Elementarni aspekti kompaktnosti

Kosanović, Iva

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Iva Kosanović

ELEMENTARNI ASPEKTI KOMPAKTNOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu će se proučavati elementarni aspekti kompaktnosti. U prvom poglavlju definiramo metriku i metričke prostore te zatim proučavamo nizove u metričkom prostoru i njihovu konvergenciju. Definiramo pojam kompaktnog metričkog prostora te dokazujemo da je svaki kompaktan metrički prostor potpuno omeđen. Nadalje definiramo potpune metričke prostore te dokazujemo da je metrički prostor kompaktan ako i samo ako je potpun i potpuno omeđen.

U drugom poglavlju definiramo pojam otvorenog pokrivača te zatim proučavamo pojam Lebesgueovog broja otvorenog pokrivača. Dokazujemo da svaki otvoreni pokrivač kompaktnog metričkog prostora ima Lebesgueov broj. Koristeći taj rezultat dokazujemo da je metrički prostor kompaktan ako i samo ako se svaki njegov otvoren pokrivač može reducirati na konačan pokrivač. Nadalje definiramo pojam topološkog prostora, proučavamo ekvivalentne metrike te dajemo definiciju kompaktnog topološkog prostora.

U trećem poglavlju proučavamo kompaktne skupove u metričkim i topološkim prostorima. S tim u vezi proučavamo potprostore metričkih i topoloških prostora. Nadalje dokazujemo da je svaki kompaktan skup u Hausdorffovom prostoru zatvoren te da je svaki kompaktan skup u metričkom prostoru zatvoren i omeđen. Na kraju proučavamo kompaktnost u $\mathbb{R}^n$ te dokazujemo da je podskup od $\mathbb{R}^n$ kompaktan ako i samo ako je zatvoren i omeđen. Također dokazujemo da je metrički prostor $\mathbb{R}^n$ potpun.

Poglavlje 1

Kompaktnost u metričkim prostorima

1.1 Metrika i metrički prostori

Definicija 1.1.1. *Neka je X neprazan skup te neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija takva da za sve $x, y, z \in X$ vrijedi sljedeće:*

1) $d(x, y) \geq 0$ *;*

2) $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako je* $x = y$ *;*

3) $d(x, y) = d(y, x)$ *;*

4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Tada za d kažemo da je metrika na X, a za uređeni par (X, d) kažemo da je metrički prostor.

Primjer 1.1.2. *Neka je $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $d(x, y) = |x - y|$.*

Tada za sve $x, y \in \mathbb{R}$ očito vrijedi $d(x, y) = |x - y| \geq 0$. Nadalje

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Dakle $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ te vrijedi da je $|x - y| = |y - x|$ odnosno $d(x, y) = d(y, x)$.

Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$. Imamo:

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |y - z| = d(x, z) + d(z, y).$$

Dakle $d(x, y) \leq (x, z) + d(z, y)$.

Zaključujemo da je d metrika na $\mathbb{R}$.

Za d kažemo da je euklidska metrika na $\mathbb{R}$.

Primjer 1.1.3. *Neka je $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

Tvrdimo da je d metrika na $\mathbb{R}^n$. Lako se vidi da d zadovoljava svojstva 1), 2) *i* 3) *iz definicije metrike. Dokažimo da d zadovoljava i svojstvo* 4).

Dokažimo prvo dvije pomoćne tvrdnje.

Lema 1.1.4. *Neka su $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

$$(a_1 \cdot b_1 + \cdots + a_n \cdot b_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + \cdots + b_n^2).$$

Dokaz. Ako je $b_1 = \cdots = b_n = 0$ onda tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da je barem jedan od brojeva $b_1, b_2, \ldots, b_n$ različit od nule.

Definiramo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = (a_1 + b_1 t)^2 + \cdots + (a_n + b_n t)^2.$$

Očito je $f(t) \geq 0$ za svaki $t \in \mathbb{R}$. Za svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$f(t) = a_1^2 + \cdots + a_n^2 + 2(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)t + (b_1^2 + \cdots + b_n^2)t^2.$$

Iz ovog vidimo da je f kvadratna funkcija. Budući da je $f(t) \geq 0$ za svaki $t \in \mathbb{R}$ diskriminanta ove kvadratne funkcije je manja od nule ili jednaka nuli. Prema tome:

$$\begin{aligned}
&(2(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n))^2 - 4(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \leq 0\\
\Leftrightarrow\ & 4(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq 4(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2)\\
\Leftrightarrow\ & (a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2).
\end{aligned}$$

□

Lema 1.1.5. *Neka su $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Tada je:*

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}.$$

Dokaz. Vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + b_1)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2 \leq a_1^2 + \cdots + a_n^2 + 2\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2} + b_1^2 + \cdots + b_n^2$$

$$\Leftrightarrow a_1^2+2a_1b_1+b_1^2+\cdots+a_n^2+2a_nb_n+b_n^2 \leq a_1^2+\cdots+a_n^2+2\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}+b_1^2+\cdots+b_n^2$$

$$\Leftrightarrow a_1b_1+...+a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}.$$

Zadana jednakost slijedi iz leme 1.1.4. Naime iz leme 1.1.4 slijedi da je

$$|a_1b_1+...+a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2+...+a_n^2}\sqrt{b_1^2+...+b_n^2}.$$

Time smo dokazali ovu lemu. □

Pokažimo sada da za d vrijedi svojstvo 4) metrike, odnosno da vrijedi nejednakost trokuta. Pretpostavimo da su $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Dakle $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ i $z = (z_1, ..., z_n)$.

Za $i \in \{1, ..., n\}$ definiramo $a_i = x_i - z_i$ i $b_i = z_i - y_i$. Uočimo da je $a_i + b_i = x_i - y_i$ za svaki $i \in \{1, ..., n\}$. Koristeći lemu 1.1.5 dobivamo:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} \\ &= \sqrt{(a_1+b_1)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2} \\ &\leq \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2} \\ &= \sqrt{(x_1-z_1)^2+\cdots+(x_n-z_n)^2}+\sqrt{(z_1-y_1)^2+\cdots+(z_n-y_n)^2} \\ &= d(x,z)+d(z,y). \end{aligned}$$

Dakle $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Zaključujemo da je d metrika na $\mathbb{R}^n$.

Za d kažemo da je euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Uočimo da se za $n = 1$ ova definicija podudara s definicijom iz primjera 1.1.2.

Primjer 1.1.6. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Neka je $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d_1((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|.$$

Tvrdimo da je d_1 metrika na $\mathbb{R}^n$.

Svojstva 1) − 3) iz definicije metrike očito vrijede. Pokažimo da vrijedi svojstvo 4). Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Imamo $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ i $z = (z_1, ..., z_n)$.

Tada je:

$$\begin{aligned}
d(x, y) &= |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \\
&= |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + ... + |x_n - z_n + z_n - y_n| \\
&\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + ... + |x_n - z_n| + |z_n - y_n| \\
&= |x_1 - z_1| + ... + |x_n - z_n| + |z_1 - y_1| + ... + |z_n - y_n| \\
&= d_1(x, z) + d_1(z, y).
\end{aligned}$$

Dakle $d_1(x, y) \leq d_1(x, z) + d_1(z, y)$ *pa je* d_1 *metrika na* $\mathbb{R}^n$.

Primjer 1.1.7. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$. *Neka je* $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana sa*

$$d_\infty((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\}.$$

Tvrdimo da je d_∞ *metrika na* $\mathbb{R}^n$.

Svojstva 1) − 3) *iz definicije metrike očito vrijede.*

Pokažimo da vrijedi svojstvo 4). *Neka su* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. *Imamo* $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ *i* $z = (z_1, ..., z_n)$. *Neka je* $i \in \{1, ..., n\}$. *Tada vrijedi:*

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leq d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y).$$

Dakle za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ *je*

$$|x_i - y_i| \leq d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y).$$

Stoga je

$$d_\infty(x, y) \leq d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y).$$

Prema tome d_∞ *je metrika na* $\mathbb{R}^n$.

Primjer 1.1.8. *Neka je X neprazan skup. Definiramo funkciju* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *sa*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ ako je } x \neq y, \\ 0, \text{ ako je } x = y. \end{cases}$$

Tvrdimo da je d metrika na X.

Naime svojstva 1) − 3) *iz definicije metrike očito vrijede.*

Nadalje ako su $x, y, z \in X$ *takvi da je* $x = y$ *onda očito vrijedi:*

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y),$$

a ako je $x \neq y$ *onda je* $x \neq z$ *ili* $z \neq y$ *pa imamo:* $d(x, y) = 1$ *i* $d(x, z) = 1$ *ili* $d(z, y) = 1$ *pa vrijedi* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. *Dakle d je metrika na X.*

Za d kažemo da je diskretna metrika na X.

1.2 Nizovi u metričkom prostoru

Definicija 1.2.1. *Niz u skupu S je svako preslikavanje $\mathbb{N} \to S$. Ako je $x : \mathbb{N} \to S$ onda za svaki $n \in \mathbb{N}$ sa x_n označavamo $x(n)$, a niz x označavamo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ili (x_n).*

Definicija 1.2.2. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je (x_n) niz u X te neka je $x_0 \in X$. Kažemo da niz (x_n) teži ili konvergira prema x_0 u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, x_0) < \varepsilon$.*
Ako niz (x_n) teži prema x_0 pišemo $x_n \to x_0$.

Primjer 1.2.3. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je $c \in X$. Neka je (x_n) niz u X definiran s $x_n = c$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada $x_n \to c$.*

Naime za proizvoljan $\varepsilon > 0$ možemo uzeti bilo koji $n_0 \in \mathbb{N}$ te će tada vrijediti da je $d(x_n, c) < \varepsilon$ za svaki $n \geq n_0$.

