SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Nikola Jalšenjak

SPARIVANJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Bojan Basrak
Suvoditelj rada:
dr. sc. Hrvoje Planinić

Zagreb, rujan, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem prof. dr. sc. Bojanu Basraku i dr. sc. Hrvoju Planiniću na pomoći i savjetima prilikom pisanja ovog rada.

Sadržaj

Uvod

Sparivanje je važna metoda u suvremenoj teoriji vjerojatnosti s mnogobrojnim primjenama. Temelji se na usporedbi slučajnih elemenata konstruiranjem njihovih kopija na zajedničkom vjerojatnosnom prostoru. Koristi se za aproksimaciju razdioba, dobivanje nejednakosti, dokazivanje asimptotskih rezultata i egzaktno uzorkovanje.

Rad se sastoji od četiri poglavlja. U prvom poglavlju dajemo osnovne definicije sparivanja te navodimo nekoliko primjera i načina konstruiranja. Definiramo udaljenost totalne varijacije i pokazujemo osnovne nejednakosti u sparivanju. Također, pokazujemo da postoji sparivanje za koje se postiže jednakost u osnovnoj nejednakosti u sparivanju - maksimalno sparivanje. U nastavku proučavamo odnos sparivanja i konvergencije slučajnih varijabli.

U drugom poglavlju koristimo metodu sparivanja za Poissonovu aproksimaciju. Pokazujemo asimptotski rezultat za sumu nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli. Stein-Cheinovom metodom proširujemo rezultate na varijable koje nisu nužno nezavisne.

U trećem poglavlju primjenjujemo metodu sparivanja na slučajne procese. Klasičnim sparivanjem pokazujemo teorem o graničnoj distribuciji Markovljevih lanaca. Uvodimo Ornsteinovo sparivanje za slučajne šetnje. Također, još jednom modifikacijom dobivamo epsilon-sparivanje slučajnih šetnji s pogodnim svojstvom koraka. Ovo sparivanje koristimo za dokaz klasičnog rezultata teorije obnavljanja - Blackwellovog teorema obnavljanja.

U četvrtom poglavlju opisujemo korisnu metodu za egzaktnu simulaciju distribucija na konačnim skupovima. Distribucija je zadana kao stacionarna distribucija ireducibilnih i aperiodičnih Markovljevih lanaca. Metoda se bazira na sparivanju Markovljevih lanaca iz prošlosti pa se naziva sparivanje iz prošlosti. Opisujemo i implementiramo metodu na Isingovom modelu iz fizike koji se primjenjuje i u analizi slika.

Poglavlje 1

Osnovna teorija o sparivanju

U ovom ćemo poglavlju definirati osnovne pojmove vezane uz sparivanje, pokazati osnovne teoretske rezultate i pogledati neke primjere sparivanja.

1.1 Definicija sparivanja

Definicija 1.1.1. Sparivanje vjerojatnosnih mjera $\mathbb{P}$ *i* $\mathbb{P}'$ *na izmjerivom prostoru* $(E, \mathcal{E})$ *je vjerojatnosna mjera* $\hat{\mathbb{P}}$ *na produktnom izmjerivom prostoru* $(E \times E, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$ *takva da za svaki* $A \in \mathcal{E}$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}(A) = \hat{\mathbb{P}}(A \times E) \quad i \quad \mathbb{P}'(A) = \hat{\mathbb{P}}(E \times A). \tag{1.1}$$

Dakle, $\mathbb{P}$ *i* $\mathbb{P}'$ *su marginalne distribucije od* $\hat{\mathbb{P}}$.

Definirat ćemo sparivanje i na sljedećem poopćenju slučajnih varijabli.

Definicija 1.1.2. Slučajni element *na izmjerivom prostoru* $(E, \mathcal{E})$ *definiran na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *je* $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$*-izmjerivo preslikavanje* X. *Odnosno,*

$$X^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \quad \text{za svaki } A \in \mathcal{E}.$$

Definicija 1.1.3. *Neka su* X *i* X' *slučajni elementi na vjerojatnosnim prostorima* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *odnosno* $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ *s vrijednostima u* $(E, \mathcal{E})$. Sparivanje slučajnih elemenata X *i* X' *je slučajni element* $\left(\hat{X}, \hat{X}'\right)$ *na vjerojatnosnom prostoru* $\left(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}}\right)$ *s vrijednostima u prostoru* $(E \times E, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$ *čije marginalne distribucije imaju iste distribucije kao* X *i* X'. *Odnosno, za sve* $A \in \mathcal{E}$ *vrijedi*

$$\hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} \in A\right) = \mathbb{P}(X \in A) \quad i \quad \hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X}' \in A\right) = \mathbb{P}'(X' \in A).$$

Pišemo $\hat{X} \stackrel{D}{=} X$ *i* $\hat{X}' \stackrel{D}{=} X'$.

U definiciji 1.1.3 možemo primijetiti da slučajni elementi X i X' mogu biti definirani na različitim vjerojatnosnim prostorima, dok su elementi $\hat{X}$ i $\hat{X}'$ definirani na istom vjerojatnosnom prostoru. Dakle, sparivanje dva slučajna elementa je uređen par na istom vjerojatnosnom prostoru čije su marginalne distribucije jednake distribucijama originalnih elemenata. Odnos između definicija sparivanja dan je u sljedećoj napomeni.

Napomena 1.1.4. *Neka je $(\hat{X}, \hat{X}')$ sparivanje slučajnih elemenata X i X'. Tada je zakon razdiobe od $\left(\hat{X}, \hat{X}'\right)$ sparivanje zakona razdioba slučajnih elemenata X i X' u smislu definicije 1.1.1. Zaista, za $A \in \mathcal{E}$ vrijedi*

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} \in A\right) = \hat{\mathbb{P}}\left(\left(\hat{X}, \hat{X}'\right) \in A \times E\right) = \hat{\mathbb{P}}_{(\hat{X},\hat{X}')}(A \times E), \tag{1.2}$$

gdje smo u drugoj jednakosti iskoristili jednaku distribuiranost varijabli X i $\hat{X}$. Analogno se pokaže i druga jednakost u (1.1).

Možemo analogno definirati sparivanje proizvoljne familije slučajnih elemenata.

Definicija 1.1.5. *Neka je za svaki i iz skupa indeksa $\mathbb{I}$, X_i slučajni element na $(E_i, \mathcal{E}_i)$ definiran na $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$. Familija slučajnih elemenata $\left(\hat{X}_i : i \in \mathbb{I}\right)$ definiranih na istom vjerojatnosnom prostoru $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}})$ je* sparivanje *ako je $\hat{X}_i \overset{D}{=} X_i$, za svaki $i \in \mathbb{I}$.*

Napomena 1.1.6. *Za sparivanje $\left(\hat{X}, \hat{X}'\right)$ slučajnih varijabli X i X' vrijedi sljedeće:*

$$\hat{X}, \hat{X}' \text{ su nezavisne} \iff \hat{\mathbb{P}}_{(\hat{X},\hat{X}')} = \hat{\mathbb{P}}_{\hat{X}} \times \hat{\mathbb{P}}_{\hat{X}'} \iff \hat{\mathbb{P}}_{(\hat{X},\hat{X}')} = \mathbb{P}_X \times \mathbb{P}_{X'},$$

gdje je $\mathbb{P}_X \times \mathbb{P}_{X'}$ produktna mjera. Također, neka je $\Delta = \{(x, x) : x \in E\}$ tada je

$$\hat{X} = \hat{X}' \quad \hat{\mathbb{P}}\text{-g.s.} \iff \hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} = \hat{X}'\right) = 1 \iff \hat{\mathbb{P}}_{(\hat{X},\hat{X}')}(\Delta) = 1.$$

U sljedećoj napomeni raspisujemo slučaj nezavisnog sparivanja. Pronaći ćemo vjerojatnosni prostor na kojem možemo definirati nezavisno sparivanje.

Napomena 1.1.7. *Neka su dane slučajne varijable X na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i X' na $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$. Tada postoji vjerojatnosni prostor $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}}) := (\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', \mathbb{P} \times \mathbb{P}')$ na kojem definiramo slučajne varijable*

$$\hat{X} := X \circ \pi_1 \quad i \quad \hat{X}' := X' \circ \pi_2,$$

gdje su $\pi_1 \colon \Omega \times \Omega' \to \Omega$ i $\pi_2 \colon \Omega \times \Omega' \to \Omega'$ projekcije, odnosno $\pi_1(x, y) = x$ i $\pi_2(x, y) = y$. Primijetimo da su $\hat{X}$ i $\hat{X}'$ zaista slučajne varijable jer su projekcije izmjerive. Tada je

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} \le x\right) &= \hat{\mathbb{P}}\left((\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega' : \hat{X}(\omega, \omega') \le x\right) \\ &= \hat{\mathbb{P}}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} \times \Omega'\right) = \mathbb{P}(X \le x),\end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti koristili $\hat{X} = X \circ \pi_1$, a u zadnjoj činjenicu da je $\hat{\mathbb{P}}$ produkt mjera $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}'$. Dakle, $\hat{X} \overset{D}{=} X$. Analogno dobivamo i $\hat{X}' \overset{D}{=} X'$ pa zaključujemo da je $\left(\hat{X}, \hat{X}'\right)$ sparivanje slučajnih varijabli. Također, koristeći iste argumente, za $A, B \in \mathcal{E}$ vrijedi

$$\hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} \in A, \hat{X}' \in B\right) = \hat{\mathbb{P}}\left(X \in A, X' \in B\right) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}'(X' \in B).$$

Koristeći napomenu 1.1.6 zaključujemo da je sparivanje nezavisno, odnosno $\hat{X}$ i $\hat{X}'$ su nezavisne slučajne varijable.

Slučajne varijable su često zadane svojim funkcijama distribucija pri čemu ne znamo vjerojatnosne prostore na kojima su definirane. Slično, kada radimo sparivanje slučajnih varijabli često ne obraćamo pažnju na vjerojatnosni prostor na kojem je definirano njihovo sparivanje. Bitno je samo da znamo da takav vjerojatnosni prostor postoji kao što je opisano u napomeni 1.1.7 za nezavisno sparivanje.

U nastavku donosimo nekoliko primjera sparivanja.

Primjer 1.1.8. *Neka su zadane diskretne slučajne varijable*

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad i \quad X' \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Tada je slučajan vektor $\left(\hat{X}, \hat{X}'\right)$ zadan sa

$\hat{X}$ \ $\hat{X}'$	0	1	2	
0	x_1	x_2	$\frac{1}{2} - x_1 - x_2$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{3} - x_1$	$\frac{1}{3} - x_2$	$-\frac{1}{6} + x_1 + x_2$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

dobro definirano sparivanje za sve parametre x_1, x_2 iz skupa

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1, x_2 \leq \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{6} \leq x_1 + x_2 \leq \tfrac{1}{2}\right\}.$$

Naime, za takve su parametre sve vrijednosti u tablici nenegativne, a marginalne distribucije su jednake originalnim distribucijama od X i X'. Primijetimo da za parametre $x_1 = x_2 = \frac{1}{6}$ dobivamo nezavisno sparivanje.

Primjer 1.1.9. *Neka su $X \sim Exp\,(2)$ i $X' \sim Exp\,(1)$. Navodimo nekoliko primjera sparivanja.*

Trivijalno nezavisno sparivanje zadano je funkcijom gustoće

$$f(x,y) = 2e^{-2x-y}\mathbb{1}_{[0,\infty\rangle^2}(x,y).$$

Za drugi primjer dovoljno je primijetiti da je $2X \stackrel{D}{=} X' \sim Exp\,(1)$*, što lagano slijedi iz računa za funkciju distribucije ili pomoću karakterističnih funkcija. Tada je* $\left(\hat{X},\hat{X}'\right) = (X,2X)$ *sparivanje slučajnih varijabli. Primijetimo da ovaj slučajni vektor nema funkciju gustoće. Kad bi ju imao, za* $B = \{(x,2x) : x \geq 0\}$ *bi bilo* $\hat{\mathbb{P}}_{(\hat{X},\hat{X}')}(B) = 1$*, a Lebesgueova mjera danog skupa jednaka je* 0*,* $\lambda^2(B) = 0$*. Dakle, zakon razdiobe slučajnog vektora nije apsolutno neprekidna mjera u odnosu na Lebesgueovu mjeru što je kontradikcija s postojanjem funkcije gustoće.*

Za treći primjer neka je (U_1,U_2) *slučajni vektor s funkcijom gustoće*

$$f(u,v) = \begin{cases} 2, & (u,v) \in [0,0.5]^2 \cup [0.5,1]^2, \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Lagano se pokaže da su marginalne distribucije ovog slučajnog vektora uniformne. Na primjer, za U_1 *računamo*

$$f_{U_1}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,dv = \begin{cases} \int_0^{0.5} 2\,dv = 1, & 0 \leq u \leq 0.5, \\ \int_{0.5}^1 2\,dv = 1, & 0.5 < u \leq 1, \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Definiramo

$$\hat{X} := F_X^{-1}(U_1) = -\frac{1}{2}\ln(1-U_1) \sim Exp\,(2) \quad i$$
$$\hat{X}' := F_{X'}^{-1}(U_2) = -\ln(1-U_2) \sim Exp\,(1),$$

gdje smo izračunali inverz funkcije distribucije eksponencijalne slučajne varijable. Tada je $(\hat{X},\hat{X}')$ *još jedno sparivanje slučajnih varijabli. Prema teoremu o funkciji gustoće funkcije slučajnih vektora dobivamo da je pripadna gustoća sparivanja jednaka*

$$f_{(\hat{X},\hat{X}')}(x,y) = \begin{cases} 4e^{-2u-v}, & (u,v) \in \left[0,\frac{\ln 2}{2}\right] \times [0,\ln 2] \cup \left[\frac{\ln 2}{2},\infty\right\rangle \times [\ln 2,\infty\rangle, \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Iz prethodnih je primjera očito da sparivanje nije jedinstveno.

Lema 1.1.10. *Neka je* F *funkcija distribucije neke slučajne varijable, odnosno neka je* F *neopadajuća, neprekidna zdesna te* $F(-\infty) = 0$ *i* $F(\infty) = 1$*. Definiramo generalizirani inverz sa*

$$F^{\leftarrow}(u) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}.$$

Tada za $U \sim U(0,1)$ *slučajna varijabla* $F^{\leftarrow}(U)$ *ima funkciju distribucije* F*.*

Dokaz. Označimo $A_u := \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}$. Pokažimo prvo $u \leq F(F^{\leftarrow}(u))$, za sve $u \in [0,1]$. Po definiciji infimuma za svaki $\epsilon > 0$ postoji $x \in A_u$ takav da je $x < F^{\leftarrow}(u) + \epsilon$. Tada je za svaki $\epsilon > 0$

$$u \leq F(x) < F\left(F^{\leftarrow}(u) + \epsilon\right),$$

gdje prva nejednakost slijedi zbog $x \in A_u$, a druga jer je F neopadajuća. Koristeći neprekidnost zdesna funkcije F dobivamo $u \leq F(F^{\leftarrow}(u))$. Zato je

$$\left\{F^{\leftarrow}(U) \leq x\right\} = \left\{F\left(F^{\leftarrow}(U)\right) \leq F(x)\right\} \subseteq \left\{U \leq F(x)\right\}. \tag{1.3}$$

Zatim, zbog $A_u \supseteq A_v$ za $u \leq v$, $F^{\leftarrow}$ je neopadajuća pa i izmjeriva. Zbog $x \in A_{F(x)}$, za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $F^{\leftarrow}(F(x)) \leq x$. Zato dobivamo i obratnu nejednakost, odnosno

$$\left\{U \leq F(x)\right\} = \left\{F^{\leftarrow}(U) \leq F^{\leftarrow}\left(F(x)\right)\right\} \subseteq \left\{F^{\leftarrow}(U) \leq x\right\}. \tag{1.4}$$

Konačno, dobivamo

$$\mathbb{P}\left(F^{\leftarrow}(U) \leq x\right) = \mathbb{P}\left(U \leq F(x)\right) = F(x),$$

gdje smo u prvoj jednakosti iskoristili (1.3) i (1.4) da dobijemo jednakost. □

Pomoću prethodne leme možemo pronaći sparivanje slučajne varijable X. Takvo sparivanje nazivamo *kvantilnim sparivanjem*. U sljedećoj ćemo lemi pokazati svojstva generaliziranog inverza koje ćemo kasnije koristiti.

Lema 1.1.11. *Uz pretpostavke iz leme 1.1.10 za sve $x \in \mathbb{R}$ i $u \in [0,1]$ vrijedi*

(i) $F^{\leftarrow}(u) \leq x \Longleftrightarrow F(x) \geq u$,

(ii) $F\left(F^{\leftarrow}(u)-\right) \leq u \leq F\left(F^{\leftarrow}(u)\right)$,

(iii) Ako je $F^{\leftarrow}$ neprekidna u točki u i $F(x-) \leq u \leq F(x)$, tada je $F^{\leftarrow}(u) = x$,

gdje smo sa $f(x-)$ označili limes slijeva funkcije f u točki x.

Dokaz. (i) Tvrdnja slijedi iz nejednakosti $u \leq F(F^{\leftarrow}(u))$ i $F^{\leftarrow}(F(x)) \leq x$ dobivenih u dokazu leme 1.1.10 i činjenice da su funkcije F i $F^{\leftarrow}$ neopadajuće.

(ii) Druga nejednakost je već dokazana. Za prvu nejednakost pretpostavimo suprotno, odnosno neka je

$$\lim_{y \nearrow F^{\leftarrow}(u)} F(y) > u.$$

Tada postoji $y < F^{\leftarrow}(u)$ takav da je $F(y) > u$. Jer je funkcija $F^{\leftarrow}$ neopadajuća slijedi

$$y \geq F^{\leftarrow}(F(y)) \geq F^{\leftarrow}(u)$$

što je kontradikcija sa $y < F^{\leftarrow}(u)$.

(iii) Pretpostavljeno je $u \leq F(x)$ pa zbog tvrdnje (i) slijedi $F^{\leftarrow}(u) \leq x$. Pokažimo drugu nejednakost. Neka je $y < x$ i (u_n) nerastući niz s limesom u, tj. $u_n \searrow u$. Zbog pretpostavke da je $\lim_{y \nearrow x} F(y) \leq u$ slijedi $F(y) \leq u < u_n$. Po obratu po kontrapoziciji tvrdnje (i) slijedi $F^{\leftarrow}(u_n) > y$. Zbog pretpostavljene neprekidnosti funkcije $F^{\leftarrow}$ u točki u, puštanjem limesa $n \to \infty$ slijedi $F^{\leftarrow}(u) \geq y$. Puštanjem limesa $y \nearrow x$ dobivamo drugu nejednakost. Dakle, $F^{\leftarrow}(u) = x$. □

Primjer 1.1.12. *Neka je $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ decimalni dio broja $x \in \mathbb{R}$. Za slučajnu varijablu X dobro je definirano sparivanje sa $\hat{X} = F_X 6^{\leftarrow}(\{a + bU\})$, gdje je $a \in \mathbb{R}, b \in \{-1, 1\}$ i $U \sim U(0, 1)$. Dovoljno je pokazati da je $\{a + bU\} \sim U(0, 1)$ pa će zbog leme 1.1.10 slijediti $\hat{X} \stackrel{D}{=} X$. Za $b = 1$ vrijedi*

$$\lfloor a + U \rfloor = \lfloor \lfloor a \rfloor + \{a\} + U \rfloor = \begin{cases} \lfloor a \rfloor, & \{a\} + U < 1, \\ \lfloor a \rfloor + 1, & \{a\} + U \geq 1, \end{cases}$$

što povlači

$$\{a + U\} = \begin{cases} \{a\} + U, & \{a\} + U < 1, \\ \{a\} + U - 1, & \{a\} + U \geq 1. \end{cases}$$

Sada za $x \in [0, 1]$ vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{a + U\} \leq x) &= \mathbb{P}(\{a\} + U \leq x, U < 1 - \{a\}) + \mathbb{P}(\{a\} + U - 1 \leq x, \{a\} + U \geq 1) \\ &= \mathbb{P}(U \leq x - \{a\}) + \mathbb{P}(1 - \{a\} \leq U \leq 1 - \{a\} + x) \\ &= \begin{cases} 1 - \{a\} + x - 1 + \{a\} = x, & x \leq \{a\}, \\ x - \{a\} + 1 - 1 + \{a\} = x, & x \geq \{a\}, \end{cases} \end{aligned}$$

što pokazuje tvrdnju. Tvrdnja za $b = -1$ slijedi iz pokazanog jer je $a - U = (a - 1) + (1 - U)$, gdje je $1 - U \sim U(0, 1)$.

Prethodni primjer pokazuje način na koji možemo definirati netrivijalna sparivanja slučajne varijable X.

1.2 Vjerojatnosne nejednakosti

Prisjetimo se da je slučajna varijabla X *stohastički veća*, odnosno *stohastički manja* od slučajne varijable Y ako za svaki $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) \leq F_Y(x)$, odnosno $F_X(x) \geq F_Y(x)$. Pišemo $X \stackrel{D}{\geq} Y$, odnosno $X \stackrel{D}{\leq} Y$. Ako je X stohastički manja od Y još kažemo da je *stohastički dominirana*.

Neka su X i Y slučajne varijable takve da je $X \leq Y$ $\mathbb{P}$-g.s. Tada je $\mathbb{P}(Y \leq x) \leq \mathbb{P}(X \leq x)$ pa je $X \overset{D}{\leq} Y$. Obrat očito ne vrijedi. Na primjer ako su $X, Y \sim B\left(1, \frac{1}{2}\right)$ nezavisne, tada je $F_X = F_Y$ pa je $X \overset{D}{\leq} Y$, ali $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1 - \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = 1 - \frac{1}{4} < 1$. Uz pomoć sparivanja pretvorit ćemo stohastičku nejednakost u nejednakost po točkama s kojom je lakše raditi.

Propozicija 1.2.1. *Neka su X i X' slučajne varijable. Tada je ekvivalentno:*

(i) $X \overset{D}{\leq} X'$,

(ii) postoji sparivanje $\left(\hat{X}, \hat{X}'\right)$ takvo da je $\hat{X} \leq \hat{X}'$ $\hat{\mathbb{P}}$-g.s.,

(iii) za svaku izmjerivu, omeđenu i neopadajuću funkciju f je $\mathbb{E}(f(X)) \leq \mathbb{E}(f(X'))$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Uz pomoć leme 1.1.10 dobro je definirano sparivanje sa $\hat{X} = F_X^{\leftarrow}(U)$ i $\hat{X}' = F_{X'}^{\leftarrow}(U)$. Po pretpostavci je $F_X \geq F_{X'}$, pa zbog $\{x : F_{X'}(x) \geq u\} \subseteq \{x : F_X(x) \geq u\}$ slijedi $F_X^{\leftarrow}(u) \leq F_{X'}^{\leftarrow}(u)$. Dakle, $\hat{X} = F_X^{\leftarrow}(U) \leq F_{X'}^{\leftarrow}(U) = \hat{X}'$ $\hat{\mathbb{P}}$-g.s.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Zbog pretpostavke, za sve izmjerive, ograničene i neopadajuće funkcije vrijedi $f(\hat{X}) \leq f(\hat{X}')$ $\hat{\mathbb{P}}$-g.s. pa je $\mathbb{E}(f(X)) = \hat{\mathbb{E}}(f(\hat{X})) \leq \hat{\mathbb{E}}(f(\hat{X}')) = \mathbb{E}(f(X'))$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Iz pretpostavke slijedi $F_X(x) = F_{\hat{X}}(x) \geq F_{\hat{X}'}(x) = F_{X'}(x)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Za $x \geq 0$ i $f = \mathbb{1}_{[x,\infty\rangle}$ ograničenu i neopadajuću dobivamo $\mathbb{P}(X \geq x) \leq \mathbb{P}'(X' \geq x)$ iz čega slijedi tvrdnja. $\square$

1.3 Nejednakosti u sparivanju

Definicija 1.3.1. *Za dane vjerojatnosne mjere $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}'$ na $(E, \mathcal{E})$ definiramo* udaljenost totalne varijacije *kao*

$$\|\mathbb{P} - \mathbb{P}'\|_{tv} = 2 \sup_{A \in \mathcal{E}} \left[\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}'(A)\right]. \tag{1.5}$$

Propozicija 1.3.2. *Za vjerojatnosne mjere $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}'$ koncentrirane na $\mathbb{N}_0$ udaljenost totalne varijacije je jednaka*

$$\|\mathbb{P} - \mathbb{P}'\|_{tv} = \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbb{P}(\{k\}) - \mathbb{P}'(\{k\})| = 2 - 2\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{k\}) \wedge \mathbb{P}'(\{k\}). \tag{1.6}$$

Za vjerojatnosne mjere $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}'$ apsolutno neprekidne u odnosu na λ s Radon-Nykonymovim derivacijama f, odnosno f' udaljenost totalne varijacije je jednaka

$$\|\mathbb{P} - \mathbb{P}'\|_{tv} = \int_E |f - f'|\, d\lambda = 2 - 2\int_E f \wedge f'\, d\lambda. \tag{1.7}$$

Dokaz. Prvo pokazujemo diskretni slučaj. Neka je $B := \{k \in \mathbb{N}_0 : \mathbb{P}(k) \geq \mathbb{P}'(k)\}$. Tada je

$$\begin{aligned}\sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \Big[\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}'(A)\Big] &= \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \Big[(\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}'(A \cap B)) + (\mathbb{P}(A \cap B^c) - \mathbb{P}'(A \cap B^c)) \Big] \\ &\leq \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \Big[\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}'(A \cap B)\Big] \leq \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}'(B),\end{aligned} \tag{1.8}$$

gdje smo u prvoj nejednakosti u drugom retku iskoristili činjenicu da je $\mathbb{P}(\{k\}) - \mathbb{P}'(\{k\}) \leq 0$, za sve $k \in A \cap B^c$, a u drugoj nejednakosti činjenicu da je $\mathbb{P}(\{k\}) - \mathbb{P}'(\{k\}) \geq 0$, za sve $k \in B$. Jednakost se očito postiže za $A = B$. Zato dobivamo

$$\begin{aligned}\|\mathbb{P} - \mathbb{P}'\|_{tv} &= 2\left(\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}'(B)\right) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}'(B) + \mathbb{P}'(B^c) - \mathbb{P}(B^c) \\ &= \sum_{k \in B} \mathbb{P}(\{k\}) - \mathbb{P}'(\{k\}) + \sum_{k \in B^c} \mathbb{P}'(\{k\}) - \mathbb{P}(\{k\}) = \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbb{P}(\{k\}) - \mathbb{P}'(\{k\})| .\end{aligned}$$

Slično se dokazuje i slučaj apsolutno neprekidnih distribucija. Definiramo skup $B := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq f'(x)\}$. Tada ponovno vrijedi nejednakost (1.8) jer je $f(x) - f'(x) \leq 0$ za $x \in A \cap B^c$ i $f(x) - f'(x) \geq 0$ za $x \in A \cap B$. Jednakost se postiže za $A = B$ pa dobivamo

$$\begin{aligned}\|\mathbb{P} - \mathbb{P}'\|_{tv} &= 2\left(\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}'(B)\right) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}'(B) + \mathbb{P}'(B^c) - \mathbb{P}(B^c) \\ &= \int_B (f(x) - f'(x))\, d\lambda + \int_{B^c} (f'(x) - f(x))\, d\lambda = \int_E |f(x) - f'(x)|\, d\lambda.\end{aligned}$$

Za druge jednakosti primijetimo da za sve $a, a' \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$|a - a'| = a + a' - 2a \wedge a'.$$

U neprekidnom slučaju dobivamo

$$\begin{aligned}\|\mathbb{P} - \mathbb{P}'\|_{tv} &= \int_E |f - f'|\, d\lambda = \int_E f\, d\lambda + \int_E f'\, d\lambda - 2\int_E (f \wedge f')\, d\lambda \\ &= 2 - 2\int_E (f \wedge f')\, d\lambda.\end{aligned}$$

□

Sparivanje je korisno u traženju gornje ograde udaljenosti totalne varijacije. Koristimo oznake kao u definiciji 1.1.3.

