

Napomena 1.1.17. *(a) Ako unitaran prostor X ima ortonormiranu bazu $(e_n)_n$, X je separabilan.*

(b) Ako unitaran prostor X ima ortonormiranu bazu $(e_n)_n$, konvergencija u (1.1) *je bezuvjetna po Propoziciji 1.1.12.*

(c) Koeficijenti c_n u (1.1) *su jedinstveno određeni za svaki x, tj. $c_n = \langle x, e_n \rangle$.*

(d) Ako je $(e_n)_n$ ortonormiran niz u unitarnom prostoru X, tada svaki $x \in X$ zadovoljava Besselovu nejednakost, $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

(e) U svakom separabilnom unitarnom prostoru X postoji ortonormiran fundamentalan niz $(e_n)_n$. Svaki ortonormiran skup u X je najviše prebrojiv.

Definicija 1.1.18. *Neka je X normiran prostor. Niz $(b_n)_n$ u X je fundamentalan ako razapinje gust potprostor u X, tj. ako vrijedi*

$$\overline{\operatorname{span}}\{b_n : n \in \mathbb{N}\} = X.$$

Definicija 1.1.19. *Neka je X unitaran prostor. Niz $(b_n)_n$ u X je maksimalan ako za svaki $x \in X$ vrijedi*

$$x \perp b_n, \forall n \in N \Rightarrow x = 0.$$

Definicija 1.1.20. *Neka je X Banachov prostor i X' pripadni dualni prostor. Kažemo da su nizovi $(x_n)_n$ iz X i $(a_n)_n$ iz X' biortogonalni ako za sve $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_m(x_n) = \delta_{mn}$.*

Teorem 1.1.21. *Neka je $(e_n)_n$ ortonormiran niz u Hilbertovom prostoru H. Ekvivalentno je:*

(a) $(e_n)_n$ je ortonormirana baza za H.

(b) $(e_n)_n$ je fundamentalan niz u H.

(c) Vrijedi $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ za svaki $x \in H$.

(d) Vrijedi $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle$ *za sve* $x, y \in H$.

(e) $(e_n)_n$ *je maksimalan niz u* H.

Ako je H *samo unitaran, vrijedi (a)* $\Leftrightarrow$ *(b)* $\Leftrightarrow$ *(c)* $\Leftrightarrow$ *(d)* $\Rightarrow$ *(e). Posebno, zaključujemo da svaki separabilan unitaran prostor ima ortonormiranu bazu.*

1.2 Topološke i Reiszove baze

Definicija 1.2.1. *Niz* $(x_n)_n$ *je (topološka) baza normiranog prostora* X *ako za svaki* x *iz* X *postoji jedinstven niz skalara* $(a_n(x))_n$ *takav da*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n. \tag{1.2}$$

Napomena 1.2.2. *Neka je* $(x_n)_n$ *baza normiranog prostora* X*. Za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *promatramo preslikavanje* $a_n : X \to \mathbb{F}$ *definirano s* $x \mapsto a_n(x)$*, gdje je* $a_n(x)$ *n-ti koeficijent u rastavu* (1.2)*. Zbog jedinstvenosti rastava,* a_n *su linearni funkcionali.*

Ponekad pišemo $((x_n)_n, (a_n)_n)$ *kako bismo naveli bazu skupa s ovim pripadnim nizom funkcionala.*

Uočimo, $a_m(x_n) = 0$ *za sve* $m \neq n$ *i* $a_n(x_n) = 1$*, tj. za sve* $m, n \in \mathbb{N}$ *imamo* $a_m(x_n) = \delta_{mn}$ *pa su* $(a_n)_n$ *i* $(x_n)_n$ *biortogonalni.*

Definicija 1.2.3. *Neka je* $(x_n)_n$ *baza normiranog prostora* X*. Kažemo da je* $(x_n)_n$

(a) bezuvjetna baza ako red (1.2) *konvergira bezuvjetno za svaki* x *iz* X.

(b) ograničena baza ako vrijedi $0 < \inf_n\|x_n\| \leq \sup_n\|x_n\| < \infty$.

Teorem 1.2.4. *Neka je* $((x_n)_n, (a_n)_n)$ *baza Banachovog prostora* X*. Za svaki* $n \in \mathbb{N}$*, funkcional* a_n *je neprekidan (za ovakvu bazu kažemo da je Schauderova). Štoviše, funkcionali* a_n*,* $n \in \mathbb{N}$*, zadovoljavaju nejednakosti*

$$1 \leq \|a_n\| \cdot \|x_n\| \leq 2C,$$

gdje je $C = \sup_N\|S_N\|$*, a* $S_N : X \to X$ *operator definiran s* $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n(x)x_n$*,* $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Prvo pokažimo da je C dobro definiran, tj. $\sup_N\|S_N\| < \infty$. Definirajmo prostor

$$Y = \left\{(c_n)_n : \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \quad \text{konvergira u X}\right\}$$

s polunormom

$$\|(c_n)_n\|_Y = \sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\|$$

te operator $S : Y \to X$ sa $S((c_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ za koji se može pokazati da je bijektivan ograničen linearan operator čiji je inverz $S^{-1} : X \to Y$ također ograničen operator (vidi [2], Propozicija 1.2.5). Sada imamo

$$\sup_N \|S_N(x)\| = \sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n(x) x_n \right\| = \|(a_n(x))_n\|_Y = \|S^{-1}x\|_Y \leq \|S^{-1}\| \cdot \|x\|,$$

pa je i

$$\sup_N \|S_N\| \leq \|S^{-1}\| < \infty.$$

Uzmimo $x \in X$ i $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$\begin{aligned} |a_n(x)| \cdot \|x_n\| &= \|a_n(x) x_n\| \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k(x) x_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x) x_k \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k(x) x_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x) x_k \right\| \\ &= \|S_n(x)\| + \|S_{n-1}(x)\| \leq 2C\|x\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |a_n(x)| &\leq \frac{2C}{\|x_n\|} \|x\| \quad \Big/ \sup_{\|x\|=1} \\ \Rightarrow \|a_n\| &\leq \frac{2C}{\|x_n\|}. \end{aligned}$$

S druge strane, imamo $1 = a_n(x_n) = |a_n(x_n)| \leq \|a_n\| \|x_n\|$. □

Definicija 1.2.5. *Neka su X i Y Banachovi prostori. Kažemo da je baza $(x_n)_n$ za X ekvivalentna bazi $(y_n)_n$ za Y i pišemo $(x_n)_n \sim (y_n)_n$ ako postoji bijektivan operator $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $y_n = Ax_n$.*

Propozicija 1.2.6. *Neka je $(x_n)_n$ niz u Banachovom prostoru X. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(a) $(x_n)_n$ je bezuvjetna baza za X.

(b) $(x_{\sigma(n)})_n$ *je baza za svaku permutaciju* σ *od* $\mathbb{N}$.

Dokaz. $(a) \Rightarrow (b)$ Neka vrijedi (a). Neka je σ proizvoljna permutacija i $x \in X$. Red $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n$ konvergira bezuvjetno, pa prema Korolaru 1.1.15 vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}(x)x_{\sigma(n)}$. Moramo pokazati da je ovaj rastav od x pomoću niza $x_{\sigma(n)}$ jedinstven.

Pretpostavimo da za neki drugi niz skalara $(c_n)_n$ vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_{\sigma(n)}$. Tada vrijedi

$$a_{\sigma(m)}(x) = a_{\sigma(m)}\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_{\sigma(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_{\sigma(m)}(x_{\sigma(n)}) = c_m$$

jer su nizovi $(x_n)_n$ i $(a_n)_n$ biortogonalni.

$(b) \Rightarrow (a)$ Pretpostavimo da je $(x_{\sigma(n)})_n$ baza za X za svaku permutaciju σ. Neka je $(a_n)_n$ niz funkcionala pridružen bazi $(x_n)_n$. Pokažimo da za svaki $x \in X$ izraz $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n$ konvergira bezuvjetno. Za fiksnu permutaciju σ, niz $(x_{\sigma(n)})_n$ je baza, pa postoji jedinstven niz skalara $(c_n)_n$ takav da je $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_{\sigma(n)}$. Djelovanjem funkcionala $a_{\sigma(m)}$ na ovaj izraz dobivamo $a_{\sigma(m)}(x) = c_m$. Prema tome, $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}(x)x_{\sigma(n)}$ konvergira za svaku permutaciju σ, što znači da $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n$ konvergira bezuvjetno. $\square$

Teorem 1.2.7. *Neka su* $(x_n)_n$ *i* $(y_n)_n$ *baze Banachovih prostora* X *i* Y*, redom. Ekvivalentno je:*

(a) $(x_n)_n \sim (y_n)_n$*;*

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ *konvergira u* X *ako i samo ako* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n$ *konvergira u* Y.

Dokaz. $(a) \Rightarrow (b)$ Neka je $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ bijektivan operator takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $y_n = Ax_n$. Ako $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira u X k x, zbog neprekidnosti od A imamo da $\sum_{n=1}^{\infty} c_n Ax_n$ konvergira k $y = Ax$. Obrat slijedi analogno iz ograničenosti operatora A^{-1}.

$(b) \Rightarrow (a)$ Označimo s $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ nizove funkcionala pripadnih bazama $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$. Za $x \in X$ imamo $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n$. Prema (b) dijelu, tada konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)y_n$, pa možemo definirati $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)y_n$. Ovako definirano preslikavanje $A : X \to Y$ je dobro definirano zbog jedinstvenosti rastava $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$. A je linearan operator i za svaki n očito vrijedi $Ax_n = y_n$. Ako je $Ax = 0$, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)y_n = 0$, zbog jedinstvenosti rastava $0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot y_n$ imamo $a_n(x) = 0$, za svaki n pa je i $x = 0$. Dakle, A je injektivan.

Sada promotrimo proizvoljan $y \in Y$, $y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y)y_n$. S obzirom da vrijedi (b), $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y)x_n$ je dobro definiran element u X. $(x_n)_n$ je baza pa zbog jedinstvenosti rastava imamo $b_n(y) = a_n(x)$ za sve n. Stoga je $Ax = y$, dakle A je i surjektivan.

Preostaje pokazati da je A ograničen operator. Za $N \in \mathbb{N}$ definiramo $A_N : X \to Y$ s $A_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n(x)y_n$. A_N je neprekidan jer su svi funkcionali a_n neprekidni po Teoremu 1.2.4.

$$\|A_N(x)\| = \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n(x)y_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{N} |a_n(x)| \, \|y_n\| \leq \|x\| \sum_{n=1}^{N} \|a_n\| \cdot \|y_n\|, \forall x \in X.$$

Kako $A_N(x) \to Ax$ kad $N \to \infty$, niz $(A_N(x))_N$ je ograničen i vrijedi

$$\|Ax\| \leq \sup_N \|A_N(x)\| < \infty, \forall x \in X.$$

Po principu uniformne ograničenosti (Teorem 5.3.2, [1]), slijedi $\sup_N \|A_N\| < \infty$. Slijedi

$$\|Ax\| \leq \sup_N \|A_N x\| \leq \left(\sup_N \|A_N\| \right) \|x\|.$$

□

Napomena 1.2.8. *U Hilbertovom prostoru sve su ortonormirane baze ekvivalentne. Naime, ako su $(e_n)_n$ i $(f_n)_n$ ortonormirane baze za H, preslikavanje $U : e_n \mapsto f_n$, $n \in \mathbb{N}$ možemo proširiti do unitarnog operatora $U \in \mathbb{B}(H)$.*

Definicija 1.2.9. *Niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H je Rieszova baza za H ako postoji ortonormirana baza $(e_n)_n$ za H i bijektivan operator $T \in \mathbb{B}(H)$ takvi da vrijedi $x_n = Te_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Napomena 1.2.10. *Svaka Rieszova baza je ujedno i baza u topološkom smislu.*

Propozicija 1.2.11. *Neka je H Hilbertov prostor. Vrijedi:*

(a) Svaka Rieszova baza je bezuvjetna i ograničena.