Definicija 1.2.4. *Neka je (X, d) metrički prostor i neka je (x_n) niz u X. Kažemo da je (x_n) konvergentan niz u metričkom prostoru (X, d) ako postoji $x_0 \in X$ takav da $x_n \to x_0$.*

Propozicija 1.2.5. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je (x_n) niz u X. Pretpostavimo da su $x_0 \in X$ i $y_0 \in X$ takvi da $x_n \to x_0$ i $x_n \to y_0$. Tada je $x_0 = y_0$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi da je $d(x_n, x_0) < \varepsilon$. Nadalje postoji $n_0' \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0'$ vrijedi da je $d(x_n, y_0) < \varepsilon$.
Neka je $n = \max\{n_0, n_0'\}$.
Tada je $n \geq n_0$ i $n \geq n_0'$ pa vrijedi $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ i $d(x_n, y_0) < \varepsilon$. Stoga je:

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, y_0) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Dakle $d(x_0, y_0) < 2\varepsilon$ za svaki $\varepsilon > 0$. Pretpostavimo da je $x_0 \neq y_0$. Tada je $d(x_0, y_0) > 0$ pa za $\varepsilon = \frac{d(x_0,y_0)}{2} > 0$ slijedi:

$$d(x_0, y_0) < 2\varepsilon = 2 \cdot \frac{d(x_0, y_0)}{2} = d(x_0, y_0),$$

što je kontradikcija. Prema tome $x_0 = y_0$. □

Definicija 1.2.6. *Ako je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X i $x_0 \in X$ takav da $x_n \to x_0$, onda za x_0 kažemo da je limes niza (x_n) u (X, d).*

Propozicija 1.2.5 kaže da je limes niza u metričkom prostoru, ako postoji, jedinstven.

Definicija 1.2.7. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $x_0 \in X$. Kažemo da je x_0 gomilište niza (x_n) ako za svaki $\varepsilon > 0$ i $N \in \mathbb{N}$ postoji $n \geq N$ takav da je $d(x_n, x_0) < \varepsilon$.*

Propozicija 1.2.8. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je (x_n) niz u X. Pretpostavimo da je x_0 limes niza (x_n) u (X, d). Tada je x_0 gomilište niza (x_n) u (X, d).*

Dokaz. Neka su $\varepsilon > 0$ i $N \in \mathbb{N}$. Budući da $x_n \to x_0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, x_0) < \varepsilon$. Definiramo $n = \max\{n_0, N\}$. Tada je $n \geq N$ te je $d(x_n, x_0) < \varepsilon$, prema tome x_0 je gomilište niza (x_n).

□

Definicija 1.2.9. *Za niz (x_n) u skupu S kažemo da je stacionaran ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n = x_{n_0}$ za svaki $n \geq n_0$.*

Primjer 1.2.10. *Neka je (X, d) metrički prostor i (x_n) niz u X te neka je $c \in X$. Pretpostavimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n = c$ za svaki $n \geq n_0$. Tada $x_n \to c$.*

Naime, neka je $\varepsilon > 0$. Tada da svaki $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, c) = d(c, c) = 0 < \varepsilon$.

Primjer 1.2.11. *Neka je X neprazan skup te neka je d diskretna metrika na X. Pretpostavimo da je (x_n) konvergentan niz u metričkom prostoru (X, d). Tada je (x_n) stacionaran niz u X.*

Naime postoji $x_0 \in X$ takav da $x_n \to x_0$ u (X, d). Slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi da je $d(x_n, x_0) < \frac{1}{2}$. Iz definicije diskretne metrike slijedi $x_n = x_0$ za svaki $n \geq n_0$. Prema tome niz (x_n) je stacionaran.

Napomena 1.2.12. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je (x_n) stacionaran niz u X. Tada je (x_n) konvergentan niz u (X, d).*
Naime prema definiciji stacionarnog niza postoje $c \in \mathbb{N}$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da je $x_n = c$ za sve $n \geq n_0$. Stoga, ako je $\varepsilon > 0$ vrijedi $d(x_n, c) = 0 < \varepsilon$ za svaki $n \geq n_0$. Prema tome $x_n \to c$.

Primjer 1.2.13. *Neka je X skup koji ima barem dva elementa. Neka je d diskretna metrika na X. Odaberimo $a, b \in X$. Neka je*

$$x_n = \begin{cases} a, \text{ ako je } n \text{ neparan }, \\ b, \text{ ako je } n \text{ paran.} \end{cases}$$

Tvrdimo da je a gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru (X, d).

Neka su $\varepsilon > 0$ i $N \in \mathbb{N}$. Odaberimo neparan broj n takav da je $n \geq N$. Tada je $x_n = a$ pa je $d(x_n, a) = 0 < \varepsilon$. Prema definiciji gomilišta niza u metričkom prostoru (X, d) slijedi da je a gomilište niza (x_n) u (X, d). No, niz (x_n) nije konvergentan u (X, d). Naime kada bi niz (x_n) bio konvergentan onda bi prema primjeru 1.2.11 bio stacionaran, a očito je da niz nije stacionaran.

Prethodni primjer pokazuje da gomilište niza ne mora biti limes niza.

Definicija 1.2.14. *Za funkciju* $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *kažemo da je strogo rastuća ako za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $p(n) < p(n + 1)$*.*

Propozicija 1.2.15. *Neka je* $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strogo rastuća funkcija.*

1) Za sve $i, j \in \mathbb{N}$ *takve da je* $i < j$ *vrijedi* $p(i) < p(j)$*.*

2) Za svaki $n \in \mathbb{N}, n \leq p(n)$*.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da za sve $i, k \in \mathbb{N}$ vrijedi $p(i) < p(i + k)$. Fiksirajmo $i \in \mathbb{N}$ i dokažimo da $p(i) < p(i + k)$ vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}$ indukcijom.
Za $k = 1$
$$p(i) < p(i + 1)$$
vrijedi po definiciji strogo rastuće funkcije. Pretpostavimo da $p(i) < p(i+k)$ vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$. Vrijedi:
$$p(i + k) < p(i + k + 1)$$
jer je p strogo rastuća funkcija. Slijedi:
$$p(i) < p(i + k) < p(i + k + 1)$$
odnosno
$$p(i) < p(i + k + 1).$$
Time smo dokazali da $p(i) < p(i + k)$ vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}$.
Dokažimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n \leq p(n)$ indukcijom po n. Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da je $n \leq p(n)$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Iz $p(n) < p(n+1)$ slijedi $n < p(n+1)$. Općenito ako su $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je $a < b$ onda je $a + 1 \leq b$. Time smo pokazali da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

Definicija 1.2.16. *Neka je* X *skup i neka su* (x_n) *i* (y_n) *dva niza u* X*. Kažemo da je niz* (y_n) *podniz niza* (x_n) *ako postoji strogo rastuća funkcija* $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *takva da je* $y_n = x_{p_n}$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$*.*

Primjer 1.2.17. *Neka je* X *skup te neka su* $a, b \in X$*. Neka je* (x_n) *niz u* X

$$x_n = \begin{cases} a, \text{ ako je } n \text{ neparan}, \\ b, \text{ ako je } n \text{ paran}. \end{cases}$$

Neka je (y_n) *niz u* X *definiran sa* $y_n = a$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$*. Tada je* (y_n) *podniz niza* (x_n)*.*

Naime neka je $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa* $p(n) = 2n + 1$*. Očito je* p *strogo rastuća funkcija, a za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $y_n = x_{p_n}$*. Analogno vidimo da je niz* (z_n) *u* X *definiran sa* $z_n = b$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *podniz niza* (x_n)*.*

Propozicija 1.2.18. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je (x_n) niz u X te neka je $a \in X$. Pretpostavimo da postoji podniz (y_n) niza (x_n) takav da $y_n \to a$. Tada je a gomilište niza (x_n) u (X, d).*

Dokaz. Neka su $\varepsilon > 0$ i $N \in \mathbb{N}$. Budući da

$$y_n \to a$$

postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ slijedi:

$$d(y_n, a) < \varepsilon.$$

Znamo da postoji strogo rastuća funkcija $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $y_n = x_{p_n}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga za svaki $n \geq n_0$ vrijedi da je

$$d(x_{p_n}, a) < \varepsilon.$$

Definirajmo

$$n = \max\{n_0, N\}.$$

Tada je $n \geq n_0$ pa vrijedi:

$$d(x_{p_n}, a) < \varepsilon.$$

Nadalje imamo $N \leq n$ pa iz propozicije 1.2.15 slijedi:

$$N \leq p(N) \leq p(n).$$

Dakle $N \leq p(n)$. Označimo s $k = p(n)$. Imamo $N \leq k$ te iz $d(x_{p_n}, a) < \varepsilon$ slijedi:

$$d(x_k, a) < \varepsilon.$$

Odnosno za svaki $\varepsilon > 0$ i za svaki $N \in \mathbb{N}$ postoji $k \geq N$ takav da je $d(x_k, a) < \varepsilon$. Prema tome a je gomilište niza (x_n).

□

Lema 1.2.19. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je (x_n) niz u X te neka je $a \in X$ takav da je $d(x_n, a) \leq \frac{1}{n}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada $x_n \to a$.*

Dokaz. Uzmimo $\varepsilon > 0$ i odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Tada za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $n > \frac{1}{\varepsilon}$ pa je $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Znamo da je $d(x_n, a) \leq \frac{1}{n}$ stoga slijedi $d(x_n, a) < \varepsilon$. Dakle za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, a) < \varepsilon$. Prema tome $x_n \to a$. □

Propozicija 1.2.20. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je (x_n) niz u X te neka je $a \in X$. Pretpostavimo da je a gomilište niza (x_n). Tada postoji podniz niza (x_n) koji teži prema a.*

Dokaz. Definiramo induktivno funkciju $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ na sljedeći način. Budući da je a gomilište niza (x_n) postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_k, a) < 1$. Definiramo

$$p(1) = k$$

dakle $d(x_{p(1)}, a) < 1$. Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da smo definirali $p(n)$. Budući da je a gomilište niza (x_i) postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$m \geq p(n) + 1 \quad \text{i} \quad d(x_m, a) < \frac{1}{n+1}.$$

Definiramo $p(n + 1) = m$.