Teorem 1.3.3. *Neka su X i X' dvije slučajne varijable i neka je $(\hat{X}, \hat{X}')$ njihovo sparivanje. Tada vrijedi*

$$\left\|\mathbb{P}_X - \mathbb{P}'_{X'}\right\|_{tv} \leq 2\,\hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} \neq \hat{X}'\right). \tag{1.9}$$

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{E}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}'(X' \in A) = \hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} \in A\right) - \hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X}' \in A\right) \\
&= \hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} \in A, \hat{X} = \hat{X}'\right) + \hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} \in A, \hat{X} \neq \hat{X}'\right) - \hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X}' \in A, \hat{X} = \hat{X}'\right) - \hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X}' \in A, \hat{X} \neq \hat{X}'\right) \\
&= \hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} \in A, \hat{X} \neq \hat{X}'\right) - \hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X}' \in A, \hat{X} \neq \hat{X}'\right) \\
&\leq \hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} \in A, \hat{X} \neq \hat{X}'\right) \leq \hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} \neq \hat{X}'\right),
\end{aligned}$$

iz čega zaključujemo

$$\left\|\mathbb{P}_X - \mathbb{P}'_{X'}\right\|_{tv} = 2 \sup_{A \in \mathcal{E}} \left[\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}'(X' \in A)\right] \leq 2\,\hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} \neq \hat{X}'\right). \qquad \square$$

Postoji i verzija nejednakosti u sparivanju za niz slučajnih varijabli. Neka su $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $X' = (X'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi slučajnih varijabli i $\left(\hat{X}, \hat{X}'\right)$ njihovo sparivanje. Definiramo *vrijeme sparivanja* T kao prvo vrijeme od kojeg se nizovi $\hat{X}$ i $\hat{X}'$ podudaraju, odnosno

$$T := \inf\left\{n \in \mathbb{N} : \hat{X}_m = \hat{X}'_m \text{ za sve } m \geq n\right\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Korolar 1.3.4. *Za nizove slučajnih varijabli $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $X' = (X'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i njihovo sparivanje $\left(\hat{X}, \hat{X}'\right)$ vrijedi*

$$\left\|\mathbb{P}_{X_n} - \mathbb{P}'_{X'_n}\right\|_{tv} \leq 2\,\hat{\mathbb{P}}(T > n). \tag{1.10}$$

Dokaz. Zbog nejednakosti (1.9) i činjenice da je $\left\{\hat{X}_n \neq \hat{X}'_n\right\} \subseteq \{T > n\}$ dobivamo

$$\left\|\mathbb{P}_{X_n} - \mathbb{P}'_{X'_n}\right\|_{tv} \leq 2\,\hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X}_n \neq \hat{X}'_n\right) \leq 2\,\hat{\mathbb{P}}(T > n). \qquad \square$$

Iz propozicije 1.3.2 i teorema 1.3.3 slijedi

$$\hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} = \hat{X}'\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \wedge \mathbb{P}'(X' = k),$$

$$\hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} = \hat{X}'\right) \leq \int_E f \wedge f'\, d\lambda$$

za diskretne, odnosno neprekidne slučajne varijable. Analogne nejednakosti vrijede i za sparivanje familija diskretnih i neprekidnih slučajnih varijabli.

Propozicija 1.3.5. *Neka je $C = \left\{\hat{X}_i = \hat{X}_j, \forall i, j \in \mathbb{I}\right\}$ za sparivanje diskretnih slučajnih varijabli X_i, $i \in \mathbb{I}$. Tada je*

$$\mathbb{P}(C) \leq \sum_{x\in E} \inf_{i\in\mathbb{I}} \mathbb{P}(X_i = x). \tag{1.11}$$

Ako je C kao gore, tada za niz neprekidnih slučajnih varijabli $(X_n)_n$ s funkcijama gustoće $(f_n)_n$ vrijedi

$$\mathbb{P}(C) \leq \int_{\mathbb{R}} \inf_n f_n(x)\, dx. \tag{1.12}$$

Dokaz. U slučaju diskretnih slučajnih varijabli za sve $i, j \in \mathbb{I}$ i $x \in E$ vrijedi $\mathbb{P}(\hat{X}_i = x, C) = \mathbb{P}(\hat{X}_j = x, C) \leq \mathbb{P}(X_j = x)$. Tvrdnja slijedi uzimanjem infimuma po j i sumiranjem po svim $x \in E$.

Neka su X_n neprekidne slučajne varijable s funkcijama distribucije f_n. Fiksirajmo $m \in \mathbb{N}$. Za $k \in 1, \ldots, m$ rekurzivno definiramo skupove

$$A_k = \left\{x \in \mathbb{R} : f_k(x) = \inf_{1 \leq j \leq m} f_j(x)\right\} \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}) \, .$$

Dobili smo particiju skupa $\mathbb{R}$. Za Borelov skup A vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\hat{X}_i \in A \cap A_k, C\right) = \mathbb{P}\left(\hat{X}_k \in A \cap A_k, C\right) \leq \int_{A \cap A_k} f_k \, d\lambda = \int_{A \cap A_k} \inf_{1 \leq j \leq m} f_j \, d\lambda$$

pa sumiranjem po k dobivamo

$$\mathbb{P}\left(\hat{X}_i \in A, C\right) \leq \int_A \inf_{1 \leq j \leq m} f_j \, d\lambda, \quad \text{za sve } m \in \mathbb{N}.$$

Puštanjem $m \to \infty$ pomoću Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\mathbb{P}\left(\hat{X}_i \in A, C\right) \leq \int_A \inf_n f_n \, d\lambda. \tag{1.13}$$

Tvrdnja slijedi uzimanjem $A = \mathbb{R}$. □

1.4 Maksimalno sparivanje

U sljedećem teoremu pokazujemo da postoji sparivanje takvo da se postiže jednakost u teoremu 1.3.3. Takvo se sparivanje naziva *maksimalno sparivanje*. Maksimalno sparivanje daje najbolju procjenu udaljenosti totalne varijacije.

Teorem 1.4.1. *Za vjerojatnosne mjere $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}'$ inducirane slučajnim varijablama X i X' postoji sparivanje $\hat{\mathbb{P}}$ takvo da je:*

(i) $\|\mathbb{P} - \mathbb{P}'\|_{tv} = 2\hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} \neq \hat{X}'\right)$,

(ii) $\hat{X}$ *i* $\hat{X}'$ *su uvjetno nezavisne uz dano* $\{\hat{X} \neq \hat{X}'\}$, *uz pretpostavku da je vjerojatnost tog događaja pozitivna.*

Primijetimo da smo radi jednostavnosti zakone razdioba slučajnih varijabli označili sa $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}'$ umjesto $\mathbb{P}_X$ i $\mathbb{P}_{X'}$.

Dokaz. Neka je $\Delta = \{(x, x) : x \in E\}$ dijagonala skupa $E \times E$. Definiramo $\psi \colon E \to E \times E$ sa $\psi(x) = (x, x)$. Za svaki $A_1, A_2 \in \mathcal{E}$ je

$$\psi^{-1}(A_1 \times A_2) = \{x \in E : (x, x) \in A_1 \times A_2\} = A_1 \cap A_2 \in \mathcal{E}$$

pa je ψ $(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$-izmjeriva funkcija. Definiramo konačnu mjeru λ kao zbroj vjerojatnosnih mjera $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}'$, odnosno $\lambda := \mathbb{P} + \mathbb{P}'$. Za svaki $A \in E$ vrijedi $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}'(A) \leq \lambda(A)$ pa su $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}'$ apsolutno neprekidne u odnosu na λ. Po Radon-Nykodymovom teoremu postoje izmjerive, nenegativne funkcije g i g' takve da za svaki $A \in E$ vrijedi

$$\mathbb{P}(A) = \int_A g \, d\lambda, \quad \mathbb{P}'(A) = \int_A g' \, d\lambda.$$

Definiramo mjere $\mathbb{Q}$ na $(E, \mathcal{E})$ i $\hat{\mathbb{Q}}$ na $(E \times E, \mathcal{E} \times \mathcal{E})$ sa

$$\mathbb{Q} := \int g \wedge g' \, d\lambda, \quad \hat{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \circ \psi^{-1},$$

gdje smo sa $g \wedge g'$ označili funkciju $x \to \min\{g(x), g'(x)\}$. Mjera $\hat{\mathbb{Q}}$ je dobro definirana jer je ψ izmjeriva funkcija. Iz $\gamma := \hat{\mathbb{Q}}(\Delta) = \mathbb{Q}(\psi^{-1}(\Delta)) = \mathbb{Q}(E) = \hat{\mathbb{Q}}(E \times E)$ slijedi da je mjera $\hat{\mathbb{Q}}$ koncentrirana na Δ, tj. $\hat{\mathbb{Q}}(\Delta^c) = 0$.

Definiramo mjere ν i ν' na $(E, \mathcal{E})$ i mjeru $\hat{\mathbb{P}}$ na $(E \times E, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$ sa

$$\nu := \mathbb{P} - \mathbb{Q}, \quad \nu' := \mathbb{P}' - \mathbb{Q} \quad \text{i} \quad \hat{\mathbb{P}} = \frac{\nu \times \nu'}{1 - \gamma} + \hat{\mathbb{Q}}.$$

Primijetimo da je $\nu(A) = \int_A (g - g \wedge g') \, d\lambda \geq 0$ i slično $\nu'(A) \geq 0$, za sve $A \in E$ pa su mjere dobro definirane. Pokazat ćemo da je $\hat{\mathbb{P}}$ sparivanje mjera $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}'$ s traženim svojstvima. Za $A \in E$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{P}}(A \times E) &= \frac{\nu(A)\nu'(E)}{1 - \gamma} + \hat{\mathbb{Q}}(A \times E) \\
&= \frac{(\mathbb{P}(A) - \mathbb{Q}(A))(\mathbb{P}(E) - \mathbb{Q}(E))}{1 - \gamma} + \mathbb{Q}(A) \\
&= \frac{(\mathbb{P}(A) - \mathbb{Q}(A))(1 - \gamma)}{1 - \gamma} + \mathbb{Q}(A) \\
&= \mathbb{P}(A).
\end{aligned}$$

Slično i $\hat{\mathbb{P}}(E \times A) = \mathbb{P}'(A)$. Dakle, $\hat{\mathbb{P}}$ je sparivanje.

Nadalje,

$$
\begin{aligned}
(\nu \times \nu')\,(\Delta) &= \int\limits_{E\times E} \mathbb{1}_\Delta(x,y)\, d\,(\nu \times \nu')\,(x,y) = \int\limits_{E}\left(\int\limits_{E} \mathbb{1}_\Delta(x,y)\, d\nu(x)\right) d\nu'(y) \\
&= \int\limits_{E} \nu\Big(x \in E\colon (x,y) \in \Delta\Big)\, d\nu'(y) = \int\limits_{E} \nu(\{y\})\, d\nu'(y) \qquad (1.14)\\
&= \int\limits_{\{y\colon g(y)\le g'(y)\}} \nu(\{y\})\, d\nu'(y) + \int\limits_{\{y\colon g(y)> g'(y)\}} \nu(\{y\})\, d\nu'(y),
\end{aligned}
$$

gdje smo u drugoj jednakosti iskoristili Fubinijev teorem. Na skupu $\{y\colon g(y) \le g'(y)\}$ vrijedi

$$
\nu(\{y\}) = \mathbb{P}(\{y\}) - \mathbb{Q}(\{y\}) = \int_{\{y\}} (g - g \wedge g')\, d\lambda = \Big(g(y) - (g \wedge g')(y)\Big)\lambda(\{y\}) = 0,
$$

pa je prvi integral u (1.14) jednak 0. Za drugi integral u (1.14) dobivamo

$$
0 \le \int\limits_{\{y\colon g(y)>g'(y)\}} \underbrace{\nu(\{y\})}_{\le 1}\, d\nu'(y) \le \nu'\Big(\{y\colon g(y) > g'(y)\}\Big) = \int\limits_{\{y\colon g(y)>g'(y)\}} (g' - g \wedge g')\; d\lambda = 0.
$$

Dobili smo $(\nu\times\nu')(\Delta) = 0$. Sada, zbog $(\nu\times\nu')(\Delta^c) = (\nu\times\nu')(E\times E) = (1-\gamma)^2$ i $\hat{\mathbb{Q}}(\Delta^c) = 0$, dobivamo

$$
\hat{\mathbb{P}}(\Delta^c) = \frac{(\nu \times \nu')(\Delta^c)}{1-\gamma} + \hat{\mathbb{Q}}(\Delta^c) = 1 - \gamma. \qquad (1.15)
$$

Koristeći redom jednakost (1.7), $\gamma = \mathbb{Q}(E)$ i jednakost (1.15) zaključujemo

$$
\|\mathbb{P} - \mathbb{P}'\|_{tv} = 2\left(1 - \int_E (g \wedge g')\, d\lambda\right) = 2(1 - \mathbb{Q}(E)) = 2(1-\gamma) = 2\hat{\mathbb{P}}(\Delta^c) = 2\hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} \ne \hat{X}'\right).
$$

Za dokaz zadnje tvrdnje pogledajmo uvjetnu vjerojatnost događaja $A_1 \times A_2 \in \mathcal{E}\otimes\mathcal{E}$ uz dano Δ^c, odnosno

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbb{P}}\,(A_1 \times A_2 \,|\, \Delta^c) &= \frac{\hat{\mathbb{P}}\Big((A_1 \times A_2) \cap \Delta^c\Big)}{\hat{\mathbb{P}}\,(\Delta^c)} \\
&= \frac{1}{1-\gamma}\left[\frac{(\nu \times \nu')(A_1 \times A_2 \cap \Delta^c)}{1-\gamma} + \underbrace{\hat{\mathbb{Q}}\,(A_1 \times A_2 \cap \Delta^c)}_{\le \hat{\mathbb{Q}}(\Delta^c) = 0}\right] \qquad (1.16)\\
&= \frac{(\nu \times \nu')(A_1 \times A_2 \cap \Delta^c)}{(1-\gamma)^2} = \frac{\nu(A_1)\nu'(A_2)}{(1-\gamma)^2}.
\end{aligned}
$$

Koristeći jednakost (1.16) konačno dobivamo

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} \in A_1, \hat{X}' \in A_2 \,\middle|\, \hat{X} \neq \hat{X}'\right) = \hat{\mathbb{P}}\left(A_1 \times A_2 \,|\, \Delta^c\right) \overset{(1.16)}{=} \frac{\nu(A_1)}{1-\gamma} \cdot \frac{\nu'(A_2)}{1-\gamma} \\
&= \frac{\nu(A_1)\nu'(E)}{(1-\gamma)^2} \cdot \frac{\nu(E)\nu'(A_2)}{(1-\gamma)^2} \overset{(1.16)}{=} \hat{\mathbb{P}}\left(A_1 \times E \,|\, \Delta^c\right) \cdot \hat{\mathbb{P}}\left(E \times A_2 \,|\, \Delta^c\right) \\
&= \hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} \in A_1 \,\middle|\, \hat{X} \neq \hat{X}'\right) \cdot \hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X}' \in A_2 \,\middle|\, \hat{X} \neq \hat{X}'\right).
\end{aligned}$$

Dakle, $\hat{X}$ i $\hat{X}'$ su uvjetno nezavisne uz dano $\{\hat{X} \neq \hat{X}'\}$. □

Iz dokaza teorema o maksimalnoj distribuciji slijedi da za maksimalno sparivanje $\left(\hat{X}, \hat{X}'\right)$ pridruženo slučajnim varijablama X i X' vrijedi

$$\hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} = \hat{X}'\right) = \gamma = \mathbb{Q}(E) = \int_E (g \wedge g')\, d\lambda.$$

U sljedećem teoremu poopćujemo tvrdnju za familije diskretnih, odnosno neprekidnih slučajnih varijabli. Teorem pokazuje da postoji sparivanje za koje se postiže jednakost u propoziciji 1.3.5.

Propozicija 1.4.2. *Neka su $X_i, i \in \mathbb{I}$ diskretne slučajne varijable s vrijednostima u skupu E. Tada postoji sparivanje takvo da se postiže jednakost u (1.11). Nadalje, neka je $(X_n)_n$ niz neprekidnih slučajnih varijabli s funkcijama gustoće f_n. Tada postoji sparivanje takvo da se postiže jednakost u (1.12).*

Dokaz. Neka je $c := \sum_{x \in E} \inf_{i \in \mathbb{I}} \mathbb{P}(X_i = x)$ u diskretnom, odnosno $c := \int \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)\, dx$ u neprekidnom slučaju. Ako je $c = 0$, tada je $\mathbb{P}(C) = 0$ po propoziciji 1.3.5 pa možemo uzeti bilo koje sparivanje, na primjer nezavisno. Neka je $c = 1$. U diskretnom slučaju $c = 1$ povlači $\inf_i \mathbb{P}(X_i = x) = \mathbb{P}(X_j = x)$, za sve $j \in \mathbb{I}$ i $x \in E$, a u neprekidnom $\inf_n f_n(x) = f_j(x)$ $\mathbb{P}$-g.s., za sve $j \in \mathbb{N}$. Definiramo $\hat{X}_i$ identične pa je u oba slučaja $\mathbb{P}(C) = 1$. Neka je $0 < c < 1$. Neka su I, V, W_i, nezavisne slučajne varijable definirane sa

$$\begin{aligned}
I &\sim B(1, c), \\
\mathbb{P}(V = x) &= \inf_{i \in \mathbb{I}} \mathbb{P}(X_i = x)/c, \\
\mathbb{P}(W_j = x) &= \frac{\mathbb{P}(X_i = x) - \inf_{i \in \mathbb{I}} \mathbb{P}(X_i = x)}{1-c},
\end{aligned}$$

u diskretnom, odnosno

$$\begin{aligned}
I &\sim B(1, c), \\
\mathbb{P}(V \leq x) &= \frac{1}{c} \int_0^x \inf_n f_n\, dx,
\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(W_j \le x) = \frac{1}{1-c}\int_0^x \left(f_j - \inf_i f_i\right) dx.$$

u neprekidnom slučaju. Definiramo $\hat{X}_i = V\mathbb{1}_{\{I=1\}} + W_i\mathbb{1}_{\{I=0\}}$. U oba slučaja jednakost

$$\mathbb{P}\left(\hat{X}_i \in A\right) = \mathbb{P}(V \in A)\mathbb{P}(I = 1) + \mathbb{P}(W_i \in A)\mathbb{P}(I = 0) = \mathbb{P}(X_i \in A)$$

pokazuje da je ovo dobro definirano sparivanje. Nadalje, vrijedi

$$0 \le \mathbb{P}(C, I = 0) = \mathbb{P}(W_i = W_j, \forall i, j)\,\mathbb{P}(I = 0) \le \int \inf_j \left(f_j - \inf_i f_i\right) dx = 0,$$

gdje smo u trećem koraku iskoristili propoziciju 1.3.5 na slučajnim varijablama W_i. Isto vrijedi u diskretnom slučaju. Tvrdnja propozicije slijedi iz

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C, I = 1) + \mathbb{P}(C, I = 0) = \mathbb{P}(I = 1) = c,$$

gdje smo u predzadnjoj jednakosti iskoristili činjenicu da su na događaju $\{I = 1\}$ slučajne varijable $\hat{X}_i$ jednake. □

Lagano se može provjeriti da je prethodna propozicija za dvije slučajne varijable ekvivalentna teoremu 1.4.1. U nastavku računamo udaljenost totalne varijacije i tražimo maksimalno sparivanje za slučajne varijable iz primjera 1.1.8 i 1.1.9.

Primjer 1.4.3. *Neka su*

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad X' \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

i neka je $\left(\hat{X}, \hat{X}'\right)$ sparivanje iz primjera 1.1.8.

Prema jednakosti (1.6) računamo

$$||\mathbb{P} - \mathbb{P}'||_{tv} = \sum_{k=0}^{2} |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(X' = k)| = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \tag{1.17}$$

Također,

$$\hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} \ne \hat{X}'\right) = \hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} = 0, \hat{X}' \in \{1, 2\}\right) + \hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} = 1, \hat{X}' \in \{0, 2\}\right) = \frac{2}{3} - x_1 + x_2.$$

Iz toga slijedi da je $\left(\hat{X}, \hat{X}'\right)$ maksimalno ako i samo ako je $x_1 - x_2 = \frac{1}{3}$. To vrijedi jedino za $x_1 = \frac{1}{3}$ i $x_2 = 0$ među dopuštenim parametrima. Zato je jedino maksimalno sparivanje jednako

$$\begin{array}{c|ccc} \hat{X} \backslash \hat{X}' & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}.$$

Lako se provjeri da se isto sparivanje dobije korištenjem propozicije 1.4.2.

Primjer 1.4.4. *Neka su $X \sim Exp\,(2)$ i $X' \sim Exp\,(1)$.*
Za $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}'(A) &= \int\limits_A \left(2e^{-2x} - e^{-x}\right) \mathbb{1}_{[0,\infty\rangle}\, dx \\ &= \int\limits_A \left(2e^{-2x} - e^{-x}\right) \mathbb{1}_{[0,\ln 2]}\, dx + \int\limits_A \underbrace{\left(2e^{-2x} - e^{-x}\right) \mathbb{1}_{[\ln 2,\infty\rangle}}_{\leq 0}\, dx \\ &\leq \int\limits_0^{\ln 2} \left(2e^{-2x} - e^{-x}\right) dx = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je $2e^{-2x} - e^{-x} \leq 0$ za $x \geq \ln 2$ i izračunali integral u zadnjem retku. Kako se ova gornja ograda postiže za $A = [0, \ln 2]$, slijedi

$$\|\mathbb{P} - \mathbb{P}'\|_{tv} = 2 \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \left[\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}'(A)\right] = \frac{1}{2}.$$

Maksimalno sparivanje konstruiramo pomoću dokaza teorema 1.4.1. Koristimo iste oznake. Neka je

$$\lambda(A) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}'(A) = \int_A \left(2e^{-2x} + e^{-x}\right) \mathbb{1}_{[0,\infty\rangle}\, dx.$$

Tada su

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{d\mathbb{P}}{d\lambda} = \frac{2e^{-2x}}{2e^{-2x} + e^{-x}} \mathbb{1}_{[0,\infty\rangle}, \\ g'(x) &= \frac{d\mathbb{P}'}{d\lambda} = \frac{e^{-x}}{2e^{-2x} + e^{-x}} \mathbb{1}_{[0,\infty\rangle}, \\ \mathbb{Q}(A) &= \int_A g \wedge g'\, d\lambda = \int_A \left(2e^{-2x} \wedge e^{-x}\right) \mathbb{1}_{[0,\infty\rangle}\, dx. \end{aligned}$$

Iz zadnje jednakosti dobivamo

$$\gamma = \hat{\mathbb{Q}}(\Delta) = \mathbb{Q}(\mathbb{R}) = \int_0^\infty 2e^{-2x} \wedge e^{-x}\, dx = \int_0^{\ln 2} e^{-x}\, dx + \int_{\ln 2}^\infty 2e^{-2x}\, dx = \frac{3}{4}.$$

Nadalje,

$$\nu(A) = \int_A \left(2e^{-2x} - e^{-x}\right) \mathbb{1}_{[0, \ln 2]}\, dx,$$
$$\nu'(A) = \int_A \left(e^{-x} - 2e^{-2x}\right) \mathbb{1}_{[\ln 2, \infty\rangle}\, dx$$

i konačno

$$\hat{\mathbb{P}} = 4\ (\nu \times \nu') + \hat{\mathbb{Q}}.$$

Iz teorema 1.4.1 znamo da je tako definirano sparivanje maksimalno, odnosno

$$2\hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X} \neq \hat{X}'\right) = 2\hat{\mathbb{P}}(\Delta^c) = 2(1-\gamma) = \frac{1}{2}.$$

Može se pokazati da je dobivena vjerojatnosna mjera zakon razdiobe sparivanja koje bi dobili iz dokaza propozicije 1.4.2.

Kao što smo vidjeli u primjeru, maksimalno sparivanje se teško pronalazi i ono je komplicirano jer je konstrukcija takvog sparivanja iz dokaza teorema 1.4.1 apstraktna.

1.5 Konvergencija slučajnih varijabli

Uz standardne tipove konvergencije slučajnih varijabli uvodimo novu konvergenciju.

Definicija 1.5.1. *Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnih varijabli. Kažemo da niz* konvergira u udaljenosti totalne varijacije *prema slučajnoj varijabli X ako*

$$\left\|\mathbb{P}_{X_n} - \mathbb{P}_X\right\|_{tv} \longrightarrow 0, \quad za\ n \to \infty$$

i pišemo $X_n \xrightarrow{tv} X$.

Ako $X_n \xrightarrow{\text{tv}} X$, tada $X_n \xrightarrow{D} X$. Zaista, za $x \in \mathbb{R}$ je

$$|\mathbb{P}(X_n \leq x) - \mathbb{P}(X \leq x)| \leq \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}'(A)| = \frac{1}{2} \left\|\mathbb{P}_{X_n} - \mathbb{P}_X\right\|_{tv} \longrightarrow 0, \quad \text{za } n \to \infty.$$

Obrat ne vrijedi. Naime, za $X_n = \frac{1}{n}$ i $X = 0$ očito $X_n \xrightarrow{\text{g.s.}} X$ pa i $X_n \xrightarrow{D} X$. Međutim, $\left\|\mathbb{P}_{X_n} - \mathbb{P}_X\right\|_{tv} = 2$ gdje se supremum postiže za skup $A = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Propozicija 1.5.2. *Za $(X_n)_n$ i X diskretne slučajne varijable na E vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(X = x), \quad \textit{za sve } x \in E$$

ako i samo ako niz X_n konvergira u udaljenosti totalne varijacije prema X.

Dokaz. Pretpostavimo $|\mathbb{P}(X_n = x) - \mathbb{P}(X = x)| \longrightarrow 0$. Iz propozicije 1.3.2 slijedi

$$\left\|\mathbb{P}_X - \mathbb{P}_{X_n}\right\|_{tv} = \sum_{x\in E} (\mathbb{P}(X = x) - \mathbb{P}(X_n = x))^+ ,$$

gdje smo označili $a^+ = \max\{a, 0\}$. Kako je

$$\sum_{x\in E} (\mathbb{P}(X = x) - \mathbb{P}(X_n = x))^+ \leq \sum_{x\in E} \mathbb{P}(X = x) = 1 < \infty$$

po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi $\left\|\mathbb{P}_X - \mathbb{P}_{X_n}\right\|_{tv} \to 0$. Obrat očito vrijedi jer je $|\mathbb{P}(X = x) - \mathbb{P}(X_n = x)| \leq \left\|\mathbb{P}_{X_n} - \mathbb{P}_X\right\|_{tv}$. □

Prethodna propozicija pokazuje da ako diskretne slučajne varijable poprimaju vrijednosti na skupu nenegativnih cijelih brojeva, tj. $E = \mathbb{N}_0$ tada je konvergencija po distribuciji ekvivalentna konvergenciji u udaljenosti totalne varijacije. To slijedi iz teorema 10.13. [5, str. 326]. U nastavku pokazujemo da ove konvergencije vezane za distribucije slučajnih varijabli možemo pomoću sparivanja pretvoriti u konvergenciju u kojem slučajne varijable postižu limes i ostaju jednake limesu.