(b) Sve Rieszove baze za H su ekvivalentne.

(c) Ako je $(x_n)_n$ Rieszova baza za H i $S \in \mathbb{B}(H, K)$ bijekcija, tada je $(Sx_n)_n$ Rieszova baza za K.

Dokaz. (a) Neka je $(x_n)_n$ Rieszova baza za H. Po definiciji Rieszove baze, postoje ONB $(e_n)_n$ za H i bijektivan ograničen operator T takvi da $Te_n = x_n$, za sve n. Baza $(e_n)_n$ očito je ograničena jer je $\|e_n\| = 1, \forall n$, a prema Propoziciji 1.1.12 je i bezuvjetna. Baze $(x_n)_n$ i $(e_n)_n$ su ekvivalentne po operatoru T. Jer je T ograničen, imamo $\|x_n\| \leq \|T\| \cdot \|e_n\| = \|T\|$, pa je i baza $(x_n)_n$ ograničena. Prema Propoziciji

1.1.12, $(e_n)_n$ je bezuvjetna jer je ONB, a prema Propoziciji 1.2.6, (x_n) je bezuvjetna jer je ekvivalentna $(e_n)_n$.

(b) Neka su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ proizvoljne Rieszove baze za H te (e_n) i $(f_n)_n$ pripadne ortonormirane baze takve da $Te_n = x_n$ i $Sf_n = y_n$, za sve n. Definirajmo operator U na bazi $(e_n)_n$ s $Ue_n = f_n$. Ovakav operator je unitaran i ograničen pa je kompozicija SUT^{-1} invertibilan ograničen operator na H kao kompozicija takvih. Također, za sve n vrijedi $y_n = SUT^{-1}x_n$ pa je $(x_n)_n \sim (y_n)_n$.

(c) Po definiciji, H ima ONB pa je separabilan (Napomena 1.1.17). Neka je $(e_n)_n$ ONB za H i $T \in \mathbb{B}(H)$ bijektivan operator takav da $Te_n = x_n$. Uočimo, $Sx_n = STe_n$, za sve n. Kako je $S : H \to K$ bijektivan i ograničen, K je također separabilan i iste dimenzije kao H. Dakle, postoji unitaran operator $U \in \mathbb{B}(H, K)$. $(Ue_n)_n$ je ONB za K i vrijedi $Sx_n = (STU^*)(Ue_n)$ pa je $(Sx_n)_n$ Rieszova baza za K. □

Lema 1.2.12. *Neka su $((x_n)_n, (a_n)_n)$ i $((y_n)_n, (b_n)_n)$ baze Hilbertovog prostora H. Ako je $(x_n)_n \sim (y_n)_n$, tada je i $(a_n)_n \sim (b_n)_n$.*

Dokaz. Prvo, zaključimo da su i $((a_n)_n, (x_n)_n)$ i $((y_n)_n, (b_n)_n)$ baze za H (Korolar 1.2.21, [2]).

Ako je $(x_n)_n \sim (y_n)_n$, postoji bijektivan operator $S \in \mathbb{B}(H)$ takav da za sve n vrijedi $Sx_n = y_n$. Operator S^* također je bijektivan i za sve $m, n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\langle x_m, S^*b_n\rangle = \langle Sx_m, b_n\rangle = \langle y_m, b_n\rangle = \delta_{mn} = \langle x_m, a_n\rangle.$$

(x_n) je fundamentalan niz pa je $S^*b_n = a_n$ za sve n, tj. imamo $(b_n)_n \sim (a_n)_n$. □

Korolar 1.2.13. *Neka je $((x_n)_n, (y_n)_n)$ baza Hilbertovog prostora H. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(a) $(x_n)_n$ *je Rieszova baza;*

(b) $(y_n)_n$ *je Rieszova baza;*

(c) $(x_n)_n \sim (y_n)_n$.

Dokaz. Uočimo, svaka ONB je biortogonalna sama sebi, tj. vrijedi $e_n(e_m) = \delta_{mn}$. Za pripadni niz funkcionala $(a_n)_n$ vrijedi $a_n(e_m) = \delta_{mn}$. Vidimo da su nizovi $(a_n)_n$ i $(e_n)_n$ biortogonalni bazi $(e_n)_n$. Imamo $(a_n - e_n)(e_m) = a_n(e_m) - e_n(e_m) = \delta_{mn} - \delta_{mn} = 0$ za sve m i n. Niz $(e_n)_n$ je fundamentalan pa iz $(a_n - e_n)(e_m) = 0$, $\forall m, n$ slijedi $a_n - e_n = 0$ za sve n, tj. $a_n = e_n$. Stoga je niz funkcionala pridružen ortonormiranoj bazi ona sama.

$(a) \Rightarrow (b), (c)$ Ako je $(x_n)_n$ Rieszova baza, po definiciji imamo neku ONB za H ekvivalentnu s $(x_n)_n$. Dakle, imamo baze $((x_n)_n, (y_n)_n)$ i $((e_n)_n, (e_n)_n)$ takve da

$(x_n)_n \sim (e_n)_n$, pa po prethodnoj lemi vrijedi $(y_n)_n \sim (e_n)_n$. Stoga je $(y_n)_n$ također Rieszova baza i vrijedi $(x_n)_n \sim (y_n)_n$.

$(b) \Rightarrow (a), (c)$ Kao i ranije, zaključujemo da je i $((y_n)_n, (x_n)_n)$ baza za H pa je ova tvrdnja analogna prvom dijelu dokaza.

$(c) \Rightarrow (a)$ Neka je $S \in \mathbb{B}(H)$ bijektivan operator za koji imamo $Sx_n = y_n$, za sve n. Kako je $((x_n)_n, (y_n)_n)$ baza, za svaki x u H imamo

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Sx_n \rangle x_n.$$

Slijedi

$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Sx_n \rangle Sx_n \quad \text{i} \quad \langle Sx, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, Sx_n \rangle|^2 \geq 0.$$

Nadalje, lako se provjeri da vrijedi

$$\langle Sx, y \rangle = \frac{1}{4} \Big[\langle S(x+y), x+y \rangle - \langle S(x-y), x-y \rangle + \\ + i \langle S(x+iy), x+iy \rangle - i \langle S(x-iy), x-iy \rangle \Big].$$

Iz $\langle Sx, x \rangle \geq 0$ znamo da je $\langle Sx, x \rangle \in \mathbb{R}$ pa mora vrijediti $\langle Sx, x \rangle = \langle x, Sx \rangle$. Primijenimo li ovo na prethodnu relaciju, dobivamo

$$\begin{aligned} \langle Sx, y \rangle &= \frac{1}{4} \Big[\langle x+y, S(x+y) \rangle - \langle x-y, S(x-y) \rangle + \\ &\qquad + i \langle x+iy, S(x+iy) \rangle - i \langle x-iy, S(x-iy) \rangle \Big] \\ &= \langle x, Sy \rangle. \end{aligned}$$

Dakle, S je hermitski operator i vrijedi $\langle Sx, x \rangle \geq 0$ pa je S pozitivno semidefinitan operator. I S^{-1} je pozitivno definitan. Nadalje, imamo $S^{-\frac{1}{2}} = \left(S^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \geq 0$. $S^{\frac{1}{2}}$ je hermitski pa za sve m i n vrijedi

$$\langle S^{\frac{1}{2}} x_m, S^{\frac{1}{2}} x_n \rangle = \langle x_m, Sx_n \rangle = \langle x_m, y_n \rangle = \delta_{mn}.$$

Sada znamo da je $(S^{\frac{1}{2}}x_n)_n$ ortonormiran niz, a kako je $S^{\frac{1}{2}}$ bijektivan i $(x_n)_n$ fundamentalan u H, slijedi da je $(S^{\frac{1}{2}}x_n)_n$ ONB za H (Teorem 1.1.21). Dakle, $(x_n)_n = ((S^{-\frac{1}{2}})S^{\frac{1}{2}}x_n)_n$ je Rieszova baza. $\square$

Teorem 1.2.14. *Neka je $(x_n)_n$ niz u Hilbertovom prostoru H. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(a) $(x_n)_n$ *je Rieszova baza za H.*

(b) $(x_n)_n$ *je baza za H i za niz skalara $(c_n)_n$ vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \text{ konvergira} \iff (c_n)_n \in \ell^2.$$

(c) $(x_n)_n$ *je fundamentalan niz u H i postoje konstante A i B takve da*

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall c_1, c_2, \ldots, c_N \in \mathbb{F}, A \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\|^2 \leq B \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 .$$

(d) Postoji ekvivalentan skalarni produkt $(\cdot|\cdot)$ na H takav da je $(x_n)_n$ ortonormirana baza za $(H, (\cdot|\cdot))$.

Dokaz. $(a) \Rightarrow (b)$ Pretpostavimo da vrijedi (a). Neka su $(e_n)_n$ ONB za H i $T \in \mathbb{B}(H)$ takvi da za sve n vrijedi $Te_n = x_n$. Neka je $(c_n)_n$ niz skalara. Po Teoremu 1.2.7, red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira ako i samo ako red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ konvergira. S druge strane, po Propoziciji 1.1.12 red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ konvergira ako i samo ako je $(c_n)_n \in \ell^2$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Neka je $(x_n)_n$ baza za H i $(e_n)_n$ ONB za H. Imamo da red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira ako i samo ako red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ konvergira jer su po pretpostavci (b) i Propoziciji 1.1.12 obje konvergencije ekvivalentne s $(c_n)_n \in \ell^2$. Sada po Teoremu 1.2.7 imamo $(x_n)_n \sim (e_n)_n$, pa je $(x_n)_n$ Rieszova baza.

$(a) \Rightarrow (d)$ Neka vrijedi (a) i neka su $(e_n)_n$ ONB za H i $T \in \mathbb{B}(H)$ invertibilan operator takvi da $Te_n = x_n$. Definiramo skalarni produkt na H kao

$$(x|y) = \langle T^{-1}x, T^{-1}y \rangle, \; x, y \in H.$$

Pripadna norma je dana s $|||x||| = \|T^{-1}x\|$. Kako je T ograničen i ograničen odozdo, norma $|||\cdot|||$ ekvivalentna je normi $\|\cdot\|$. Stoga je $(x_n)_n$ fundamentalan u odnosu na ovu novu normu i imamo

$$(x_n|x_m) = \langle T^{-1}x_n, T^{-1}x_m \rangle = \langle e_n, e_m \rangle = \delta_{mn}.$$

Prema Teoremu 1.2.7 i dokazanom, $(x_n)_n$ je ONB za $(H, (\cdot|\cdot))$.

$(d) \Rightarrow (c)$ Neka vrijedi (d). Neka su A i B konstante za koje vrijedi

$$A|||x|||^2 \leq \|x\|^2 \leq B|||x|||^2, \forall x \in H. \tag{1.3}$$

$(x_n)_n$ je ONB u odnosu na novi skalarni produkt $(\cdot|\cdot)$, pa druga nejednakost u (1.3) povlači da je $(x_n)_n$ fundamentalan u odnosu na originalnu normu $\|\cdot\|$. Odaberimo $N \in \mathbb{N}$ i proizvoljne skalare $c_1, c_2, \ldots, c_N$. Vrijedi

$$\left|\left|\left|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\right|\right|\right|^2 = \left(\sum_{n=1}^{N} c_n x_n \middle| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 .$$

U kombinaciji s (1.3) ovo daje traženu nejednakost.