Dakle

$$p(n+1) \geq p(n) + 1 \quad i \quad d(x_{p(n+1)}, a) < \frac{1}{n+1}.$$

Na ovaj način smo definirali funkciju $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Kako je $p(n + 1) \geq p(n) + 1$ slijedi da je

$$p(n+1) > p(n)$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle p je strogo rastuća funkcija. Iz $d(x_{p(1)}, a) < 1$ i $d(x_{p(n+1)}, a) < \frac{1}{n+1}$ slijedi da je

$$d(x_{p(n)}, a) < \frac{1}{n}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Imamo da je niz $(x_{p(n)})$ podniz niza (x_n). Te zbog leme 1.2.19 i $d(x_{p(n)}, a) < \frac{1}{n}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ slijedi da

$$x_{p(n)} \to a.$$

Time je tvrdnja dokazana.

□

1.3 Kompaktni metrički prostori

Definicija 1.3.1. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je kompaktan ako svaki niz u X ima gomilište u (X, d).*

Iz propozicija 1.2.20 i 1.2.18 odmah dobivamo sljedeću tvrdnju:

Propozicija 1.3.2. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada je (X, d) kompaktan ako i samo ako svaki niz u X ima podniz koji je konvergentan u (X, d).*

Definicija 1.3.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $x_0 \in X$ i $r > 0$. Definiramo $K(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$. Za $K(x_0, r)$ kažemo da je otvorena kugla oko x_0 radijusa r u metričkom prostoru (X, d). Ako želimo naglasiti i metriku umjesto $K(x_0, r)$ pišemo $K_d(x_0, r)$.*

Definicija 1.3.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $U \subseteq X$. Kažemo da je U otvoren skup u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$.*

Napomena 1.3.5. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka su $x_0 \in \mathbb{R}$ i $r > 0$. Tada je*

$$K(x_0, r) = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle,$$

što slijedi iz sljedećih ekvivalencija:

$$x \in K(x_0, r) \Leftrightarrow |x - x_0| < r \Leftrightarrow -r < x - x_0 < r \Leftrightarrow x_0 - r < x < x_0 + r \Leftrightarrow x \in \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle.$$

Uočimo sljedeće: ako je (X, d) metrički prostor onda je X otvoren skup u (X, d). Nadalje $\emptyset$ je otvoren u (X, d).

Propozicija 1.3.6. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $x_0 \in X$ i $r > 0$. Tada je $K(x_0, r)$ otvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Neka je $x \in K(x_0, r)$. Tada je $d(x, x_0) < r$ pa je $r - d(x, x_0) > 0$. Definiramo $s = r - d(x, x_0)$. Tvrdimo da je $K(x, s) \subseteq K(x_0, r)$. Neka je $y \in K(x, s)$. Tada je

$$d(y, x_0) \leq d(x_0, x) + d(x, y) \leq s + d(x, x_0) = r.$$

Dakle $d(y, x_0) < r$ odnosno $y \in K(x_0, r)$. Zaključujemo da je $K(x_0, r)$ otvoren skup u (X, d). $\square$

Definicija 1.3.7. *Za skup X sa $\mathcal{P}(X)$ označavamo partitivni skup od X, odnosno skup svih podskupova od X. Neka su A i X skupovi te neka je $\mathcal{U} : A \to \mathcal{P}(X)$ funkcija. Tada za $\mathcal{U}$ kažemo da je indeksirana familija podskupova od X. Za $\alpha \in A$ umjesto $\mathcal{U}(\alpha)$ pišemo $\mathcal{U}_\alpha$, a funkciju $\mathcal{U}$ označavamo s $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$. Ako je $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija podskupova od X onda definiramo $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha = \{x \mid \exists\, \alpha \in A, x \in \mathcal{U}_\alpha\}$.*

Propozicija 1.3.8. *Neka je (X, d) metrički prostor.*

1) $\emptyset$ i X su otvoreni u (X, d).

2) Ako je $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija podskupova od X takva da je $(\mathcal{U}_\alpha)$ otvoren skup u (X, d) za svaki $\alpha \in A$ onda je $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$ otvoren skup u (X, d).

3) Ako su U i V otvoreni skupovi u (X, d) onda je $U \cap V$ otvoren skup u (X, d).

Dokaz. Već smo vidjeli da prva tvrdnja vrijedi.

Dokažimo drugu tvrdnju. Pretpostavimo da je $(\mathcal{U}_\alpha), \alpha \in A$ indeksirana familija podskupova od X takva da je $\mathcal{U}_\alpha$ otvoren skup u (X, d) za svaki $\alpha \in A$. Tvrdimo da je $\bigcup\limits_{\alpha\in A} \mathcal{U}_\alpha$ otvoren skup u (X, d).

Neka je $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in A} \mathcal{U}_\alpha$. Tada postoji $\alpha_0 \in A$ takav da je $x \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$. Kako je $\mathcal{U}_{\alpha_0}$ otvoren postoji $r > 0$ takav da $K(x, r) \subseteq \mathcal{U}_{\alpha_0}$ pa je $K(x, r) \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in A} \mathcal{U}_\alpha$. Dakle $\bigcup\limits_{\alpha\in A} \mathcal{U}_\alpha$ je otvoren skup u (X, d).

Dokažimo treću tvrdnju. Neka su U i V otvoreni skupovi u (X, d). Dokažimo da je $U \cap V$ otvoren skup u (X, d). Uzmimo $x \in U \cap V$. Tada je $x \in U$ i $x \in V$. Kako su U i V otvoreni postoji $r_1 > 0$ takav da je $K(x, r_1) \subseteq U$ i postoji $r_2 > 0$ takav da je $K(x, r_2) \subseteq V$. Definiramo $r = \min\{r_1, r_2\}$. Tada

$$\text{iz } r \le r_1 \text{ slijedi } K(x, r) \subseteq K(x, r_1) \subseteq U,$$

$$\text{iz } r \le r_2 \text{ slijedi } K(x, r) \subseteq K(x, r_2) \subseteq V.$$

Dakle $K(x, r) \subseteq U \cap V$, stoga je $U \cap V$ otvoren. □

Definicija 1.3.9. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $A \subseteq X$. Kažemo da je A omeđen u metričkom prostoru (X, d) ako postoje $x_0 \in X$ i $r > 0$ takvi da je $A \subseteq K(x_0, r)$.*
Za metrički prostor (X, d) kažemo da je omeđen ako je X omeđen skup u (X, d). Dakle metrički prostor je omeđen ako i samo ako postoje $x_0 \in X$ i $r > 0$ takvi da je $X = K(x_0, r)$.

Definicija 1.3.10. *Za metrički prostor kažemo da je potpuno omeđen ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoje $x_1, ..., x_n \in X$ takvi da je $X = K(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup K(x_n, \varepsilon)$.*

Lema 1.3.11. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je A omeđen skup u (X, d). Tada za svaki $x \in X$ postoji $r > 0$ takav da je $A \subseteq K(x, r)$.*

Dokaz. Budući da je A omeđen skup u (X, d) postoje $x_0 \in X$ i $r > 0$ takvi da je $A \subseteq K(x_0, r)$. Neka je $x \in X$. Definiramo:

$$s = d(x, x_0) + r.$$

Očito je $s > 0$. Tvrdimo da je $A \subseteq K(x, s)$. Uzmimo $a \in A$. Želimo pokazati da je $d(x, a) < s$. Imamo:

$$d(a, x) \le d(a, x_0) + d(x_0, x) < r + d(x_0, x) = s.$$

Dakle $d(a, x) < s$ za svaki $a \in A$. Zaključujemo $A \subseteq K(x, s)$. □

Propozicija 1.3.12. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su A i B omeđeni skupovi u (X, d). Tada je $A \cup B$ omeđen skup u (X, d).*

Dokaz. Odaberimo $x_0 \in X$ prema lemi 1.3.11 postoje $r_1 > 0$ i $r_2 > 0$ takvi da je $A \subseteq K(x_0, r_1)$ i $B \subseteq K(x_0, r_2)$. Neka je $r = \max\{r_1, r_2\}$. Očito je $r > 0$. Tada je $A \subseteq K(x_0, r)$ i $B \subseteq K(x_0, r)$ pa je $A \cup B \subseteq K(x_0, r)$. Prema tome $A \cup B$ je omeđen skup u (X, d). □

Korolar 1.3.13. *Neka je (X, d) metrički prostor. Ako su $A_1, \dots, A_n$ omeđeni skupovi u (X, d). Tada je $A_1 \cup \dots \cup A_n$ omeđen skup u (X, d).*

Dokaz. Dokažimo tvrdnju indukcijom. Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka su $A_1, \dots, A_{n+1}$ omeđeni skupovi u (X, d). Vrijedi

$$A_1 \cup \dots \cup A_{n+1} = (A_1 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}.$$

Prema induktivnoj pretpostavci skup $A_1 \cup \dots \cup A_n$ je omeđen pa iz propozicije 1.3.12 slijedi da je skup

$$(A_1 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}$$

omeđen. Dakle $A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}$ je omeđen skup (X, d). Time je propozicija dokazana. □

Korolar 1.3.14. *Svaki potpuno omeđen metrički prostor je omeđen.*

Dokaz. Neka je (X, d) potpuno omeđen metrički prostor.