Propozicija 1.5.3. *Za $(X_n)_n$ i X diskretne slučajne varijable s vrijednostima u E vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(X = x), \quad \textit{za sve } x \in E$$

ako i samo ako postoji sparivanje $\left(\hat{X}, \hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots\right)$ slučajnih varijabli $X, X_1, X_2, \ldots$ i slučajni vektor K takvi da je $\mathbb{P}(K < \infty) = 1$ i

$$\hat{X}_n = \hat{X}, \quad \textit{za svaki } n \geq K.$$

Dokaz. Neka $\mathbb{P}(X_n = x) \longrightarrow \mathbb{P}(X = x)$. Za $n \geq 1$ i $x \in E$ definiramo

$$q_n(x) := \inf_{n\leq k<\infty} \mathbb{P}(X_k = x) \nearrow \mathbb{P}(X = x), \quad \text{za } n \to \infty.$$

Neka je $q_0 = 0$ pa je (q_n) neopadajući i konvergentan niz. Neka su $K, V_1, V_2, \ldots, W_1, W_2, \ldots$ nezavisne slučajne varijable takve da za sve $n \in \mathbb{N}$ i $x \in E$ vrijedi

$$\mathbb{P}(K = n) = \sum_{x\in E} (q_n(x) - q_{n-1}(x)) ,$$

$$\mathbb{P}(V_n = x) = \frac{q_n(x) - q_{n-1}(x)}{\mathbb{P}(K = n)}, \quad \text{ako je } \mathbb{P}(K = n) > 0,$$
$$\mathbb{P}(W_n = x) = \frac{\mathbb{P}(X_n = x) - q_n(x)}{\mathbb{P}(K > n)}, \quad \text{ako je } \mathbb{P}(K > n) > 0.$$

U slučaju kada su gornji nazivnici jednaki 0 uzmemo V_n i W_n proizvoljne. Tada je

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(K = n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x \in E} (q_n(x) - q_{n-1}(x)) = \sum_{x \in E} \sum_{n=1}^{\infty} (q_n(x) - q_{n-1}(x)) \\ &= \sum_{x \in E} \lim_{n \to \infty} q_n(x) = \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x) = 1,\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili Fubinijev teorem na nenegativnoj funkciji za zamjenu suma. Definiramo $\hat{X} = V_K$ i za $n \in \mathbb{N}$,

$$\hat{X}_n = \begin{cases} V_K, & n \geq K, \\ W_n, & n < K. \end{cases}$$

Ako je $\mathbb{P}(K = k) > 0$, onda zbog nezavisnosti slijedi

$$\mathbb{P}(\hat{X} = x, K = k) = \mathbb{P}(V_k = x \mid K = k) \mathbb{P}(K = k) = \mathbb{P}(V_k = x)\mathbb{P}(K = k) = q_k(x) - q_{k-1}(x).$$

Također, $\mathbb{P}(K = k) = 0$ ako i samo ako $\sum_{x \in E} q_k(x) = \sum_{k \in E} q_{k-1}(x)$. Kako je $q_{k-1}(x) \leq q_k(x)$ tada vrijedi prethodno ako i samo ako je $q_k(x) = q_{k-1}(x)$ za sve $x \in E$. Zato je $\mathbb{P}(\hat{X} = x, K = k) = 0 = q_k(x) - q_{k-1}(x)$. U svakom slučaju je

$$\mathbb{P}(\hat{X} = x, K = k) = q_k(x) - q_{k-1}(x). \tag{1.18}$$

Računamo

$$\mathbb{P}(\hat{X} = x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\hat{X} = x, K = k) \overset{(1.18)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} (q_k(x) - q_{k-1}(x)) = \lim_{n \to \infty} q_n(x) = \mathbb{P}(X = x).$$

Slično, ako je $\mathbb{P}(K > n) > 0$ onda zbog nezavisnosti vrijedi

$$\mathbb{P}(\hat{X}_n = x, K > n) = \mathbb{P}(W_n = x)\mathbb{P}(K > n) = \mathbb{P}(X_n = x) - q_n(x).$$

Također, $\mathbb{P}(K > n) = 0$ ako i samo ako je $\sum_x q_n(x) = 1 = \sum_x \mathbb{P}(X_n = x)$. Kako je $q_n(x) \leq \mathbb{P}(X_n = x)$, prethodno vrijedi ako i samo ako je $\mathbb{P}(X_n = x) = q_n(x)$. U tom slučaju je zapravo $q_n(x) = \mathbb{P}(X_k = x) = \mathbb{P}(X = x)$ za sve $k \geq n$ što slijedi analogno. Sve zajedno,

$$\mathbb{P}(\hat{X}_n = x, K > n) = \mathbb{P}(X_n = x) - q_n(x). \tag{1.19}$$

Koristeći jednakost (1.18) za slučajnu varijablu X_n i jednakost (1.19) slijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\hat{X}_n = x) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\hat{X}_n = x, K = k) + \mathbb{P}(\hat{X}_n = x, K > n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (q_k(x) - q_{k-1}(x)) + (\mathbb{P}(X_n = x) - q_n(x)) = \mathbb{P}(X_n = x).\end{aligned}$$

Pokazali smo da smo dobili sparivanje. Sada je za $n \geq K$ očito $\hat{X}_n = V_K = \hat{X}$.

Obratno, neka je T vrijeme sparivanja niza (X_n) i konstantnog niza $X'_n = X$. Po pretpostavci je $T \leq K$ pa po korolaru 1.3.4 slijedi

$$\left\| \mathbb{P}_{X_n} - \mathbb{P}_X \right\|_{tv} \leq 2\,\mathbb{P}(K > n) \longrightarrow 0, \quad \text{kad } n \to \infty$$

jer je $K < \infty$ $\mathbb{P}$-g.s. Tvrdnja slijedi iz propozicije 1.5.2. □

Za razliku od diskretnog slučaja, odnos između ovih tipova konvergencija je kompliciraniji za neprekidne slučajne varijable.

Propozicija 1.5.4. *Neka su $(X_n)_n$ i X neprekidne slučajne varijable s funkcijama gustoće f_n i f. Tada*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}$$

povlači

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R},$$

a to povlači konvergenciju u udaljenosti totalne varijacije.

Dokaz. Prva implikacija je očita. Iz jednakosti (1.7) vidimo da je za drugu implikaciju dovoljno pokazati

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x) \wedge f(x)\, dx = 1.$$

Zbog $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \wedge f(x) \leq \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \wedge f(x) \leq f(x)$ slijedi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \wedge f(x) = f(x)$ pri čemu je $f_n \wedge f$ ograničena s integrabilnom funkcijom f pa tvrdnja slijedi po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji. □

Napomena 1.5.5. *Obratne implikacije iz propozicije ne vrijede. Za svaki $n \geq 2$ postoje jedinstveni $m \geq 1$ i $k \in \{0, 1, \ldots, 2^m - 1\}$ takvi da je $n = 2^m + k$. Za prvi kontraprimjer za $x \in [0, 1\rangle$ definiramo*

$$f_1(x) = f(x) = 1,$$
$$f_n(x) = \begin{cases} 2, & x \in [k2^{-m},\ (k+1)2^{-m}\rangle, \\ 2 - \frac{1}{1-2^{-m}}, & \textit{inače}. \end{cases}$$

Tada je $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 1 < 2 = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$. *Za drugi, neka je za* $x \in [0, 1\rangle$

$$f(x) = 1,$$
$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [k2^{-m},\ (k+1)2^{-m}\rangle\,, \\ \frac{1}{1-2^{-m}}, & \textit{inače}. \end{cases}$$

Tada $\left\|\mathbb{P}_{X_n} - \mathbb{P}_X\right\|_{tv} = \int |f_n(x) - f(x)|\, dx = 2^{1-m} \longrightarrow 0$ *za* $n \to \infty$ *jer tada i* $m \to \infty$, *ali* $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \neq f(x)$ *za* $x \in [0, 1\rangle$.

Propozicija 1.5.6. *Neka su* $(X_n)_n$ *i* X *neprekidne slučajne varijable s funkcijama gustoće* f_n *i* f. *Tada*

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = f, \quad \lambda\text{-}g.s.,$$

ako i samo ako postoji sparivanje $\left(\hat{X}, \hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots\right)$ *slučajnih varijabli* $X, X_1, X_2, \dots$ *i slučajni vektor* K *takvi da je* $\mathbb{P}(K < \infty) = 1$ *i*

$$\hat{X}_n = \hat{X}, \quad \textit{za svaki } n \geq K.$$

Dokaz. Konstrukcija sparivanja je analogna konstrukciji u diskretnom slučaju. Stavimo $g_0 = 0$ i $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$. Neka su $K, V_1, V_2, \dots, W_1, W_2, \dots$ nezavisne slučajne varijable takve da za sve $n \in \mathbb{N}$ i $x \in E$ vrijedi

$$\mathbb{P}(K = n) = \int_E (g_n(x) - g_{n-1}(x))\, dx,$$
$$\mathbb{P}(V_n \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{g_n(x) - g_{n-1}(x)}{\mathbb{P}(K = n)}\, dx, \quad \text{ako je } \mathbb{P}(K = n) > 0,$$
$$\mathbb{P}(W_n \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f_n(x) - g_n(x)}{\mathbb{P}(K > n)}\, dx, \quad \text{ako je } \mathbb{P}(K > n) > 0.$$

Definiramo sparivanje kao u diskretnom slučaju. Ostatak dokaza je potpuno analogan dokazu u diskretnom slučaju uz korištenje Beppo-Levijevog teorema i činjenice da $f_n(x) \geq g_n(x)$ i $\int (f_n(x) - g_n(x))\, dx = 0$ povlači $f_n = g_n$ λ-g.s.

Za obratnu tvrdnju primjenjujemo propoziciju 1.3.5 na sparivanje $\left(\hat{X}, \hat{X}_n, \hat{X}_{n+1}, \dots\right)$. Zbog $\{K \leq n\} \subseteq \{\hat{X} = \hat{X}_m, \text{za svaki } m \geq n\}$ iz nejednakosti (1.13) dobivamo

$$\mathbb{P}\left(\hat{X} \in A, K \leq n\right) \leq \int_A g_n\, d\lambda.$$

Kako je $0 \leq g_n \nearrow \liminf_{n\to\infty} f_n$ po teoremu o monotonoj konvergenciji i zbog $\mathbb{P}(K < \infty) = 1$ slijedi

$$\mathbb{P}\left(\hat{X} \in A\right) \leq \int_A \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\lambda.$$

U gornjoj nejednakosti vrijedi jednakost za sve Borelove skupove A. U suprotnom bi postojao A takav da je

$$1 = \mathbb{P}\left(\hat{X} \in A\right) + \mathbb{P}\left(\hat{X} \in A^c\right) < \int_A \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\lambda + \int_{A^c} \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\lambda \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = 1,$$

gdje smo iskoristili Fatouovu lemu. Dakle, pokazali smo da je $\liminf_n f_n$ funkcija gustoće slučajne varijable X. □

Poznato je da konvergencija g.s. povlači konvergenciju po distribuciji slučajnih varijabli, a da obrat ne vrijedi. U nastavku ćemo pomoću sparivanja pretvoriti konvergenciju po distribuciji u konvergenciju g.s.

Propozicija 1.5.7 (Skorohodov teorem o reprezentaciji)**.** *Neka su $(X_n)_n$ i X slučajne varijable. Tada niz X_n konvergira po distribuciji prema X ako i samo ako postoji sparivanje $\left(\hat{X}, \hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots\right)$ takvo da $\hat{X}_n$ konvergira prema $\hat{X}$ gotovo sigurno.*

Dokaz. Pretpostavimo $X_n \xrightarrow{D} X$. Neka je $U \sim U(0,1)$ i $F := F_X, F_n := F_{X_n}$. Definiramo kvantilno sparivanje sa $\hat{X}_n = F_n^{\leftarrow}(U)$ i $\hat{X} = F^{\leftarrow}(U)$. Pokažimo da za svaki u za koji je funkcija $F^{\leftarrow}$ neprekidna, tj. za svaki $u \in C\left(F^{\leftarrow}\right)$ vrijedi

$$F_n^{\leftarrow}(u) \longrightarrow F^{\leftarrow}(u), \quad \text{za } n \to \infty. \tag{1.20}$$

Neka je $u \in C\left(F^{\leftarrow}\right)$ i $x := \liminf_{n\to\infty} F_n^{\leftarrow}(u)$. Kako je skup prekida neopadajuće funkcije najviše prebrojiv, $C(F)$ je gust u $\mathbb{R}$. Zato možemo pronaći proizvoljno mali $\epsilon > 0$ takav da je $x - \epsilon, x + \epsilon \in C(F)$. Iz definicije točke x slijedi da postoji podniz n_k takav da

$$x - \epsilon < F_{n_k}^{\leftarrow}(u) < x + \epsilon.$$

Koristeći tvrdnju (ii) iz leme 1.1.11 slijedi

$$F_{n_k}(x-\epsilon) \le F_{n_k}\left(F_{n_k}^{\leftarrow}(u)-\right) \le u \le F_{n_k}\left(F_{n_k}^{\leftarrow}(u)\right) \le F_{n_k}(x+\epsilon).$$

Puštanjem $k \to \infty$ slijedi $F(x-\epsilon) \le u \le F(x+\epsilon)$. Nadalje, puštanjem limesa $\epsilon \to 0$ dobivamo $F(x-) \le u \le F(x)$. Primjenom tvrdnje (iii) iz leme 1.1.11 dobivamo

$$F^{\leftarrow}(u) = x = \liminf_{n\to\infty} F_n^{\leftarrow}(u).$$

Analogno slijedi i $F^{\leftarrow}(u) = \limsup_{n\to\infty} F_n^{\leftarrow}(u)$ pa smo pokazali (1.20). Kako je

$$\mathbb{P}\left(U \in C(F^{\leftarrow})^c\right) = \lambda\left(C(F^{\leftarrow})^c\right) = 0$$

jer je skup točaka prekida neopadajuće funkcije najviše prebrojiv, dobili smo

$$\lim_{n\to\infty} \hat{X}_n = \hat{X}, \quad \hat{\mathbb{P}}\text{-g.s.}$$

Obrat slijedi iz činjenice da konvergencija g.s. povlači konvergenciju po distribuciji i definicije sparivanja. □

Napomena 1.5.8. *Propozicija 1.5.3 je korolar propozicije 1.5.7. Zaista, ako* $\mathbb{P}(X_n = x) \to \mathbb{P}(X = x)$*, onda uzimanjem* $E = \mathbb{N}_0$ *slijedi* $X_n \xrightarrow{D} X$*. Po propoziciji 1.5.7 postoji sparivanje takvo da* $\hat{X}_n \longrightarrow \hat{X}$ *g.s. Kako slučajne varijable poprimaju vrijednosti u* $\mathbb{N}_0$ *ova konvergencija znači da za gotovo sve* $\omega \in \Omega$ *postoji* $K(\omega) < \infty$ *takav da je* $\hat{X}_n = \hat{X}$ *za sve* $n \geq K(\omega)$*.*

U nastavku ćemo pokazati rezultat u kojem kvantilnim sparivanjem pretvaramo relacije vezane za distribucije u relacije tipa g.s. Dobivamo tvrdnju kao posljedicu Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji.

Teorem 1.5.9. *Neka su* $(X_n)_n$*,* X *i* Y *slučajne varijable takve da*

$$\begin{aligned} &X_n \xrightarrow{D} X, \quad \textit{za } n \to \infty, \\ &|X_n| \overset{D}{\leq} Y, \quad \textit{za svaki } n \in \mathbb{N} \textit{ i} \\ &\mathbb{E}Y < \infty. \end{aligned}$$

Tada je $\mathbb{E}\,|X| < \infty$ *i* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$.

Dokaz. Rastavimo slučajne varijable na pozitivan i negativan dio, $X_n = X_n^+ - X_n^-$ i $X = X^+ - X^-$. Iz $|X_n| = X_n^+ + X_n^- \overset{D}{\leq} Y$ i

$$\mathbb{P}(X_n^+ \leq x) \geq \mathbb{P}(X_n^+ + X_n^- \leq x) \geq \mathbb{P}(Y \leq x)$$

slijedi $X_n^+ \overset{D}{\leq} Y$. Također, $X_n \xrightarrow{D} X$ povlači $X_n^+ \xrightarrow{D} X^+$. Naime, neka za $x \in C(F)$ vrijedi $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$. Lako se dobije $F_{X^+}(x) = F_X(x)\mathbb{1}_{[0,\infty\rangle}(x)$ pa vrijedi

$$F_{X_n^+}(x) \to F_{X^+}(x), \quad \text{za } x \in C(F_{X^+}).$$

Zaista, za $x < 0$ je $x \in C(F_{X^+})$ i konvergencija vrijedi trivijalno. Za $x \geq 0$ ako je $x \in C(F_{X^+})$ onda je i $x \in C(F_X)$ pa vrijedi konvergencija po pretpostavljenoj konvergenciji niza X_n. Prema propozicijama 1.2.1 i 1.5.7 za kvantilno sparivanje vrijedi

$$\begin{aligned} &\hat{X}_n^+ \longrightarrow \hat{X}^+, \quad \hat{\mathbb{P}}\text{-g.s.} \\ &\hat{X}_n^+ \leq \hat{Y}, \quad \hat{\mathbb{P}}\text{-g.s.} \\ &\hat{\mathbb{E}}(\hat{Y}) = \mathbb{E}(Y) < \infty. \end{aligned}$$

Po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji dobivamo

$$\mathbb{E}(X^+) = \hat{\mathbb{E}}(\hat{X}^+) < \infty \quad \text{i} \quad \mathbb{E}(X_n^+) = \hat{\mathbb{E}}(\hat{X}_n^+) \longrightarrow \hat{\mathbb{E}}(\hat{X}^+) = \mathbb{E}(X^+), \quad \text{za } n \to \infty.$$

Analogna tvrdnja vrijedi i za varijable X_n^- i X^- pa dobivamo

$$\mathbb{E}(|X|) = \mathbb{E}(X^+) + \mathbb{E}(X^-) < \infty \quad \text{i} \quad \mathbb{E}(X_n) \longrightarrow \mathbb{E}(X), \quad \text{za } n \to \infty.$$

□

Poglavlje 2

Poissonova aproksimacija

Zakon rijetkih događaja kaže da niz binomnih slučajnih varijabli $X_n \sim B(n, p_n)$ takav da je $\lambda = \lim_{n\to\infty} np_n$ konvergira po distribuciji prema Poissonovoj slučajnoj varijabli s parametrom λ. U ovom poglavlju koristimo metodu sparivanja kako bi pokazali kolika je razlika u distribucijama ovog tipa.

2.1 Poissonova aproksimacija za nezavisne varijable

Prije prvog teorema navodimo tehnički rezultat.

Lema 2.1.1. *Neka su $X_1, \dots, X_n$ i $X_1', \dots, X_n'$ dva niza nezavisnih slučajnih varijabli takvih da su $X_i \overset{D}{=} X_i'$, za sve $i = 1, \dots, n$. Tada je $X_1 + \cdots + X_n \overset{D}{=} X_1' + \cdots + X_n'$.*

Dokaz. Kako su nizovi nezavisni, slijedi da su slučajni vektori $(X_1, \dots, X_n)$ i $(X_1', \dots, X_n')$ jednako distribuirani. Zaista,

$$\mathbb{P}_{(X_1,\dots,X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_{X_n} = \mathbb{P}_{X_1'} \times \cdots \times \mathbb{P}_{X_n'} = \mathbb{P}_{(X_1',\dots,X_n')},$$

gdje smo u prvoj i trećoj jednakosti iskoristili nezavisnost, a u drugoj jednaku distribuiranost komponenata. Tvrdnja sada slijedi iz činjenice da je $X_1 + \cdots + X_n = g(X_1, \dots, X_n)$ za izmjerivu funkciju g. □

Teorem 2.1.2. *Neka su za $n \in \mathbb{N}$ definirane $X_1, X_2, \dots, X_n$ nezavisne Bernoullijeve slučajne varijable s parametrima $p_1, p_2, \dots, p_n$. Neka je $X = \sum_{i=1}^n X_i$ i $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i$. Neka je p_λ vjerojatnosna mjera inducirana Poissonovom distribucijom s parametrom λ. Tada je*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbb{P}(X = k) - p_\lambda(k)| \leq 2 \sum_{i=1}^{n} p_i^2. \tag{2.1}$$

Dokaz. Neka su $X_i' \sim P(p_i)$, za svaki $i = 1, \dots, n$ nezavisne. Tada je $X' := \sum_{i=1}^n X_i' \sim P(\lambda)$. Za svaki i želimo definirati sparivanje slučajnih varijabli X_i i X_i'. Neka su $\left(\hat{X}_i, \hat{X}_i'\right)$, za $i = 1, \dots, n$ nezavisni slučajni vektori s distribucijom

$$\mathbb{P}\left((\hat{X}_i, \hat{X}_i') = (k, l)\right) = \begin{cases} 1 - p_i, & k = 0, l = 0, \\ 0, & k = 0, l = 1, \\ e^{-p_i} - (1 - p_i), & k = 1, l = 0, \\ e^{-p_i} \frac{p_i^l}{l!}, & k = 1, l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Računanjem marginalnih distribucija lagano se provjeri da je to zaista sparivanje od X_i i X_i'. Koristeći lemu 2.1.1 dobivamo

$$\begin{aligned} \hat{X} &:= \sum_{i=1}^n \hat{X}_i \stackrel{D}{=} \sum_{i=1}^n X_i = X, \\ \hat{X}' &:= \sum_{i=1}^n \hat{X}_i' \stackrel{D}{=} \sum_{i=1}^n X_i' = X' \sim P(\lambda). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dakle, $\left(\hat{X}, \hat{X}'\right)$ je sparivanje slučajnih varijabli X i X'. Uvrštavajući

$$\mathbb{P}\left(\hat{X}_i \neq \hat{X}_i'\right) = e^{-p_i} - (1 - p_i) + \sum_{l=2}^{\infty} e^{-p_i} \frac{p_i^l}{l!} = 1 - p_i e^{-p_i} - 1 + p_i = p_i(1 - e^{-p_i})$$

u izraz za nejednakost sparivanja dobivamo

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}_X - \mathbb{P}_{X'}\|_{tv} &\leq 2\,\mathbb{P}\left(\hat{X} \neq \hat{X}'\right) = 2\,\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \hat{X}_i \neq \sum_{i=1}^n \hat{X}_i'\right) \leq 2\,\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n \left\{\hat{X}_i \neq \hat{X}_i'\right\}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\left(\hat{X}_i \neq \hat{X}_i'\right) = \sum_{i=1}^n p_i(1 - e^{-p_i}) \leq 2 \sum_{i=1}^n p_i^2. \end{aligned}$$

U posljednjoj nejednakosti smo iskoristili $1 - e^{-x} \leq x$ za $x > 0$. Tvrdnja teorema slijedi iz propozicije 1.3.2. □

Napomena 2.1.3.

(i) *Primijetimo da je pretpostavka nezavisnosti u gornjem dokazu teorema iskorištena u jednadžbi (2.2). Tvrdnja teorema ne vrijedi bez pretpostavke nezavisnosti. Na primjer, ako uzmemo $X_1 = X \sim B(1, \frac{1}{2})$ i $X_2 = 1 - X$, tada je*

$$\|\mathbb{P}_X - p_\lambda\|_{tv} = \sum_{k \neq 1} \frac{e^{-1}}{k!} + (1 - e^{-1}) = 2(1 - e^{-1}) > 1 = 2(p_1 + p_2).$$

(ii) Ako je $M = \max_{i=1,\dots n} p_i$, tada je

$$\|\mathbb{P}_X - p_\lambda\|_{tv} \le 2\sum_{i=1}^{n} p_i^2 \le 2M\lambda. \tag{2.3}$$

(iii) Sparivanje $\left(\hat{X}_i, \hat{X}'_i\right)$ iz dokaza teorema je maksimalno sparivanje za X_i i X'_i. Naime,

$$\begin{aligned}\left\|\mathbb{P}_{X_i} - \mathbb{P}_{X'_i}\right\|_{tv} &= \left|1 - p_i - e^{-p_i}\right| + \left|p_i - p_i e^{-p_i}\right| + \sum_{l=2}^{\infty} e^{-p_i}\frac{p_i^l}{l!} \\ &= 2p_i(1-e^{-p_i}) = 2\,\mathbb{P}\left(\hat{X}_i \ne \hat{X}'_i\right).\end{aligned}$$

Teorem 2.1.4. *Neka je $(X_{ni}, i = 1, \dots, k_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s distribucijama $X_{ni} \sim B(1, p_{ni})$. Neka je $\max\limits_{i=1,\dots,k_n} p_{ni} \longrightarrow 0$, za $n \to \infty$. Tada postoji $\lambda \ge 0$ takav da*

$$X_n = \sum_{i=1}^{k_n} X_{ni} \xrightarrow{D} X \sim P(\lambda)$$

ako i samo ako $\sum_{i=1}^{k_n} p_{ni} \longrightarrow \lambda$, za $n \to \infty$. Za $\lambda = 0$ pretpostavljamo $X = 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da $\lambda_n := \sum_{i=1}^{k_n} p_{ni} \longrightarrow \lambda$, za $n \to \infty$. Koristeći nejednakost (2.3) i pretpostavke teorema slijedi

$$\left\|\mathbb{P}_{X_n} - p_{\lambda_n}\right\|_{tv} \le 2\sum_{i=1}^{k_n} p_{ni}^2 \le 2\lambda_n \max_{i=1,\dots,k_n} p_{ni} \longrightarrow 0, \text{ za } n \to \infty.$$

Također, $\lambda_n \to \lambda$, povlači $p_{\lambda_n}(k) \to p_\lambda(k)$, za svaki $k \in \mathbb{N}_0$ pa po propoziciji 1.5.2 slijedi $\left\|p_{\lambda_n} - p_\lambda\right\|_{tv} \longrightarrow 0$. Zato

$$\left\|\mathbb{P}_{X_n} - p_\lambda\right\|_{tv} \le \left\|\mathbb{P}_{X_n} - p_{\lambda_n}\right\|_{tv} + \left\|p_{\lambda_n} - p_\lambda\right\|_{tv} \longrightarrow 0, \quad \text{za } n \to \infty, \tag{2.4}$$

što povlači $X_n \xrightarrow{D} P(\lambda)$.

Obratno, neka postoji $\lambda \ge 0$ takav da $X_n \xrightarrow{D} X \sim P(\lambda)$. Želimo pokazati da je $\limsup \lambda_n < \infty$. Kako je $\lambda_n = \mathbb{E}(X_n)$, pomoću Čebiševljeve nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = 0) \le \mathbb{P}(|X_n - \lambda_n| \ge \lambda_n) &\le \frac{\mathrm{Var}\,(X_n)}{\lambda_n^2} \\ &\le \frac{1}{\lambda_n^2}\sum_{i=1}^{k_n} p_{ni}\underbrace{(1-p_{ni})}_{\le 1} \le \frac{1}{\lambda_n}.\end{aligned}$$

Zbog $\mathbb{P}(X_n = 0) \longrightarrow \mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda}$, slijedi $\limsup \lambda_n \leq e^{\lambda} < \infty$. Zato je niz $(\lambda_n)_n$ ograničen. Pretpostavimo suprotno, odnosno neka λ_n ne konvergira prema λ. Kako je niz ograničen, tada postoji podniz $(\lambda_{n_k})_k$ koji konvergira prema $\mu \neq \lambda$. Prema već pokazanom, tada X_{n_k} konvergira prema $P(\mu)$ što je kontradikcija s pretpostavkom. □

2.2 Stein-Cheinova metoda

Iz teorema 2.1.2 znamo ogradu za razliku u distribucijama za nezavisne slučajne varijable. U ovom poglavlju dobivamo ogradu za slučajne varijable koje nisu nužno nezavisne, a koja će u nezavisnom slučaju dati bolju ogradu.