$(c) \Rightarrow (a)$ Neka vrijedi (c) i neka je $(e_n)_n$ neka ONB za H. Izaberimo $x \in H$. Vrijedi

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \quad \text{i} \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 .$$

Neka je $M < N$. Uzmimo $c_1 = c_2 = \cdots = c_M = 0$ i $c_n = \langle x, e_n \rangle$ za $n = M+1, M+2, \ldots, N$. Prema (c) tada vrijedi

$$\left\|\sum_{n=M+1}^{N} \langle x, e_n \rangle x_n\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\right\| \leq B \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 = B \sum_{M+1}^{N} |\langle x, e_n \rangle|^2 .$$

Prema tome, red $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle x_n$ konvergira, pa za svaki $x \in H$ možemo definirati $Sx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle x_n$. S je očito linearan operator - tvrdimo da je i ograničen i bijektivan.

Prema (c), uz $N \to \infty$, imamo

$$A\|x\|^2 = A \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|Sx\|^2 \leq B \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = B\|x\|^2.$$

Dakle, S je ograničen i ograničen odozdo. Posebno, slika od S, $\operatorname{Im} S$ je zatvoren potprostor u H. S druge strane, za svaki m imamo $Se_m = x_m$ pa je $\operatorname{Im} S$ gust skup u H. Dakle, S je bijektivan. Po definiciji, $(x_n)_n = (Se_n)_n$ je Rieszova baza za H. □

Korolar 1.2.15. *Ako je $(x_n)_n$ Rieszova baza za Hilbertov prostor H, postoje konstante A i B takve da*

$$A \|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B \|x\|^2 , \forall x \in H. \tag{1.4}$$

Dokaz. Neka je $(e_n)_n$ ONB za H i T invertibilan ograničen operator takav da za svaki n vrijedi $x_n = Te_n$. Imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle T^* x, e_n\rangle|^2 = \|T^* x\|^2. \tag{1.5}$$

Dakle, imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 = \|T^* x\|^2 \leq \|T\|^2 \|x\|^2,$$

što uz $B = \|T\|^2$ daje drugu nejednakost u (1.4). T^* je također invertibilan operator, ograničen i ograničen odozdo, pa imamo

$$\|x\| = \|(T^*)^{-1} T^* x\| \leq \|(T^*)^{-1}\| \cdot \|T^* x\| = \|T^{-1}\| \cdot \|T^* x\|,$$

tj.

$$\|x\|^2 \leq \|T^{-1}\|^2 \cdot \|T^* x\|^2 = \|T^{-1}\|^2 \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \right),$$

što uz $A = \frac{1}{\|T^{-1}\|^2}$ daje prvu nejednakost u (1.4). □

1.3 Besselovi nizovi

Definicija 1.3.1. *Kažemo da je niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H Besselov ako za svaki $x \in H$ vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 < \infty. \tag{1.6}$$

Lema 1.3.2. *Ako je (x_n) Besselov niz u Hilbertovom prostoru H, tada je preslikavanje $U : H \to \ell^2$ definirano s $Ux = (\langle x, x_n\rangle)_n$ ograničen linearan operator. Posebno, postoji konstanta $B > 0$ takva da*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B \|x\|^2, \forall x \in H. \tag{1.7}$$

Dokaz. U je dobro definirano preslikavanje jer je $(x_n)_n$ Besselov niz pa vrijedi (1.6). U je očito linearan operator. Pokazat ćemo da U ima zatvoren graf pa će po Teoremu o zatvorenom grafu ([1], Teorem 6.1.7) vrijediti da je U ograničen.

Neka $y_N \to y \in H$ i $Uy_N \to (c_n)_n \in \ell^2$. Tada za svaki fiksan m imamo

$$|c_m - \langle y_N, x_m\rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n - \langle y_N, x_n\rangle|^2 = \|(c_n)_n - Uy_N\|^2 \to 0 \text{ kad } N \to \infty.$$

Dakle, $c_m = \lim_{N\to\infty}\langle y_N, x_m\rangle = \langle y, x_m\rangle$ za svaki m, pa je $(c_n)_n = (\langle y, x_n\rangle)_n$ pa U ima zatvoren graf. $\square$

Definicija 1.3.3. *Operator U iz prethodne leme zovemo operatorom analize pridruženom nizu $(x_n)_n$. Njegov adjungirani operator $U^* \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ zovemo operatorom sinteze. Konstantu B u (1.7) zovemo Besselovom ogradom niza $(x_n)_n$.*

Napomena 1.3.4. *Uočimo da Besselova ograda nije jedinstvena: sve vrijednosti veće od B također zadovoljavaju danu nejednakost. Najmanja vrijednost koja zadovoljava ovu nejednakost jest $\|U\|^2$.*

Propozicija 1.3.5. *Neka je $(x_n)_n$ Besselov niz u Hilbertovom prostoru H s operatorom analize U. Tada za svaki niz $(c_n)_n$ u ℓ^2 red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira bezuvjetno i operator sinteze U^* dan je sa $U^*(c_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$. Posebno, ako je $(e_n)_n$ kanonska baza za ℓ^2, imamo $U^* e_n = x_n$ pa za svaki n vrijedi $\|x_n\| \le \|U\|$.*

Dokaz. Neka je B Besselova ograda za $(x_n)_n$. Uzmimo $(c_n)_n$ iz ℓ^2. Prema Teoremu 1.1.14, red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira bezuvjetno ako i samo ako je familija $\{c_n x_n : n \in \mathbb{N}\}$ sumabilna, tj. hiperniz $(\sum_{n\in F} c_n x_n)_{F\in\mathcal{F}}$ Cauchyjev (vidi [1], Propozicija 3.1.5).

Neka je F proizvoljan konačan podskup od $\mathbb{N}$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n\in F} c_n x_n\right\|^2 &= \sup\left\{\left|\left\langle \sum_{n\in F} c_n x_n, y\right\rangle\right|^2 : \|y\| = 1\right\}\\
&= \sup\left\{\left|\sum_{n\in F} c_n \langle x_n, y\rangle\right|^2 : \|y\| = 1\right\}\\
&\le \sup\left\{\left(\sup_{n\in F} |c_n|^2\right)\left(\sum_{n\in F} |\langle x_n, y\rangle|^2\right) : \|y\| = 1\right\}\\
&\le \sup\left\{B\|y\|^2 \sum_{n\in F} |c_n|^2 : \|y\| = 1\right\} = B\sum_{n\in F} |c_n|^2 .
\end{aligned}$$

Kako red $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ konvergira apsolutno i bezuvjetno, prema Teoremu 1.1.14 je hiperniz $\left(\sum_{n\in F} |c_n|^2\right)_{F\in\mathcal{F}}$ Cauchyjev. Sada slijedi po računu gore da je i $(\sum_{n\in F} c_n x_n)_{F\in\mathcal{F}}$ Cauchyjev.

Sada možemo odrediti djelovanje operatora U^*. Naime, za svaki $x \in H$ i $(c_n)_n \in \ell^2$ imamo

$$\langle x, U^*(c_n)_n\rangle = \langle Ux, (c_n)_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle \overline{c_n} = \left\langle x, \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \right\rangle .$$

□

Propozicija 1.3.6. *Neka je $(x_n)_n$ niz u Hilbertovom prostoru H takav da red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira za svaki $(c_n)_n$ iz ℓ^2. Tada je $(x_n)_n$ Besselov niz.*

Dokaz. Definirajmo preslikavanje $T : \ell^2 \to H$ s $T(c_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$. T je očito linearan operator. Za svaki $N \in \mathbb{N}$ možemo definirati i $T_N \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ s $T_N(c_n)_n = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n$. Očito, T je jaki limes niza $(T_N)_N$. Po principu uniformne ograničenosti, T je ograničen operator. Neka je $\|T\| = \sqrt{B}$. Za T^* također vrijedi $\|T^*\| = \sqrt{B}$. Ako označimo kanonsku bazu od ℓ^2 s $(e_n)_n$, imamo

$$\langle T^* x, e_n \rangle = \langle x, Te_n \rangle = \langle x, x_n \rangle, \ \forall x \in H, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prema tome, za svaki $x \in H$ je $T^* x = (\langle x, x_n \rangle)_n$. Dakle, za svaki $x \in H$, niz $(\langle x, x_n \rangle)_n$ je niz u ℓ^2 pa vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 < \infty$. □

Napomena 1.3.7. *Prethodni rezultati pokazuju sljedeće: niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H je Besselov ako i samo ako postoji ograničen operator $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ takav da je $Te_n = x_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, gdje je $(e_n)_n$ kanonska ONB za ℓ^2. U tom slučaju, T se poklapa s operatorom sinteze U^* niza $(x_n)_n$.*

Dodatno, budući da su sve ortonormirane baze separabilnog Hilbertovog prostora ekvivalentne, zaključujemo kako je niz $(x_n)_n$ u H Besselov ako i samo ako postoje Hilbertov prostor K, ortonormirana baza $(f_n)_n$ za K i ograničen operator $T \in \mathbb{B}(K, H)$ takvi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $Tf_n = x_n$.

Poglavlje 2

Teorija baznih okvira

2.1 Osnovna svojstva baznih okvira

U ovom poglavlju uvodimo pojam baznog okvira, svojevrsnog poopćenja pojma baze prostora, koje zadržava rekonstrukcijsko svojstvo, ali pokazuje veću fleksibilnost i manju osjetljivost.

Definicija 2.1.1. *Kažemo da je niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H bazni okvir za H ako postoje pozitivne konstante A i B takve da vrijedi*

$$A\left\|x\right\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\langle x, x_n\rangle\right|^2 \leq B\left\|x\right\|^2, \forall x \in H. \tag{2.1}$$

Konstante A i B s ovim svojstvom zovemo granicama baznog okvira.

Ako je $A = B$, kažemo da je okvir napet. Posebno, kažemo da je bazni okvir $(x_n)_n$ Parsevalov ako je $A = B = 1$, tj. imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\langle x, x_n\rangle\right|^2 = \left\|x\right\|^2, \forall x \in H.$$

Kažemo da je bazni okvir egzaktan ako niz dobiven izostavljanjem bilo kojeg njegovog člana više nije bazni okvir za H.

Napomena 2.1.2. *(a) Granice baznih okvira nisu jedinstvene. Maksimalna vrijednost A i minimalna vrijednost B za koje je zadovoljeno svojstvo* (2.1) *zovu se optimalne granice baznih okvira i označavamo ih s A_{opt} i B_{opt}.*

(b) Ako je $(x_n)_n$ bazni okvir, red $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\langle x, x_n\rangle\right|^2$ je apsolutno konvergentan red nenegativnih realnih brojeva, stoga je i bezuvjetno konvergentan. Slijedi da je svaka

permutacija baznog okvira opet bazni okvir, pa za indeksni skup možemo uzeti bilo koji prebrojiv skup (najčešće koristimo skup prirodnih brojeva).

Primjer 2.1.3. *Neka je $(e_n)_n$ ONB za Hilbertov prostor H. Tada je niz*

(a) $e_1, e_2, e_3, \ldots$ *Parsevalov egzaktan bazni okvir za H;*

(b) $e_1, 0, e_2, 0, e_3, \ldots$ *Parsevalov neegzaktan bazni okvir za H;*

(c) $e_1, e_1, e_2, e_2, \ldots$ *napet ($A = B = 2$) neegzaktan bazni okvir za H;*

(d) $2e_1, e_2, e_3, e_4, \ldots$ *egzaktan ($A = 1$, $B = 2$) bazni okvir za H;*

(e) $e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \ldots$ *Parsevalov neegzaktan bazni okvir za H;*

(f) $e_1, \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{3}e_3, \ldots$ *ortogonalan i fundamentalan niz, ali ne i bazni okvir za H.*

Napomena 2.1.4. *(a) Svaki bazni okvir $(x_n)_n$ za H je fundamentalan niz u H. Ovo slijedi iz činjenice da je H Hilbertov prostor i $(x_n)_n$ maksimalan, što vidimo iz prve nejednakosti u* (2.1). *Iz (f) dijela u prethodnom primjeru jasno je da obrat ne vrijedi.*

(b) U nastavku promatramo samo separabilne Hilbertove prostore.