Odaberimo $\varepsilon > 0$. Tada postoje $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ takvi da je

$$X = K(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup K(x_n, \varepsilon).$$

Svaka otvorena kugla u (X, d) je omeđen skup u (X, d). Iz korolara 1.3.13 slijedi da je $K(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup K(x_n, \varepsilon)$ omeđen skup u (X, d). Kako je $X = K(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup K(x_n, \varepsilon)$ slijedi da je X omeđen skup u (X, d). Prema tome metrički prostor (X, d) je omeđen. □

Primjer 1.3.15. *Neka je X neprazan skup te neka je d diskretna metrika na X. Neka su $x_0 \in X$ i $r > 0$. Tada je:*

$$K(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\}, \text{ ako je } r \leq 1, \\ X, \text{ ako je } r > 1. \end{cases}$$

Iz ovog zaključujemo da je (X, d) omeđen metrički prostor jer možemo odabrati bilo koji $x_0 \in X$ i imamo $K(x_0, 2) = X$.
Pretpostavimo sada da je X beskonačan skup. Tvrdimo da metrički prostor (X, d) nije potpuno omeđen.
Pretpostavimo suprotno. Uzmimo $\varepsilon = 1$. Tada postoje $x_1, \dots, x_n \in X$ takvi da je

$$X = K(x_1, 1) \cup \dots \cup K(x_n, 1) = \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_n\}$$

pa slijedi da je X konačan što je u kontradikciji sa pretpostavkom. Dakle (X, d) nije potpuno omeđen.

Teorem 1.3.16. *Svaki kompaktan metrički metrički prostor je potpuno omeđen.*

Dokaz. Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor.

Pretpostavimo suprotno, da (X, d) nije potpuno omeđen. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da za sve $x_1, ..., x_n \in X$ vrijedi da je

$$X \neq K(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup K(x_n, \varepsilon).$$

Definiramo induktivno niz (x_n) u X na sljedeći način. Neka je $x_1 \in X$ proizvoljan. Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da smo definirali $x_1, ..., x_n$. Znamo da je

$$X \neq K(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup K(x_n, \varepsilon)$$

pa postoji

$$x_{n+1} \in X \setminus (K(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup K(x_n, \varepsilon)) . \tag{1.1}$$

Na taj način definiramo niz (x_n) u X.

Budući da je (X, d) kompaktan metrički prostor postoji $a \in X$ takav da je a gomilište niza (x_n). Kako je a gomilište niza (x_n) postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x_k, a) < \varepsilon$$

pa slijedi $a \in K(x_k, \varepsilon)$.

Prema propoziciji 1.3.6 skup $K(x_k, \varepsilon)$ je otvoren u (X, d) pa postoji $r > 0$ takav da je

$$K(a, r) \subseteq K(x_k, \varepsilon).$$

Budući da je a gomilište niza (x_n) postoji $m \geq k + 1$ takav da je $d(x_m, a) < r$. Slijedi da je $x_m \in K(a, r)$ odnosno $x_m \in K(x_k, \varepsilon)$. Prema (1.1) vrijedi

$$x_m \in X \setminus (K(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup K(x_{m-1}, \varepsilon)).$$

Dakle $x_m \notin K(x_i, \varepsilon)$, za $i = 1, \ldots, m - 1$. Kako je $m \geq k + 1$ slijedi $k \leq m - 1$, stoga $x_m \notin K(x_k, \varepsilon)$ što je u kontradikciji sa $x_m \in K(a, r)$. Zaključujemo da je metrički prostor (X, d) potpuno omeđen. $\square$

Korolar 1.3.17. *Svaki kompaktan metrički prostor je omeđen.*

Primjer 1.3.18. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Tvrdimo da metrički prostor $(\mathbb{R}^n, d)$ nije omeđen pa time ni kompaktan.*

Pretpostavimo suprotno. Prema lemi 1.3.11 uzmemo $x_0 = (0, ..., 0)$ pa postoji $r > 0$ takav da je

$$\mathbb{R}^n \subseteq K(x_0, r).$$

Neka je $x = (r + 1, 0, \dots 0) \in \mathbb{R}^n$. Tada je

$$d(x, x_0) = r + 1 > r,$$

a to je u kontradikciji sa $\mathbb{R}^n \subseteq K(x_0, r)$.

Prema tome $(\mathbb{R}^n, d)$ nije omeđen metrički prostor pa iz korolara 1.3.17 slijedi da nije kompaktan.

1.4 Potpuni metrički prostori

Definicija 1.4.1. *Neka je (X, d) metrički prostor i (x_n) niz u X. Za (x_n) kažemo da je Cauchyjev niz u X ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n, m \in \mathbb{N}, n, m > n_0$ vrijedi $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Propozicija 1.4.2. *Neka je (X, d) metrički prostor i (x_n) konvergentan niz u (X, d). Tada je (x_n) Cauchyjev niz u (X, d).*

Dokaz. Budući da je (x_n) konvergentan niz postoji $x_0 \in X$ takav da $x_n \to x_0$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Neka su $m, n \geq n_0$. Imamo:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dakle $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ za sve $m, n \geq n_0$ pa je niz (x_n) Cauchyjev niz. □

Definicija 1.4.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $Y \subseteq X, Y \neq \emptyset$. Neka je $p : Y \times Y \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $p(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$ za sve $y_1, y_2 \in Y$. Za metrički prostor (Y, d) kažemo da je potprostor od (X, d).*

Uočimo da je $p = d\mid_{X \times X}$.
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$ te neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$. Tada za $d\mid_{X \times X}$ kažemo da je euklidska metrika na X.

Primjer 1.4.4. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Tada niz $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ teži u 0 u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$.*

Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$ vrijedi:

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow d\left(\frac{1}{n}, 0\right) < \varepsilon.$$

Dakle za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $d\left(\dfrac{1}{n}, 0\right) < \varepsilon$. Odnosno $\frac{1}{n} \to 0$.

Primjer 1.4.5. *Neka je $X = \langle 0, +\infty\rangle$ te neka je d euklidska metrika na X. Neka je (x_n) niz u X definiran sa $x_n = \frac{1}{n}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je x_n Cauchyjev niz u (X, d) ali da nije konvergentan u (X, d).*

Prema primjeru 1.4.4 znamo da $x_n \to 0$ u $(\mathbb{R}, d')$ gdje je d' euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Slijedi da je niz (x_n) konvergentan u $(\mathbb{R}, d')$, stoga je i Cauchyjev u $(\mathbb{R}, d')$. Budući da je

$$d'(x_n, x_m) = d(x_n, x_m)$$

za sve $m, n \in \mathbb{N}$, slijedi da je (x_n) Cauchyjev niz i u (X, d). No (x_n) nije konvergentan niz u (X, d). Pretpostavimo suprotno da postoji $L \in X$ takav da $x_n \to L$ u (X, d). Tada $x_n \to L$ u $(\mathbb{R}, d')$ no zbog jedinstvenosti limesa slijedi $L = 0$ što nije moguće jer $0 \notin X$.

Definicija 1.4.6. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je potpun ako je svaki Cauchyjev niz u (X, d) konvergentan u (X, d).*

Uočimo da prema primjeru 1.4.5 metrički prostor $(\langle 0, +\infty\rangle, d)$ nije potpun, pri čemu je d euklidska metrika na $\langle 0, +\infty\rangle$.

Propozicija 1.4.7. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je (x_n) Cauchyjev niz u (X, d). Pretpostavimo da je a gomilište niza (x_n) u (X, d). Tada $x_n \to a$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$, kako je niz (x_n) Cauchyjev tada za sve $n, m \in \mathbb{N}$ takve da $n, m > n_0$ vrijedi:

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

No kako je a gomilište niza (x_n) tada postoji $n' \in \mathbb{N}$ takav da je $n' \geq n_0$ te vrijedi:

$$d(x_{n'}, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sada za svaki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$ vrijedi:

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n'}) + d(x_{n'}, a) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dakle za $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, a) < \varepsilon$ pa je niz (x_n) konvergentan, odnosno $x_n \to a$. □

Korolar 1.4.8. *Svaki kompaktan metrički prostor je potpun.*

Dokaz. Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor. Neka je (x_n) Cauchyjev niz u (X, d), budući da je (X, d) kompaktan postoji $a \in X$ takav da je a gomilište niza (x_n). Prema propoziciji 1.4.7 slijedi $x_n \to a$. Time smo pokazali da je svaki Cauchyjev niz u (X, d) konvergentan pa je metrički prostor (X, d) potpun. □

Primjer 1.4.9. *Neka je X neprazan skup te neka je d diskretna metrika na (X, d). Tada je (X, d) potpun metrički prostor.*

Neka je (x_n) Cauchyjev niz u (X, d). Neka je $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n, m \geq n_0$ vrijedi

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Slijedi $x_n = x_m$ stoga za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$x_n = x_{n_0}$$

pa prema primjeru 1.2.10 slijedi $x_n \to x_{n_0}$ pa je niz (x_n) konvergentan u metričkom prostoru (X, d). Zaključujemo da je (X, d) potpun metrički prostor.

Metrički prostor (X, d) ne mora biti potpuno omeđen (primjer 1.3.15). Prema tome potpun metrički prostor ne mora biti potpuno omeđen pa ne mora biti niti kompaktan.

Primjer 1.4.10. *Neka je $X = \langle 0, 1]$ te neka je d euklidska metrika na X. Tada metrički prostor (X, d) nije potpun.*

Naime za niz (x_n) u X definiran sa $x_n = \frac{1}{n}$ analogno kao u primjeru 1.4.5 vidimo da je Cauchyjev u (X, d) ali nije konvergentan u (X, d). Stoga metrički prostor (X, d) nije potpun. Pokažimo da je metrički prostor (X, d) potpuno omeđen.

Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Za $i \in \{1, ..., n\}$ definiramo $x_i = \dfrac{i}{n}$. Tvrdimo da je $X = K(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup K(x_n, \varepsilon)$.
Neka je $z \in X$. Tada je $z < \frac{1}{n}$ ili postoji $i \in \{1, ..., n\}$ takav da je $z \in [x_i, x_{i+1}]$.

U prvom slučaju vrijedi

$$\left| z - \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{n}$$

odnosno

$$|z - x_1| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

U drugom slučaju iz $z \in [x_i, x_{i+1}]$ slijedi:

$$|z - x_i| < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

pa je $z \in K(x_i, \varepsilon)$. Dakle $z \in K(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup K(x_n, \varepsilon)$. Prema tome vrijedi

$$X = K(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup K(x_n, \varepsilon).$$

Time smo dokazali da je (X, d) potpuno omeđen metrički prostor.