Neka su zadane slučajne varijable $Y_i, i = 1, \dots, n$ takve da je Y_i Bernoullijeva slučajna varijabla s parametrom p_i bez pretpostavke nezavisnosti. Neka je $W = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, a $\lambda = \sum_{i=1}^{n} p_i$. Kao i u prethodnom poglavlju želimo ograničiti $\|\mathbb{P}_W - p_\lambda\|_{tv}$. Za svaki $j = 1, \dots, n$ definiramo slučajne varijable U_j i V_j sa

$$\begin{aligned} U_j &\overset{D}{=} W, \\ V_j &\overset{D}{=} W - 1 \mid Y_j = 1, \end{aligned} \tag{2.5}$$

odnosno kada je $\mathbb{P}(Y_j = 1) > 0$ neka je

$$\mathbb{P}(V_j \in A) = \mathbb{P}(W - 1 \in A \mid Y_j = 1),$$

a za $\mathbb{P}(Y_j = 1) = 0$ stavimo $V_j = 0$.

U sljedećoj lemi definiramo funkciju koju ćemo koristiti u dokazu glavnog rezultata.

Lema 2.2.1. *Neka je $\lambda > 0$, $A \subseteq \mathbb{N}_0$ i $g_{\lambda,A} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ rješenje rekurzivne relacije*

$$g_{\lambda,A}(0) = 0, \quad \lambda\, g_{\lambda,A}(k+1) - k\, g_{\lambda,A}(k) = \mathbb{1}_A(k) - p_\lambda(A), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Tada je

$$\sup_{k \in \mathbb{N}_0} \left| g_{\lambda,A}(k+1) - g_{\lambda,A}(k) \right| \leq 1 \wedge \lambda^{-1}.$$

Dokaz. U dokazu ćemo više puta koristiti sljedeću jednakost za Poissonovu distribuciju

$$\lambda p_\lambda(k) = (k+1) p_\lambda(k+1), \quad \text{za } k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.6}$$

Za $k \in \mathbb{N}_0$, neka je $U_k = \{0, 1, \dots, k\}$. Tada se lako provjeri da je rješenje gornje rekurzije jednako

$$g_{\lambda,A}(0) = 0, \qquad g_{\lambda,A}(k+1) = \frac{1}{\lambda p_\lambda(k)} \left[p_\lambda(A \cap U_k) - p_\lambda(A) p_\lambda(U_k) \right], \quad \text{za } k \in \mathbb{N}_0.$$

Vrijedi

$$g_{\lambda,A} = \sum_{j \in A} g_{\lambda,\{j\}}, \quad g_{\lambda,\mathbb{N}_0 \setminus A} = -g_{\lambda,A}. \tag{2.7}$$

Također,

$$g_{\lambda,\{j\}}(k+1) = \begin{cases} -\frac{p_\lambda(j)}{\lambda p_\lambda(k)} p_\lambda(U_k), & k < j, \\ \frac{p_\lambda(j)}{\lambda p_\lambda(k)} p_\lambda(\mathbb{N}_0 \setminus U_k), & k \geq j. \end{cases} \tag{2.8}$$

Pokažimo da je $g_{\lambda,\{j\}}(k+1) - g_{\lambda,\{j\}}(k) \leq 0$, za $k \neq j$. U slučaju $k < j$ računamo

$$\frac{p_\lambda(k-1)}{p_\lambda(k)} \sum_{l=0}^{k} p_\lambda(l) \overset{(2.6)}{=} \frac{k}{\lambda} \sum_{l=0}^{k} p_\lambda(l) \geq \frac{1}{\lambda} \sum_{l=1}^{k} l p_\lambda(l) \overset{(2.6)}{=} \sum_{l=0}^{k-1} p_\lambda(l),$$

iz čega slijedi tvrdnja množenjem obje strane sa $-\frac{p_\lambda(j)}{\lambda p_\lambda(k-1)}$. Za $k > j$ tvrdnja slijedi analogno. Za $k = j$ dobivamo

$$\begin{aligned} g_{\lambda,\{j\}}(j+1) - g_{\lambda,\{j\}}(j) &= \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{l=j+1}^{\infty} p_\lambda(l) + \frac{p_\lambda(j)}{p_\lambda(j-1)} \sum_{l=0}^{j-1} p_\lambda(l) \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{l=j+1}^{\infty} p_\lambda(l) + \sum_{l=1}^{j} p_\lambda(l) \frac{l}{j} \right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} p_\lambda(l) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \leq 1 \wedge \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

gdje smo u prvoj jednakosti uvrstili (2.8), a u drugoj iskoristili jednakost (2.6) prvo za $k = j - 1$, a onda i unutar sume za $k = l$. Koristeći jednakosti iz (2.7) dobivamo

$$\left| g_{\lambda,A}(k+1) - g_{\lambda,A}(k) \right| \leq 1 \wedge \lambda^{-1}, \quad \text{za sve } k \in \mathbb{N}_0.$$

□

Teorem 2.2.2. *Uz oznake kao na početku poglavlja, vrijedi*

$$\|\mathbb{P}_W - p_\lambda\|_{tv} \leq 2(1 \wedge \lambda^{-1}) \sum_{i=1}^{n} p_j \, \mathbb{E}(|U_j - V_j|). \tag{2.9}$$

Dokaz. Za $A \subseteq \mathbb{N}_0$ i ograničenu funkciju $g = g_{\lambda,A}$ iz leme 2.2.1 vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\lambda g(W+1) - W g(W)\right] &= \sum_{j=1}^{n} \Big(p_j \mathbb{E}\left[g(W+1)\right] - \mathbb{E}[Y_j \, g(W)] \Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} p_j \Big(\mathbb{E}[g(W+1)] - \mathbb{E}[g(W) \mid Y_j = 1] \Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} p_j \mathbb{E}[g(U_j+1) - g(V_j+1)], \end{aligned} \tag{2.10}$$

gdje smo u prvoj jednakosti uvrstili izraze za λ i W, u drugoj uvjetovali očekivanje na vrijednosti od Y_j, a u trećoj iskoristili jednaku distribuiranost slučajnih varijabli iz (2.5). Za $i, j \geq 0$ bez smanjenja općenitosti neka je $i \geq j$. Tada je

$$|g(i) - g(j)| \leq \sum_{k=j}^{i-1} |g(k+1) - g(k)| \leq (i-j) \sup_{k \in \mathbb{N}_0} |g(k+1) - g(k)|. \tag{2.11}$$

Koristeći redom rekurzivnu relaciju za funkciju g, jednakost (2.10), nejednakost (2.11) i tvrdnju leme 2.2.1 dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W \in A) - p_\lambda(A) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A(W) - p_\lambda(A)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\lambda\, g(W+1) - Wg(W)\right] \\
&\overset{(2.10)}{=} \sum_{j=1}^{n} p_j \mathbb{E}[g(U_j + 1) - g(V_j + 1)] \\
&\overset{(2.11)}{\leq} \sup_{k \in \mathbb{N}_0} |g(k+1) - g(k)| \sum_{j=1}^{n} p_j \mathbb{E}[|U_j - V_j|] \\
&\leq (1 \wedge \lambda^{-1}) \sum_{j=1}^{n} p_j \mathbb{E}[|U_j - V_j|]
\end{aligned}$$

što daje tvrdnju. □

Korolar 2.2.3 (Le Camov teorem)**.** *Neka su $Y_i, i = 1, \ldots, n$ nezavisne slučajne varijable takve da je $Y_i \sim B(1, p_i)$. Za $W = \sum_{i=1}^n Y_i$ i $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i$ vrijedi*

$$||\mathbb{P}_W - p_\lambda||_{tv} \leq 2(1 \wedge \lambda^{-1}) \sum_{i=1}^{n} p_j^2.$$

Dokaz. U ovom slučaju definiramo slučajne varijable $U_j = W$ i $V_j = \sum_{i \neq j} Y_i = W - Y_j$. Tada je $U_j \overset{D}{=} W$ i

$$\mathbb{P}(W - 1 \in A \mid Y_j = 1) = \frac{\mathbb{P}\left(\sum_{i \neq j} Y_i \in A, Y_j = 1\right)}{\mathbb{P}\left(Y_j = 1\right)} = \mathbb{P}(V_j \in A),$$

gdje posljednja jednakost slijedi zbog nezavisnosti pa vrijedi tvrdnja teorema 2.2.2. Tvrdnja korolara slijedi iz $\mathbb{E}|U_j - V_j| = \mathbb{E}|W - (W - Y_j)| = \mathbb{E}Y_j = p_j$. □

Vidimo da smo za $\lambda > 1$ dobili bolju ogradu od one iz teorema 2.1.2.

Teorem 2.2.4. *Ako uz prethodne pretpostavke vrijedi i da je $U_i \geq V_i$ za svaki $i = 1, \ldots, n$. Tada je*

$$\|\mathbb{P}_W - p_\lambda\|_{tv} \leq 2(1 \wedge \lambda^{-1})(\lambda - Var(W)). \tag{2.12}$$

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} p_j \mathbb{E}[U_j - V_j] &= \sum_{j=1}^{n} p_j \, \mathbb{E}(W) - \sum_{j=1}^{n} p_j \, \mathbb{E}[W - 1 \mid Y_j = 1] \\
&= \sum_{j=1}^{n} p_j \, \mathbb{E}(W) - \sum_{j=1}^{n} p_j \, \mathbb{E}[W \mid Y_j = 1] + \sum_{j=1}^{n} p_j \\
&= \mathbb{E}(W)^2 - \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(Y_j W) + \lambda \\
&= \mathbb{E}(W)^2 - \mathbb{E}(W^2) + \lambda = \lambda - \mathrm{Var}\,(W),
\end{aligned}$$

gdje smo u prvoj jednakosti uvrstili (2.5), u trećoj uvjetovali $\mathbb{E}(Y_j W)$ na Y_j te u četvrtoj jednakosti iskoristili linearnost očekivanja. Tvrdnja sada slijedi iz teorema 2.2.2. □

U nastavku ćemo pokazati primjer korištenja prethodnog teorema. Za to ćemo morati pronaći slučajne varijable U_j i V_j takve da vrijedi (2.5) i $U_j \geq V_j$. U tu svrhu uvodimo definiciju.

Definicija 2.2.5. *Slučajne varijable $Y_1, \ldots, Y_n$ su* u negativnom odnosu *ako postoje slučajne varijable $Y_{j1}, \ldots, Y_{jn}$ i $Y'_{j1}, \ldots, Y'_{jn}$, $j = 1, \ldots, n$ takve da za sve j za koje je $\mathbb{P}(Y_j = 1) > 0$ vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\left(Y_{j1}, \ldots, Y_{jn}\right) \overset{D}{=} (Y_1, \ldots, Y_n)\,, \\
&\left(Y'_{j1}, \ldots, Y'_{jn}\right) \overset{D}{=} (Y_1, \ldots, Y_n) \,\big|\, Y_j = 1\,, \\
&Y'_{ji} \leq Y_{ji}, \quad \text{za sve } i \neq j,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

a za j za koje je $\mathbb{P}(Y_j = 1) = 0$ vrijedi $Y'_{ji} = 0$, za $j \neq i$ i $Y'_{jj} = 1$.

Primijetimo da za slučajne varijable iz prethodne definicije možemo staviti

$$U_j = \sum_{i=1}^{n} Y_{ji}, \quad \text{i} \quad V_j = -1 + \sum_{i=1}^{n} Y'_{ji}.$$

Tada zaključujemo da vrijedi (2.5) i

$$U_j - V_j = \sum_{i \neq j} \left(Y_{ji} - Y'_{ji}\right) + \left(1 - Y'_{jj}\right) + Y_{jj} \geq 0.$$

Primjer 2.2.6. *Neka je dano $N \geq 2$ kutija i $1 \leq m < N$ kuglica. Svaka kutija može sadržavati najviše jednu kuglicu. Stavimo nasumično kuglice u kutije. Za $i = 1, \ldots, N$ neka je $Y_i = \mathbb{1}_{\{kutija\ i\ sadrži\ kuglicu\}}$. Za $n < N$ stavimo $W = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Tada W ima hipergeometrijsku distribuciju, odnosno za $k = \max\{0, m+n-N\}, \ldots, \min\{m, n\}$*

$$\mathbb{P}(W = k) = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{m-k}}{\binom{N}{m}}.$$

Intuitivno vidimo da su Y_i u negativnom odnosu jer ako je u jednoj kutiji kuglica, onda će se kuglice u drugim kutijama nalaziti s manjom vjerojatnosti. Formalno, definirajmo $Y_{j1}, \ldots, Y_{jn}$ i $Y'_{j1}, \ldots, Y'_{jn}$ sljedećim postupkom.

- *(i)* *Stavimo kuglicu u kutiju j.*
- *(ii)* *Ostalih $m-1$ kuglica stavimo na slučajan način u ostalih $N-1$ kutija.*
- *(iii)* *Stavimo $Y'_{ji} = \mathbb{1}_{\{kutija\ i\ sadrži\ kuglicu\}}$;*
- *(iv)* *Neka je $I \sim B(1, m/N)$ nezavisna od niza (Y'_{ji}).*
- *(v)* *Ako je $I = 1$, stavimo $\left(Y_{j1}, \ldots, Y_{jn}\right) = \left(Y'_{j1}, \ldots, Y'_{jn}\right)$.*
- *(vi)* *Inače, uzmemo kuglicu iz kutije j i na slučajan način ju stavimo u jednu od preostalih $N-m$ kutija koje su prazne. Stavimo $Y_{ji} = \mathbb{1}_{\{kutija\ i\ sadrži\ kuglicu\}}$.*

Prema konstrukciji je jasno da su $\left(Y'_{j1}, \ldots, Y'_{jn}\right)$ i $(Y_1, \ldots, Y_n) \,\middle|\, Y_j = 1$ jednako distribuirani. Iskoristimo to u drugom koraku

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(Y_{j1} = i_1, \ldots, Y_{jn} = i_n\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(Y'_{j1} = i_1, \ldots, Y'_{jn} = i_n \,\middle|\, I = 1\right)\mathbb{P}(I = 1) + \mathbb{P}\left(Y_{j1} = i_1, \ldots, Y_{jn} = i_n \,\middle|\, I = 0\right)\mathbb{P}(I = 0) \\
&= \mathbb{P}\left(Y_1 = i_1, \ldots, Y_n = i_n \,\middle|\, Y_j = 1\right)\frac{m}{N} + \mathbb{P}\left(Y_1 = i_1, \ldots, Y_n = i_n \,\middle|\, Y_j = 1\right)\left(1 - \frac{m}{N}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Y_1 = i_1, \ldots, Y_n = i_n\right),
\end{aligned}$$

gdje smo u prvoj jednakosti iskoristili korak (v), u drugoj korak (vi), a u četvrtoj $\mathbb{P}(Y_j = 1) = m/N$. Također, za $j \neq i$ je jasno da Y_{ji} ostaje isti kao Y'_{ji} ili iz 0 postane 1 pa je $Y'_{ji} \leq Y_{ji}$. Dakle, $\left(Y_{ji}\right)_i$ i $\left(Y'_{ji}\right)_i$ su u negativnom odnosu. Uvrštavajući izraze za očekivanje i varijancu hipergeometrijske distribucije

$$\lambda = \mathbb{E}(W) = \frac{nm}{N}, \quad Var(W) = \frac{nm(N-n)(N-m)}{N^2(N-1)}$$

u nejednakost iz teorema 2.2.4 dobivamo

$$\|\mathbb{P}_W - p_\lambda\|_{tv} \leq 2(1 \wedge \lambda^{-1})(\lambda - Var(W)) = 2(1 \wedge \lambda)\frac{(m+n-1)N - mn}{N(N-1)} \leq 2\frac{m+n-1}{N-1},$$

što je malo za $m, n \ll N$.

Poglavlje 3

Sparivanje slučajnih procesa

U ovom poglavlju proučavamo sparivanje slučajnih procesa kao što su Markovljevi lanci, slučajne šetnje i procesi obnavljanja kako bi pokazali asimptotska svojstva.

3.1 Klasično sparivanje

Prvo ćemo pokazati teorem o graničnoj distribuciji Markovljevog lanca konstrukcijom klasičnog sparivanja.

Teorem 3.1.1. *Neka je $(X_n)_n$ ireducibilan i aperiodičan Markovljev lanac na konačnom ili prebrojivom skupu S s početnom distribucijom λ i stacionarnom distribucijom π. Tada je distribucija π ujedno i granična, odnosno*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j) = \pi_j, \quad \text{za svaki } j \in S.$$

Dokaz. Neka je X' Markovljev lanac s početnom distribucijom π nezavisan od lanca X. Neka je

$$T := \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : X_k = X'_k\}$$

njihovo prvo vrijeme sparivanja. Definiramo proces X'' sa

$$X''_n = \begin{cases} X_n, & n < T, \\ X'_n, & n \geq T. \end{cases}$$

Tada je (X'', X') sparivanje Markovljevih lanaca X i X'. Primijetimo da je T vrijeme sparivanja, odnosno

$$T = \inf\{n \in \mathbb{N} : X''_m = X'_m \text{ za sve } m \geq n\}$$

pa po korolaru 1.3.4 slijedi

$$\left\|\mathbb{P}_{X_n} - \mathbb{P}_{X'_n}\right\|_{tv} \leq 2\,\mathbb{P}(T > n).$$

Ako pokažemo da je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, tada $\left\|\mathbb{P}_{X_n} - \mathbb{P}_{X'_n}\right\|_{tv} \longrightarrow 0$, za $n \to \infty$. Tvrdnja će vrijediti iz jednakosti $\mathbb{P}(X'_n = j) = (\pi P^n)_j = \pi_j$ i propozicije 1.5.2. □

Lema 3.1.2. *Za prvo vrijeme sparivanja T iz dokaza teorema 3.1.1 vrijedi* $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.

Dokaz. Definiramo slučajni proces $W_n = (X_n, X'_n)$. Pokazuje se da je W_n Markovljev lanac s matricom prijelaza $\tilde{p}_{(i_0,j_0),(i_1,j_1)} = p_{i_0,i_1} p_{j_0,j_1}$ i stacionarnom distribucijom $\tilde{\pi}_{(i,j)} = \pi_i \pi_j$. Iz postojanja stacionarne distribucije slijedi da je lanac povratan pa je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Detalji dokaza se mogu pronaći u [9, str. 53]). □

Sparivanje za koje je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ zove se *uspješno sparivanje*.

Lema 3.1.3. *Slučajni vektor (X'', X') iz dokaza teorema 3.1.1 je zaista sparivanje Markovljevih lanaca X i X'.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz jakog Markovljevog svojstva Markovljevog lanca $W_n = (X_n, Y_n)$ za vrijeme zaustavljanja T. Raspišimo detaljnije. Dovoljno je pokazati $X'' \overset{D}{=} X$, odnosno

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X''_0 = i_0, \ldots, X''_n = i_n) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_0 = i_0 \ldots X_{k-1} = i_{k-1}, X'_k = i_k \ldots X'_n = i_n, T = k) + \mathbb{P}(X_0 = i_0 \ldots X_n = i_n, T > n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_0 = i_0 \ldots X_n = i_n, T = k) + \mathbb{P}(X_0 = i_0 \ldots X_n = i_n, T > n) \\
&= \mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n).
\end{aligned}$$

Za to je potrebno opravdati drugu jednakost, odnosno pokazati

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0 \ldots X_{k-1} = i_{k-1}, X'_k = i_k \ldots X'_n = i_n, T = k) = \mathbb{P}(X_0 = i_0 \ldots X_n = i_n, T = k). \tag{3.1}$$

Raspisujemo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_0 = i_0 \ldots X_{k-1} = i_{k-1}, X'_k = i_k \ldots X'_n = i_n, T = k) \\
&= \sum_{j_0 \ldots j_n \in S} \mathbb{P}(W_0 = (i_0, j_0) \ldots W_n = (j_n, i_n), T = k \,|\, W_k = (j_k, i_k))\,\mathbb{P}(W_k = (j_k, i_k)) \\
&= \sum_{j_0 \ldots j_n} \mathbb{P}(W_0 = (i_0, j_0) \ldots W_{k-1} = (i_{k-1}, j_{k-1}), T = k) \,|\, W_k = (j_k, i_k)) \cdot \\
&\qquad \cdot \mathbb{P}(W_k = (j_k, i_k)) \cdot \mathbb{P}(W_n = (j_n, i_n) \ldots W_{k+1} = (j_{k+1}, i_{k+1}) \,|\, W_k = (j_k, i_k))
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j_0 \cdots j_k} \mathbb{P}\left(W_0 = (i_0, j_0) \ldots W_k = (i_k, j_k), T = k\right) \sum_{j_{k+1} \cdots j_n} \tilde{p}_{(j_k, i_k),(j_{k+1}, i_{k+1})} \cdots \tilde{p}_{(j_{n-1}, i_{n-1}),(j_n, i_n)}$$

$$= \sum_{j_0 \cdots j_k} \mathbb{P}\left(W_0 = (i_0, j_0) \ldots W_k = (i_k, j_k), T = k\right) p_{i_k, i_{k+1}} \cdots p_{i_{n-1}, i_n},$$

gdje smo u drugoj jednakosti iskoristili uvjetnu nezavisnost prošlih i budućih događaja uz dano $\{W_k = (j_k, i_k)\}$ (pogledaj [9, str. 9, jednakost (1.8)]). S druge strane, analogni račun pokazuje da to vrijedi i za desnu stranu u (3.1) pa smo pokazali tu jednakost, a time i tvrdnju leme. □

3.2 Ornsteinovo sparivanje

Klasično sparivanje ne mora biti uspješno za nul-povratne i prolazne Markovljeve lance. Zato uvodimo novo sparivanje. Definirat ćemo ga na slučajnim šetnjama sa svojstvom aperiodičnosti.

Neka su $X_1, X_2, \ldots$ nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable nezavisne od slučajne varijable Y_0. Pretpostavimo da sve slučajne varijable imaju vrijednosti u $\mathbb{Z}$. Definiramo $Y_k = Y_0 + X_1 + \cdots + X_n$. Tada je $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ slučajna šetnja s koracima X_n i početnom pozicijom Y_0.

Definicija 3.2.1. *Za korake slučajne šetnje kažemo da su* aperiodični *ako je*

$$\operatorname{nzd}\left\{n \in \mathbb{Z} : \mathbb{P}(X_1 = n) > 0\right\} = 1,$$

a jako aperiodični *ako postoji $h \in \mathbb{Z}$ takav da*

$$\mathbb{P}(X_1 = h) > 0 \quad i \quad \operatorname{nzd}\left\{n \in \mathbb{Z} : \mathbb{P}(X_1 - h = n) > 0\right\} = 1.$$

Jaka aperiodičnost povlači aperiodičnost, a obrat ne vrijedi. Zaista, neka je $d := \operatorname{nzd}\{n : \mathbb{P}(X_1 = n) > 0\}$. Vrijedi $\{n : \mathbb{P}(X_1 = n + h) > 0\} = \{n : \mathbb{P}(X_1 = n) > 0\} - h$. Za svaki n iz skupa s lijeve strane jednakosti $d \mid n + h$. Kako $d \mid h$, slijedi $d \mid n$. Odnosno $d \leq \operatorname{nzd}\{n \in \mathbb{Z} : \mathbb{P}(X_1 - h = n) > 0\} = 1$ pa je $d = 1$. S druge strane, jednostavna simetrična slučajna šetnja sa $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ je aperiodična ali nije jako aperiodična.

Neka je $Y'_n = Y'_0 + X'_1 + \cdots + X'_n$ slučajna šetnja nezavisna od Y s istim distribucijama koraka i različitom početnom pozicijom Y'_0. Dakle, koraci $X'_1, X'_2, \ldots$ su nezavisni jednako distribuirani i $X'_1 \stackrel{D}{=} X_1$.

Lema 3.2.2. *Neka je $A \subseteq \mathbb{Z}$. Tada postoji konačan podskup $A' \subseteq A$ takav da je* $\operatorname{nzd} A = \operatorname{nzd} A'$.

Dokaz. Neka je $a_0 \in A$ fiksan. Rastavimo a_0 i $\operatorname{nzd} A$ na proste faktore. Bez smanjenja općenitosti neka je $a_0 = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$ i $\operatorname{nzd} A = p_1^{l_1} \cdots p_m^{l_m}$ gdje je $l_1 \le k_1, \ldots, l_m \le k_m$ i $m \le n$. Za svaki p_i za koji je $l_i < k_i$ postoji $a_i \in A$ takav da $p_i^{l_i+1} \nmid a_i$ jer kad takav $a \in A$ ne bi postojao onda bi $p_i^{l_i+1} \mid \operatorname{nzd} A$ što je kontradikcija. Slično, ako je $m < n$, onda za p_{m+i} postoji a_{m+i} takav da $p_{m+i} \nmid a_{m+i}$. Označimo uniju elemenata a_i i a_0 s A'. Očito je A' konačan. Znamo da $\operatorname{nzd} A' \mid a_0$ i $\operatorname{nzd} A \mid \operatorname{nzd} A'$ jer je $A' \subseteq A$. Iz toga slijedi $\operatorname{nzd} A' = p_1^{i_1} \cdots p_m^{i_m} \cdot p_{m+1}^{i_{m+1}} \cdots p_n^{i_n}$ gdje je $l_1 \le i_1 \le k_1, \ldots, l_m \le i_m \le k_m, i_{m+1} \le k_{m+1}, \ldots, i_n \le k_n$. Kad bi $i_1 > l_1$ onda postoji $a \in A'$ takav da $p_1^{i_1} \nmid a$ što je kontradikcija. Dakle, $i_1 = l_1, \ldots, i_m = l_m$. Slično, ako je $m < n$ i $i_{m+1} > 0$ onda postoji $a \in A'$ t.d. $p_{m+1}^{i_{m+1}} \nmid a$. Dakle, $i_{m+1} = 0, \ldots, i_n = 0$. Dobili smo $\operatorname{nzd} A' = \operatorname{nzd} A$. □

Po lemi zaključujemo da postoji $c \in \mathbb{N}$ dovoljno velik takav da je

$$\operatorname{nzd}\left\{n : \mathbb{P}\left(X_1 - h = n, |X_1 - h| \le c\right) > 0\right\} = \operatorname{nzd}\left\{|n| \le c : \mathbb{P}(X_1 - h = n) > 0\right\} = 1. \quad (3.2)$$

Stavimo $Y_0'' = Y_0'$, za $k \ge 1$

$$X_k'' = \begin{cases} X_k', & \text{za } \left|X_k - X_k'\right| \le c, \\ X_k, & \text{za } \left|X_k - X_k'\right| > c, \end{cases}$$

i $Y_n'' = Y_0'' + X_1'' + \cdots + X_n''$. Zbog nezavisnosti slučajnih varijabli X_k i X_k' je $\left(X_k, X_k'\right) \stackrel{D}{=} \left(X_k', X_k\right)$. Zato je

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_k = n, |X_k - X_k'| > c) &= \mathbb{P}(X_k = n, |X_k' - n| > c) \\ &= \mathbb{P}(X_k' = n, |X_k - n| > c) \\ &= \mathbb{P}(X_k' = n, |X_k - X_k'| > c), \end{aligned}$$

što koristimo u

$$\mathbb{P}\left(X_k'' = n\right) = \mathbb{P}(X_k' = n, |X_k - X_k'| \le c) + \mathbb{P}(X_k = n, |X_k - X_k'| > c) = \mathbb{P}(X_k' = n).$$

Dakle Y'' i Y' imaju jednako distribuirane korake i iste početne distribucije pa je $Y'' \stackrel{D}{=} Y'$. Definirajmo $R = (R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kao razliku slučajnih šetnji sa $R_n = Y_n - Y_n''$. Vidimo da smo dobili novu slučajnu šetnju s koracima $X_k - X_k''$ i početnom pozicijom $Y_0 - Y_0''$. Prije glavnog rezultata dokazat ćemo svojstva šetnje R.