(c) Za beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor ne postoji konačan fundamentalan niz, pa ne može postojati ni konačan bazni okvir.

(d) Konačan niz $(x_n)_{n=1}^M$ bazni je okvir za konačnodimenzionalan Hilbertov prostor H ako i samo ako je $\{x_n : 1 \leq n \leq M\}$ sustav izvodnica za H.

Dokaz. Jedan smjer slijedi, kao i ranije, iz činjenice da je svaki bazni okvir u H ujedno i maksimalan.

Kako bismo pokazali obrat, pretpostavimo da konačan niz $(x_1, x_2, \ldots, x_M)$ čini sustav izvodnica za H. Tada možemo definirati operator

$$U : H \to \mathbb{F}^M, Ux = (\langle x, x_1\rangle, \langle x, x_2\rangle, \ldots, \langle x, x_M\rangle).$$

U je linearan i injektivan operator, stoga je $U_0 : H \to \operatorname{Im} U$, $U_0x = Ux$ invertibilan i njegov inverz $V : \operatorname{Im} U \to H$ je ograničen. Odaberimo konstantu $C > 0$ takvu da

$$\|V(Ux)\|^2 \leq C\|Ux\|^2, \ \forall x \in H$$

Za $A = \frac{1}{C}$ gornja nejednakost uz $VUx = x$ daje

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{M} |\langle x, x_n \rangle|^2 \, , \, \forall x \in H.$$

S druge strane, za svaki $x \in H$ uz $B = \sum_{n=1}^{M} \|x_n\|^2$ također imamo

$$\sum_{n=1}^{M} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{M} \|x\|^2 \|x_n\|^2 \leq B\|x\|^2.$$

□

Iz definicije baznog okvira, jasno je da je svaki bazni okvir ujedno i Besselov niz. Zato je za bazni okvir $(x_n)_n$ u H, operator analize $U : H \to \ell^2$ dobro definiran i ograničen, uz konvenciju da $(x_n)_n$ može označavati i konačan niz od M elemenata, i u tom slučaju U poprima vrijednosti u $\mathbb{F}^M$.

Posebno, znamo iz Propozicije 1.3.5 da je operator sinteze U^* dan s $U^*(c_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$, gdje ovaj red konvergira bezuvjetno za svaki $(c_n)_n \in \ell^2$.

Dodatno, iz Definicije 2.1.1 vidimo da je operator analize U svakog baznog okvira odozdo ograničen. U nastavku će nam trebati sljedeći rezultati o ograničenim operatorima u Hilbertovim prostorima.

Lema 2.1.5. *Neka su H i K Hilbertovi prostori. Ako je $T \in \mathbb{B}(H, K)$ surjektivan, T^* je ograničen odozdo.*

Dokaz. Neka je T surjekcija i $S = \{y \in K : \|T^*y\| = 1\}$. Uočimo, S je slabo ograničen, tj. njegova slika pri svakom neprekidnom linearnom funkcionalu ograničen je skup u polju skalara. Naime, za proizvoljan $z \in K$ imamo $x \in H$ takav da je $Tx = z$ i za svaki $y \in S$ vrijedi

$$|\langle y, z \rangle| = |\langle y, Tx \rangle| = |\langle T^*y, x \rangle| \leq \|T^*y\| \cdot \|x\| = \|x\|.$$

Po principu uniformne ograničenosti zaključujemo kako je S ograničen. Stoga postoji konstanta $C > 0$ takva da za svaki y iz S vrijedi $\|y\| \leq C$.

Sada uočimo da surjektivnost od T i jednakost $K = \overline{\mathrm{Im}(T)} \oplus \mathrm{Ker}(T^*)$ povlače da je T^* injekcija. Stoga je $T^*v \neq 0$ za sve $v \neq 0$. Dakle, ako je $v \neq 0$, $\frac{v}{\|T^*v\|}$ dobro je definiran vektor u S. Kako je $\|y\| \leq C$ za sve $y \in S$, imamo $\|\frac{v}{\|T^*v\|}\| \leq C$, tj. $\|T^*v\| \geq \frac{1}{C}\|v\|$. □

Propozicija 2.1.6. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i $T \in \mathbb{B}(H, K)$.*

(a) $\operatorname{Im} T$ *je zatvoren potprostor od* K *ako i samo ako je* $\operatorname{Im} T^*$ *zatvoren potprostor u* H*.*

(b) T *je surjektivan ako i samo ako je* T^* *ograničen odozdo.*

(c) Ako je $\operatorname{Im} T$ *zatvoren potprostor,* TT^* *je invertibilan na* $\operatorname{Im} T$*.*

Dokaz. (a) Pretpostavimo da je $\operatorname{Im} T$ zatvoren potprostor. Ako je T surjektivan, prema prethodnoj lemi T^* je ograničen odozdo pa je $\operatorname{Im} T^*$ zatvoren. Naime, kako je T^* ograničen odozdo, postoji $m > 0$ takav da za svaki vektor $x \in H$ vrijedi $\|T^*x\| \geq m\|x\|$ pa za Cauchyjev niz $(T^*x_n)_n$ u $\operatorname{Im} T^*$ imamo

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{1}{m}\|T^*x_m - T^*x_n\| \to 0.$$

Dakle, $(x_n)_n$ Cauchyjev pa i konvergentan u H, $x = \lim x_n$. Zbog neprekidnosti od T^* je $\lim T^*x_n = T^*x$, tj. Cauchyjev niz $(Tx_n)_n$ je konvergentan u $\operatorname{Im} T^*$.

Ako T nije surjektivan, označimo $\operatorname{Im} T$ s K_0 i promotrimo $T_0 : H \to K_0$ definiran s $T_0x = Tx$. Kako je T_0 surjektivan, slika operatora T_0^* je zatvorena pa preostaje samo pokazati $\operatorname{Im}(T_0)^* = \operatorname{Im} T^*$.

Kako je $T^*_{|K_0} = (T_0)^*$, imamo $\operatorname{Im}(T_0)^* \subseteq \operatorname{Im} T^*$. Obratna inkluzija slijedi iz $\operatorname{Im} T^* \subseteq (\operatorname{Ker} T)^\perp = (\operatorname{Ker} T_0)^\perp = \operatorname{Im}(T_0)^*$, pa je implikacija dokazana. Obrat slijedi ako primijenimo dokazani smjer na operator T^*.

(b) Ako je T surjektivan, po prethodnoj lemi slijedi da je T^* ograničen odozdo. Preostaje pokazati obrat. Pretpostavimo da je T^* ograničen odozdo. Tada je $\operatorname{Ker} T^* = \{0\}$ i $\operatorname{Im} T^*$ je zatvoren potprostor pa je po (a) dijelu i $\operatorname{Im} T$ zatvoren. Stoga je $\operatorname{Im} T = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp = K$, tj. T je surjektivan.

(c) Pretpostavimo da je $\operatorname{Im} T$ zatvoren potprostor od K. Neka je $TT^*y = 0$ za neki $y \in \operatorname{Im} T$. Uočimo, $\operatorname{Ker} TT^* = \operatorname{Ker} T^*$ pa imamo $y \in \operatorname{Ker} T^* \cap \operatorname{Im} T$ iz čega slijedi $y = 0$. Dakle, TT^* je injektivan na $\operatorname{Im} T$. S druge strane, po (a) dijelu znamo da je i slika od T^* zatvoren potprostor pa je $H = \operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Im} T^*$. To znači da za svaki x u H postoje $y \in \operatorname{Ker} T$ i $v \in K$ takvi da $x = y + T^*v$. Djelovanjem operatora T dobivamo $Tx = TT^*v$ pa je $\operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Im} TT^*$. Konačno, imamo

$$\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} TT^* = TT^*(K) = TT^*(\operatorname{Ker} T^* \oplus \operatorname{Im} T) = TT^*(\operatorname{Im} T),$$

pa je TT^* surjektivan na $\operatorname{Im} T$. □

Teorem 2.1.7. *Neka je* $(x_n)_n$ *bazni okvir za Hilbertov prostor* H*. Tada je pripadni operator analize* U *ograničen i ograničen odozdo, i operator sinteze* U^* *je surjektivan. Obratno, ako je* $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ *surjektivan, niz* $(x_n)_n$*,* $x_n = Te_n$*,* $n \in \mathbb{N}$*, gdje je* $(e_n)_n$ *kanonska baza za* ℓ^2*, bazni je okvir za* H *čiji se operator analize poklapa s* T^**.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ bazni okvir. Znamo da je U ograničen i ograničen odozdo. Prethodna propozicija povlači da je U^* surjektivan.

Pretpostavimo da je $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ surjekcija. Iz prethodne propozicije slijedi da je T^* ograničen odozdo. Dakle, postoje konstante $A, B > 0$ takve da vrijedi

$$A\|x\|^2 \leq \|T^*x\|^2 \leq B\|x\|^2, \forall x \in H.$$

S druge strane, za svaki $x \in H$ imamo

$$T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T^*x, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Te_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle e_n,$$

odakle slijedi

$$T^*x = (\langle x, x_n \rangle)_n \quad \text{i} \quad \|T^*x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 .$$

□

Korolar 2.1.8. *Niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H je bazni okvir za H ako i samo ako postoje separabilan Hilbertov prostor L, surjektivan operator $T \in \mathbb{B}(L, H)$ i ONB $(f_n)_n$ za L takvi da $x_n = Tf_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Jedan smjer slijedi iz prethodnog teorema i Propozicije 1.3.5.

Ako je $(f_n)_n$ ONB za Hilbertov prostor L, postoji unitaran operator $V : \ell^2 \to L$ takav da je $Ve_n = f_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, gdje je $(e_n)_n$ kanonska baza za ℓ^2. Prema prethodnom teoremu sada slijedi obratni smjer. □

Napomena 2.1.9. *Operator analize Parsevalovog baznog okvira je izometrija. Pripadni operator sinteze je stoga koizometrija (surjektivna parcijalna izometrija). Lako se vidi da su Parsevalovi bazni okviri nizovi u koje se preslikaju ortonormirane baze pri djelovanju neke koizometrije.*

Propozicija 2.1.10. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za Hilbertov prostor H s operatorom analize U. Tada je operator U^*U invertibilan i optimalne granice baznog okvira dane su sa*

$$A_{opt} = \frac{1}{\|(U^*U)^{-1}\|} = \min\{\lambda : \lambda \in \sigma(U^*U)\}$$

i

$$B_{opt} = \|U^*U\| = \max\{\lambda : \lambda \in \sigma(U^*U)\}.$$

Dokaz. Prema Propoziciji 2.1.6 primijenjenoj na U^*, kompozicija U^*U invertibilan je operator na $\operatorname{Im} U^* = H$. Prema Propoziciji 1.3.5 imamo

$$U^*Ux = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, \ \forall x \in H.$$

Skalarnim množenjem ove jednakosti sa x dobivamo

$$\langle U^*Ux, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2, \ \forall x \in H.$$

Sada zaključujemo da je $A_{opt}I \leq U^*U \leq B_{opt}I$, tj. $B_{opt} = \|U^*U\| = \|U\|^2$. S druge strane imamo

$$A_{opt}I \leq U^*U \iff (U^*U)^{-1} \leq \frac{1}{A_{opt}}I,$$

iz čega slijedi da je $\|(U^*U)^{-1}\| \leq \frac{1}{A_{opt}}$. Vrijedi i obratna nejednakost: ako pretpostavimo suprotno, da je $\|(U^*U)^{-1}\| = C < \frac{1}{A_{opt}}$, vrijedilo bi $(U^*U)^{-1} \leq C \cdot I$, tj. $\frac{1}{C}I \leq U^*U$, što je u kontradikciji s činjenicom da je A_{opt} najveća donja granica baznog okvira jer je $\frac{1}{C} > A_{opt}$. Stoga vrijedi

$$\frac{1}{A_{opt}} = \|(U^*U)^{-1}\|.$$

□

Korolar 2.1.11. *Neka su H i K Hilbertovi prostori. Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ bazni okvir za H i $T \in \mathbb{B}(H, K)$ surjektivan. Neka je $y_n = Tx_n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $(y_n)_n$ bazni okvir za K. Ako su A i B granice baznog okvira $(x_n)_n$, tada su granice za $(y_n)_n$ $\frac{A}{\|(T^*T)^{-1}\|}$ i $B\|T\|^2$.*

Dokaz. Prva tvrdnja direktna je posljedica Korolara 2.1.8.