Iz prethodna dva primjera vidimo da potpun metrički prostor ne mora biti potpuno omeđen te da potpuno omeđen metrički prostor ne mora biti potpun.

1.5 Karakterizacija kompaktnosti preko potpunosti i potpune omeđenosti

Definicija 1.5.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $F \subseteq X$. Za F kažemo da je zatvoren skup u (X, d) ako je $F^c = X \setminus F$ otvoren skup u (X, d).*

Neka je X skup te neka je $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija podskupova od X. Definiramo presjek:

$$\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \{x \in X \mid x \in F_\alpha, \forall\, \alpha \in A\}.$$

Propozicija 1.5.2. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

1) $\emptyset, X$ su zatvoreni skupovi u (X, d).

2) Neka je $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija podskupova od X takva da je F_α zatvoren skup u (X, d) za svaki $\alpha \in A$. Tada je $\bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$ zatvoren skup u (X, d).

3) Neka su F i G zatvoreni skupovi u (X, d). Tada je i $F \cup G$ zatvoren skup u (X, d).

Dokaz. Tvrdnja 1) očito vrijedi.

Pokažimo tvrdnju 2). Tvrdimo

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha^c.$$

Neka je $x \in X$. Tada vrijedi

$$x \in \left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \right)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \Leftrightarrow \text{postoji}\, \alpha \in A \text{ takva da } x \notin F_\alpha$$

$$\Leftrightarrow \text{postoji } \alpha \in A \text{ takva da } x \in F_\alpha^c \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha^c.$$

Prema tome

$$x \in \left(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\right)^c \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha^c$$

odnosno vrijedi

$$\left(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha^c.$$

Za svaki $\alpha \in A$ vrijedi F_α^c je otvoren skup u metričkom prostoru (X, d) pa iz propozicije 1.3.8 slijedi $\bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha^c$ je otvoren skup u (X, d).

Kako je $\left(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha^c$ slijedi da je $\left(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\right)^c$ otvoren skup u (X, d) pa je $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ zatvoren skup u (X, d).

Pokažimo još tvrdnju 3).
Lako se vidi da je $(F\cup G)^c = F^c \cap G^c$. Stoga je $(F\cup G)^c$ otvoren kao presjek dvaju otvorenih skupova F^c i G^c. Prema tome $F \cup G$ je zatvoren u (X, d). □

Definicija 1.5.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $x_0 \in X$ i $r > 0$. Definiramo $\overline{K}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$. Tada za $\overline{K}(x_0, r)$ kažemo da je zatvorena kugla u (X, d) oko x_0 radijusa r.*

Propozicija 1.5.4. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ i $r > 0$. Tada je $\overline{K}(x_0, r)$ zatvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Neka je $x \in X \setminus \overline{K}(x_0, r)$. Tada vrijedi $d(x, x_0) > r$. Definiramo:

$$s = d(x_0, x) - r$$

pri čemu je $s > 0$. Tvrdimo da je $K(x, s) \subseteq X \setminus \overline{K}(x_0, r)$.
Uzmimo $z \in K(x, s)$. Tada vrijedi $d(z, x) < s$. Znamo da je $z \in X$. Pokažimo da $z \notin \overline{K}(x_0, r)$.
Pretpostavimo suprotno neka je $z \in \overline{K}(x_0, r)$. Tada je $d(z, x_0) \leq r$.
Imamo:

$$d(x, x_0) \leq d(x, z) + d(z, x_0) < s + r = d(x, x_0)$$

Slijedi $d(x, x_0) < d(x, x_0)$ što je kontradikcija. Dakle $z \notin \overline{K}(x_0, r)$ pa je $z \in X \setminus \overline{K}(x_0, r)$.
$X \setminus \overline{K}(x_0, r)$ je otvoren skup u (X, d) pa je $\overline{K}(x_0, r)$ zatvoren skup u (X, d). □

Definicija 1.5.5. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Za $L \in \mathbb{R}$ kažemo da je gornja (donja) međa skupa S ako za svaki $x \in S$ vrijedi $x \leq L$ ($x \geq L$). Za $S \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je omeđen odozgo (odozdo) ako postoji barem jedna gornja (donja) međa skupa S.*

Definicija 1.5.6. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $L \in \mathbb{R}$. Kažemo da je L supremum skupa S ako je L najmanja gornja međa skupa S, odnosno ako vrijedi sljedeće:*

1) L je gornja međa skupa S;

2) za svaku gornju među L' od S vrijedi $L \leq L'$.

Ako postoji supremum skupa S označavamo ga sa $\sup S$.

Propozicija 1.5.7. *Ako supremum skupa S postoji onda je jedinstven.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka su L_1 i L_2 supremumi od S. Kako je L_1 supremum vrijedi $L_1 \leq L_2$. Kako je L_2 supremum vrijedi $L_2 \leq L_1$. Dakle $L_1 = L_2$, supremum je jedinstven. □

Aksiom potpunosti: Neka su S i T neprazni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $x \leq y$ za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in T$. Tada postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq z \leq y$ za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in T$.

Propozicija 1.5.8. *Neka je S neprazan odozgo omeđen podskup od $\mathbb{R}$. Tada S ima supremum.*

Dokaz. Neka je $T = \{y \in \mathbb{R} \mid y \text{ gornja međa od } S\}$. Tada je $T \neq \emptyset$ jer je S odozgo omeđen. Nadalje, vrijedi $x \leq y$ za sve $x \in S, y \in T$. Prema aksiomu potpunosti postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq z \leq y$ za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in T$. Budući da je $x \leq z$ za svaki $x \in S$ slijedi da je z gornja međa skupa S, kako je $z \leq y$ za svaki $y \in T$ slijedi z je najmanja gornja međa. □

Definicija 1.5.9. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je A neprazan omeđen skup u (X, d). Tada postoje $x_0 \in X$ i $r > 0$ takvi da je $A \subseteq K(x_0, r)$. Neka su $x, y \in A$. Tada su $x, y \in K(x_0, r)$. Tada je $d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < r + r = 2r$. Dakle $d(x, y) < 2r$ za sve $x, y \in A$. To znači da je skup $\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ odozgo omeđen. Definiramo* $\operatorname{diam} A = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$.

Uočimo sljedeće: ako su $x, y \in A$ onda je $d(x, y) \leq \operatorname{diam} A$.

Propozicija 1.5.10. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je (x_n) niz u X te neka je $x_0 \in X$. Tada $x_n \to x_0$ ako i samo ako za svaki otvoreni skup U u (X, d) takav da je $x_0 \in U$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Neka $x_n \to x_0$ i neka je U otvoren skup u (X, d) takav da je $x_0 \in U$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $K(x_0, r) \subseteq U$. Kako $x_n \to x_0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, x_0) < r$ odnosno za svaki $n \geq n_0$ $x_n \in K(x_0, r) \subseteq U$. Dakle $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_0$.

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da za svaki otvoren skup U u (X, d) takav da je $x_0 \in U$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$. Želimo pokazati $x_n \to x_0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Definiramo $U = K(x_0, \varepsilon)$. Tada je U otvoren skup u (X, d) koji sadrži x_0 pa prema pretpostavci postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in K(x_0, r)$ odnosno za svaki $n \geq n_0$, $d(x_n, x_0) < \varepsilon$. Dakle $x_n \to x_0$. □

Lema 1.5.11. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je (x_n) niz u X te neka je $x_0 \in X$ takav da $x_n \to x_0$. Neka je F zatvoren skup u (X, d) te neka je $N \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in F$ za svaki $n \geq N$. Tada je $x_0 \in F$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada je $x_0 \in F^c$, no F^c je otvoren pa prema propoziciji 1.5.10 postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ je $x_n \in F^c$. Definiramo $n = \max\{N, n_0\}$. Tada za $n \geq N$ slijedi $x_n \in F$ te za $n \geq n_0$ slijedi $x_n \in F^c$. Odnosno $x_n \in F$ i $x_n \in F^c$ što nije moguće. Prema tome vrijedi tvrdnja leme. □

Teorem 1.5.12. *(Cantorov teorem o presjeku) Neka je (X, d) potpun metrički prostor te neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz zatvorenih, nepraznih i omeđenih skupova u (X, d) takvih da je $A_{n+1} \subseteq A_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te neka niz* $\operatorname{diam} A_n \to 0$. *Tada je $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ jednočlan skup.*

Dokaz. Dokažimo prvo da $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ne sadrži više od jedne točke.

Pretpostavimo suprotno. Neka su $x, y \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ takvi da $x \neq y$. Tada su $x, y \in A_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, stoga je

$$d(x, y) \leq \operatorname{diam} A_n$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Imamo $d(x, y) > 0$ jer je $x \neq y$. Zbog $\operatorname{diam} A_n \to 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi:

$$|\operatorname{diam} A_n - 0| < d(x, y).$$

Dobivamo kontradikciju sa $d(x, y) \leq \operatorname{diam} A_n$. Prema tome $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ima najviše jedan element.

Preostaje nam dokazati $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo da je $A_n \neq \emptyset$ pa odaberemo neki $x_n \in A_n$. Tvrdimo da je niz (x_n) Cauchyjev niz u (X, d).

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da za svaki $m \geq n$ vrijedi $A_m \subseteq A_n$. To dobivamo indukcijom po m, za $m = n$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $m \geq n$. Znamo da je $A_{m+1} \subseteq A_m$ pa iz $A_m \subseteq A_n$ slijedi $A_{m+1} \subseteq A_n$. Po principu matematičke indukcije tvrnja vrijedi za svaki $m \geq n$.