Lema 3.2.3. *Slučajna šetnja R ima simetrične, ograničene i aperiodične korake.*

Dokaz. Iz

$$X_k - X_k'' = \begin{cases} 0, & |X_k - X_k'| > c, \\ X_k - X_k', & |X_k - X_k'| \le c \end{cases}$$

i nezavisnosti X_k i X'_k slijedi simetričnost i $|X_k - X''_k| \leq c$.

Iz jake aperiodičnosti koraka X_k, zbog jednakosti (3.2) slijedi da postoji $h \in \mathbb{Z}$ takav da je $\mathbb{P}(X_1 = h) > 0$ i nzd $\left\{n \in \mathbb{Z} : \mathbb{P}(X_1 - h = n, |X_1 - h| \leq c) > 0\right\} = 1$. Zbog

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 - X''_1 = n) &\geq \mathbb{P}(X_1 - X''_1 = n, |X_1 - X'_1| \leq c)\\ &\geq \mathbb{P}(X_1 - h = n, |X_1 - h| \leq c, X'_1 = h)\\ &= \mathbb{P}(X_1 - h = n, |X_1 - h| \leq c)\,\mathbb{P}(X'_1 = h)\end{aligned}$$

je $\left\{n \in \mathbb{Z} : \mathbb{P}(X_1 - h = n, |X_1 - h| \leq c) > 0\right\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{Z} : \mathbb{P}\left(X_1 - X''_1 = n\right) > 0\right\}$ pa je nzd $\left\{n \in \mathbb{Z} : \mathbb{P}(X_1 - X''_1 = n) > 0\right\} = 1$, odnosno R ima aperiodične korake. □

Lema 3.2.4. *Neka je $A \subseteq \mathbb{Z}$ aperiodičan (nzd $A = 1$), aditivan (ako $n, m \in A$ onda $n+m \in A$) i zatvoren za promjenu predznaka (ako je $n \in A$ onda $-n \in A$). Tada je $A = \mathbb{Z}$.*

Dokaz. Neka je $d := \min\{k \in \mathbb{N} : k \in A\}$ i $d\mathbb{Z} := \{d \cdot n : n \in \mathbb{Z}\}$. Tada je $d\mathbb{Z} \subseteq A$ zbog aditivnosti i zatvorenosti na promjenu predznaka. Neka je $b \in A$. Tada postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $0 \leq b - kd < d$. Kako je $b - kd \in A$, a d najmanji prirodan broj u A slijedi $b = kd \in d\mathbb{Z}$. Dakle, $A = d\mathbb{Z}$. Kad bi $d > 1$ imali bi kontradikciju s aperiodičnosti pa je $A = \mathbb{Z}$. □

Lema 3.2.5. *Slučajna šetnja R je ireducibilna i povratna.*

Dokaz. Označimo korake slučajne šetnje R sa X_i. Neka je R^0 definirana sa $R^0_k = R_k - R_0 = X_1 + \cdots + X_k$. Definirajmo

$$A = \left\{n \in \mathbb{Z} : \mathbb{P}\left(R^0_k = n\right) > 0 \text{ za neki } k \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Pokažimo da je $A = \mathbb{Z}$ uz pomoć leme 3.2.4. Neka su $n_1, n_2 \in A$. Zbog

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(R^0_{k+l} = n_1 + n_2\right) &\geq \mathbb{P}\left(R^0_{k+l} = n_1 + n_2, R^0_k = n_1\right) = \mathbb{P}\left(X_{k+1} + \cdots + X_{k+l} = n_2, R^0_k = n_1\right) =\\ &= \mathbb{P}(X_{k+1} + \cdots + X_{k+l} = n_2)\,\mathbb{P}\left(R^0_k = n_1\right) = \mathbb{P}\left(R^0_l = n_2\right)\mathbb{P}\left(R^0_k = n_1\right) > 0\end{aligned}$$

je $n_1 + n_2 \in A$, tj. A je aditivna. Također, ako je $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_k = n) > 0$ onda zbog simetričnosti, $X_1 \stackrel{D}{=} -X_1$ i nezavisnosti koraka po lemi 2.1.1 slijedi

$$-R^0_k = -X_1 - \cdots - X_k \stackrel{D}{=} X_1 + \cdots + X_k = R^0_k$$

pa je

$$\mathbb{P}\left(R^0_k = -n\right) = \mathbb{P}\left(-R^0_k = n\right) = \mathbb{P}\left(R^0_k = n\right) > 0.$$

Kako je $A \supseteq \left\{n \in \mathbb{Z} : \mathbb{P}\left(R_1^0 = X_1 = n\right) > 0\right\}$ zbog aperiodičnosti koraka dobivamo nzd $A = 1$. Dakle, pokazali smo da je $A = \mathbb{Z}$, odnosno da iz svakog stanja dolazimo do svakog drugog u konačno koraka s pozitivnom vjerojatnosti. Dakle, lanac je ireducibilan.

Za povratnost prvo pokažimo

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}_0} |R_k| = \infty\right) = 1. \tag{3.3}$$

Za fiksni $r > 0$ uzmimo n dovoljno velik takav da je $p := \mathbb{P}\left(R_n^0 \in [-2r, 2r]\right) < 1$. Takav n postoji jer iz aperiodičnosti slijedi da postoji $k \neq 0$ t.d. $\mathbb{P}(X_1 = k) > 0$. Zbog nezavisnosti i jednake distribuiranosti koraka slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(R_{2n}^0 \in [-r, r] \,\middle|\, R_n^0 \in [-r, r]\right) &= \frac{\sum_{|l|\le r} \mathbb{P}\left(R_n^0 + X_{n+1} + \cdots + X_{2n} \in [-r, r], R_n^0 = l\right)}{\mathbb{P}\left(R_n^0 \in [-r, r]\right)} \\
&= \frac{\sum_{|l|\le r} \mathbb{P}\left(X_{n+1} + \cdots + X_{2n} \in [-r - l, r - l], R_n^0 = l\right)}{\mathbb{P}\left(R_n^0 \in [-r, r]\right)} \\
&\le \frac{\sum_{|l|\le r} \mathbb{P}\left(X_{n+1} + \cdots + X_{2n} \in [-2r, 2r], R_n^0 = l\right)}{\mathbb{P}\left(R_n^0 \in [-r, r]\right)} \\
&= \mathbb{P}\left(X_{n+1} + \cdots + X_{2n} \in [-2r, 2r]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(R_n^0 \in [-2r, 2r]\right) = p.
\end{aligned}$$

Iskoristimo gornju i analogne nejednakosti za sve $l \in \{1, \cdots, k-1\}$ u

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(R_n^0 \in [-r, r], \ldots, R_{kn}^0 \in [-r, r]\right) = \mathbb{P}\left(R_n^0 \in [-r, r]\right)\mathbb{P}\left(R_{2n}^0 \in [-r, r] \,\middle|\, R_n^0 \in [-r, r]\right)\cdots \\
\cdots \mathbb{P}\left(R_{kn}^0 \in [-r, r] \,\middle|\, R_{(k-1)n}^0 \in [-r, r], \ldots, R_n^0 \in [-r, r]\right) \le p^k.
\end{aligned}$$

Puštanjem $k \to \infty$, zbog neprekidnosti vjerojatnosti na nerastućim događajima za svaki $r > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}_0} \left|R_{kn}^0\right| \le r\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} \left\{\sup_{1\le l\le k} \left|R_{ln}^0\right| \le r\right\}\right) = 0.$$

Tvrdimo da to povlači

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}_0} \left|R_k^0\right| = \infty\right) = 1.$$

U suprotnom bi $\mathbb{P}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}_0} \left|R_k^0\right| < \infty\right) > 0$ povlačilo da postoji $r > 0$ takav da je

$$0 < \mathbb{P}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}_0} \left|R_k^0\right| \le r\right) \le \mathbb{P}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}_0} \left|R_{kn}^0\right| \le r\right) = 0$$

što je kontradikcija. Zbog $|R_k| = \left|R_0 + R_k^0\right| \geq \left|R_k^0\right| - |R_0|$ dobivamo

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}_0} |R_k| = \infty\right) \geq \mathbb{P}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}_0} \left|R_k^0\right| = \infty\right) = 1.$$

Zbog simetrije vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\inf_k R_k = -\infty\right) = \mathbb{P}\left(\inf_k R_k^0 = -\infty\right) = \mathbb{P}\left(\sup_k(-R_k^0) = \infty\right) = \mathbb{P}\left(\sup_k R_k = \infty\right).$$

Kako je $\left\{\sup_{k\geq 0} R_k = \infty\right\} = \left\{\sup_{k\geq 0} R_k - R_n = \infty\right\} \in \sigma\left(X_{n+1}, X_{n+2}\dots\right)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ to je repni događaj. Po Kolmogorovljevom zakonu nula-jedan vjerojatnost tog događaja je 0 ili 1. Zbog

$$\{\sup_k |R_k| = \infty\} \subseteq \{\sup_k R_k = \infty\} \cup \{\inf_k R_k = -\infty\}$$

i (3.3) vjerojatnost tih događaja ne može biti jednaka 0. Zato je

$$\mathbb{P}\left(\sup_k R_k = \infty\right) = \mathbb{P}\left(\inf_k R_k = -\infty\right) = 1.$$

Sada slijedi

$$\mathbb{P}\left(\{R_k < 0 \text{ za konačno } k \text{ ili } R_k > 0 \text{ za konačno } k\}\right) \leq \mathbb{P}\left(\inf_k R_k > -\infty\right) + \mathbb{P}\left(\sup_k R_k < \infty\right) = 0.$$

Zato je

$$\mathbb{P}\left(R_k < 0 \text{ b.m.p. i } R_k > 0 \text{ b.m.p.}\right) = 1.$$

U svakoj promjeni predznaka R mora proći kroz skup $\{0, 1, \dots, c-1\}$ jer su koraci ograničeni sa c. To znači da je $\mathbb{P}(R_k \in \{0, 1, \dots, c-1\} \text{ b.m.p.}) = 1$. Zbog ireducibilnosti su sva stanja povratna ili prolazna. Kad bi bila prolazna, slijedilo bi $\mathbb{P}(R_k = j \text{ b.m.p.}) = 0$ što je kontradikcija. Dakle, R je povratni Markovljev lanac. □

Napomena 3.2.6. *Dio dokaza u kojem pokazujemo da lanac posjećuje stanja* $[0, c\rangle$ *ne ovisi o tome da* R *ima korake s vrijednostima u* $\mathbb{Z}$. *Bitno je samo da je* $\mathbb{P}(X_1 \neq 0) > 0$. *Zato vrijedi sljedeće. Slučajna šetnja* R *na* $\mathbb{R}$ *sa simetričnim, ograničenim (s* ϵ*) koracima i svojstvom* $\mathbb{P}(X_1 \neq 0) > 0$ *posjećuje* $[0, \epsilon\rangle$ *s vjerojatnosti* 1.

Teorem 3.2.7. *Neka je* Y *slučajna šetnja na skupu* $\mathbb{Z}$ *s aperiodičnim koracima. Neka je* Y' *slučajna šetnja nezavisna od* Y *s drugom početnom pozicijom. Tada postoji uspješno sparivanje od* Y *i* Y' *te*

$$\left\|\mathbb{P}_{Y_k} - \mathbb{P}_{Y'_k}\right\|_{tv} \longrightarrow 0, \quad \text{za } k \to \infty.$$

Dokaz. Kako je R ireducibilna i povratna šetnja slijedi da je $\mathbb{P}(K < \infty) = 1$ za

$$K = \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : R_k = 0\} = \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : Y_k = Y''_k\}$$

Neka je za $k \in \mathbb{N}_0$,

$$Y'''_k = \begin{cases} Y''_k, & k < K, \\ Y_k, & k \geq K. \end{cases} \tag{3.4}$$

Kao u teoremu 3.1.1 zbog jakog Markovljevog svojstva vrijedi $Y''' \stackrel{D}{=} Y''$, a od prije znamo $Y'' \stackrel{D}{=} Y'$. Zato je (Y, Y''') sparivanje slučajnih šetnji Y i Y' s vremenom sparivanja K pa

$$\left\|\mathbb{P}_{Y_k} - \mathbb{P}_{Y'_k}\right\|_{tv} \leq \mathbb{P}(K > n) \longrightarrow 0, \quad \text{za } k \to \infty. \qquad \square$$

Napomena 3.2.8. *Slučajnu šetnju Y''' iz dokaza teorema smo mogli zadati sa $Y'''_0 = Y''_0$ i za $k \in \mathbb{N}$,*

$$X'''_k = \begin{cases} X''_k, & k \leq K, \\ X_k, & k > K. \end{cases}$$

Tada se indukcijom lagano provjeri da vrijedi (3.4). Također, Y''' je slučajna šetnja s nezavisnim jednako distribuiranim koracima $\left(X'''_k\right)$.

Sparivanje iz prethodne konstrukcije naziva se *Ornsteinovo sparivanje*.

3.3 Epsilon-sparivanje

U ovom poglavlju pretpostavljamo da slučajna šetnja nema vrijednosti samo u rešetki $d\mathbb{Z}$, gdje je $d > 0$. Napravit ćemo sparivanje u kojem će slučajne šetnje doći ϵ-blizu jedna drugoj i ostati ϵ-blizu, ali se neće spariti. To se neće dogoditi u istom vremenu, već u trenutcima pomaknutima za slučajni vremenski interval. Ovakvo sparivanje će biti dovoljno dobro za dokaz Blackwellovog teorema obnavljanja.

Definicija 3.3.1. *Za slučajnu varijablu X i njezinu funkciju distribucije F kažemo da joj slika nije u rešetki ako za svaki $d > 0$, $\mathbb{P}(X \in d\mathbb{Z}) < 1$. Kažemo da X* može biti blizu *točke x, odnosno da je x* rastuća točka funkcije *F ako je za svaki $\delta > 0$,*

$$\mathbb{P}(X \in [x - \delta, x + \delta]) > 0.$$

Lema 3.3.2. *Slika od X nije u rešetki ako i samo ako ne postoji $d > 0$ takav da je skup rastućih točaka funkcije F sadržan u $d\mathbb{Z}$.*

Dokaz. Pokazat ćemo da je $\mathbb{P}(X \in d\mathbb{Z}) = 1$ ako i samo ako

$$\left\{x : \forall\delta > 0,\ \mathbb{P}(X \in [x-\delta, x+\delta]) > 0\right\} \subseteq d\mathbb{Z}.$$

($\Rightarrow$) Neka je x takav da za svaki $\delta > 0$, $\mathbb{P}(X \in [x-\delta, x+\delta]) > 0$. Pretpostavimo da $x \notin d\mathbb{Z}$. Kako je $d\mathbb{Z}$ diskretan postoji $\delta > 0$ takav da $[x-\delta, x+\delta] \subseteq (d\mathbb{Z})^c$. Tada $0 = \mathbb{P}(X \notin d\mathbb{Z}) \geq \mathbb{P}(X \in [x-\delta, x+\delta]) > 0$ daje kontradikciju.

($\Leftarrow$) Želimo pokazati $\mathbb{P}((d\mathbb{Z})^c) = 0$. Kako je $(d\mathbb{Z})^c = \bigcup_{z\in\mathbb{Z}} \langle dz, d(z+1)\rangle$ bez smanjenja općenitosti dovoljno je pokazati $\mathbb{P}(X \in \langle 0, d\rangle) = 0$. Tada će tvrdnja slijediti sumiranjem prebrojivo mnogo intervala vjerojatnosti 0. Po pretpostavci, za svaki $x \in \langle 0, d\rangle$ postoji $\delta > 0$ dovoljno mali tako da je $\mathbb{P}([x-\delta, x+\delta]) = 0$ i $[x-\delta, x+\delta] \subseteq \langle 0, d\rangle$. Tada je

$$\bigcup_{x\in\langle 0,d\rangle} \langle x-\delta_x, x+\delta_x\rangle = \langle 0, d\rangle\,.$$

Gornja unija je otvoren pokrivač za kompaktan skup $\left[n^{-1}, d-n^{-1}\right]$ pa postoji konačan potpokrivač. Zato postoji D konačan takav da je

$$\mathbb{P}\left(X \in \left[n^{-1}, d-n^{-1}\right]\right) \leq \sum_{x\in D} \mathbb{P}(\langle x-\delta_x, x+\delta_x\rangle) = 0.$$

Konačno

$$\mathbb{P}(X \in \langle 0, d\rangle) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X \in \left[n^{-1}, d-n^{-1}\right]\right) = 0. \qquad \square$$

Neka je $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ zadana sa $S_k = S_0 + X_1 + \cdots + X_k$ slučajna šetnja i S' njena verzija s drugom početnom pozicijom. Neka slike koraka ovih slučajnih šetnji nisu u rešetki. Neka su $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i $(I_i')_{i\in\mathbb{N}}$ nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable s Bernoullijevom distribucijom s parametrom $p = \frac{1}{2}$, nezavisne od šetnji S i S'. Stavimo $K_0 = 0$ i za $n \in \mathbb{N}$ rekurzivno definiramo vremena n-tog povratka u stanje 1 sa

$$K_n = \inf\{k > K_{n-1} : I_k = 1\}$$

Posjete stanju 1 tvore nezavisne i jednako distribuirane cikluse

$$C_n = (X_{K_{n-1}+1}, \ldots, X_{K_n}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

slučajne šetnje, nezavisne od S_0. Naime, $(X_n, I_n)_n$ je niz nezavisnih jednako distribuiranih parova, pa je to Markovljev lanac. Tvrdnja slijedi iz jakog Markovljevog svojstva primijenjenog na taj lanac u vremenu zaustavljanja K_n. Neka su Y_n sume koraka u ciklusu C_n, odnosno

$$Y_n = X_{K_{n-1}+1} + \cdots + X_{K_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Y_n su nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable, nezavisne od S_0. Analogno definiramo K'_n, C'_n i Y'_n. Za fiksni $\epsilon > 0$ definiramo niz ciklusa C''_n sa

$$C''_n = \begin{cases} C'_n, & \left|Y_n - Y'_n\right| \le \epsilon, \\ C_n, & \left|Y_n - Y'_n\right| > \epsilon. \end{cases}$$

Zbog nezavisnosti C_n i C'_n je $(C_n, C'_n) \overset{D}{=} (C'_n, C_n)$ pa za skup B vrijednosti ciklusa dobivamo

$$\mathbb{P}\left(C_n \in B, \left|Y_n - Y'_n\right| \le \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(C'_n \in B, \left|Y_n - Y'_n\right| \le \epsilon\right)$$

što iskoristimo u

$$\mathbb{P}\left(C''_n \in B\right) = \mathbb{P}\left(C'_n \in B, \left|Y_n - Y'_n\right| \le \epsilon\right) + \mathbb{P}\left(C_n \in B, \left|Y_n - Y'_n\right| > \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(C_n \in B\right).$$

Zato je $C''_n \overset{D}{=} C_n$ za $n \in \mathbb{N}$. Dakle, C''_n, $n \in \mathbb{N}$ su nezavisni jednako distribuirani ciklusi. Također, neka je Y''_n suma u ciklusu C''_n, odnosno

$$Y''_n = \begin{cases} Y'_n, & \left|Y_n - Y'_n\right| \le \epsilon, \\ Y_n, & \left|Y_n - Y'_n\right| > \epsilon. \end{cases}$$

Neka je $R = (R_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ slučajna šetnja s početnom pozicijom $S_0 - S'_0$ i koracima $Y_n - Y''_n$. Koraci su nezavisni i jednako distribuirani i nezavisni od početne pozicije što slijedi iz istih svojstava nizova $(Y_n)_n$ i $(Y'_n)_n$. Prije dokaza svojstava šetnje R navodimo lemu potrebnu za dokaz.

Lema 3.3.3. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ neprazan skup takav da za svaki $d > 0$, $A \not\subseteq d\mathbb{Z}$. Neka je A aditivan, zatvoren na promjenu predznaka i zatvoren (ako $x_k \in A$ i $x_k \to x$ onda $x \in A$) skup. Tada je $A = \mathbb{R}$.*

Dokaz. Skup $A \cap \langle 0, \infty\rangle$ je neprazan jer bi u suprotnom zbog zatvorenosti na promjenu predznaka bilo $A = \{0\} \subseteq d\mathbb{Z}$. Stavimo $d = \inf(A \cap [0, \infty\rangle)$. Zbog zatvorenosti od A, $d \in A$ pa zbog aditivnosti i zatvorenosti na promjenu predznaka je $d\mathbb{Z} \subseteq A$. Postoji $x \in A$ takav da $x \notin d\mathbb{Z}$. Kad bi d bio strogo pozitivan, postojao bi $k \in \mathbb{N}$ takav da je $0 < x - kd < d$. No, kako je $x - kd \in A$ to je kontradikcija s definicijom od d. Zato je $d = 0$. Neka je $d_k \in A \cap \langle 0, \infty\rangle$ takav da $d_k \searrow d = 0$. Neka je $x \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Tada postoji n_k takav da je $n_k d_k \le x < n_k d_k + d_k$. Tada $n_k d_k \to x$, pa zbog $n_k d_k \in A$ i zatvorenosti slijedi $x \in A$. Dakle, $A = \mathbb{R}$. □

Lema 3.3.4. *Koraci slučajne šetnje R su simetrični, ograničeni sa ϵ i*

$$\mathbb{P}(Y_1 - Y''_1 \neq 0) > 0.$$

Dokaz. Simetričnost i ograničenost su očite. Pokažimo zadnju tvrdnju. Neka je

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : \forall \delta > 0,\ \mathbb{P}\left(Y_1 - Y_1' \in [x-\delta, x+\delta]\right) > 0\} \\ &= \{x : Y_1 - Y_1' \text{ može biti blizu točki } x\}. \end{aligned}$$

Ako pokažemo da je $A = \mathbb{R}$, onda $Y_1 - Y_1'$ može biti blizu točke $\epsilon/2$ pa i $Y_1 - Y_1''$ može biti blizu $\epsilon/2$. Zato slijedi $\mathbb{P}(Y_1 - Y_1'' \neq 0) > 0$. Provjerom uvjeta leme 3.3.3 ćemo pokazati $A = \mathbb{R}$.

A je neprazan. Pretpostavimo suprotno. Tada otvoren pokrivač $\bigcup_{x\in[k,k+1]} \langle x-\delta_x, x+\delta_x\rangle$ kompaktnog skupa $[k, k+1]$ ima konačan potpokrivač pa je zbog subaditivnosti $\mathbb{P}(X \in [k, k+1]) \leq \sum_{x\in D} \mathbb{P}(X \in \langle x-\delta_x, x+\delta_x\rangle) = 0$, gdje je D konačan. To povlači $1 = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(X \in [k, k+1\rangle) = 0$ što je kontradikcija.

Pokažimo $A \nsubseteq d\mathbb{Z}$. Pretpostavimo $A \subseteq d\mathbb{Z}$. Primijetimo da za $\delta > 0$ vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_1 - Y_1' \in [x-\delta, x+\delta]) &\geq \mathbb{P}(Y_1 - Y_1' \in [x-\delta, x+\delta], K_1 = 2, K_1' = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_1 + X_2 - X_1' \in [x-\delta, x+\delta])\mathbb{P}(K_1 = 2)\mathbb{P}(K_1' = 1) \\ &= 8^{-1}\mathbb{P}(X_1 + X_2 - X_1' \in [x-\delta, x+\delta]) \\ &\geq 8^{-1}\mathbb{P}(X_1 \in [x-\delta/3, x+\delta/3), \end{aligned}$$

gdje smo u drugom koraku iskoristili nezavisnost nizova X, X' od nizova K_1 i K_1' koji ovise o I i I', u trećem koraku smo izračunali $\mathbb{P}(K_1 = 2) = \mathbb{P}(I_1 = 0, I_2 = 1) = 1/4$ i $\mathbb{P}(K_1' = 1) = 1/2$, a u zadnjem koraku iskoristili nezavisnost i jednaku distribuiranost varijabli X_1, X_2 i X_1'. Zato je

$$\left\{x : \forall \delta > 0,\ \mathbb{P}\left(X_1 \in [x-\delta, x+\delta]\right) > 0\right\} \subseteq A \subseteq d\mathbb{Z}$$

što je kontradikcija s činjenicom da korak X_1 nema sliku u rešetki po lemi 3.3.2.

Pokažimo aditivnost. Neka su $x, y \in A$. Zbog

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Y_1 - Y_1' \in [x-\delta, x+\delta]) = \\ &= \sum_{k,k'} \mathbb{P}\left(X_1 + \cdots + X_k - X_1' - \cdots - X_{k'}' \in [x-\delta, x+\delta]\right) \underbrace{\mathbb{P}(K_1 = k)\mathbb{P}(K_1' = k')}_{>0} \end{aligned}$$

$Y_1 - Y_1'$ može biti blizu x ako i samo ako postoje k, k' takvi da $X_1 + \cdots + X_k - X_1' - \cdots - X_{k'}'$ može biti blizu x. Sada je $x + y \in A$ zbog

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_{k+n} - X_1' - \cdots - X_{k'+n'}' \in [x+y-\delta, x+y+\delta]) \geq \\ &\geq \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_k - X_1' - \cdots - X_{k'}' \in [x-\delta/2, x+\delta/2])\cdot \\ &\qquad \cdot \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n - X_1' - \cdots - X_{n'}' \in [y-\delta/2, y+\delta/2]). \end{aligned}$$

Nadalje, za $x \in A$ vrijedi

$$\mathbb{P}(Y_1 - Y_1' \in [-x-\delta, -x+\delta]) = \mathbb{P}(Y_1' - Y_1 \in [-x-\delta, -x+\delta]) = \mathbb{P}(Y_1 - Y_1' \in [x-\delta, x+\delta]) > 0$$

pa je $-x \in A$.

Na kraju pokažimo zatvorenost. Neka je $x_k \in A$ t.d. $x_k \to x$. Tada za $\delta > 0$ i x_k t.d. $|x_k - x| < \delta/2$ vrijedi

$$\mathbb{P}(Y_1 - Y_1' \in [x - \delta, x + \delta]) \geq \mathbb{P}(Y_1 - Y_1' \in [x_k - \delta/2, x_k + \delta/2]) > 0,$$

pa zaključujemo $x \in A$. $\square$

Dakle, R je šetnja sa simetričnim, ograničenim koracima i koracima koji su različiti od 0 s pozitivnom vjerojatnosti pa po napomeni 3.2.6 slučajna šetnja R posjećuje $[0, \epsilon\rangle$ s vjerojatnosti 1. Za

$$M := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : R_n \in [0, \epsilon\rangle\}$$

je $\mathbb{P}(M < \infty) = 1$.

Definiramo novi niz ciklusa C''' sa

$$C_n''' := \begin{cases} C_n'', & n \leq M, \\ C_n, & n > M \end{cases} = \begin{cases} C_n', & \left|Y_n - Y_n'\right| \leq \epsilon, n \leq M, \\ C_n, & \text{inače} \end{cases}$$

i sume koraka sa

$$Y_n''' := \begin{cases} Y_n'', & n \leq M, \\ Y_n, & n > M. \end{cases}$$

C_n''' su nezavisne i jednako distribuirane i nezavisne od S_0'. Naime, znamo da su (C_n, C_n'') nezavisni i jednako distribuirani te nezavisni od (S_0, S_0'). Zato je niz

$$((S_0, S_0'), (C_1, C_1''), (C_2, C_2''), (C_3, C_3'') \dots)$$

Markovljev lanac. Događaj $\{M \leq m\}$ ovisi o S_0, S_0', $Y_1, Y_1'', \dots, Y_n, Y_n''$, odnosno o S_0, S_0', $C_1, C_1'', \dots, C_n, C_n''$ pa je M vrijeme zaustavljanja. Zato su $\left(C_{M+n}, C_{M+n}''\right)$, $n \geq \mathbb{N}_0$ nezavisni od $S_0', C_1'', \dots, C_M''$ po jakom Markovljevom svojstvu i međusobno nezavisni i jednako distribuirani. Dakle, $C_n''' \overset{D}{=} C_1$ i nezavisni su.