Označimo s U operator analize pridružen $(x_n)_n$. Lako se vidi da je tada za $(y_n)_n$ operator analize dan s $V = UT^*$. Budući da je $A \leq A_{opt}$ i $B_{opt} \leq B$, iz $A_{opt}I \leq U^*U \leq B_{opt}I$ imamo

$$AI \leq U^*U \leq BI.$$

Jer je T surjektivan, po (c) dijelu Propozicije 2.1.6 je TT^* invertibilan pa je

$$(TT^*)^{-1} \leq \|(TT^*)^{-1}\| \cdot I,$$

tj.

$$TT^* \geq \frac{1}{\|(TT^*)^{-1}\|}I.$$

Iz ovoga slijedi

$$V^*V = (TU^*)(UT^*) = T(U^*U)T^* \leq B \cdot TT^* \leq B\|TT^*\|I = B\|T\|^2 I$$

i

$$V^*V = (TU^*)(UT^*) = T(U^*U)T^* \geq A \cdot TT^* \geq \frac{A}{\|(TT^*)^{-1}\|} I.$$

Dobili smo

$$\frac{A}{\|(TT^*)^{-1}\|} I \leq V^*V \leq B\|T\|^2 I,$$

što je i trebalo pokazati. □

Definicija 2.1.12. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir s operatorom analize U. Bazni okvir $(y_n)_n$ definiran s $y_n = (U^*U)^{-1}x_n$, $n \in \mathbb{N}$, zovemo kanonskim dualom od $(x_n)_n$.*

Uočimo da je operator analize kanonskog duala $U(U^*U)^{-1}$ te da se Parsevalov okvir poklapa sa svojim kanonskim dualom. Vrijedi i obrat: Parsevalovi bazni okviri jedini imaju ovo svojstvo, što slijedi iz činjenice za je operator U izometrija ako i samo ako $U^*U = I$.

Teorem 2.1.13. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H s operatorom analize U. Tada je U^*U invertibilan operator na H i niz $(y_n)_n$ definiran s $y_n = (U^*U)^{-1}x_n$, $n \in \mathbb{N}$, također je bazni okvir za H i zadovoljava*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n, \ \forall x \in H. \tag{2.2}$$

Posebno, ako je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir, jednakosti u (2.2) *postaju*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, \ \forall x \in H. \tag{2.3}$$

Dokaz. Kao i ranije, prema Propoziciji 2.1.6 primijenjenoj na U^*, kompozicija U^*U invertibilan je operator na $\operatorname{Im} U^* = H$ te iz Propozicije 1.3.5 imamo

$$U^*Ux = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, \ \forall x \in H.$$

Djelovanjem operatora $(U^*U)^{-1}$ na ovu jednakost dobivamo

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle (U^*U)^{-1} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle y_n, \ \forall x \in H.$$

Prema Korolaru 2.1.11, znamo da je $(y_n)_n$ također bazni okvir za H s operatorom analize $V = U\left(U^*U\right)^{-1} = \left(U^*\right)^{-1}$. Prema tome, iz iste argumentacije kao i ranije, ali primijenjene na bazni okvir $(y_n)_n$ i operator V^*V, imamo

$$V^*Vx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle y_n, \ \forall x \in H,$$

tj.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle (V^*V)^{-1} y_n, \ \forall x \in H.$$

Kako je $(V^*V)^{-1} = V^{-1}(V^*)^{-1} = U^*U$, vrijedi $(V^*V)^{-1}y_n = (U^*U)y_n = x_n$ pa slijedi

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n, \ \forall x \in H.$$

Ako je $(x_n)_n$ Parsevalov, znamo da se on poklapa sa svojim kanonskim dualom pa vrijedi (2.3). $\square$

Svojstvo (2.2), odnosno (2.3), često zovemo rekonstrukcijskim svojstvom baznih okvira. Općenito, bazni okviri su linearno zavisni skupovi, pa je intuitivno jasno da kanonski dual baznog okvira nije jedini niz koji se može koristiti za analizu ili sintezu vektora (signala) kako bismo dobili jednakosti analogne (2.2) i (2.3).

Propozicija 2.1.14. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H s operatorom analize U. Neka je $u_n = (U^*U)^{-\frac{1}{2}} x_n$. Tada je $(u_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za H.*

Dokaz. $(U^*U)^{-\frac{1}{2}}$ je invertibilan operator, pa je posebno i surjektivan. Prema Korolaru 2.1.11, $(u_n)_n$ je bazni okvir s operatorom analize $U(U^*U)^{-\frac{1}{2}}$. Ovaj bazni okvir je Parsevalov jer je

$$\left(U(U^*U)^{-\frac{1}{2}}\right)^* U(U^*U)^{-\frac{1}{2}} = I.$$

$\square$

Propozicija 2.1.15. *Neka je $(x_n)_n$ niz u Hilbertovom prostoru H. $(x_n)_n$ je Parsevalov bazni okvir za H ako i samo ako*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, \ \forall x \in H. \tag{2.4}$$

Posebno, ako je $(f_n)_n$ ONB za H i M zatvoren potprostor od H, tada je niz $(Pf_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za M, gdje P označava ortogonalni projektor na M.

Dokaz. Jedan smjer tvrdnja je Teorema 2.1.13.

Obratno, pretpostavimo da vrijedi (2.4). Primjenom skalarnog produkta s x na jednakost, dobivamo

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 .$$

Sada uočimo da se za $x \in M$ relacija $x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, f_n\rangle f_n$ može zapisati kao

$$x = Px = \sum_{n=1}^{\infty}\langle Px, f_n\rangle Pf_n = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, Pf_n\rangle Pf_n.$$

□

Propozicija 2.1.16. *Neka je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za Hilbertov prostor H. Tada postoje Hilbertov prostor H_0 takav da je H zatvoren potprostor u H_0 i ortonormirana baza $(f_n)_n$ za H_0 takvi da $x_n = Pf_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, gdje je $P \in \mathbb{B}(H_0)$ ortogonalni projektor na H.*

Dokaz. Označimo s U operator analize od $(x_n)_n$. Znamo da je U izometrija i da je $M = \operatorname{Im} U$ zatvoren potprostor od ℓ^2. Neka je $Q \in \mathbb{B}(\ell^2)$ ortogonalni projektor na M i $H_0 = H \oplus M^{\perp}$. H očito možemo promatrati kao $H \oplus \{0\} \leq H_0$. Označimo s $P \in \mathbb{B}(H_0)$ ortogonalni projektor na $H \oplus \{0\}$.

Promotrimo niz $(f_n)_n$ u H_0 definiran s $f_n = (x_n, (I - Q)e_n)$, $n \in \mathbb{N}$, gdje je $(e_n)_n$ kanonska baza za ℓ^2. Očito vrijedi $Pf_n = (x_n, 0)$ za sve n. Sada tvrdimo da je $(f_n)_n$ ortonormirana baza za H_0. Kako bismo to pokazali, konstruiramo unitaran operator $W : \ell^2 \to H_0$ takav da je $We_n = f_n$ za sve n.

Prvo, uočimo da je $U^*|_M : M \to H$ unitaran. Također, zbog $\ell^2 = M \oplus \operatorname{Ker} U^*$ imamo $x_n = U^*e_n = U^*Qe_n = (U^*|_M)Qe_n$ za sve n.

Neka je $W = U^*|_M \oplus I_{M^{\perp}} : \ell^2 \to H_0$, gdje je $I_{M^{\perp}}$ identiteta na $M^{\perp}$. Tada je W očito unitaran operator i vrijedi

$$We_n = (U^*|_M \oplus I_{M^{\perp}})(Qe_n + (I - Q)e_n) = (x_n, (I - Q)e_n) = f_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

2.2 Karakterizacije baznih okvira

Prema Korolaru 2.1.8 iz prethodnog dijela, znamo da je niz elemenata u Hilbertovom prostoru H bazni okvir ako i samo ako je slika ortonormirane baze po djelovanju nekog ograničenog surjektivnog operatora. S druge strane, po definiciji znamo kako je niz u H Rieszova baza za H ako je slika ortonormirane baze pri djelovanju invertibilnog ograničenog operatora. Stoga je svaka Rieszova baza ujedno i bazni okvir. Zanima nas što je zajedničko baznim okvirima koji su Rieszove baze. Počinjemo traženjem odgovora na pitanje koje se prirodno nameće: ako promatramo Rieszovu bazu kao bazni okvir, koji joj je pripadni kanonski dual?

Prisjetimo se, kanonski dual $(y_n)_n$ baznog okvira $(x_n)_n$ Hilbertovog prostora H s operatorom analize U definirali smo s $y_n = (U^*U)^{-1}x_n$ i pokazali smo da vrijedi

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n, \ \forall x \in H.$$

Definicija 2.2.1. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H. Svaki niz (z_n) koji zadovoljava*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, z_n \rangle x_n, \ \forall x \in H$$

zovemo dualom od $(x_n)_n$.

Propozicija 2.2.2. *Neka je $((x_n)_n, (y_n)_n)$ Rieszova baza Hilbertovog prostora H. Tada se kanonski dual baznog okvira $(x_n)_n$ poklapa s $(y_n)_n$.*

Dokaz. Kako za sve $x \in H$ vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n$, $(y_n)_n$ dual je okvira $(x_n)_n$. S obzirom da je $(x_n)_n$ Rieszova baza, postoji ONB $(e_n)_n$ za H i invertibilan $T \in \mathbb{B}(H)$ takav da $Te_n = x_n$, za sve n. S druge strane, prema Korolaru 1.2.13, $(y_n)_n$ također je Rieszova baza za H pa postoji invertibilan ograničen operator S takav da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $Se_n = y_n$. Dakle, možemo zaključiti da za sve n vrijedi $y_n = ST^{-1}x_n$.