Dokažimo da je niz (x_n) Cauchyjev niz u (X, d). Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da $\operatorname{diam} A_n \to 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\operatorname{diam} A_{n_0} < \varepsilon.$$

Neka su $m, n \geq n_0$. Tada je $A_m \subseteq A_{n_0}$ i $A_n \subseteq A_{n_0}$ pa zbog $x_m \in A_m$ i $x_n \in A_n$ imamo da $x_m, x_n \in A_{n_0}$ pa je

$$d(x_m, x_n) \leq \operatorname{diam} A_{n_0} < \varepsilon.$$

Dakle za sve $m, n \geq n_0$ je $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ pa je niz (x_n) Cauchyjev niz u (X, d) po definiciji. No kako je (X, d) potpun metrički prostor slijedi da je niz (x_n) konvergentan u (X, d) odnosno postoji $x_0 \in X$ takav da $x_n \to x_0$. Tvrdimo da je $x_0 \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Uzmimo $N \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $n \geq N$ vrijedi

$$x_n \in A_n \subseteq A_N \Rightarrow x_n \in A_N.$$

Kako je $N \in \mathbb{N}$ proizvoljan iz leme 1.5.11 slijedi da je $x_0 \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Primjer 1.5.13. *Neka je $X = \langle 0, \infty \rangle$ te neka je d euklidska metrika na X. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ $A_n = \left\langle 0, \dfrac{1}{n} \right]$. Pokažimo da (X, d) nije potpun.*

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Imamo da je A_n zatvoren jer je $X \setminus A_n = \langle \frac{1}{n}, \infty \rangle$ otvoren, odnosno za svaki $x \in \langle \frac{1}{n}, \infty \rangle$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq \langle \frac{1}{n}, \infty \rangle$.

Skup A_n je omeđen. Uzmimo $K(1, 1) = \langle 0, 2 \rangle$. Tada je

$$\left\langle 0, \frac{1}{n} \right] \subseteq K(1, 1)$$

pa je A_n omeđen po definiciji.

Očito je A_n neprazan te vrijedi $A_{n+1} \subseteq A_n$.

Uočimo

$$\operatorname{diam} A_n \leq \frac{1}{n}.$$

Neka su $x, y \in A_n$. Tada su $x, y \in \left\langle 0, \dfrac{1}{n} \right]$ pa je

$$|x - y| \leq \frac{1}{n} \quad \textit{odnosno} \quad d(x, y) \leq \frac{1}{n}.$$

Dakle $\frac{1}{n}$ je gornja međa skupa $\{d(x, y) \mid x, y \in A_n\}$. No kako je

$$\operatorname{diam} A_n = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A_n\},$$

a supremum je najmanja gornja međa slijedi

$$\operatorname{diam} A_n \leq \frac{1}{n}$$

pa zbog $\frac{1}{n} \to 0$ *slijedi* $\operatorname{diam} A_n \to 0$.

Pokažimo da je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

Pretpostavimo da postoji $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. *No kako je* $x > 0$ *postoji* $n \in \mathbb{N}$ *takav da* $\frac{1}{n} < x$. *Slijedi* $x \notin \left\langle 0, \frac{1}{n} \right]$ *odnosno* $x \notin A_n$ *što je kontradikcija sa prepostavkom da je* $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

U ovom metričkom prostoru ne vrijedi Cantorov teorem to znači da (X, d) *nije potpun.*

Definicija 1.5.14. *Neka je* (x_n) *niz u skupu* X *te neka je* S *skup. Kažemo da je niz* (x_n) *beskonačan u* S *ako za svaki* $N \in \mathbb{N}$ *postoji* $n \geq N$ *takav da je* $x_n \in S$.

Propozicija 1.5.15. *Neka je* (X, d) *metrički prostor i* (x_n) *niz u* X *te neka je* $x_0 \in X$. *Tada je* x_0 *gomilište niza* (x_n) *u* (X, d) *ako i samo ako za svaki otvoren skup* U *u* (X, d) *takav da je* $x_0 \in U$ *vrijedi da je niz* (x_n) *beskonačan u* U.

Dokaz. $\Rightarrow$ Pretpostavimo da je x_0 gomilište niza (x_n). Neka je U otvoren skup u (X, d) takav da je $x_0 \in U$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $K(x_0, r) \subseteq U$. Neka je $N \in \mathbb{N}$. Tada postoji $n \geq N$ takav da je $d(x_n, x_0) < r$ pa slijedi $x_n \in K(x_0, r) \subseteq U$ odnosno $x_n \in U$. Dakle za svaki $N \in \mathbb{N}$ tada postoji $n \geq N$ takav da je $x_n \in U$ pa je (x_n) beskonačan u U.
$\Leftarrow$ Pretpostavimo da je za svaki otvoreni skup U u (X, d) takav da je $x_0 \in U$ niz (x_n) beskonačan u U. Pokažimo da je x_0 gomilište niza (x_n) u (X, d). Neka su $\varepsilon > 0$ i $N \in \mathbb{N}$. Imamo da je $K(x_0, \varepsilon)$ otvoren skup u (X, d) koji sadrži x_0 pa je niz (x_n) beskonačan u $K(x_0, \varepsilon)$. Slijedi da postoji $n \geq N$ takav da je $x_n \in K(x_0, \varepsilon)$ odnosno $d(x_n, x_0) < \varepsilon$. Dakle x_0 je gomilište niza (x_n) u (X, d). □

Propozicija 1.5.16. *Neka je* (x_n) *niz u skupu* X *te neka su* $m \in \mathbb{N}$ *i* $B_1, \dots, B_m$ *skupovi. Pretpostavimo da je* (x_n) *beskonačan u* $B_1 \cup \cdots \cup B_m$. *Tada postoji* $i \in \{1, \dots, m\}$ *takav da je* (x_n) *beskonačan u* B_i.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada za svaki $i \in \{1, \dots, m\}$ imamo da niz (x_n) nije beskonačan u B_i. Odnosno postoji $N_i \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq N_i$ vrijedi $x_n \notin B_i$.

Definiramo $N = \max\{N_1, \dots, N_m\}$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq N$. Slijedi da je $n \geq N_1 \Rightarrow x_n \notin B_1, \dots, n \geq N_m \Rightarrow x_n \notin B_m$. Dakle $x_n \notin B_1 \cup \cdots \cup B_m$ za svaki $n \geq N$. Ovo je kontradikcija sa činjenicom da je niz (x_n) beskonačan u $B_1 \cup \cdots \cup B_m$. □

Lema 1.5.17. *Neka je* (X, d) *potpuno omeđen metrički prostor. Neka je* F *neprazan zatvoren skup u* (X, d) *te neka je* $\varepsilon > 0$. *Tada postoje neprazni, zatvoreni i omeđeni skupovi* $A_1, \dots, A_n$ *u* (X, d) *takvi da je* $F = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ *te takvi da je* $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$ *za svaki* $i \in \{1, \dots, n\}$.

Napomena 1.5.18. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka su* $x_0 \in X$ *i* $r > 0$. *Očito je* $\overline{K}(x_0, r)$ *neprazan, omeđen skup u* (X, d). *Vrijedi*

$$\operatorname{diam} \overline{K}(x_0, r) \leq 2r.$$

Naime neka su $x, y \in \overline{K}(x_0, r)$. Imamo $d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \leq r + r = 2r$. Dakle $d(x, y) \leq 2r$ za svaki $x, y \in \overline{K}(x_0, r)$ pa je $2r$ gornja međa, no kako je supremum najmanja gornja međa slijedi $\operatorname{diam} \overline{K}(x_0, r) \leq 2r$. *Jednakost općenito ne vrijedi jer ako je d diskretna metrika na skupu X i $r = \frac{1}{2}$ tada za svaki $x_0 \in X$ vrijedi* $\operatorname{diam} \overline{K}(x_0, r) = \operatorname{diam}\{x_0\} = 0 \neq 2r, r > 0$.

Napomena 1.5.19. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su A i B neprazni podskupovi od X takvi da je B omeđen u (X, d) i $A \subseteq B$. Tada je A omeđen u (X, d) te je* $\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} B$.

Općenito vrijedi za $S, T \subseteq \mathbb{R}, S \subseteq T$. Tada je $\sup S \leq \sup T$. *Naime, kako je* $\sup T$ *gornja međa skupa T i $S \subseteq T$ tada je $supT$ gornja međa skupa S no kako je supremum najmanja gornja međa slijedi* $\sup S \leq \sup T$.

Dokaz. Budući da je (X, d) potpuno omeđen tada za $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ postoje $x_1, \ldots, x_m$ takvi da je

$$X = K\left(x_1, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cup \cdots \cup K\left(x_m, \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Slijedi:

$$X = \overline{K}\left(x_1, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cup \cdots \cup \overline{K}\left(x_m, \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Imamo:

$$F = F \cap X = F \cap \left(\overline{K}\left(x_1, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cup \cdots \cup \overline{K}\left(x_m, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right),$$

$$F = \left(F \cap \overline{K}\left(x_1, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right) \cup \cdots \cup \left(F \cap \overline{K}\left(x_m, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right).$$

Familija $\left\{F \cap \overline{K}(x_i, \frac{\varepsilon}{3}) \mid i \in \{1, \ldots, m\}\right\} \setminus \{\emptyset\}$ je konačna i neprazna jer postoji $i \in \{1, \ldots, m\}$ takav da je $F \cap \overline{K}(x_i, \frac{\varepsilon}{3}) \neq \emptyset$. Stoga imamo:

$$\left\{F \cap \overline{K}\left(x_i, \frac{\varepsilon}{3}\right) \mid i \in \{1, \ldots, m\}\right\} \setminus \{\emptyset\} = \{A_1, \ldots, A_n\}.$$

Stoga je $F = A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Neka je $j \in \{1, \ldots, n\}$. Tada je $A_j \neq \emptyset$ i postoji $i \in \{1, \ldots, m\}$ takav da je $A_j = F \cap \overline{K}(x_i, \frac{\varepsilon}{3})$. Slijedi da je A_j zatvoren kao presjek dva zatvorena skupa i $A_j \subseteq \overline{K}\left(x_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)$. Dakle $\operatorname{diam} A_j \leq \operatorname{diam} K\left(x_i, \frac{\varepsilon}{3}\right) \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$. Slijedi $\operatorname{diam} A_j \leq \varepsilon$. □

Teorem 1.5.20. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada je (X, d) kompaktan ako i samo ako je (X, d) potpun i potpuno omeđen.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Ako je (X, d) kompaktan, onda je (X, d) prema korolaru 1.4.8 potpun i prema teoremu 1.3.16 potpuno omeđen.