Za $k \in \mathbb{N}$ stavimo X_k''', I_k''' i K_k''' tako da je

$$\left(X_{K_{n-1}'''+1}''', \dots, X_{K_n'''}'''\right) = C_n''', \quad n \in \mathbb{N}.$$

Kako je ciklus C_k''' jednak C_k ili C_k', X_k''' je jednak nekom iz $(X_n)_n$ ili $(X_n')_n$, I_k''' je jednak nekom iz (I_i) ili (I_i'), a K_k''' je k-ta jedinica u (I_k'''). Slijedi da K_k''' ovisi o (K_k) i (K_k'). Preciznije, K_1''' je jednak K_1 ili K_1', a za $n \in \mathbb{N}$, K_n''' je jednak $K_{n-1}''' + K_n - K_{n-1}$ ili $K_{n-1}''' + K_n' - K_{n-1}'$.

Definiramo slučajnu šetnju S''' s početnom pozicijom S_0' i koracima (X_k'''). Tada je S''' kopija od S' odnosno $S''' \overset{D}{=} S'$. Naime, početne pozicije su im jednake, a koraci su dobiveni iz nezavisnih i jednako distribuiranih ciklusa (C_n''') i (C_n') koji su još nezavisni od S_0'.

Teorem 3.3.5. *Za proizvoljni $\epsilon > 0$, par (S, S''') je sparivanje slučajnih šetnji S i S' s različitim početnim pozicijama i koracima čije slike nisu u rešetki. Nadalje, K_M i K_M''' su g.s.-konačni i*

$$S_{K_M+k} - S'''_{K_M'''+k} = R_M \in [0, \epsilon\rangle\,, \quad \text{za } k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.5}$$

Dokaz. (S, S''') je sparivanje od S i S' jer je $S''' \stackrel{D}{=} S'$.

Za svaki $m \in \mathbb{N}_0$ je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(K_m < \infty) &= \mathbb{P}(K_m < \infty, \dots, K_1 < \infty) \\
&= \mathbb{P}\left(K_m < \infty \,|\, K_{m-1} < \infty\right) \cdots \mathbb{P}(K_1 < \infty) \\
&= (\mathbb{P}(K_1 < \infty))^m = 1,
\end{aligned}$$

gdje smo u drugom koraku iskoristili jako Markovljevo svojstvo Markovljevog lanca (I_i) na vremena zaustavljanja K_n. Zbog $\mathbb{P}(M < \infty) = 1$ i gornje jednakosti vrijedi

$$\mathbb{P}(K_M < \infty) = \mathbb{P}(K_M < \infty, M < \infty) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(K_m < \infty, M = m) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(M = m) = 1.$$

Analogno vrijedi i za K_M''' jer je (I_k''') niz nezavisnih jednako distribuiranih Bernoullijevih slučajnih varijabli. Naime, (I_k''') je nastao kombiniranjem nezavisnih i jednako distribuiranih nizova (I_i) i (I_i') ovisno o tome kakav je C_n'''.

Pokažimo jednakost (3.5). Za $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
S_{K_M+k} &= S_0 + (X_1 + \cdots + X_{K_1}) + \cdots + (X_{K_{M-1}+1} + \cdots + X_{K_M}) + X_{K_M+1} + \cdots + X_{K_M+k} \\
&= S_0 + Y_1 + \cdots + Y_M + X_{K_M+1} + \cdots + X_{K_M+k}
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
S'''_{K_M'''+k} &= S_0' + \left(X_1''' + \cdots + X'''_{K_1'''}\right) + \cdots + \left(X'''_{K_{M-1}'''+1} + \cdots + X'''_{K_M'''}\right) + X'''_{K_M'''+1} + \cdots + X'''_{K_M'''+k} \\
&= S_0' + Y_1''' + \cdots + Y_M''' + X'''_{K_M'''+1} + \cdots + X'''_{K_M'''+k} \\
&= S_0' + Y_1'' + \cdots + Y_M'' + X'''_{K_M'''+1} + \cdots + X'''_{K_M'''+k}.
\end{aligned}$$

Primijetimo da je X_{K_M+1} prvi član ciklusa C_{M+1}, a $X'''_{K_M'''+1}$ prvi član ciklusa $C'''_{M+1} = C_{M+1}$. Znači, $X_{K_M+1} = X'''_{K_M'''+1}$. To vrijedi i za ostale X-eve u gornjim jednakostima. Naime, u nizu S''' nakon M-tog ciklusa, redaju se isti ciklusi kao u S jer je $(C'''_{M+1}, C'''_{M+2}, \dots) = (C_{M+1}, C_{M+2}, \dots)$. Dakle, za svaki $l \in \{1, \dots, k\}$ je $X_{K_M+l} = X'''_{K_M'''+l}$. Zato je

$$S_{K_M+k} - S'''_{K_M'''+k} = S_0 - S_0' + \sum_{l=1}^{M} (Y_l - Y_l'') = R_M \in [0, \epsilon\rangle\,. \qquad \square$$

3.4 Blackwellov teorem obnavljanja

Neka su zadane nenegativna slučajna varijabla S_0 nezavisna od niza nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Neka je F funkcija distribucije od X_1, a G funkcija distribucije od S_0. Pretpostavljamo da je $\mathbb{P}(X_1 < 0) = 0$ i $\mathbb{P}(X_1 = 0) < 1$. Stavimo $m := \mathbb{E}(X_1)$. Neka je $S = (S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ proces obnavljanja zadan sa

$$S_k = S_0 + X_1 + \cdots + X_k, \quad z \in \mathbb{N}_0.$$

Tada je S poseban slučaj slučajne šetnje na $\mathbb{R}_+$ s nenegativnom početnom pozicijom i nenegativnim i netrivijalnim koracima. Prisjetimo se da S_n nazivamo *vremenima obnavljanja* i ona predstavljaju trenutke pojavljivanja nekog događaja. *Brojeći proces* $N = (N_t)_{t\geq 0}$ je definiran sa

$$N_t = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}} = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n > t\} = \#\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n \leq t\}.$$

Neka je $N(A)$ broj obnavljanja u skupu A. Za poluotvoreni interval vrijedi

$$N(t, t+h] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{t < S_n \leq t+h\}} = N_{t+h} - N_t.$$

Proces obnavljanja i brojeći proces povezuju relacije

$$\{N_t \leq n\} = \{S_n > t\}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.6}$$

$$\{N_t = n\} = \{S_{n-1} \leq t < S_n\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Lema 3.4.1. *Za svaki $t \geq 0$ je $\mathbb{E}(N_t) < \infty$ i $N_t < \infty$ $\mathbb{P}$-g.s.*

Dokaz. Neka je $x > 0$ takav da je $F(x) < 1$. Takav x postoji jer je $F(0) < 1$. Definiramo $L_0 = 0$ i za $n \in \mathbb{N}$ rekurzivno

$$L_n = \inf\{k > L_{n-1} : X_k > x\}.$$

Odmah vidimo da je $L_n = \inf\left\{k \in \mathbb{N}_0 : \mathbb{1}_{\{X_1 > x\}} + \cdots + \mathbb{1}_{\{X_k > x\}} \geq n\right\}$. Zbog jednakosti

$$\mathbb{P}(L_1 = n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \ldots, X_{n-1} \leq x, X_n > x) = F(x)^{n-1}(1 - F(x))$$

i jakog Markovljevog svojstva na nizu nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli $(X_n)_n$, slučajne varijable

$$L_n - L_{n-1}, L_{n-1} - L_{n-2}, \ldots, L_2 - L_1, L_1$$

su nezavisne i jednako distribuirane s geometrijskom distribucijom s parametrom $1 - F(x)$. Tada je $L_n = (L_n - L_{n-1}) + \ldots + (L_2 - L_1) + L_1$ pa je $\mathbb{E}(L_n) = n(1 - F(x))^{-1}$. Iz

$$S_n = S_0 + X_1 + \cdots + X_n \geq x \left[\mathbb{1}_{\{X_1 > x\}} + \cdots + \mathbb{1}_{\{X_n > x\}}\right]$$

slijedi

$$\begin{aligned} N_t &= \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n > t\} \leq \inf\left\{n \in \mathbb{N}_0 : \mathbb{1}_{\{X_1 > x\}} + \cdots + \mathbb{1}_{\{X_n > x\}} > t/x\right\} \\ &= \inf\left\{n \in \mathbb{N}_0 : \mathbb{1}_{\{X_1 > x\}} + \cdots + \mathbb{1}_{\{X_n > x\}} \geq \lfloor t/x \rfloor + 1\right\} = L_{\lfloor t/x \rfloor + 1}. \end{aligned}$$

Zato je $\mathbb{E}(N_t) \leq \mathbb{E}(L_{\lfloor t/x \rfloor + 1}) < \infty$ pa to povlači drugu tvrdnju. □

Procesu obnavljanja S pridružujemo čisti proces obnavljanja $S^0 = (S_k - S_0)_{k \in \mathbb{N}_0}$. Za pripadajući brojeći proces $N^0 = (N_t^0)$ vrijedi

$$N_t^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n^0 \leq t\}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_1 + \cdots + X_n \leq t\}}$$

i

$$N_t = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n^0 \leq t - S_0\}} = N_{t-S_0}^0.$$

Lema 3.4.2. *Za sve $t, h \geq 0$ vrijedi*

$$N(t, t+h] \overset{D}{\leq} N_h^0.$$

Dokaz. Kako $\{N_t = n\}$ ovisi samo o $S_0, \ldots, S_n$, N_t je vrijeme zaustavljanja. Zato su $X_{N_t+1}, X_{N_t+2}, \ldots$ nezavisni jednako distribuirani s distribucijom X_1. Jednaku distribuiranost od $(X_{N_t+1}, \ldots, X_{N_t+k})$ i $(X_1, \ldots, X_k)$ iskoristimo u posljednjoj jednakosti u

$$\begin{aligned} N[S_{N_t}, S_{N_t} + h] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\left\{S_{N_t} \leq S_k \leq S_{N_t} + h\right\}} = \sum_{n=N_t}^{\infty} \mathbb{1}_{\left\{S_{N_t} \leq S_k \leq S_{N_t} + h\right\}} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\left\{S_{N_t} \leq S_{N_t} + X_{N_t+1} + \cdots + X_{N_t+k} \leq S_{N_t} + h\right\}} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\left\{X_{N_t+1} + \cdots + X_{N_t+k} \leq h\right\}} \overset{D}{=} N_h^0. \end{aligned}$$

Nadalje, zbog $\{N_t \leq n\} = \{S_n > t\}$ vrijedi $t < S_{N_t}$ pa je

$$N(t, t+h] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{t < S_n \leq t+h\}} = \sum_{n=N_t}^{\infty} \mathbb{1}_{\{t < S_n \leq t+h\}} \leq \sum_{n=N_t}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_{N_t} < S_n \leq S_{N_t} + h\}} = N[S_{N_t}, S_{N_t} + h].$$

Tvrdnja slijedi iz

$$\mathbb{P}\left(N(t, t+h] \leq x\right) \geq \mathbb{P}\left(N[S_{N_t}, S_{N_t} + h] \leq x\right) = \mathbb{P}\left(N_h^0 \leq x\right).$$ □

Sada možemo izreći glavni razultat.

Teorem 3.4.3 (Blackwellov teorem obnavljanja)**.** *Neka je S proces obnavljanja i neka X_1 nema sliku u rešetki. Neka je $m = \mathbb{E}(X_1) \in \langle 0, \infty]$ Tada za sve $h > 0$ vrijedi*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left(N(t, t+h]\right) = \frac{h}{m}.$$

Teorem ćemo dokazati metodom sparivanja u više koraka. Ideja dokaza je definirati novi proces obnavljanja S' s istim koracima i različitom početnom pozicijom S'_0 za koji će vrijediti

$$\mathbb{E}\left(N(t, t+h]\right) = \frac{h}{m}, \quad \text{za svaki } t > 0.$$

Za ta dva procesa obnavljanja koristit ćemo epsilon-sparivanje. Pokazat će se da je to dovoljno za dokaz.

Propozicija 3.4.4. *Za proces brojenja N^0 čistog procesa obnavljanja vrijedi*

$$\int_0^\infty (1 - F(x))\, \mathbb{E}(N^0_{t-x})\, dx = t, \quad 0 \le t < \infty.$$

Dokaz. Primijetimo da je po lemi 2.1.1, $S^0_{n+1} - X_1 = X_2 + \cdots + X_{n+1} \overset{D}{=} S^0_n$ pa je

$$N^0_{t-x} = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{1}_{\{S^0_n \le t-x\}} \overset{D}{=} \sum_{n=0}^\infty \mathbb{1}_{\{S^0_{n+1} - X_1 \le t-x\}} = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}_{\{x + S^0_n - X_1 \le t\}}$$

što ovisi o $X_2, \dots, X_n$ i nezavisno je od X_1. Zato je

$$(1 - F(x))\, \mathbb{E}(N^0_{t-x}) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X_1 > x\}} \sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}_{\{x + S^0_n - X_1 \le t\}}\right) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X_1 > x\}} \mathbb{1}_{\{x + S^0_n - X_1 \le t\}}\right),$$

gdje smo u zadnjem koraku iskoristili Beppo-Levijev teorem. Integriranjem gornje jednakosti, ponovnom primjenom Beppo-Levija i zamjenom integrala i očekivanja pomoću Fubinijevog teorema za nenegativnu funkciju slijedi

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (1 - F(x))\, \mathbb{E}(N^0_{t-x})\, dx &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X_1 > x\}} \mathbb{1}_{\{x + S^0_n - X_1 \le t\}}\right) dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{X_1 > x\}} \mathbb{1}_{\{x + S^0_n - X_1 \le t\}}\, dx\right). \end{aligned}$$

U gornjem izrazu se u očekivanju nalazi slučajna varijabla. Označimo ju sa W. Za svaki $\omega \in \Omega$ računamo

$$\begin{aligned} W(\omega) &= \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{X_1>x\}}(\omega)\mathbb{1}_{\{x+S_n^0-X_1\le t\}}(\omega)\,dx = \int \mathbb{1}_{[0,X_1(\omega)\rangle}(x)\mathbb{1}_{\langle-\infty,\,t-S_n^0(\omega)+X_1(\omega)]}(x)\,dx \\ &= \int \mathbb{1}_{[S_n^0(\omega)-X_1(\omega),\,S_n^0(\omega)\rangle}(y)\mathbb{1}_{\langle-\infty,t]}(y)\,dy = \int\limits_{(S_n^0(\omega)-X_1(\omega))\wedge t}^{S_n^0(\omega)\wedge t} dy \\ &= S_n^0(\omega)\wedge t - \left(S_n^0(\omega)-X_1(\omega)\right)\wedge t, \end{aligned}$$

gdje smo u trećoj jednakosti napravili zamjenu varijable $y = x + S_n^0(\omega) - X_1(\omega)$, a za četvrti korak se lako provjeri jednakost za sva tri moguća slučaja odnosa točke t i poluotvorenog intervala $\left[S_n^0(\omega)-X_1(\omega),\,S_n^0(\omega)\right\rangle$. Nastavljamo račun

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (1-F(x))\,\mathbb{E}(N_{t-x}^0)\,dx &= \sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}\left(S_n^0\wedge t\right) - \mathbb{E}\left(\left(S_n^0 - X_1\right)\wedge t\right) \\ = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}\left(S_n^0\wedge t\right) - \mathbb{E}\left(S_{n-1}^0\wedge t\right) &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(S_n^0\wedge t\right) - \mathbb{E}\left(S_0^0\wedge t\right) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(S_n^0\wedge t\right), \end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti iskoristili jednaku distribuiranost $S_n^0 - X_1$ i S_{n-1}^0, a u zadnjoj $S_0^0 \wedge t = 0$. Preostaje pokazati $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(S_n^0\wedge t\right) = t$. Koristeći (3.6) za čisti proces obnavljanja dobivamo

$$\left\{N_t^0 < \infty\right\} = \bigcup_n \left\{N_t^0 \le n\right\} = \bigcup_n \left\{S_n^0 > t\right\}$$

što zajedno s lemom 3.4.1 daje $\mathbb{P}\left(\bigcup_n\left\{S_n^0 > t\right\}\right) = 1$. Dakle, $\lim_{n\to\infty} S_n^0 \wedge t = \lim_{n\to\infty} t = t$, $\mathbb{P}$-g.s. Po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi tvrdnja. □

Primijetimo da zbog toga što postoji $x > 0$ takav da je $F(x) < 1$ slijedi $X_1 \ge x\mathbb{1}_{\{X_1>x\}}$. Zato je $m = \mathbb{E}(X_1) \ge x\mathbb{P}(X_1 > x) > 0$. Za $0 < m < \infty$ definiramo funkciju distribucije

$$G_\infty(x) = \begin{cases} \mathbb{E}\left(X_1\wedge x\right)/m, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Lako se provjeri da je G_∞ zaista funkcija distribucije koristeći Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji.

Korolar 3.4.5. *Neka je $m < \infty$. Tada G_∞ ima funkciju gustoće $(1-F(x))/m$. Za proces obnavljanja kojem početna pozicija ima razdiobu G_∞ vrijedi*

$$\mathbb{E}\left(N(t,t+h]\right) = \frac{h}{m}, \quad \textit{za sve } t,h > 0.$$

Dokaz. Neka je $x \geq 0$. Tvrdnja za gustoću slijedi iz

$$\mathbb{E}(X_1 \wedge x) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X_1 \wedge x > y)\, dy = \int_0^x (1 - F(y))\, dy. \tag{3.8}$$

Nadalje,

$$\mathbb{E}(N_t) = \mathbb{E}\Big(N^0_{t-S_0}\Big) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(N^0_{t-S_0} \,\middle|\, S_0\right)\right] = \frac{1}{m}\int_0^\infty \mathbb{E}\left(N^0_{t-x}\right)(1 - F(x))\, dx = \frac{t}{m},$$

gdje smo u trećem koraku uvjetovali na neprekidnu varijablu S_0 čija je funkcija distribucije jednaka G_∞, a u četvrtom smo iskoristili tvrdnju propozicije 3.4.4. Zato je $\mathbb{E}(N(t, t+h]) = N_{t+h} - N_t = h/m$. □

Za $0 < a < \infty$ definiramo funkciju distribucije

$$G_a(x) = \begin{cases} \mathbb{E}(X_1 \wedge x)/\mathbb{E}(X_1 \wedge a), & 0 \leq x \leq a, \\ 1, & a \leq x < \infty, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Ponovno smo dobro definirali funkciju distribucije. Naime, za $x > 0$ takav da je $F(x) < 1$ vrijedi $\mathbb{E}(X_1 \wedge a) \geq \mathbb{E}\left((x \wedge a)\mathbb{1}_{\{X_1 > x\}}\right) > 0$. Lako se provjere svojstva funkcije distribucije.

Korolar 3.4.6. *Za $0 < a < \infty$, G_a ima funkciju distribucije*

$$f(x) = \begin{cases} (1 - F(x))/\mathbb{E}(X_1 \wedge a), & 0 \leq x \leq a, \\ 0, & \textit{inače}. \end{cases}$$

Za proces obnavljanja kojem početna pozicija ima razdiobu G_a vrijedi

$$\mathbb{E}(N(t, t+h]) \leq \frac{h}{\mathbb{E}(X_1 \wedge a)}, \quad \textit{za sve } t, h > 0.$$

Dokaz. Tvrdnja za gustoću slijedi iz jednakosti (3.8). Za drugu tvrdnju, sličnom argumentacijom kao u prethodnom korolaru dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N(t, t+h]) &= \mathbb{E}\left(N^0_{t+h-S_0} - N^0_{t-S_0}\right) = \frac{1}{\mathbb{E}(X_1 \wedge a)}\int_0^a \mathbb{E}(N_{t+h-x} - N_{t-x})(1 - F(x))\, dx \\ &\leq \frac{1}{\mathbb{E}(X_1 \wedge a)}\int_0^\infty \mathbb{E}(N_{t+h-x} - N_{t-x})(1 - F(x))\, dx = \frac{h}{\mathbb{E}(X_1 \wedge a)}, \end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem koraku iskoristili tvrdnju propozicije 3.4.4. □

Sljedeća propozicija je ključan korak u dokazu teorema. Propozicija se bazira na epsilon-sparivanju iz teorema 3.3.5.

Propozicija 3.4.7. *Neka su S i S' procesi obnavljanja s različitim početnim pozicijama i istim koracima koji nemaju sliku u rešetki. Neka je (S, S''') pripadajuće epsilon-sparivanje iz teorema 3.3.5. Tada za pripadne brojeće procese, konstante $t, h > 0$ i $\epsilon < h$ vrijedi*

$$\mathbb{E}\left(N'(t, t+h-\epsilon]\right) - \mathbb{E}\left(N'''(t, t+h]\,\mathbb{1}_{\{T>t\}}\right) \leq \mathbb{E}\left(N(t, t+h]\right), \tag{3.9}$$

$$\mathbb{E}\left(N(t, t+h]\right) \leq \mathbb{E}\left(N'(t-\epsilon, t+h]\right) + \mathbb{E}\left(N(t, t+h]\,\mathbb{1}_{\{T>t\}}\right). \tag{3.10}$$

Dokaz. Neka je $T = S_{K_M}$. Iz (3.5) slijedi $S'''_{K_M'''} = T - R_M$. Za $t \geq T$ vrijedi

$$\{n \in \mathbb{N}_0 : t - R_M < S_n''' \leq t + h - R_M\} = \left\{k \in \mathbb{N}_0 : t - R_M < S'''_{K_M'''+k} \leq t + h - R_M\right\}$$

$$\overset{(3.5)}{=} \{k \in \mathbb{N}_0 : t < S_{K_M+k} \leq t + h\} = \{n \in \mathbb{N}_0 : t < S_n \leq t + h\}$$

gdje smo u prvoj jednakosti iskoristili $S_n''' > t - R_M \geq T - R_M = S'''_{K_M'''}$, u drugoj (3.5), a u trećoj nejednakost $S_n > t \geq T = S_{K_M}$. Zato je

$$N'''(t - R_M, t + h - R_M] = N(t, t+h], \quad \text{za sve } t \geq T. \tag{3.11}$$

Zbog $0 \leq R_M < \epsilon$ i jednakosti (3.11) vrijedi

$$N'''(t, t+h-\epsilon]\,\mathbb{1}_{\{T\leq t\}} \leq N'''(t - R_M, t+h-R_M]\,\mathbb{1}_{\{T\leq t\}} = N(t, t+h]\,\mathbb{1}_{\{T\leq t\}}.$$

Koristeći dobiveno i nepozitivnost izraza u zagradi za treću nejednakost slijedi

$$\begin{aligned} &N'''(t, t+h-\epsilon] - N'''(t, t+h]\,\mathbb{1}_{\{T>t\}} \leq \\ &\leq N'''(t, t+h-\epsilon]\,\mathbb{1}_{\{T\leq t\}} + \left[N'''(t, t+h-\epsilon]\,\mathbb{1}_{\{T>t\}} - N'''(t, t+h]\,\mathbb{1}_{\{T>t\}}\right] \\ &\leq N(t, t+h]\,\mathbb{1}_{\{T\leq t\}} \leq N(t, t+h]. \end{aligned}$$

Tvrdnja (3.9) slijedi uzimanjem očekivanja u prethodnoj jednakosti uz činjenicu da je $N'''(a, b] \overset{D}{=} N'(a, b]$ što slijedi iz jednake distribuiranosti pripadnih procesa obnavljanja S''' i S'.

Pokažimo i drugu tvrdnju. Ponovno koristimo $0 \leq R_M < \epsilon$ i jednakost (3.11) pa dobivamo

$$N(t, t+h]\,\mathbb{1}_{\{T\leq t\}} = N'''(t - R_M, t+h-R_M]\,\mathbb{1}_{\{T\leq t\}} \leq N'''(t-\epsilon, t+h].$$

Dodavanjem $N(t, t+h]\,\mathbb{1}_{\{T>t\}}$ u nejednakost slijedi

$$N(t, t+h] \leq N'''(t-\epsilon, t+h] + N(t, t+h]\,\mathbb{1}_{\{T>t\}}.$$

Uzimanjem očekivanja uz jednaku distribuiranost N''' i N' dobivamo (3.10). □

Sada možemo završiti dokaz. Odvajamo slučajeve $m < \infty$ i $m = \infty$.

Dokaz teorema 3.4.3 za $m < \infty$. Neka je S proces obnavljanja s koracima koji nemaju sliku u rešetki. Neka je S' verzija od S s početnom razdiobom $G' = G_\infty$. Iz korolara 3.4.5 znamo $\mathbb{E}(N'(t, t+h]) = h/m$ za sve $t, h > 0$. Nejednakosti (3.9) i (3.10) prelaze u

$$\frac{h-\epsilon}{m} - \mathbb{E}\left(N'''(t,t+h]\,\mathbb{1}_{\{T>t\}}\right) \leq \mathbb{E}\left(N(t,t+h]\right) \leq \frac{h+\epsilon}{m} + \mathbb{E}\left(N(t,t+h]\,\mathbb{1}_{\{T>t\}}\right).$$

Oduzimanjem h/m u prethodnoj jednakosti i dodavanjem članova do simetrične ograde dobivamo

$$\left|\mathbb{E}\left(N(t,t+h]\right) - \frac{h}{m}\right| \leq \frac{\epsilon}{m} + \mathbb{E}\left(N(t,t+h]\,\mathbb{1}_{\{T>t\}}\right) + \mathbb{E}\left(N'''(t,t+h]\,\mathbb{1}_{\{T>t\}}\right).$$

Zbog $T < \infty$ $\mathbb{P}$-g.s. vrijedi

$$\begin{aligned} N(t,t+h]\,\mathbb{1}_{\{T>t\}} &\longrightarrow 0, \quad t \to \infty \\ N'''(t,t+h]\,\mathbb{1}_{\{T>t\}} &\longrightarrow 0, \quad t \to \infty \end{aligned}$$

Prema lemi 3.4.2, slučajne varijable $N(t,t+h]\,\mathbb{1}_{\{T>t\}}$ i $N'''(t,t+h]\,\mathbb{1}_{\{T>t\}}$ su stohastički dominirane sa N_h^0 što je po lemi 3.4.1 integrabilna slučajna varijabla. Po teoremu o dominiranoj konvergenciji 1.5.9 slijedi

$$\limsup_{t\to\infty} \left|\mathbb{E}\left(N(t,t+h]\right) - \frac{h}{m}\right| \leq \frac{\epsilon}{m},$$

pa puštanjem $\epsilon \to 0$ slijedi tvrdnja. □

Dokaz teorema 3.4.3 za $m = \infty$. Neka je S ponovno proces obnavljanja s koracima koji nemaju sliku u rešetki. Neka je S' verzija od S s početnom razdiobom $G' = G_a$. Prema korolaru 3.4.6 je $\mathbb{E}(N'(t-\epsilon, t+h]) \leq (h+\epsilon)/\mathbb{E}(X_1 \wedge a)$ što iskoristimo u nejednakosti (3.10) pa dobivamo

$$\mathbb{E}\left(N(t,t+h]\right) \leq \frac{h+\epsilon}{\mathbb{E}(X_1 \wedge a)} + \mathbb{E}\left(N(t,t+h]\,\mathbb{1}_{\{T>t\}}\right).$$

Ponovnom primjenom teorema o dominiranoj konvergenciji 1.5.9 slijedi

$$\limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}\left(N(t,t+h]\right) \leq \frac{h+\epsilon}{\mathbb{E}(X_1 \wedge a)}, \quad \text{za sve } a > 0.$$

Primijetimo da je $a > 0$ bio proizvoljan. Zbog $0 \leq X_1 \wedge n \leq X_1 \wedge (n+1) \leq X_1$ po teoremu o monotonoj konvergenciji slijedi $\mathbb{E}(X_1 \wedge n) \to \mathbb{E}(X_1)$, odnosno $(h+\epsilon)/\mathbb{E}(X_1 \wedge n) \to 0$. Dakle,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left(N(t,t+h]\right) = 0.$$ □

Poglavlje 4

Egzaktno uzorkovanje

Za mnoge je potrebe potrebno uzorkovati iz konačnog skupa prema određenoj distribuciji π. Pretpostavimo da je skup S konačan, recimo $S = \{1, \dots, k\}$ i $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ vjerojatnosna distribucija na S. Za takvo uzorkovanje možemo napraviti sljedeće.