Neka je $(z_n)_n$ kanonski dual od $(x_n)_n$. Želimo pokazati da je $ST^{-1} = (U^*U)^{-1}$ i $y_n = z_n$ za sve n. Za svaki $x \in H$ imamo

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, ST^{-1}x_n \rangle x_n,$$

ali i

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, z_n \rangle x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, (U^*U)^{-1}x_n \rangle x_n.$$

Primijenimo zadnju jednakost na vektor $(U^*U)(ST^{-1})^*x$.

$$\begin{aligned}(U^*U)(ST^{-1})^*x &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle (U^*U)(ST^{-1})^*x, (U^*U)^{-1}x_n\rangle x_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, ST^{-1}x_n\rangle x_n \\ &= x.\end{aligned}$$

Dakle, $(U^*U)(ST^{-1})^* = I$ pa je $(ST^-1)^* = (U^*U)^{-1}$, tj. $ST^{-1} = (U^*U)^{-1}$. Prema tome, za sve n imamo $y_n = z_n$, tj. $(y_n)_n$ je kanonski dual od $(x_n)_n$. □

Propozicija 2.2.3. *Ako je bazni okvir $(x_n)_n$ Hilbertovog prostora H baza za H, tada je $(x_n)_n$ Rieszova baza za H.*

Dokaz. Neka je bazni okvir $(x_n)_n$ ujedno i baza, te U pripadni operator analize. Ako s $(e_n)_n$ označimo kanonsku bazu prostora ℓ^2, prema Propoziciji 1.3.5 za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n = U^*e_n$. Dovoljno je pokazati da je U^* bijektivan.

Neka je $(c_n)_n \in \operatorname{Ker} U^*$. Imamo $U^*(c_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = 0$, a jer je $(x_n)_n$ baza, slijedi $c_n = 0$ za sve n. Dakle, $\operatorname{Ker} U^* = \{0\}$. □

Korolar 2.2.4. *Ako je Parsevalov okvir $(x_n)_n$ Hilbertovog prostora H baza za H, onda je $(x_n)_n$ ortonormirana baza za H.*

Dokaz. Operator analize U Parsevalovog okvira $(x_n)_n$ je izometrija i po prethodnoj propoziciji je bijektivan. Stoga je U unitaran operator. Za kanonsku bazu $(e_n)_n$ prostora ℓ^2 vrijedi $U^*e_n = x_n$ pa je $(x_n)_n$ ONB za H. □

U nastavku odgovaramo na pitanje iz uvodnog paragrafa: koji su bazni okviri Rieszove baze? Pokazat ćemo da su Rieszove baze upravo egzaktni bazni okviri. Prisjetimo se, bazni okvir je egzaktan ako niz dobiven izostavljanjem bilo kojeg njegovog člana više nije bazni okvir.

Teorem 2.2.5. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H s pripadnim operatorom analize U. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(a) $(x_n)_n$ *je Rieszova baza.*

(b) $(x_n)_n$ *je egzaktan bazni okvir.*

(c) $(x_n)_n$ *i* $((U^*U)^{-1}x_n)_n$ *su biortogonalni.*

(d) Postoji niz $(y_n)_n$ *biortogonalan nizu* $(x_n)_n$.

(e) $(x_n)_n$ *je minimalan, tj.* $x_m \notin \overline{\operatorname{span}}\{x_n : n \neq m\}$, $\forall m$.

(f) $(x_n)_n$ *je* ω*-nezavisan, tj.* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = 0$ *povlači* $c_n = 0$, $\forall n$.

(g) Ako za neki $(c_n)_n \in \ell^2$ *vrijedi* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = 0$*, tada je* $c_n = 0$ *za sve* n.

Dokaz. $(a) \Rightarrow (b)$ Bazni okvir $(x_n)_n$ je Rieszova baza. Po definiciji, postoje ONB $(e_n)_n$ za H i invertibilan $T \in \mathbb{B}(H)$ takav da za sve n imamo $x_n = Te_n$. Svaka ortonormirana baza je egzaktan bazni okvir, a invertibilan operator T preslikava egzaktan okvir u egzaktan okvir, pa je i $(x_n)_n$ egzaktan.

$(b) \Rightarrow (c)$ Neka je $(x_n)_n$ egzaktan bazni okvir. Prvo ćemo pokazati da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\langle x_n, (U^*U)^{-1}x_n\rangle = 1$.

Naime, ako postoji m takav da vrijedi $\langle x_m, (U^*U)^{-1}x_m\rangle \neq 1$, uzmemo $a_n = \langle x_m, (U^*U)^{-1}x_n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Iz $x_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ slijedi $x_m = \frac{1}{1-a_m}\sum_{n\neq m} a_n x_n$ pa imamo

$$|\langle x, x_m\rangle|^2 = \left|\frac{1}{1-a_m}\sum_{n\neq m}\overline{a_n}\langle x, x_n\rangle\right|^2 \overset{CSB}{\leq} \underbrace{\frac{1}{|1-a_m|^2}\sum_{n\neq m}|a_n|^2}_{C}\sum_{n\neq m}|\langle x, x_n\rangle|^2 .$$

Dakle, vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, x_n\rangle|^2 = |\langle x, x_m\rangle|^2 + \sum_{n\neq m}|\langle x, x_n\rangle|^2 \leq (1+C)\sum_{n\neq m}|\langle x, x_n\rangle|^2 .$$

Ako su A i B granice baznog okvira $(x_n)_n$, imamo

$$\frac{A}{1+C}\|x\|^2 \leq \frac{A}{1+C}\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, x_n\rangle|^2 \leq \sum_{n\neq m}|\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2.$$

Tada je i niz $(x_n)_{n\neq m}$ bazni okvir za H, s granicama $\frac{A}{1+C}$ i B, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $(x_n)_n$ egzaktan. Dakle, imamo $\langle x_n, (U^*U)^{-1}x_n\rangle = 1$ za svaki n.

Preostaje pokazati da je za sve $m \neq n$, $\langle x_n, (U^*U)^{-1}x_m\rangle = 0$.

Fiksirajmo n i neka je $a_m = \langle x_n, (U^*U)^{-1}x_m\rangle$, $m \in \mathbb{N}$. Uočimo da je $x_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x_m$ i $x_n = \sum_{m=1}^{\infty}\delta_{nm}x_m$.

Prema Propoziciji 2.2.4 u [2], za bazni okvir $(x_n)_n$ s kanonskim dualom $(y_n)_n$ i niz skalara $(c_n)_n$ takav da za neki $x \in H$ vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$, imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, y_n\rangle|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, y_n\rangle - c_n|^2 .$$

Uvrstimo $x = x_m$, $c_n = \delta_{nm}$ i $a_n = \langle x_m, y_n \rangle$ pa imamo

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{m=1}^{\infty} |\delta_{nm}|^2 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} |a_m|^2 + \sum_{m=1}^{\infty} |a_m - \delta_{nm}|^2 \\ &= |a_n|^2 + \sum_{m \neq n} |a_m|^2 + |a_n - 1|^2 + \sum_{m \neq n} |a_m|^2 , \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$2 \sum_{m \neq n} |a_n|^2 = 1 - |a_n|^2 - |a_n - 1|^2 .$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} \sum_{m \neq n} \left| \langle x_n, (U^*U)^{-1} x_m \rangle \right| &= \frac{1}{2} \left(1 - \underbrace{\left| \langle x_n, (U^*U)^{-1} x_n \rangle \right|^2}_{=|1|^2=1} - \underbrace{\left| 1 - \langle x_n, (U^*U)^{-1} x_n \rangle \right|^2}_{=|1-1|^2=0} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pa je tvrdnja dokazana.

$(c) \Rightarrow (d)$ Trivijalno.

$(d) \Rightarrow (e)$ Neka je $(a_n)_n$ niz funkcionala biortogonalan nizu $(x_n)_n$ i m fiksan. Za $x \notin \operatorname{span}\{x_n : n \neq m\}$ je $a_m(x) = 0$ jer je $a_m(x_n) = 0$ za sve $n \neq m$, a x je linearna kombinacija upravo takvih x_n. a_m je neprekidan pa za sve $x \in \overline{\operatorname{span}}\{x_n : n \neq m\}$ vrijedi $a_m(x) = 0$. S obzirom da je $a_m(x_m) = 1$, slijedi $x_m \notin \overline{\operatorname{span}}\{x_n : n \neq m\}$, tj. vrijedi (e).

$(e) \Rightarrow (f)$ Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ minimalan, ali ne vrijedi (f), tj. red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira i vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = 0$, ali postoji $c_m \neq 0$. Tada je

$$x_m = -\frac{1}{c_m} \sum_{n \neq m} c_n x_n ,$$

tj. $x_m \in \overline{\operatorname{span}}\{x_n : n \neq m\}$, što je u kontradikciji s (e). Dakle, mora vrijediti (f).

$(f) \Rightarrow (g)$ Očito.

$(g) \Rightarrow (a)$ Operator U je injektivan jer vrijedi (g), pa je i bijektivan. Dakle, U^* preslikava kanonsku bazu od ℓ^2 u $(x_n)_n$ pa je $(x_n)_n$ Rieszova baza. $\square$

Poglavlje 3

Približno Rieszove baze

3.1 Približno Rieszove baze

Definicija 3.1.1. *Kažemo da je bazni okvir $(x_n)_n$ Hilbertovog prostora H približno Rieszova baza za H ako postoji konačan indeksni skup S takav da je $(x_n)_{n\notin S}$ Rieszova baza za H.*

Kažemo da je bazni okvir $(x_n)_n$ beselski ako konvergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$, gdje je $(c_n)_n$ niz skalara, povlači $(c_n)_n \in \ell^2$.

Konačno, kažemo da je bazni okvir $(x_n)_n$ bezuvjetan bazni okvir ako je, kad red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira za neki niz skalara $(c_n)_n$, konvergencija nužno bezuvjetna.

Ako je $(x_n)_n$ Rieszova baza za H i $(c_n)_n$ niz skalara, iz Teorema 1.2.14 znamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \text{ konvergira } \iff (c_n)_n \in \ell^2.$$

Lako se vidi da isto vrijedi i za približno Rieszove baze. Nadalje, ako je $(x_n)_n$ proizvoljan bazni okvir (ili čak samo Besselov niz), prema Propoziciji 1.3.5 znamo da red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira bezuvjetno za sve ℓ^2-nizove $(c_n)_n$.

Napomena 3.1.2. *Neka je $(x_n)_n$ približno Rieszova baza za Hilbertov prostor H i $(c_n)_n$ niz skalara. Tada vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \textit{ konvergira } \iff (c_n)_n \in \ell^2 \implies \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \textit{ konvergira bezuvjetno.}$$

Iz ovoga direktno slijedi da je svaka približno Rieszova baza ujedno i beselski okvir te da je svaki beselski bazni okvir bezuvjetan bazni okvir. Međutim, svaki bazni okvir nije *nužno bezuvjetan. Na primjer, za* $(e_n)_n$ *ONB u* H *i bazni okvir* $(e_1, e_1, e_2, e_2, \dots)$*, red*

$$e_1 - e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}e_3 + \dots$$

očito konvergira, ali ne konvergira bezuvjetno.

Pokazat ćemo da je beselsko svojstvo baznih okvira duboko povezano s pripadnim operatorom analize. Uvedimo prvo pojam sličnih baznih okvira.

Definicija 3.1.3. *Neka su* $(x_n)_n$ *i* $(y_n)_n$ *bazni okviri Hilbertovih prostora* H *i* K*, redom. Kažemo da su* $(x_n)_n$ *i* $(y_n)_n$ *slični bazni okviri ako postoji invertibilan operator* $T \in \mathbb{B}(H, K)$ *takav da za svaki* n *vrijedi* $y_n = Tx_n$*.*

Uočimo, svaki okvir sličan je svom kanonskom dualu. Također, okvir koji je sličan približno Rieszovoj bazi je i sam približno Rieszova baza. Analogno vrijedi i za beselske bazne okvire i bezuvjetne bazne okvire.

Lema 3.1.4. *Svaki bazni okvir sličan je okviru oblika* $(Pe_n)_n$*, gdje je* $(e_n)_n$ *kanonska baza za* ℓ^2 *i* P *ortogonalni projektor na zatvoreni potprostor* M *od* ℓ^2*.*

Dokaz. Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H s operatorom analize U. U je ograničen odozdo pa je $M = \operatorname{Im} U$ zatvoren potprostor u ℓ^2. Označimo s $P \in \mathbb{B}(\ell^2)$ ortogonalni projektor na M. Po Propoziciji 2.1.15 znamo da je $(Pe_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za M.