$\Leftarrow$ Obratno pretpostavimo da je (X, d) potpun i potpuno omeđen.

Neka je (x_j) niz u X. Definiramo niz podskupova (B_n) od X induktivno na sljedeći način. Prema lemi 1.5.17 postoje neprazni, zatvoreni i omeđeni skupovi $A_1, \dots, A_n$ u (X, d) takvi da je $\operatorname{diam} A_i < 1$ za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ i takvi da je

$$X = A_1 \cup \cdots \cup A_n.$$

Očito je niz (x_j) beskonačan u X, stoga je (x_j) beskonačan u $A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Prema propoziciji 1.5.16 postoji $i \in \{1, \dots, n\}$ takav da je (x_j) beskonačan u A_i.

Definirajmo $B_1 = A_i$. Imamo B_1 neprazan, zatvoren i omeđen skup u (X, d) takav da je

$$\operatorname{diam} B_1 < 1$$

te takav da je (x_j) beskonačan u B_1. Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da smo konstruirali zatvoren i neprazan skup B_n u (X, d) takav da je (x_j) beskonačan u B_n. Prema lemi 1.5.17 postoje neprazni, zatvoreni i omeđeni skupovi $A_1, \dots, A_m$ u (X, d) takvi da je

$$B_n = A_1 \cup \cdots \cup A_m \text{ i } \operatorname{diam} A_i < \frac{1}{n+1}$$

za svaki $i \in \{1, \dots, m\}$. Imamo da je (x_j) beskonačan u B_n. Dakle (x_j) je beskonačan u $A_1 \cup \cdots \cup A_m$ pa prema propoziciji 1.5.16 postoji $i \in \{1, \dots, m\}$ takav da je (x_j) beskonačan u A_i.

Definiramo $B_{n+1} = A_i$.

Dakle vrijedi da je B_{n+1} neprazan, zatvoren i omeđen skup u (X, d) i (x_j) je beskonačan u B_{n+1}, $\operatorname{diam} B_{n+1} < \frac{1}{n+1}$ i $B_{n+1} \subseteq B_n$. Dakle konstruirali smo niz zatvorenih, omeđenih skupova B_n u (X, d) takav da je niz (x_j) beskonačan u B_{n+1} za svaki $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subseteq B_n$ i $\operatorname{diam} B_n < \frac{1}{n}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Imamo:

$$|\operatorname{diam} B_n - 0| < \frac{1}{n}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa iz leme 1.2.19 slijedi $\operatorname{diam} B_n \to 0$. Iz Cantorovog teorema o presjeku slijedi $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$. Odaberimo $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Tvrdimo da je x gomilište niza (x_j) u (X, d). Neka je U otvoren skup u (X, d) takav da je $x \in U$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$. Budući da $\operatorname{diam} B_n \to 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\operatorname{diam} B_n < r$. Tvrdimo da je $B_n \subseteq U$. Neka je $y \in B_n$. Znamo da je $x \in B_n$ stoga je

$$d(x, y) \leq \operatorname{diam} B_n < r$$

dakle $d(x, y) < r$ pa je $y \in K(x, r)$. Iz $K(x, r) \subseteq U$ slijedi da je $y \in U$. Time smo pokazali da vrijedi $B_n \subseteq U$. Znamo da je niz (x_j) beskonačan u B_n, a kako je $B_n \subseteq U$ slijedi da je (x_j) beskonačan u U pa prema propoziciji 1.5.15 slijedi da je x je gomilište niza (x_j).

Dakle svaki niz u X ima gomilište u (X, d), stoga je (X, d) kompaktan metrički prostor.

□

Poglavlje 2

Kompaktni topološki prostori

2.1 Otvoreni pokrivač metričkog prostora

Definicija 2.1.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $\mathcal{U}$ familija otvorenih skupova u (X, d) takva da je $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U = X$. Tada za $\mathcal{U}$ kažemo da je otvoreni pokrivač metričkog prostora (X, d).*

Primjer 2.1.2. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $\mathcal{U} = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$. Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač metričkog prostora $(\mathbb{R}, d)$.*

Neka su $x_0 \in \mathbb{R}$ i $r > 0$. Tada iz napomene 1.3.5 slijedi da je

$$K(x_0, r) = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle,$$

odnosno svaka otvorena kugla u $(\mathbb{R}, d)$ je oblika $\langle a, b\rangle$ za $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Obratno, ako su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ onda je

$$\langle a, b\rangle = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle = K(x_0, r)$$

pri čemu je $x_0 = \frac{a+b}{2}$ i $r = \frac{b-a}{2}$.

Dakle $\langle a, b\rangle$ je otvorena kugla u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$. Stoga je svaki element od $\mathcal{U}$ otvoren skup u $(\mathbb{R}, d)$. Očito je $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U \subseteq \mathbb{R}$.

S druge strane ako je $x \in \mathbb{R}$ onda je $x \in \langle a, b\rangle$ gdje je $a = x - 1$ i $b = x + 1$. Dakle postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $x \in U$. Prema tome $\mathbb{R} \subseteq \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U$, odnosno $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U$.

Primjer 2.1.3. *Neka je (X, d) metrički prostor.*

1) Neka je $U = \{K(x, r) \mid x \in X, r > 0\}$. Tada je U otvoreni pokrivač od (X, d).

2) *Neka je* $x_0 \in X$. *Neka je* $\mathcal{V} = \{K(x_0, r) \mid r > 0\}$. *Tada je* $\mathcal{V}$ *otvoreni pokrivač od* (X, d).

3) *Neka je* $x_0 \in X$ *te* $\mathcal{S} = \{K(x_0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

   Neka je $x \in X$. *Odaberimo* $n \in \mathbb{N}$ *takav da je* $n > d(x_0, x)$. *Tada je* $x \in K(x_0, n)$. *Stoga je* $\mathcal{S}$ *otvoreni pokrivač metričkog prostora* (X, d).

4) *Neka je* $\mathbb{R} = \{X\}$. *Tada je* $\mathbb{R}$ *otvoreni pokrivač od* (X, d). *Također* $\{X, \emptyset\}$ *je otvoreni pokrivač od* (X, d).

Primjer 2.1.4. *Neka je d euklidska metrika na* $\mathbb{R}$.

Neka je $\mathcal{U} = \{\langle -r, r\rangle \mid r > 0\}$. *Imamo da je* $\mathcal{U} = \{K(0, r) \mid r > 0\}$ *pa zaključujemo da je* $\mathcal{U}$ *otvoreni pokrivač od* $(\mathbb{R}, d)$. *Na analogan način zaključujemo da je familija* $\{\langle -n, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ *otvoreni pokrivač od* $(\mathbb{R}, d)$.

Neka je $\mathcal{V} = \{\langle -\infty, 1\rangle, \langle 0, +\infty\rangle\}$. *Imamo:*

$$\langle -\infty, 1\rangle = \bigcup_{a<1} \langle a, 1\rangle.$$

Kako su $\langle a, 1\rangle$ *otvoreni skupovi u metričkom prostoru* $(\mathbb{R}, d)$ *tada je* $\langle -\infty, 1\rangle$ *otvoren u* $(\mathbb{R}, d)$ *kao unija otvorenih skupova. Isto tako* $\langle 0, \infty\rangle$ *je otvoren skup u* $(\mathbb{R}, d)$. *Stoga je* $\mathcal{V}$ *otvoren pokrivač od* $(\mathbb{R}, d)$.

Definicija 2.1.5. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je* $\mathcal{U}$ *otvoren pokrivač od* (X, d). *Neka je* $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$. *Kažemo da je* λ *Lebesgueov broj od* $\mathcal{U}$ *ako za svaki neprazan i omeđen skup A u* (X, d) *takav da je* $\operatorname{diam} A < \lambda$ *postoji* $U \in \mathcal{U}$ *takav da je* $A \subseteq U$.

Definicija 2.1.6. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$ *te neka je* $x_0 \in S$. *Kažemo da je* x_0 *maksimum skupa S ako je* $x \leq x_0$ *za svaki* $x \in S$.

Očito je maksimum skupa ako postoji jedinstven. Uočimo sljedeće: ako je x_0 maksimum skupa S, onda je x_0 supremum skupa S. Naime očito je x_0 gornja međa skupa S, a ako je x_1 gornja međa od S onda je $x_0 \leq x_1$ jer je $x_0 \in S$.

Maksimum skupa S ako postoji označavamo sa $\max S$.

Napomena 2.1.7. *Neka su* $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ *takvi da* $a \leq b$ *i* $x, y \in [a, b]$. *Tada je* $|x-y| \leq b-a$. *Naime pretpostavimo da je* $x \leq y$. *Imamo* $a \leq x \leq y \leq b$. *Slijedi* $-x \leq -a$ *pa zbrajanjem ove nejednakosti s* $y \leq b$ *dobivamo* $y - x \leq b - a$ *odnosno* $|y - x| \leq b - a$. *Do istog zaključka dolazimo ako je* $y \leq x$.

Na isti način dobivamo sljedeće: ako su $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ takvi da $a < b$ i $x, y \in [a, b\rangle$, onda je $|x - y| < b - a$.

Primjer 2.1.8. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $\mathcal{U} = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Pokažimo da postoji Lebesgueov broj od $\mathcal{U}$.*

Pretpostavimo da je A omeđen skup u $(\mathbb{R}, d)$. Tada postoje $x \in \mathbb{R}$ i $r > 0$ takvi da je $A \subseteq K(x, r)$. Odnosno $A \subseteq \langle x - r, x + r\rangle$. Prema tome postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $A \subseteq U$ Iz ovog zaključujemo da je svaki $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ Lebesgueov broj od $\mathcal{U}$.