Neka je $U \sim U(0,1)$ uniformna slučajna varijabla i $g\colon [0,1] \to S$ funkcija definirana sa

$$g(x) = \sum_{i=1}^{k} i\, \mathbb{1}_{\left\langle \sum_{j=1}^{i-1} \pi_j, \sum_{j=1}^{i} \pi_j \right]}(x), \tag{4.1}$$

tada očito $X = g(U)$ ima distribuciju π. Međutim, ovaj način uzorkovanja je dobar samo za male skupove S jer evaluacija funkcije g može biti vrlo skupa. Drugi način bi bio definirati ireducibilan i aperiodičan Markovljev lanac $X = (X_n)_n$ na skupu S sa stacionarnom distribucijom π. Prema teoremu o graničnoj distribuciji Markovljevog lanca, teorem 3.1.1, stacionarna distribucija je ujedno i granična, odnosno

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \mathbb{P}_{X_n} - \pi \right\|_{tv} = 0,$$

za sve početne distribucije Markovljevog lanca λ. Dakle, provođenjem Markovljevog lanca dovoljno dugo, distribucija $\mathbb{P}_{X_n}$ se približava proizvoljno blizu traženoj distribuciji π. Ova metoda se naziva *Monte Carlo metoda Markovljevih lanaca*. Iako se $\mathbb{P}_{X_n}$ približava distribuciji π, ona očito ne mora biti jednaka π. Na primjer, za Markovljev lanac s početnom distribucijom $\lambda = (1,0)$ i matricom prijelaza

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

stacionarna distribucija jednaka je $\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i različita od

$$\mathbb{P}_{X_n} = \lambda P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \end{pmatrix}, \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N},$$

što se izračuna dijagonalizacijom matrice P. Nadalje, za uspješno uzorkovanje potrebno je znati koliki je n potreban kako bi razlika u distribucijama P_{X_n} i π bila zanemariva. Odnosno, za zadanu toleranciju $\epsilon > 0$ moramo moći unaprijed odrediti $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\left\|\mathbb{P}_{X_n} - \pi\right\|_{tv} < \epsilon.$$

U mnogim je situacijama teško odrediti razumne ograde na gornju udaljenost. U sljedećem poglavlju opisujemo algoritam koji rješava prethodne probleme. Algoritam će u postupku odrediti kada je potrebno zaustaviti iteracije i davat će izlaz točno iz distribucije π.

4.1 Sparivanje iz prošlosti

Jim Prop i David Wilson su 1996. opisali algoritam koji sam određuje kraj iteracije i čiji je izlaz točno distribuiran po distribuciji π. Algoritam se sastoji od k kopija Markovljevih lanaca koji kreću iz svih početnih stanja skupa S. Umjesto promatranja Markovljevih lanaca od trenutka 0 u budućnost, promatramo Markovljeve lance iz prošlosti do trenutka 0. Odnosno, simuliramo Markovljeve lance iz početnih točaka koje strogo padaju prema $-\infty$ na način da iskoristimo prethodno simulirane korake. Algoritam zaustavljamo ako se lanci nalaze u istom stanju u trenutku 0. Zbog toga se algoritam naziva *sparivanje iz prošlosti* (eng. *coupling from the past*).

U definiciji ove metode koristimo reprezentaciju Markovljevog lanca preko slučajnih funkcija opisanu u sljedećoj lemi.

Lema 4.1.1. *Neka je $P = (p_{ij} : i, j \in S)$ stohastička matrica na S. Tada postoji vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, niz $(U_n)_n$ nezavisnih slučajnih varijabli definiranih na Ω i funkcija $f : S \times [0, 1] \to S$ takvi da ako je $X_n = f(X_{n-1}, U_{n-1})$ i $X_0 \sim \lambda$, onda je $(X_n)_n$ Markovljev lanac s matricom prijelaza P i početnom razdiobom λ.*

Dokaz. Dovoljno je za nezavisne uniformne slučajne varijable $(U_n)_n$ na $[0, 1]$ i funkciju

$$f(i, u) := \sum_{j=1}^{k} j\, \mathbb{1}_{\left[\sum_{l=1}^{j-1} p_{il}, \sum_{l=1}^{j} p_{il}\right\rangle}(u)$$

provjeriti tvrdnju. Detaljan dokaz može se pronaći u [9, str. 17]. □

Lema pokazuje da funkcija f za reprezentaciju Markovljevog lanca uvijek postoji. Izbor funkcije f nije jedinstven i bit će važan za uspješnost algoritma. Nadalje, promatrat ćemo $k = |S|$ istovremenih Markovljevih lanaca s istom matricom prijelaza P koji kreću iz svih stanja u S.

Definicija 4.1.2. *Za stohastičku matricu P i prostor stanja $S = \{1, \ldots, k\}$* veliko sparivanje *(eng.* grand coupling*) je kolekcija Markovljevih lanaca $\left\{ \left(X_n^i \right)_{n \in \mathbb{N}_0} : i \in S \right\}$ na S definiranih na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sa svojstvima:*

(i) svi Markovljevi lanci imaju istu matricu prijelaza P i

(ii) za svaki $i \in S$ je $X_0^i = i$.

Dakle, Markovljevi lanci u velikom sparivanju kreću iz svih mogućih stanja u S i nastavljaju kretanje prema istoj matrici prijelaza P. Reprezentaciju Markovljevih lanaca iz leme 4.1.1 možemo iskoristiti za konstrukciju velikog sparivanja. Uz oznake kao u lemi, za svaki $i \in S$ možemo definirati

$$X_0^i = i, \quad X_n^i = f(X_{n-1}^i, U_{n-1}), \quad \text{za } n \geq 1$$

pa je svaki $\left(X_n^i \right)_n$ Markovljev lanac s matricom prijelaza P. Kako ćemo promatrati Markovljeve lance iz prošlosti, odnosno početni trenutak će biti indeksiran sa $t_0 < 0$ od sada na dalje indeksiramo Markovljeve lance po $t \in \mathbb{Z}$ umjesto $n \in \mathbb{N}_0$. Za svaki $t \in \mathbb{Z}$ neka je $f_t \colon S \to S$ definirana sa

$$f_t(i) := f(i, U_t).$$

Zato je $X_{t+1} = f_t(X_t)$. Nadalje, za $s < t$ neka je

$$F_s^t(i) := (f_{t-1} \circ \cdots \circ f_s)(i).$$

Funkcija F_s^t daje evoluciju Markovljevog lanca iz stanja s u stanje t pa je

$$\mathbb{P}(F_s^t(i) = j) = \mathbb{P}_i(X_{t-s} = j) = \mathbb{P}(X_{t-s}^i = j) = p_{ij}^{(t-s)}. \tag{4.2}$$

Dakle, slučajne varijable $F_0^n(i)$ i X_n^i su jednako distribuirane, pa smo veliko sparivanje reprezentirali preko gornjih funkcija.

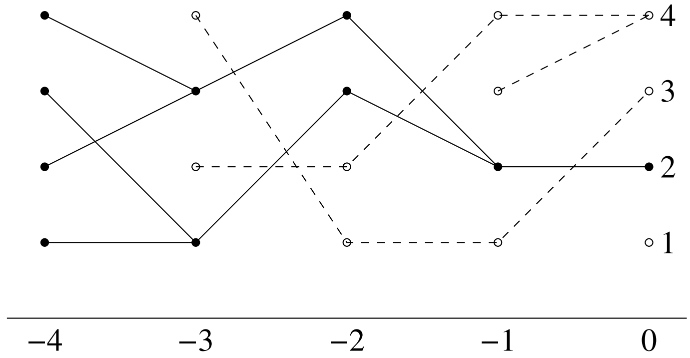
Opišimo sada algoritam. Počinjemo simulacijom Markovljevog lanca koji kreće iz stanja -1 u stanje 0. Kako stanje -1 ovisi o stanjima u vremenima prije -1, moramo simulirati k Markovljevih lanaca za svako početno stanje iz S. Zato smo definirali veliko sparivanje. Za simulaciju koraka svakog Markovljevog lanca koristimo istu funkciju f_{-1}. Ako se k lanaca nalazi u istom stanju u trenutku 0, zaustavljamo iteracije i vratimo to stanje kao izlaz algoritma. To će biti jedna realizacija slučajne varijable sa stacionarnom distribucijom π. U suprotnom, simuliramo k Markovljevih lanaca iz stanja -2 do 0 na način da od stanja -1 do 0 koristimo istu uniformnu slučajnu varijablu U_{-1} kao u prethodnoj iteraciji. Nastavljamo postupak sve dok se Markovljevi lanci ne nalaze u istom stanju u trenutku 0. Dakle, algoritam je sljedeći:

1. Neka je $t = 1$.

2. Simulirajmo k Markovljevih lanaca za svako početno stanje $i \in S$ od trenutka $-t$ do trenutka 0 pomoću funkcija $f_{-t}, f_{-t+1}, \ldots, f_{-1}$. Pri tome, za korake od $-t+1$ do -1 koristimo iste funkcije $f_{-t+1} \ldots, f_{-1}$ kao u prethodnim iteracijama.

3. Ako su lanci iz koraka 2 u istom stanju u trenutku 0, onda vrati to stanje.

4. Inače, povećaj t za 1 i vrati se na korak 2.



Slika 4.1: Primjer realizacije velikog sparivanja u metodi sparivanja iz prošlosti.

Primijetimo da ako smo za neku početnu poziciju $t < 0$ postigli da se lanci nalaze u istom stanju u trenutku 0, tada nastavkom provođenja iteracija u prošlost, odnosno za početne trenutke $s \leq t$ dobivamo stalno isti izlaz iz algoritma. Dakle, nastavak iteracija nema utjecaja na izlaz algoritma. Zato algoritam zaustavljamo u trenutku kad su se lanci sparili u sadašnjosti i vraćamo dobiveno stanje. Intuitivno zamišljamo da Markovljeve lance simuliramo iz prošlosti $(-\infty)$ u 0 pa se zbog toga u 0 postiže granična distribucija, odnosno dobiveno stanje Y ima stacionarnu distribuciju. U sljedećem teoremu dokazujemo ovu tvrdnju.

Teorem 4.1.3. *Neka je P matrica prijelaza ireducibilnog i aperiodičnog Markovljevog lanca na prostoru stanja $S = \{1, \ldots, k\}$ sa stacionarnom distribucijom π. Neka je T najmanji $t > 0$ takav da je F^0_{-t} konstanta. Ako je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, onda slučajna varijabla Y definirana s tom konstantom ima distribuciju π.*

Dokaz. Koristeći jednakost (4.2) i teorem o graničnoj distribuciji za Markovljeve lance vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(F^0_{-t}(i) = j\right) = \lim_{t\to\infty} p^{(t)}_{ij} = \pi_j. \tag{4.3}$$

Za $s > t$ vrijedi

$$F^0_{-s} = F^0_{-t} \circ (f_{-t-1} \circ \ldots \circ f_{-s}),$$

pa ako je F^0_{-t} konstantna funkcija, onda je i F^0_{-s} konstantna funkcija. Zato na događaju $\{T < \infty\}$, za $t \geq T$ vrijedi

$$F^0_{-t}(i) = F^0_{-T}(i) = Y.$$

Koristeći pretpostavku da je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ dobivamo

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(F^0_{-t}(i) = j) &= \lim_{t\to\infty} \Big[\mathbb{P}(F^0_{-t}(i) = j, T > t) + \mathbb{P}(Y = j, T \leq t)\Big] \\ &= \mathbb{P}(Y = j, T < \infty) = \mathbb{P}(Y = j),\end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti za prvi sumand iskoristili neprekidnost vjerojatnosti na nerastućim događajima $\{T > t\}$ pa on konvergira prema 0, a za drugi sumand neprekidnost na neopadajućim događajima. Posljednja jednakost zajedno sa (4.3) daje tvrdnju. □

Dakle, pokazali smo da ako se algoritam gotovo sigurno zaustavlja, vraćeno stanje ima stacionarnu distribuciju. Pretpostavimo sada da su Markovljevi lanci $X^1, X^2, \dots X^k$ iz velikog sparivanja nezavisni. Pokazat ćemo da je u tom slučaju $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, odnosno da će se Markovljevi lanci gotovo sigurno spariti.

Teorem 4.1.4. *Neka je P matrica prijelaza ireducibilnog i aperiodičnog Markovljevog lanca X na prostoru stanja $S = \{1, \dots, k\}$ sa stacionarnom distribucijom π. Neka je*

$$\left(X^1, X^2, \dots, X^n\right)$$

nezavisno veliko sparivanje pridruženo matrici P. Neka je T najmanji $t > 0$ takav da su nezavisni Markovljevi lanci koji kreću iz stanja $-t$ u istom stanju u trenutku 0. Tada je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Označimo to stanje sa Y. Tada je $Y \sim \pi$.

Dokaz. Kako je X ireducibilan i aperiodičan Markovljev lanac, tada za sve $i, j \in S$ postoji $n_0 = n_0(i, j) \in \mathbb{N}$ takav da je $p^{(n)}_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) > 0$ za sve $n \geq n_0$. Za detaljan dokaz ove tvrdnje vidi [9, str. 52]. Kako je skup stanja S konačan, slijedi da za $j_0 \in S$ postoji $n \in \mathbb{N}$ i $\epsilon > 0$ takav da je

$$p^{(n)}_{ij_0} = \mathbb{P}(X_n = j_0 \mid X_0 = i) \geq \epsilon > 0, \quad \text{za sve } i \in S.$$

Tada je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(F^n_0 \text{ konstanta}\right) &= \mathbb{P}\left(X^1_n = \cdots = X^k_n\right) \geq \mathbb{P}\left(X^1_n = \cdots = X^k_n = j_0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X^1_n = j_0\right) \cdots \mathbb{P}\left(X^k_n = j_0\right) \\ &= p^{(n)}_{1j_0} \cdots p^{(n)}_{kj_0} \\ &\geq \epsilon \cdots \epsilon = \epsilon^k,\end{aligned} \tag{4.4}$$

gdje smo u drugom retku iskoristili nezavisnost Markovljevih lanaca. Kako $F^{tn}_{(t-1)n}$ ovisi o $U_{(t-1)n}, \dots U_{tn-1}$, za svaki $t \le 0$, zbog nezavisnosti niza slučajnih varijabli $(\dots, U_{-1}, U_0)$ slijedi da su događaji $\left\{F^{(-t+1)n}_{-tn} \text{ nije konstanta}\right\}, \dots, \left\{F^0_{-n} \text{ nije konstanta}\right\}$ nezavisni. Također, vjerojatnosti tih događaja su jednake. Ako je barem jedno od preslikavanja $F^{(-t+1)n}_{-tn}, \dots, F^0_{-n}$ konstanta onda je i F^0_{-tn} konstanta jer je

$$F^0_{-tn} = F^0_{-n} \circ \cdots \circ F^{(-t+1)n}_{-tn}.$$

Zbog svega navedenog je

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(F^0_{-tn} \text{ nije konstanta}\right) \le \mathbb{P}\left(F^{(-t+1)n}_{-tn} \text{ nije konstanta}, \dots, F^0_{-n} \text{ nije konstanta}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(F^{(-t+1)n}_{-tn} \text{ nije konstanta}\right) \cdots \mathbb{P}\left(F^0_{-n} \text{ nije konstanta}\right) \\
&= \left(1 - \mathbb{P}\left(F^n_0 \text{ konstanta}\right)\right)^t \le \left(1 - \epsilon^k\right)^t,
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjoj nejednakosti iskoristili (4.4). Dobili smo

$$\mathbb{P}\left(T > tn\right) \le \left(1 - \epsilon^k\right)^t \longrightarrow 0, \quad \text{za } t \to \infty.$$

Konačno, zbog neprekidnosti vjerojatnosti na neopadajućim događajima slijedi

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \lim_{t \to \infty} \mathbb{P}\left(T \le tn\right) = 1.$$

Iz teorema 4.1.3 slijedi $Y \sim \pi$. □

Napomena 4.1.5. *Nezavisno veliko sparivanje može se reprezentirati preko funkcija iz leme 4.1.1. Neka je U uniformni slučajni vektor na* $[0, 1]^k$ *i*

$$f(i, (u_1, \dots, u_k)) := \sum_{j=1}^{k} j\, \mathbb{1}_{\left[\sum_{l=1}^{j-1} p_{il}, \sum_{l=1}^{j} p_{il}\right\rangle}(u_i).$$

Tada su događaji $\left\{f(i^1; U_1) = j^1\right\}, \dots, \left\{f(i^k; U_1) = j^k\right\}$ *nezavisni pa su i Markovljevi lanci u velikom sparivanju nezavisni.*

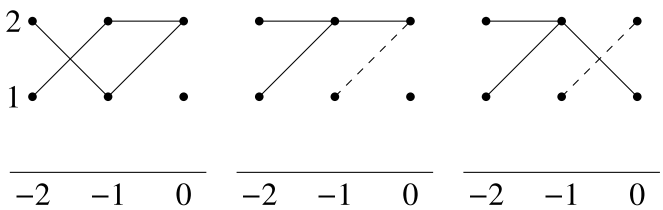
Napomena 4.1.6. *Kako bi algoritam davao ispravnu distribuciju slučajne varijable Y, važno je u svakom koraku t iskoristiti iste slučajne varijable* $U_{t+1}, \dots, U_{-1}$ *kao u prethodnim iteracijama. Također, važno je promatrati lance iz prošlosti. Algoritam ne radi ako krećemo iz vremena* 0 *i simuliramo Markovljeve lance u budućnost dok se ne spare. Za oba slučaja možemo promatrati isti protuprimjer. Neka je zadan*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sa stacionarnom razdiobom $\pi = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. *Promatrajmo Markovljev lanac u budućnost. Ako su se lanci sparili u trenutku* n, *tada je u trenutku* $n-1$ *jedan lanac u stanju* 1, *a drugi u stanju* 2. *Zbog toga lanac iz stanja* 2 *prelazi u stanje* 1 *pa algoritam vraća stanje* 1 *s vjerojatnosti* 1, *a ne* $\pi_1 = \frac{2}{3}$. *Nadalje, kad bi u svakoj iteraciji algoritma koristili nove slučajne varijable* U, *slijedilo bi*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=1) &= \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}(T=t, Y=1) \\ &\geq \mathbb{P}(T=1)\,\mathbb{P}(Y=1 \mid T=1) + \mathbb{P}(T=2)\,\mathbb{P}(Y=1 \mid T=2).\end{aligned} \tag{4.5}$$

Označimo s $X^{(-t,i)}$ *Markovljev lanac koji kreće iz stanja* $i \in S$ *u trenutku* $-t$. *Lanci se sparuju u jednom koraku (*$T=1$*) ako i samo ako je* $X_0^{(-1,1)} = 1$ *što se događa s vjerojatnosti* $\frac{1}{2}$. *U tom slučaju se sparuju u stanju* 1. *Ako se sparuju u dva koraka (*$T=2$*), onda je* $X_0^{(-1,1)} = 2$ *jer bi se inače spario u jednom koraku. Sada od* -2 *do* 0 *postoje tri moguća sparivanja prikazana na slici 4.2, pri čemu od koraka* -1 *do* 0 *uzimamo novu slučajnu varijablu* U_{-1}. *Svaka od ove tri mogućnosti se događa s vjerojatnosti* $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ *jer u prvom koraku kretanje od* -1 *do* 0 *ima vjerojatnost* $\mathbb{P}\left(X_0^{(-1,1)} = 2\right) = \frac{1}{2}$, *a u drugom koraku algoritma kretanje od* -2 *do* 0 *ima vjerojatnosti* $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$. *Ukupno,* $\mathbb{P}(T=2) = \frac{3}{8}$, *od čega u dva slučaja završavamo u stanju* 1, *pa je* $\mathbb{P}(Y=1 \mid T=2) = \frac{2}{3}$.



Slika 4.2: Tri realizacije sparivanja za $T = 2$

Uvrštavajući izračunato u (4.5) dobivamo

$$\mathbb{P}(Y=1) \geq \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3} = \frac{3}{4} > \frac{2}{3} = \pi_1.$$

Sparivanje u budućnost ne funkcionira niti u slučaju kad su sve prijelazne vjerojatnosti strogo pozitivne. Naime, neka je zadana prijelazna matrica sa

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Neka je $W = (X^1, X^2)$ nezavisno veliko sparivanje u kojem nakon prvog dolaska u stanje 11 ili 22 ostajemo u njemu. Matrica prijelaza velikog sparivanja je jednaka

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zanima nas $\mathbb{P}(T_{11} < T_{22}) = \mathbb{P}(T_{11} < \infty)$, gdje je T_{kl} prvo vrijeme pogađanja stanja kl. Označimo $h_{ij} := \mathbb{P}_{ij}(T_{11} < \infty)$. Tada iz

$$h_{12} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}h_{12} + \frac{3}{8}h_{21} \quad i \quad h_{21} = \frac{3}{8} + \frac{3}{8}h_{12} + \frac{1}{8}h_{21}$$

slijedi $h_{12} = h_{21} = 3/4$. Zato je razdioba slučajne varijable koja je izlaz iz algoritma jednaka $Y \sim \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ što je različito od stacionarne distribucije $\pi = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

U algoritmu je važan odabir funkcije f iz leme 4.1.1 kojom određujemo i veliko sparivanje Markovljevog lanca. Funkcija f mora biti odabrana tako da se omogući zaustavljanje algoritma. Neće svaki odabir funkcije f biti dobar, odnosno neće svaki odabir funkcije f dovesti do sparivanja lanaca i zaustavljanja algoritma. Pokazali smo da se za nezavisno veliko sparivanje algoritam zaustavlja s vjerojatnosti 1. Međutim, spretnim odabirom funkcije možemo ubrzati sparivanje u algoritmu.

Primjer 4.1.7. *Neka je $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Definiramo $f_1 : S \times [0,1] \to S$ s*

$$f_1(1,u) = \begin{cases} 1, & u \le \frac{1}{2}, \\ 2, & u > \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad f_1(2,u) = \begin{cases} 1, & 0 \le u \le \frac{1}{4}, \frac{1}{2} < u \le \frac{3}{4}, \\ 2, & \frac{1}{4} < u \le \frac{1}{2}, \frac{3}{4} < u \le 1. \end{cases}$$

Tada je

$$\mathbb{P}\left(f_1(i_0^1, U) = i_1^1,\ f_1(i_0^2, U) = i_1^2\right) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}\left(f_1(i_0^1, U) = i_1^1\right) \cdot P\left(f_1(i_0^2, U) = i_1^2\right),$$

pa f_1 daje nezavisno veliko sparivanje. Zato će algoritam završiti s vjerojatnosti 1.

Algoritam možemo ubrzati ako definiramo

$$f(i,u) = \begin{cases} 1, & u \le \frac{1}{2}, \\ 2, & u > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad za\ i = 1, 2.$$

Algoritam će završiti već u prvom koraku jer će se lanci odmah spariti.

Kad bismo odabrali funkciju

$$f_3(1,u) = \begin{cases} 1, & u \le \frac{1}{2}, \\ 2, & u > \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad f_3(2,u) = = \begin{cases} 1, & u > \frac{1}{2}, \\ 2, & u \le \frac{1}{2}, \end{cases}$$

algoritam se neće nikad zaustaviti jer će uvijek jedan lanac biti u stanju 1*, a drugi u stanju* 2*. Dakle,* $\mathbb{P}(T < \infty) = 0$*, pa ovaj odabir funkcije* f *nije dobar.*

U nastavku ćemo pokazati korisnu tvrdnju vezanu za vjerojatnost sparivanja.

Propozicija 4.1.8. *Neka je* T *najmanji* $t > 0$ *takav da je* F^0_{-t} *konstanta. Tada je* $\mathbb{P}(T < \infty) = 0$ *ili* $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathbb{P}(T < \infty) > 0$. Kako je $0 < \mathbb{P}(T < \infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T \le n)$, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\epsilon := \mathbb{P}\left(F^n_0 \text{ konstanta}\right) = \mathbb{P}(T \le n) > 0$. Sada nastavljamo isto kao u dokazu teorema 4.1.4, pri čemu je važno uočiti da nam je pretpostavljena nezavisnost velikog sparivanja trebala samo da pokažemo da je $\mathbb{P}\left(F^n_0 \text{ konstanta}\right) > 0$ što ovdje već znamo. Dobivamo

$$\mathbb{P}\,(T > tn) = \mathbb{P}\left(F^0_{-tn} \text{ nije konstanta}\right) \le (1-\epsilon)^t \longrightarrow 0, \quad \text{za } t \to \infty,$$

iz čega slijedi $\mathbb{P}\,(T < \infty) = 1$. □

Iz prethodne propozicije slijedi da se algoritam zaustavlja s vjerojatnosti 0 ili 1. Dakle, kako bi osigurali zaustavljanje algoritma dovoljno je pokazati da je $\mathbb{P}(T < \infty) > 0$. U tom slučaju možemo primijeniti teorem 4.1.3 i dobiti da je $Y \sim \pi$.

U praksi opisani algoritam može biti prespor za implementaciju jer trebamo Markovljeve lance iz svih početnih stanja, a skup stanja S može biti velik. Međutim, u posebnim slučajevima moguće je smanjiti broj potrebnih Markovljevih lanaca za simulaciju. Neka je $(S, \le)$ parcijalno uređen skup s najmanjim i najvećim elementom. Odnosno, neka postoje stanja s_m i s_M takva da je $s_m \le s \le s_M$, za sve $s \in S$. Pretpostavimo da funkcija f čuva monotonost, odnosno da je za $i \le j$, $f(i,u) \le f(j,u)$. U tom slučaju je

$$F^0_{-t}(s_m) \le F^0_{-t}(s) \le F^0_{-t}(s_M), \quad \text{za sve } s \in S \text{ i } t > 0.$$

Dakle, F^0_{-t} je konstanta ako i samo ako je $F^0_{-t}(s_m) = F^0_{-t}(s_M)$. Vidimo da je dovoljno simulirati dva Markovljeva lanca iz stanja s_m i s_M umjesto svih stanja. Kada se ta dva lanca spare, onda su se sparili i svi ostali lanci u velikom sparivanju. Takvi se lanci nazivaju *monotoni Markovljevi lanci*.

U napomeni 4.1.6 smo vidjeli da je potrebno pamtiti vektor slučajnih varijabli U_t za buduće iteracije. Jedna alternativa bi bila da umjesto spremanja svih funkcija f_t, odnosno slučajnih varijabli U_t, pamtimo F_t^0. U sljedećem koraku izračunamo $F_{t-1}^0 = F_t^0 \circ f_t$ i spremimo. Međutim, ovakav način pamćenja prethodnih koraka neće biti moguć u konkretnim primjerima. Naime, ako je skup stanja S velik, vektor F_{-t}^0 će biti nemoguće spremiti u memoriji. Također, ako je Markovljev lanac monoton, onda simuliramo samo dva lanca koja kreću iz minimalnog, odnosno maksimalnog stanja pa je potrebno pamtiti prošle korake preko varijabli U_t.