Uočimo, $M^\perp = \operatorname{Ker} U^*$. Dakle, za niz skalara $(c_n)_n$ imamo

$$U^*((c_n)_n) = U^*(P(c_n)_n + (I - P)(c_n)_n) = U^*(P(c_n)_n).$$

Posebno, vrijedi

$$x_n = U^* e_n = U^* P e_n, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Uočimo, $U^* : M \to H$ je invertibilan operator, pa je $(x_n)_n$ po definiciji sličan okviru $(Pe_n)_n$. □

Teorem 3.1.5. *Neka je* $(x_n)_n$ *beselski bazni okvir za Hilbertov prostor* H *s pripadnim operatorom analize* U*. Tada je* $\dim(\operatorname{Ker} U^*) < \infty$*.*

Dokaz. $M = \operatorname{Im} U$ je zatvoren potprostor od ℓ^2. Neka je P ortogonalni projektor na M. Označimo li s $(e_n)_n$ kanonsku bazu za ℓ^2, prema prethodnoj lemi znamo da je $(Pe_n)_n$ Parsevalov okvir za M sličan okviru $(x_n)_n$. Nadalje, operator analize od $(Pe_n)_n$ je operator inkluzije $M \hookrightarrow H$. Uz to, $(Pe_n)_n$ je i beselski okvir jer je sličan $(x_n)_n$.

Pokazujemo da je $\dim M^\perp < \infty$. Pretpostavimo suprotno, tj. $\dim M^\perp = \infty$. To nam omogućava konstrukciju niza skalara $(c_n)_n$ koji nije ℓ^2 niz, ali za koji red $\sum_{n=1}^\infty c_n P e_n$ konvergira.

Neka je $(\varphi_n)_n$ ortonormirana baza za $M^\perp$. Iz

$$\varphi_1 = \sum_{n=1}^\infty \langle \varphi_1, e_n \rangle e_n \quad \text{i} \quad 0 = P\varphi_1 = \sum_{n=1}^\infty \langle \varphi_1, e_n \rangle P e_n$$

slijedi

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^N \langle \varphi_1, e_n \rangle e_n \right\| = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^N \langle \varphi_1, e_n \rangle P e_n \right\| = 0.$$

Neka je $N_0 = 0$. Izaberimo N_1 takav da vrijedi $N_1 > N_0$ i

$$\left\| \sum_{n=1}^{N_1} \langle \varphi_1, e_n \rangle e_n \right\| > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad \left\| \sum_{n=1}^{N_1} \langle \varphi_1, e_n \rangle P e_n \right\| < \frac{1}{4}. \tag{3.1}$$

Sada uočimo da za svaki m vrijedi

$$\left\| \varphi_m - \sum_{n=N_1+1}^\infty \langle \varphi_m, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{N_1} \langle \varphi_m, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{N_1} |\langle \varphi_m, e_n \rangle|^2 .$$

Iz slabe konvergencije niza $(\varphi_m)_m$ prema nuli, također imamo

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{N_1} |\langle \varphi_m, e_m \rangle|^2 = 0.$$

Neka je $m_1 = 1$. Iz prethodne jednakosti slijedi da postoji $m_2 > m_1$ takav da

$$\left(\sum_{n=1}^{N_1} |\langle \varphi_{m_2}, e_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| \varphi_{m_2} - \sum_{n=N_1+1}^\infty \langle \varphi_{m_2}, e_n \rangle e_n \right\| < \frac{1}{16}.$$

Tvrdimo da je

$$\left\| \sum_{n=N_1+1}^\infty \langle \varphi_{m_2}, e_n \rangle e_n \right\| > \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3.2}$$

Pokazat ćemo ovo pretpostavljanjem suprotnog, tj.

$$\left\| \sum_{n=N_1+1}^{\infty} \langle \varphi_{m_2}, e_n \rangle e_n \right\| \le \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tada bi vrijedilo

$$1 = \|\varphi_{m_2}\| \le \left\| \varphi_{m_2} - \sum_{n=N_1+1}^{\infty} \langle \varphi_{m_2}, e_n \rangle e_n \right\| + \left\| \sum_{n=N_1+1}^{\infty} \langle \varphi_{m_2}, e_n \rangle e_n \right\| < \frac{1}{16} + \frac{1}{\sqrt{2}},$$

što je kontradikcija. Dakle, mora vrijediti (3.2). Sada možemo zaključiti da postoji $N_2' > N_1$ takav da

$$N \ge N_2' \Longrightarrow \left\| \sum_{n=N_1+1}^{N} \langle \varphi_{m_2}, e_n \rangle e_n \right\| > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Iz $0 = P\varphi_{m_2} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_{m_2}, e_n \rangle P e_n$ slijedi

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=N_1+1}^{\infty} \langle \varphi_{m_2}, e_n \rangle P e_n \right\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_{m_2}, e_n \rangle P e_n - \sum_{n=1}^{N_1} \langle \varphi_{m_2}, e_n \rangle P e_n \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{N_1} \langle \varphi_{m_2}, e_n \rangle P e_n \right\| \\
&\le \left\| \sum_{n=1}^{N_1} \langle \varphi_{m_2}, e_n \rangle e_n \right\| \\
&= \left(\sum_{n=1}^{N_1} |\langle \varphi_{m_2}, e_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Dakle, postoji $N_2'' > N_1$ takav da je

$$N \ge N_2'' \Longrightarrow \left\| \sum_{n=N_1+1}^{\infty} \langle \varphi_{m_2}, e_n \rangle P e_n \right\| < \frac{1}{8}.$$

Dobili smo da za $m_2 > m_1$ i sve $N \ge N_2 = \max\{N_2', N_2''\}$ vrijedi

$$\left\|\sum_{n=N_1+1}^{N_2}\langle\varphi_{m_2},e_n\rangle e_n\right\|>\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{ali}\ \left\|\sum_{n=N_1+1}^{N_2}\langle\varphi_{m_2},e_n\rangle Pe_n\right\|<\frac{1}{8}. \tag{3.3}$$

Induktivno nastavljajući postupak kojim smo dobili m_1 i N_1 za koje vrijedi (3.1) i $m_2 > m_1$ te $N_2 > N_1$ za koje vrijedi (3.3), konstruiramo nizove $(N_K)_{K=0}^{\infty}$ i $(m_K)_{K=1}^{\infty}$ takve da za sve $K \geq 0$ vrijedi

$$\left\|\sum_{n=N_K+1}^{N_{K+1}}\langle\varphi_{m_{K+1}},e_n\rangle e_n\right\|>\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \text{i}\quad \left\|\sum_{n=N_K+1}^{N_{K+1}}\langle\varphi_{m_{K+1}},e_n\rangle Pe_n\right\|<\frac{1}{2^{K+2}}. \tag{3.4}$$

Dodatno, znamo da vrijedi

$$\left\|\sum_{n=N_K+1}^{R}\langle\varphi_{m_{K+1}},e_n\rangle Pe_n\right\|\leq\left\|\sum_{n=N_K+1}^{R}\langle\varphi_{m_{K+1}},e_n\rangle e_n\right\|\leq 1,\ \forall R\geq N_K+1. \tag{3.5}$$

Sada definiramo niz $(c_n)_n$ na sljedeći način.

- Za $n = N_0 + 1 = 1, N_0 + 2, \ldots, N_1$, $c_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}}\langle\varphi_{m_1}, e_n\rangle$.
- Za $n = N_1 + 1, N_1 + 2, \ldots, n_2$, $c_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\langle\varphi_{m_2}, e_n\rangle$.

  $\vdots$
- Za $n = N_K + 1, N_K + 2, \ldots, n_{K+1}$, $c_n = \dfrac{1}{\sqrt{K+1}}\langle\varphi_{m_{K+1}}, e_n\rangle$.

Tada za svaki K imamo

$$\sum_{n=N_K+1}^{N_{K+1}}|c_n|^2=\sum_{N_K+1}^{N_{K+1}}\frac{1}{K+1}\left|\langle\varphi_{m_{K+1}},e_n\rangle\right|^2\overset{(3.4)}{>}\frac{1}{2}\frac{1}{K+1}.$$

Dakle, $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$ ne konvergira, pa $(c_n)_n$ nije ℓ^2-niz. Preostaje pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty}c_nPe_n$ konvergira. Pokazat ćemo da je pripadni niz parcijalnih suma Cauchyjev niz iz čega će slijediti konvergencija reda.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Za dovoljno veliki K_0, tj. $K_0 > \frac{9}{\varepsilon^2} - 1$, i $R > N \geq N_{K_0}$ te K i L za koje vrijedi $N_K \leq N < N_{K+1}$ i $N_{K+L} + 1 \leq R < N_{K+L+1}$ imamo

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{R} c_n P e_n - \sum_{n=1}^{N} c_n P e_n \right\| &= \left\| \sum_{n=N+1}^{R} c_n P e_n \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{n=N+1}^{N_{K+1}} c_n P e_n \right\| + \left\| \sum_{n=N_{K+1}+1}^{N_{K+2}} c_n P e_n \right\| + \cdots + \\
&\quad + \left\| \sum_{n=N_{K+L-1}+1}^{N_{K+L}} c_n P e_n \right\| + \left\| \sum_{n=N_{K+L}+1}^{N_R} c_n P e_n \right\|.
\end{aligned}$$

Sve članove izraza

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{N_{K+1}} c_n P e_n \right\| + \left\| \sum_{n=N_{K+1}+1}^{N_{K+2}} c_n P e_n \right\| + \cdots + \left\| \sum_{n=N_{K+L-1}+1}^{N_{K+L}} c_n P e_n \right\| + \left\| \sum_{n=N_{K+L}+1}^{N_R} c_n P e_n \right\|$$

osim prvog i zadnjeg možemo ograditi pomoću (3.4) jer za k između $K+1$ i $K+L-1$ vrijedi

$$\left\| \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} c_n P e_n \right\| = \left\| \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \langle \varphi_{m_k}, e_n \rangle P e_n \right\| < \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{2^{k+2}}.$$

Za prvi član pak vrijedi

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=N+1}^{N_{K+1}} c_n P e_n \right\| &= \left\| \sum_{n=N_K+1}^{N_{K+1}} c_n P e_n - \sum_{n=N_K+1}^{N} c_n P e_n \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=N_K+1}^{N_{K+1}} \frac{1}{\sqrt{K+1}} \langle \varphi_{m_{K+1}}, e_n \rangle P e_n - \sum_{n=N_K+1}^{N} \frac{1}{\sqrt{K+1}} \langle \varphi_{m_{K+1}}, e_n \rangle P e_n \right\| \\
&\leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{K+1}} \frac{1}{2^{K+2}}}_{\text{kao i prije iz (3.4)}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{K+1}}}_{\text{slijedi iz (3.5)}},
\end{aligned}$$

a za zadnji po (3.5) imamo

$$\left\| \sum_{n=N_{K+L}+1}^{N_R} c_n P e_n \right\| = \left\| \sum_{n=N_{K+L}+1}^{N_R} \frac{1}{\sqrt{K+L+1}} \langle \varphi_{m_{K+L+1}}, e_n \rangle P e_n \right\| \leq \frac{1}{\sqrt{K+L+1}}$$

pa čitavi izraz možemo ograditi sumom ove tri ograde kako slijedi.