Još jedna optimizacija se postiže ako, umjesto kretanja iz trenutaka $-1, -2, -3, \dots$, početni trenutak udvostručujemo (početni koraci su $-1, -2, -4, -8 \dots$). Zaista, u prvom slučaju ukupan broj koraka koje moramo provesti je jednak $1 + 2 + \cdots + T = \frac{1}{2}T(T+1)$ jer za svako početno stanje moramo evaluirati lanac od $-t$ do 0 pomoću slučajnih varijabli U_t. Broj koraka raste kvadratno sa T. Za drugi slučaj neka je $2^{k-1} < T \leq 2^k$. Tada je broj potrebnih koraka jednak $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1 \leq 4T$. Vidimo da odabir točaka udvostručavanjem raste linearno sa T.

Sada možemo zapisati pseudokod algoritma:

$T \leftarrow 1$
repeat
  $max \leftarrow s_M$
  $min \leftarrow s_m$
  for $t = -T, \dots, -1$ **do**
    $max \leftarrow f(max, u_t)$
    $min \leftarrow f(min, u_t)$
  end for
  $T \leftarrow 2T$
until $max = min$
return max

U sljedećem poglavlju dajemo primjer korištenja algoritma.

4.2 Isingov model

Neka je $G = (V, E)$ graf gdje je skup vrhova V konačan. Neka je $s\colon V \to \{-1, 1\}$ slučajno odabrana funkcija. U našem slučaju graf G će biti ljuska. Odnosno $V = \{1, 2, \dots, d\}^2$, a za vrh (i, j) susjedni vrhovi su $(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1)$ i $(i, j+1)$. Isingov model u fizici modelira feromagnetska svojstva materijala. Vrhovi grafa predstavljaju atome u feromagnetskom materijalu koji mogu imati dvije orijentacije -1 i 1. Također, mogu se nalaziti u vanjskom magnetskom polju $\tilde{s}\colon V \to \{-1, 1\}$. Ukupna energija sustava dana je sa

$$H(s) = -J \sum_{\{v,w\} \in E} s_v s_w - H \sum_{v \in V} s_v \tilde{s}_v,$$

gdje su konstante $J, H \geq 0$. Konstanta J je inverz temperature. Vidimo da vrhovi iste orijentacije smanjuju energiju, a vrhovi različite orijentacije ju povećavaju. Mala energija znači da puno susjednih vrhova ima istu orijentaciju. Konfiguracija s ima razdiobu danu sa

$$\pi_s = \frac{1}{Z}\exp(-H(s)) = \frac{1}{Z}\exp\left(J\sum_{\{v,w\}\in E} s_v s_w + H\sum_{v\in V} s_v \tilde{s}_v\right),$$

gdje je Z konstanta koja osigurava sumiranje vjerojatnosti do 1. Ako su $J = H = 0$ onda su sve konfiguracije jednako vjerojatne. U suprotnom, model daje veće vjerojatnosti konfiguracijama male energije. To su one konfiguracije u kojima je više istih orijentacija između susjednih vrhova i između vrhova i vanjskog magnetskog polja. Veličine parametara J i H daju važnost utjecaja susjednih vrhova, odnosno vanjskog polja na vjerojatnosti konfiguracija. Kada je $H = 0$ i $J \to \infty$, onda π daje vjerojatnosti $\frac{1}{2}$ konfiguracijama s istim orijentacijama (svi vrhovi 1 i svi vrhovi -1).

Isingov se model može koristiti za analizu slika i uklanjanje šumova u slici. Pretpostavimo da je zadana slika gdje vrhovi grafa predstavljaju piksele koji mogu biti 1 (crni) ili -1 (bijeli). Vanjsko polje će predstavljati danu sliku sa šumovima koju želimo poboljšati. Uzorkujemo novu sliku iz distribucije π. Za uzorkovanu sliku očekujemo da će biti slična početnoj uz manje šumova jer će slike s manje različitih boja u susjednim vrhovima i sličnije početnoj slici biti vjerojatnije. Za uklanjanje šumova moguće je dobiti nekoliko realizacija iz distribucije π i za piksele na konačnoj slici uzeti najčešće vrijednosti u realizacijama. Sličnost susjednih vrhova će osigurati uklanjanje šumova dok će utjecaj vanjske, početne slike osigurati da je dobivena slika slična početnoj.

U nastavku ćemo opisati primjenu sparivanja iz prošlosti na simulaciju Isingovog modela. Potrebno je pronaći ireducibilan i aperiodičan Markovljev lanac sa stacionarnom distribucijom π. U tu svrhu koristimo Gibbsovo uzorkovanje. *Gibbsovo uzorkovanje* je Markovljev lanac u kojem u svakom koraku $n + 1$ radimo sljedeće:

1. Izaberemo vrh $v \in V$ prema uniformnoj distribuciji na V;
2. Izaberemo $X_{n+1}(v)$ prema uvjetnoj distribuciji vrijednosti u v uz dane vrijednosti u ostalim vrhovima prema X_n;
3. Postavimo $X_{n+1}(w) = X_n(w)$ za sve $w \in V\backslash\{v\}$.

Lema 4.2.1. *Neka je dana slučajna konfiguracija $X \in \{-1, 1\}^V$ prema distribuciji π i $s \in \{-1, 1\}^{V\backslash\{x\}}$, gdje je $x \in V$. Tada je distribucija vrha x uz dano $X(V\backslash\{x\}) = s$ jednaka*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{1+c} & \frac{c}{1+c} \end{pmatrix},$$

gdje je $c = \exp\left(2J\sum_{\{x,v\}\in E} s_v + 2H\tilde{s}_x\right)$.

Dokaz. Neka su $s^+, s^- \in \{0,1\}^V$ zadane sa

$$s_v^+ = \begin{cases} 1, & v = x, \\ s_v, & v \neq x, \end{cases} \quad s_v^- = \begin{cases} -1, & v = x, \\ s_v, & v \neq x. \end{cases} \tag{4.6}$$

Definirajmo c kao razliku vjerojatnosti konfiguracija s^+ i s^-. Dobivamo

$$\begin{aligned} c := \frac{\pi_{s^+}}{\pi_{s^-}} &= \frac{\exp\left(J \sum_{\{v,w \in S\}} s_v^+ s_w^+ + H \sum_{v \in V} s_v^+ \tilde{s}_v\right)}{\exp\left(J \sum_{\{v,w \in S\}} s_v^- s_w^- + H \sum_{v \in V} s_v^- \tilde{s}_v\right)} = \frac{\exp\left(J \sum_{\{x,v\} \in E} 1 \cdot s_v + H \tilde{s}_x\right)}{\exp\left(J \sum_{\{x,v\} \in E} (-1) \cdot s_v - H \tilde{s}_x\right)} \\ &= \exp\left(2J \sum_{\{x,v\} \in E} s_v + 2H \tilde{s}_x\right), \end{aligned}$$

gdje smo u trećoj jednakosti uvrstili izraze za s^+ i s^- i pokratili članove u sumi u kojima se ne javlja vrh x. Konačno dobivamo

$$\mathbb{P}\left(X(x) = 1 \,|\, X(V \backslash \{x\}) = s\right) = \frac{\mathbb{P}\left(X = s^+\right)}{\mathbb{P}\left(X(V \backslash \{x\}) = s\right)} = \frac{\pi_{s^+}}{\pi_{s^+} + \pi_{s^-}} = \frac{c}{1+c}. \qquad \square$$

Kako svaki sljedeći korak u Gibbsovom uzorkovanju ovisi samo o prethodnom, (X_n) je zaista Markovljev lanac. Lanac je aperiodičan jer je s pozitivnom vjerojatnosti moguće ostati u istoj konfiguraciji s. Za svake dvije konfiguracije koje se razlikuju u samo jednom vrhu moguće je doći iz jedne u drugu u jednom koraku. Zato je u konačno koraka Markovljevog lanca moguće doći u bilo koju konfiguraciju. Zaključujemo da je lanac ireducibilan. Da pokažemo da je π stacionarna distribucija, dovoljno je pokazati da su matrica prijelaza P i π u detaljnoj ravnoteži, odnosno da je

$$\pi_s p_{ss'} = \pi_{s'} p_{s's}. \tag{4.7}$$

U slučaju $s = s'$ tvrdnja trivijalno vrijedi. Nadalje, u slučaju da se konfiguracije s i s' razlikuju u barem dvije točke, tvrdnja vrijedi jer lanac nikad ne mijenja orijentaciju u više od jedne točke pa je $p_{ss'} = p_{s's} = 0$. Pretpostavimo da lanac mijenja orijentaciju u vrhu x. Neka su s^+ i s^- definirane kao u (4.6). Tada za s^- i s^+ vrijedi (4.7) ako i samo ako je

$$\begin{aligned} &\frac{1}{Z} \exp\left(J \sum_{\{v,w\} \in E} s_v^- s_w^- + H \sum_{v \in V} s_v^- \tilde{s}_v\right) \frac{1}{|V|} \frac{1}{1 + \exp\left(-2J \sum_{\{x,v\} \in E} s_v - 2H \tilde{s}_x\right)} = \\ &\qquad = \frac{1}{Z} \exp\left(J \sum_{\{v,w\} \in E} s_v^+ s_w^+ + H \sum_{v \in V} s_v^+ \tilde{s}_v\right) \frac{1}{|V|} \frac{1}{1 + \exp\left(2J \sum_{\{x,v\} \in E} s_v + 2H \tilde{s}_x\right)} \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\iff \quad \frac{\exp\left(-J\sum_{\{x,v\}\in E} s_v - H\tilde{s}_x\right)}{1+\exp\left(-2J\sum_{\{x,v\}\in E} s_v - 2H\tilde{s}_x\right)} = \frac{\exp\left(J\sum_{\{x,v\}\in E} s_v + H\tilde{s}_x\right)}{1+\exp\left(2J\sum_{\{x,v\}\in E} s_v + 2H\tilde{s}_x\right)},$$

što se lagano provjeri da vrijedi.

Korak 2 u Gibbsovom uzorkovanju može se napraviti pomoću uniformne slučajne varijable na $[0,1]$ sa

$$X_{n+1}(x) = \begin{cases} 1, & U < \left(1+\exp\left(-2J\sum_{(x,v)\in E} s_v - 2H\tilde{s}_x\right)\right)^{-1}, \\ -1, & \text{inače.} \end{cases} \tag{4.9}$$

Za svaki Markovljev lanac u velikom sparivanju, u svakom koraku t uzimamo isti vrh $x \in V$ i istu slučajnu varijablu U. Na taj način dobit ćemo monotono sparivanje. Na skupu stanja $S = \{-1,1\}^V$ definiramo parcijalni uređaj. Za $s, s' \in S$, neka je $s \le s'$ ako je $s_v \le s'_v$, za svaki $v \in V$. Postoje jedinstvena najmanja i najveća stanja definirana sa $(s_m)_v = -1$ i $(s_M)_v = 1$, za sve $v \in V$.

Lema 4.2.2. *Neka je $X_n \le X'_n$. Tada je $X_{n+1} \le X'_{n+1}$.*

Dokaz. Ako smo u koraku $n+1$ odabrali vrh x, onda u vrhovima $v \neq x$ vrijedi

$$X_{n+1}(v) = X_n(v) \le X'_n(v) = X'_{n+1}(v).$$

Kako u (4.9) uzimamo istu slučajnu varijablu U za različite lance, da bi dobili $X_{n+1}(x) \le X'_{n+1}(x)$ dovoljno je pokazati da za $s \le s'$ vrijedi

$$\mathbb{P}\left(X(x) = 1 \,|\, X(V\backslash\{x\}) = s\right) \le \mathbb{P}\left(X(x) = 1 \,|\, X(V\backslash\{x\}) = s'\right).$$

To slijedi iz $\exp\left(2J\sum_{(x,v)\in E} s_v + 2H\tilde{s}_x\right) \le \exp\left(2J\sum_{(x,v)\in E} s'_v + 2H\tilde{s}_x\right)$ jer je $s_v \le s'_v$ za sve $v \in V$. □

Lema 4.2.2 pokazuje da smo dobili monoton Markovljev lanac, pa je u metodi sparivanja iz prošlosti dovoljno simulirati lance koji kreću iz stanja s_m i s_M.

U praksi se Gibbsovo uzorkovanje ne radi na slučajno odabranom vrhu v već se vrhovi odabiru ciklički. Ako je $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$. onda se u koracima lk mijenja vrh v_1, u koracima $lk+1$ vrh $v_2, \ldots,$ a u koracima $l(k+1)-1$ vrh v_k. Takvim odabirom $(X_n)_n$ postaje nehomogen Markovljev lanac. Definiramo $Y_n = X_{nk}$. Tada je Y_n Markovljev lanac. Pokažimo da je homogen.

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(X_{k(l+1)} = s_k \,\middle|\, X_{kl} = s_0\right) = \\ &= \sum_{s_1,\ldots,s_{k-1}\in S} \mathbb{P}\left(X_{k(l+1)} = s_k \,\middle|\, X_{kl+(k-1)} = s_{k-1}\right) \cdots \mathbb{P}\left(X_{kl+1} = s_1 \,|\, X_{kl} = s_0\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s_1,\dots,s_{k-1}\in S} \mathbb{P}\left(X_k = s_k \,|\, X_{k-1} = s_{k-1}\right)\cdots\mathbb{P}\left(X_1 = s_1 \,|\, X_0 = s_0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_k = s_k \,|\, X_0 = s_0\right),
\end{aligned}
$$

gdje smo u trećoj jednakosti iskoristili da su vjerojatnosti prijelaza u nehomogenom Markovljevom lancu jednake za korake $i \equiv j \pmod{k}$. Dakle Y_k je homogen Markovljev lanac. Ponovno lagano slijedi da je aperiodičan i ireducibilan. Trebamo još pokazati da su π i matrica prijelaza u detaljnoj ravnoteži. Vrijedi

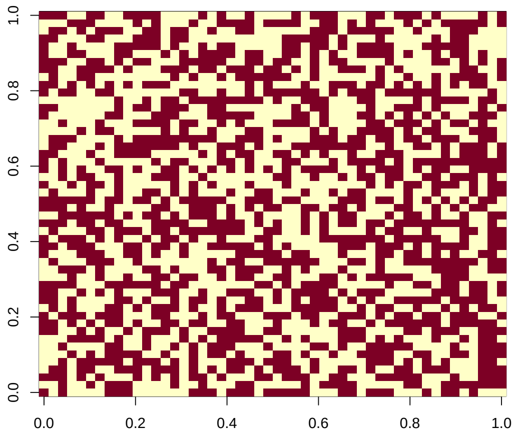
$$
\begin{aligned}
\pi_s\mathbb{P}\left(X_k = s' \,|\, X_0 = s\right) &= \sum_{s_1,\dots,s_{k-1}\in S} \pi_s p_{ss_1}\cdots p_{s_{k-1}s'} = \sum_{s_1,\dots,s_{k-1}\in S} \pi_{s_1} p_{s_1 s}\cdots p_{s_{k-1}s'} = \cdots = \\
&= \sum_{s_1,\dots,s_{k-1}\in S} p_{s_1 s}\cdots p_{s' s_{k-1}}\pi_{s'} = \pi_{s'}\mathbb{P}\left(X_k = s \,|\, X_0 = s'\right),
\end{aligned}
$$

gdje smo iskoristili da su vjerojatnosti prijelaza u nehomogenom Markovljevom lancu X_n u detaljnoj ravnoteži sa π, što se vidi iz jednakosti (4.8) samo što nemamo vjerojatnost odabira vrha jednaku $\frac{1}{|V|}$ s obje strane jednakosti.

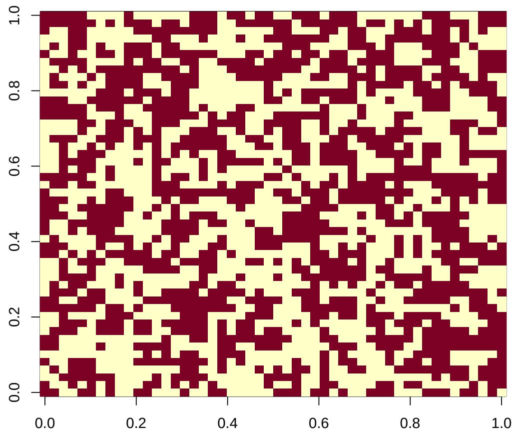
Na kraju, prije implementacije algoritma možemo primijetiti da možemo istovremeno obaviti promjene na vrhovima u grafu koji nemaju zajedničkih bridova. Ako ljusku obojimo kao polja na šahovskoj ploči, možemo istovremeno vršiti promjene na poljima iste boje što značajno ubrzava algoritam.

Opisani algoritam je implementiran u programskom jeziku R. Primijenit ćemo ga na matrici dimenzije 50×50 bez utjecaja vanjskog polja ($H = 0$) i za različite vrijednosti parametra J. Poznato je da algoritam konvergira za $J < J_c \approx 0.441$, gdje se J_c naziva kritična vrijednost, dok je za vrijednosti veće od kritične konvergencija jako spora pa u praksi često niti ne konvergira. Na slici 4.3 su prikazane dobivene realizacije konfiguracija iz stacionarnih distribucija u Isingovom modelu. U slučaju $J = 0$ sve konfiguracije su jednako vjerojatne, odnosno svaki vrh nezavisno od drugih poprima 1 ili -1 s jednakom vjerojatnosti. Što je vrijednost parametra $J > 0$ veća, to je veća podudarnost susjednih vrhova.

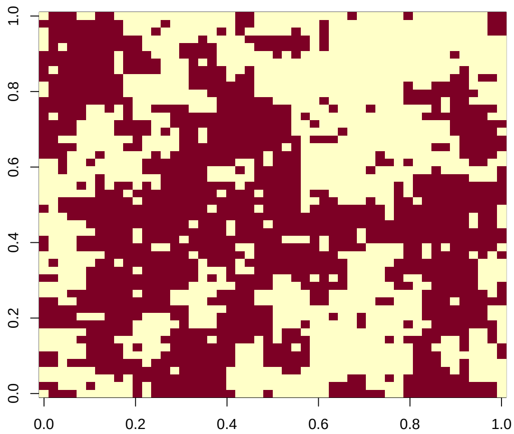
U nastavku želimo primijeniti Isingov model za uklanjanje šumova na slici. Primjenjujemo algoritam na matricu dimenzije 200×200 sa slike 4.4a. Matrica je dobivena iz čiste slike slova H na kojoj je svaki piksel promijenjen s vjerojatnosti 0.2. Promijenjeno je 20.13% piksela. Nakon primjene Isingove metode sparivanja iz prošlosti uz parametre $J = 1, H = 1$ dobili smo realizaciju iz distribucije π prikazanu na slici 4.4b na kojoj je 0.6525% piksela promijenjeno. Ponavljamo algoritam pet puta i za piksele na konačnoj slici uzimamo najčešće vrijednosti piksela u tim realizacijama. Uzeli smo neparan broj ponavljanja kako bi sigurno jedna orijentacija piksela bila najčešća. Dobivena matrica je prikazana na slici 4.4c na kojoj je 0.4625% pogrešnih piksela. Dakle, uspjeli smo popraviti sliku uklanjanjem šumova. Algoritam i u ovom slučaju može jako sporo konvergirati ovisno o parametrima J i H.



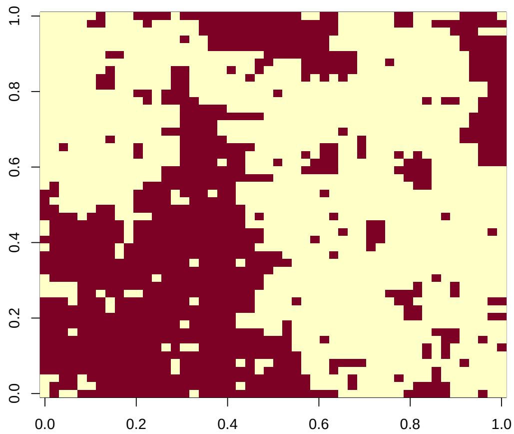
(a) $J = 0$



(b) $J = 0.2$

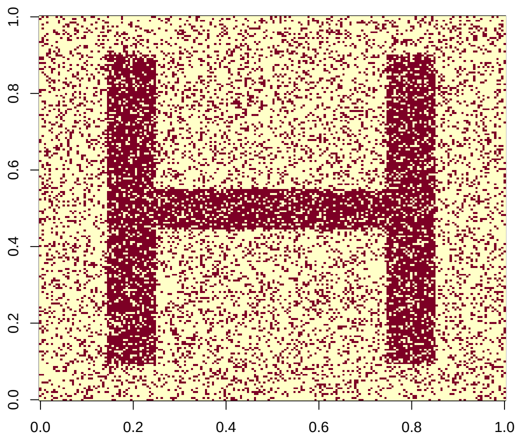


(c) $J = 0.4$

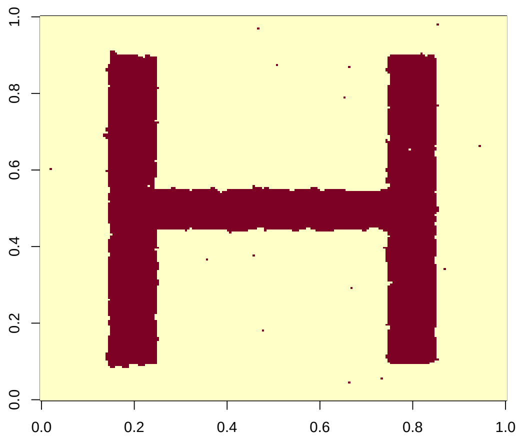


(d) $J = 0.45$

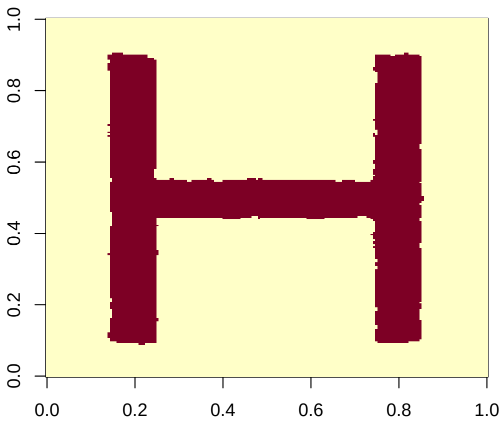
Slika 4.3: Isingova metoda sparivanja iz prošlosti bez utjecaja vanjskog polja i za različite vrijednosti parametra J.



(a) Početna slika sa šumom



(b) Jedna realizacija distribucije π



(c) Slika nakon primjene metode

Slika 4.4: Rezultat Isingove metode sparivanja iz prošlosti za $J = H = 1$ primijenjen za uklanjanje šumova sa slike.

Bibliografija

[1] F. den Hollander, *Probability theory: The coupling method*, Leiden University, Mathematical Institute, Leiden, 2012.

[2] O. Häggström, *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[3] T. Lindvall, *Lectures on the Coupling Method*, John Wiley & Sons, New York, 1992., Reprint: Dover paperback edition, 2002.

[4] J. Propp i D. Wilson, *Exact sampling with coupled Markov chains and applications to statistical mechanics*, Random Structures and Algorithms **9** (1996), 223–252.

[5] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[6] V. Schmidt, *Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields: Models and Algorithms*, Springer International Publishing, Ulm, 2015.

[7] P. Sousi, *Coupling from the past*, `https://secure.math.ubc.ca/~jhermon/Mixing/Coupling_from_the_past.pdf`, posjećena 01.08.2021.

[8] H. Thorisson, *Coupling, Stationarity, and Regeneration*, Springer, New York, 2000.

[9] Z. Vondraček, *Markovljevi lanci predavanja*, Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, Zagreb, 2008.

[10] Z. Vondraček, *Slučajni procesi predavanja*, Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, Zagreb, 2010.

Sažetak

Metoda sparivanja je važna metoda u teoriji vjerojatnosti s mnogobrojnim primjenama. Temelji se na konstrukciji kopija slučajnih elemenata na zajedničkom vjerojatnosnom prostoru kako bi mogli odrediti svojstva i usporediti ih. U ovom radu uvodimo pojam sparivanja s nekoliko primjera i metoda za konstrukciju. Definiramo udaljenost totalne varijacije i nejednakost u sparivanju koje koristimo za usporedbu slučajnih varijabli. Pokazujemo da postoji maksimalno sparivanje. Proučavamo odnos između sparivanja i konvergencije slučajnih varijabli.

Primjenjujemo metodu sparivanja na Poissonovu aproksimaciju. Dokazujemo tvrdnje da su sume nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli blizu Poissonove distribucije. Također, sparivanje je važno u dokazivanju asimptotskih svojstava stohastičkih procesa. Standardni rezultat dobiven sparivanjem je granični teorem za Markovljeve lance. Definiramo Ornsteinovo sparivanje i epsilon-sparivanje na slučajnim šetnjama za dokaz asimptotskih svojstava. Glavni cilj nam je pokazati Blackwellov teorem obnavljanja.

Sparivanje je korisno u egzaktnom uzorkovanju. Opisujemo algoritam sparivanja iz prošlosti za egzaktno uzorkovanje iz konačnog skupa. U ovoj metodi konstruiramo Markovljeve lance iz sve udaljenijih točaka u prošlosti dok god su stanja u sadašnjosti različita. Na taj način algoritam sam određuje kada se treba zaustaviti i vraća vrijednost iz stacionarne distribucije. Uvodimo Isingov model iz fizike koji se može koristiti i za analizu slika. Algoritam sparivanja iz prošlosti implementiramo za Isingov model i pokazujemo rezultate.

Summary

The coupling method is a versatile proof technique in modern probability theory with a wide range of applications. Coupling consists of constructing copies of random elements on a common probability space in order to deduce properties or discover similarities or relations between them. In this master's thesis, the notion of coupling is introduced with a few examples and methods of construction. We define the total variation norm and coupling inequalities, which are basic tools for comparing random variables. It is proved that there exists a maximal coupling which is in some sense the best coupling. Furthermore, we study the relation between coupling and convergence of random variables.

We use the coupling method in the Poisson approximation. We prove that the sum of Bernoulli random variables is close to the Poisson distribution. Also, coupling is a key tool in the study of asymptotic properties of stochastic processes. The standard result is the Markov chain convergence theorem. We construct two variations of coupling called the Ornstein coupling and the epsilon-coupling of random walks to prove asymptotic results. The main goal is to give the coupling proof of Blackwell's renewal theorem.

Coupling is also useful in exact sampling. We describe the coupling from the past algorithm for exact sampling from a finite set. In this method, coupled Markov chains are started from the points in the more and more distant past and run until they coalesce in the present. Thus, the algorithm determines when to stop and returns value distributed exactly according to the stationary distribution. Furthermore, we introduce the Ising model and describe its application to image analysis. Finally, we implement the algorithm on the Ising model and show the simulation results.

Životopis

Rođen sam 1.12.1997. godine u Zagrebu. Nakon osnovne škole završio sam XV. gimnaziju u Zagrebu. Obrazovanje nastavljam na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu gdje 2016. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika, a 2019. diplomski sveučilišni studij Matematička statistika. Tijekom studija bio sam demonstrator iz nekoliko kolegija (Matematička analiza 1 i 2, Diferencijalni račun funkcija više varijabli i Matematička statistika). Dobitnik sam Nagrade Soljačić i priznanja MZO-a za izniman uspjeh na Državnoj maturi te dva priznanja Matematičkog odsjeka za izniman uspjeh na preddiplomskom i diplomskom studiju. Od trećeg razreda srednje škole primam stipendiju grada Zagreba za izvrsnost za učenike, a od treće godine fakulteta istu stipendiju za studente.