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{R} c_n P e_n - \sum_{n=1}^{N} c_n P e_n \right\| &= \left\| \sum_{n=N+1}^{R} c_n P e_n \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{n=N+1}^{N_{K+1}} c_n P e_n \right\| + \left\| \sum_{n=N_{K+1}+1}^{N_{K+2}} c_n P e_n \right\| + \cdots + \\
&\quad + \left\| \sum_{n=N_{K+L-1}+1}^{N_{K+L}} c_n P e_n \right\| + \left\| \sum_{n=N_{K+L}+1}^{N_R} c_n P e_n \right\| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{K+1}} \frac{1}{2^{K+2}} + \frac{1}{\sqrt{K+1}} + \\
&\quad + \sum_{k=K+1}^{K+L-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{\sqrt{K+L+1}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{K+1}} + \frac{1}{\sqrt{K+L+1}} + \frac{1}{\sqrt{K+1}} \cdot \sum_{k=K}^{K+L-1} \frac{1}{2^{k+2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{K+1}} + \frac{1}{\sqrt{K+L+1}} + \frac{1}{\sqrt{K+1}} \cdot \underbrace{\sum_{k=K+2}^{K+L+1} \frac{1}{2^k}}_{\leq 1} \\
&\leq 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{K+1}} \leq \frac{3}{\sqrt{K_0+1}} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Konačno, imamo niz $(c_n)_n$ takav da red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n P e_n$ konvergira, ali $(c_n)_n$ nije iz ℓ^2, što je u kontradikciji s činjenicom da je Pe_n beselski bazni okvir. □

Lema 3.1.6. *Neka je $(e_n)_n$ ONB za Hilbertov prostor H. Neka je niz $(z_n)_n$ u H takav da $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - z_n\|^2 < 1$. Tada je $(z_n)_n$ Rieszova baza za H.*

Dokaz. Neka je $m^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - z_n\|^2$. Po pretpostavci teorema vrijedi $m < 1$. Definirajmo operator V na H s $Ve_n = z_n$, $n \in \mathbb{N}$. Kako bismo zaključili da je V

dobro definiran, ograničen i invertibilan, pokazat ćemo da je $I-V$ ograničen operator takav da je $\|I-V\| \leq m$.

Za svaku konačnu linearnu kombinaciju $y = \sum_{n=1}^{N} c_n e_n$ imamo

$$\begin{aligned}
\|(I-V)y\| &= \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n (e_n - z_n) \right\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} |c_n| \cdot \|e_n - z_n\| \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} \|e_n - z_n\| \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq m \left(\sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = m\|y\|.
\end{aligned}$$

Iz ovoga vidimo da je $I - V \in \mathbb{B}(\ell^2)$ i $\|I-V\| \leq m < 1$. Kako je

$$\|Vx\| \leq \|(I-V)x\| + \|x\| \leq (\|I-V\| + 1)\,\|x\|,$$

V je ograničen. Budući da je $\|I-V\| \leq m < 1$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ je operator definiran s

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} (I-V)^i$$

ograničen i može se pokazati da je niz $(S_n)_n$ Cauchyjev, pa i konvergentan. Za $S = \lim S_n$ onda slijedi da je $VS = SV = I$, pa je V i invertibilan. $\square$

Teorem 3.1.7. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H s pripadnim operatorom analize U. Sljedeći uvjeti su ekvivalentni:*

(a) $(x_n)_n$ *je približno Rieszova baza;*

(b) $(x_n)_n$ *je beselski bazni okvir;*

(c) $\dim(\operatorname{Ker} U^*) < \infty$.

Dokaz. $(a) \Rightarrow (b)$ Napomena 3.1.2.

$(b) \Rightarrow (c)$ Teorem 3.1.5.

$(c) \Rightarrow (a)$ Neka je $\dim \operatorname{Ker} U^* < \infty$. Označimo s M sliku $\operatorname{Im} U$. Uočimo, $\operatorname{Ker} U^* = (\operatorname{Im} U)^\perp = M^\perp$. Neka je P ortogonalni projektor na M, a $(e_n)_n$ kanonska baza za ℓ^2. Ranije je pokazano da je $(Pe_n)_n$ bazni okvir za M čiji je operator analize inkluzija

$M \hookrightarrow \ell^2$. Jer je $(Pe_n)_n$ sličan $(x_n)_n$, dovoljno je pokazati da je $(Pe_n)_n$ približno Rieszova baza za M.

Prema pretpostavci (c), $\dim M^\perp < \infty$, pa je $I - P$ konačnog ranga, tj. radi se o Hilbert-Schmidtovom operatoru. Dakle,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|(I-P)e_n\|^2 < \infty,$$

što znači da postoji N takav da je

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \|e_n - Pe_n\|^2 < 1.$$

Definirajmo niz u ℓ^2 s

$$z_n = \begin{cases} e_n, & n = 1, 2, \dots, N \\ Pe_n, & n = N+1, N+2, \dots \end{cases}$$

Sada imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - z_n\|^2 < 1.$$

Po Lemi 3.1.6 slijedi da je $(z_n)_n$ Rieszova baza za ℓ^2. Stoga je niz $(z_n)_{n\geq N+1} = (Pe_n)_{n\geq N+1}$ Rieszova baza za $\overline{\text{span}}\{z_n : n \geq N+1\}$. $(Pe_n)_n$ je bazni okvir za M, pa je kodimenzija prostora $\overline{\text{span}}\{Pe_n : n \geq N+1\}$ u M konačna. Sada lako slijedi da postoji konačan $S \subseteq \{1, 2, \dots N\}$ takav da je $(Pe_n)_{n\in S} \cup (Pe_n)_{n\geq N+1}$ približno Rieszova baza za M. □

Napomena 3.1.8. *Glavni dio prethodnog teorema nosi implikacija (b) $\Rightarrow$ (c), sadržana u Teoremu 3.1.5. Uočimo, ekvivalencija tvrdnji (a) i (c) može se lakše pokazati bez posredovanja beselskog svojstva. Da (a) slijedi iz (c) već smo pokazali. Preostaje pokazati (a) $\Rightarrow$ (c).*

Dokaz. Neka je $(x_n)_n$ približno Rieszova baza za H i U pripadni operator analize. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $(x_n)_{n\geq k+1}$ Rieszova baza za H. Označimo s $(e_n)_n$ kanonsku bazu za ℓ^2 i s $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ invertibilan operator koji zadovoljava $Te_n = x_{k+n}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka je $S \in \mathbb{B}(\ell^2)$ unilateralni šift. Iz $U^* e_n = x_n$, $\forall n$, slijedi $T = U^* S^k$. Neka je $M_k = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$. Očito, $M_k = \text{Ker}(S^k)^*$ i $\text{Im}\, S^k = M_k^\perp$.

Tvrdimo da je $M_k^\perp \cap \text{Ker}\, U^* = \{0\}$. Neka je $x \in M_k^\perp \cap \text{Ker}\, U^*$ proizvoljan element presjeka. Jer je $\text{Im}\, S^k = M_k^\perp$, postoji v takav da $x = S^k v$. Slijedi $0 = U^* x = U^* S^k v = Tv$, pa jer je T invertibilan, imamo $v = 0$.

Označimo s P_k ortogonalni projektor na M_k. Iz ranije zaključenog slijedi da je preslikavanje $P_k : \operatorname{Ker} U^* \to M_k$ injekcija. Naime, ako je $P_k x = 0$ za neki $x \in \operatorname{Ker} U^*$, tada očito $x \in M_k^{\perp} \cap \operatorname{Ker} U^* = \{0\}$ pa je $x = 0$.

Dakle, $\operatorname{Ker} U^*$ mora biti konačnodimenzionalan jer je M_k konačnodimenzionalan a $P_k : \operatorname{Ker} U^* \to M_k$ injektivan. $\square$

Teorem 3.1.9. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H s pripadnim operatorom analize U. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(a) $(x_n)_n$ je približno Rieszova baza;

(b) $(x_n)_n$ je beselski bazni okvir;

(c) $\dim(\operatorname{Ker} U^*) < \infty$;

(d) $(x_n)_n$ je bezuvjetni bazni okvir.

Dokaz. Ekvivalencija prve tri tvdrnje je pokazana u Teoremu 3.1.7. Preostaje pokazati da je (d) ekvivalentna s bilo kojom od prve tri tvrdnje. Iz Napomene 3.1.2 slijedi $(b) \Rightarrow (d)$. Pokazat ćemo da vrijedi i $(d) \Rightarrow (b)$.

Pretpostavimo dodatno da je $(x_n)_n$ ograničen odozdo. Neka je $m > 0$ takav da za sve n vrijedi $\|x_n\| \geq m$. Neka je $(c_n)_n$ niz skalara takav da $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira. Prema pretpostavci (d), ovaj red konvergira bezuvjetno pa po Teoremu 1.1.13 (dokaz dostupan u [4], Teorem 3.16) imamo $\sum_{n=1}^{\infty} \|c_n x_n\|^2 < \infty$. Stoga vrijedi

$$m^2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \, \|x_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|c_n x_n\|^2 < \infty.$$

Prema tome, $(c_n)_n$ je ℓ^2-niz. $\square$

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Normirani prostori*, https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/np/NP_17_18.pdf.

[2] ———, *Notes on frames*, https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/frames/notes%20on%20frames%20final.pdf.

[3] R. Duffin i A. Schaeffer, *A class of nonharmonic Fourier series*, Transactions of the American Mathematical Society **72** (1952), 341–366.

[4] C. Heil, *A Basis Theory Primer: Expanded Edition*, Birkhäuser Boston, Boston, 2011.

Sažetak

Cilj rada bio je uvesti i obraditi osnovne pojmove teorije baznih okvira i otkriti poveznice između posebnih vrsta baznih okvira (egzaktan, Parsevalov,...) s pojmom Rieszove baze te pojmom približno Rieszove baze. Najvažnijim rezultatom završnog poglavlja dobili smo poveznicu približno Rieszove baze s beselskim i bezuvjetnim baznim okvirima.

Kako bi bilo moguće ostvariti ovaj cilj uz minimalnu količinu nejasnih i (u radu) nedokazanih tvrdnji, prvo smo morali utvrditi teoriju normiranih prostora i izvesti svojstva Rieszovih baza i Besselovih nizova.

Summary

The aim of this thesis was to introduce frames and some results of the frame theory in order to find the link between special types of frames - exact and Parseval - and Riesz bases, but also between near-Riesz bases and Besselian and unconditional frames. This was achieved through the main theorems of chapters 2 and 3.

In order to accomplish this and avoid relying on results not shown in the thesis as much as possible, it was necessary to start with laying the foundation by revising the theory of normed spaces and deriving the properties of Riesz bases and Bessel sequences. The theory on normed spaces mostly relies on the results in [1] and results about frames can be found in [2].

Životopis

Dana 6. kolovoza 1996. godine rođena sam u Makarskoj, gdje sam nakon završene Osnonve škole Stjepana Ivičevića pohađala opću gimnaziju u Srednjoj školi fra Andrije Kačića Miošića. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja sudjelovala sam na državnim natjecanjima iz matematike u B varijanti, osvojivši tri prva i jedno treće mjesto.

Nakon završetka srednje škole uz priznanje Ministarstva znanosti i obrazovanja najuspješnijim učenicima na državnoj maturi, upisala sam preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu 2015. godine, a od 2018. godine sam studentica diplomskog studija Matematička statistika na istom fakultetu. Na oba studija dobila sam priznanje Matematičkog odsjeka za uspjeh na studiju koje se dodjeljuje studentima završne godine.

2020. godine sam nakratko pauzirala studij zbog odrađivanja studentske prakse u CERN-u, gdje sam bila koautor tri članka objavljenima u sklopu međunarodno priznatih konferencija CHEP, RV i ASE.

U slobodno vrijeme tijekom studija veslala sam za ženski osmerac PMF-a, gdje smo čak u 17 regata osvojile jedno od prva tri mjesta.