Primjer 2.1.9. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $\mathcal{V} = \{\langle -\infty, 1\rangle, \langle 0, +\infty\rangle\}$. Neka je $A = [0, 1]$.*

A je omeđen u $(\mathbb{R}, d)$. Očito je da ne postoji $V \in \mathcal{V}$ takav da je $A \subseteq V$. Neka su $x, y \in A$. Tada je

$$|x - y| \leq |1 - 0| = 1.$$

Dakle $d(x, y) \leq 1$ za sve $x, y \in A$, no $d(0, 1) = 1$ i $0, 1 \in A$ pa je $1 = \max\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ Stoga je $1 = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\} = \operatorname{diam} A$.

Neka je $\lambda \in \mathbb{R}$ takva da $\lambda > 1$. Tada je $\operatorname{diam} A < \lambda$ pa zaključujemo da λ nije Lebesgueov broj od $\mathcal{V}$.

Uzmimo sada $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\lambda \in \langle 0, 1]$. Tvrdimo da je $\lambda \in \langle 0, 1]$ Lebesgueov broj od $\mathcal{U}$. Pretpostavimo da je A neprazan i omeđen skup u $(\mathbb{R}, d)$ takav da je $\operatorname{diam} A < \lambda$ odnosno $\operatorname{diam} A < 1$. Pretpostavimo da $A \nsubseteq \langle 0, +\infty\rangle$. Tada postoji $a \in A$ takav da $a \notin \langle 0, +\infty\rangle$.

Slijedi $a \leq 0$. Neka je $x \in A$. Imamo:

$$x - a \leq |x - a| \leq \operatorname{diam} A < 1.$$

Stoga je $x - a < 1$ odnosno $x < 1 + a \leq 1$. Dakle $x < 1 \Leftrightarrow x \in \langle -\infty, 1\rangle$. Prema tome $A \subseteq \langle -\infty, 0\rangle$.

Zaključujemo da za svaki neprazan i omeđen skup A u $(\mathbb{R}, d)$ takav da je $\operatorname{diam} A < \lambda$ vrijedi $A \subseteq \langle -\infty, 1\rangle$ ili $A \subseteq \langle 0, +\infty\rangle$. Prema tome λ je Lebesgueov broj od $\mathcal{V}$.

Primjer 2.1.10. *Neka je d euklidska metrika na $[0, 1\rangle$. Neka je $\mathcal{U} = \{[0, r\rangle \mid 0 < r < 1\}$. Tvrdimo da je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač metričkog prostora $([0, 1\rangle, d)$.*

Neka je r takav da $0 < r < 1$. Tada je

$$K_d(0, r) = \{x \in [0, 1\rangle \mid |x| < r\} = [0, 1\rangle.$$

Dakle $K_d(0, r) = [0, 1\rangle$ pa je $[0, 1\rangle$ omeđen skup u metričkom prostoru $([0, 1\rangle, d)$.

Pokažimo da je $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U = [0, 1\rangle$.

Očito je

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \subseteq [0, 1\rangle.$$

Pokažimo da je $[0, 1\rangle \subseteq \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U$.

Neka je $x \in [0,1\rangle$*. Tada je* $x < 1$ *pa postoji* $r \in \mathbb{R}$ *takav da je* $x < r < 1$ *te je* $[0,r\rangle \in \mathcal{U}$*. Očito je* $x \in [0,r\rangle$*. Dakle postoji* $U \in \mathcal{U}$ *takav da je* $x \in U$*. Stoga je* $x \in \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$*. Time smo pokazali*

$$[0,1\rangle \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Dakle $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = [0,1\rangle$*. Prema tome* $\mathcal{U}$ *je otvoreni pokrivač metričkog prostora* $([0,1\rangle, d)$*.*

Pretpostavimo da postoji $\lambda > 0$ *takva da je* λ *Lebesgueov broj od* $\mathcal{U}$*. Možemo pretpostaviti da je* $\lambda < 1$*. Definiramo* $A = \langle 1 - \frac{\lambda}{2}, 1\rangle$*. Tada je* $A \subseteq [0,1\rangle$*.*

Neka su $x, y \in A$*. Kako je* $A \subseteq [1 - \frac{\lambda}{2}, 1]$ *slijedi* $x, y \in [1 - \frac{\lambda}{2}, 1]$ *pa imamo:*

$$|x - y| \leq 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{\lambda}{2}.$$

Dakle $d(x,y) \leq \frac{\lambda}{2}$ *za sve* $x, y \in A$*. To znači da je* $\frac{\lambda}{2}$ *gornja međa skupa* $\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$*. Kako je supremum najmanja gornja međa slijedi da je* $\sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\} \leq \frac{\lambda}{2}$ *odnosno* $\operatorname{diam} A \leq \frac{\lambda}{2}$*. Prema tome* $\operatorname{diam} A < \lambda$*.*

Budući da je λ *Lebesgueov broj od* $\mathcal{U}$ *postoji* $U \in \mathcal{U}$ *takav da je* $A \subseteq U$ *odnosno postoji* $r \in \mathbb{R}$ *takav da* $0 < r < 1$ *i* $A \subseteq [0,r\rangle$*. Uočimo da je* $\max\{1 - \frac{\lambda}{2}, r\} < 1$*. Stoga postoji* $x \in \mathbb{R}$ *takav da je*

$$\max\left\{1 - \frac{\lambda}{2}, r\right\} < x < 1 \quad i \quad r < x.$$

Stoga imamo $x \in A$ *i* $x \notin [0,r\rangle$*, a to je u kontradikciji s* $A \subseteq [0,r\rangle$*.*

Dakle zaključujemo da ne postoji $\lambda > 0$ *takav da je* λ *Lebesgueov broj od* $\mathcal{U}$*.*

2.2 Karakterizacija kompaktnosti preko otvorenih pokrivača

Lema 2.2.1. *Neka je* (X,d) *metrički prostor. Pretpostavimo da je* $a \in X$ *te da je* S *neprazan omeđen skup u* (X,d)*. Nadalje pretpostavimo da su* $M > 0$ *i* $x_0 \in S$ *takvi da je* $d(a,x_0) < M$ *i* $\operatorname{diam} S < M$*. Tada je* $S \subseteq K(a, 2M)$

Dokaz. Neka je $x \in S$. Tada:

$$d(a,x) \leq d(a,x_0) + d(x_0,x) < M + \operatorname{diam} S < M + M = 2M.$$

Dakle $d(a,x) < 2M$ pa je $x \in K(a,2M)$. Time je lema dokazana. □

Teorem 2.2.2. *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor te neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač ovog metričkog prostora. Tada postoji Lebesgueov broj od $\mathcal{U}$, odnosno postoji $\lambda > 0$ takav da je λ Lebesgueov broj od $\mathcal{U}$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada za svaki $\lambda > 0$ vrijedi da λ nije Lebesgueov broj od $\mathcal{U}$ pa posebno za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da $\frac{1}{n}$ nije Lebesgueov broj od $\mathcal{U}$.

Stoga za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji omeđen i neprazan skup A_n u metričkom prostoru (X, d) takav da je

$$\operatorname{diam} A_n < \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad A_n \not\subseteq U$$

za svaki $U \in \mathcal{U}$.

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ odaberemo $x_n \in A_n$. Na taj način imamo niz $(x_n) \in X$. Budući da je metrički prostor (X, d) kompaktan niz (x_n) ima gomilište u (X, d), odnosno postoji $a \in X$ takav da je a gomilište niza (x_n). Budući da je

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$

postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $a \in U$. Kako je U otvoren skup u (X, d) postoji $r > 0$ takav da je

$$K(a, r) \subseteq U.$$

Odaberimo $N \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{N} < \frac{r}{2}$. Budući da je a gomilište niza (x_n) postoji $n \geq N$ takav da je

$$d(x_n, a) < \frac{r}{2}.$$

Slijedi

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \quad \text{pa je} \quad \frac{1}{n} < \frac{r}{2}.$$

Znamo da je $\operatorname{diam} A_n < \frac{1}{n} < \frac{r}{2}$.

Prema tome

$$d(x_n, a) < \frac{r}{2}, \quad \operatorname{diam} A_n < \frac{r}{2} \quad \text{i} \quad x_n \in A_n.$$

Iz leme 2.2.1 slijedi

$$A_n \subseteq K(a, r) \subseteq U.$$

Dakle $A_n \subseteq U$ što je u kontradikciji s načinom na koji smo odabrali A_n. Zaključujemo da postoji $\lambda > 0$ takav da je λ Lebesgueov broj od $\mathcal{U}$. □

Teorem 2.2.3. *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor te neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od (X, d). Tada postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, ..., U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $X = U_1 \cup ... \cup U_n$.*

Dokaz. Prema teoremu 2.2.2 postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je λ Lebesgueov broj od $\mathcal{U}$. Prema teoremu 1.3.16 metrički postor (X, d) je potpuno omeđen pa stoga postoje $x_1, ..., x_n \in X$ takvi da je

$$X = K\left(x_1, \frac{\lambda}{3}\right) \cup \cdots \cup K\left(x_n, \frac{\lambda}{3}\right).$$

Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi:

$$\operatorname{diam} K\left(x_i, \frac{\lambda}{3}\right) \leq \frac{2}{3}\lambda < \lambda$$

pa postoji $U_i \in U$ takav da je $K\left(x_i, \frac{\lambda}{3}\right) \subseteq U_i$. Stoga je

$$K\left(x_1, \frac{\lambda}{3}\right) \cup \cdots \cup K\left(x_n, \frac{\lambda}{3}\right) \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n.$$

Kako je $X = K(x_1, \frac{\lambda}{3}) \cup \cdots \cup K(x_n, \frac{\lambda}{3})$ slijedi $X \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$.

S druge strane $U_1 \cup \cdots \cup U_n \subseteq X$. Dakle $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$. □

Teorem 2.2.4. *Neka je (X, d) metrički prostor takav da za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od (X, d) postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1 \cup \cdots \cup U_n$ takvi da je $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Tada je metrički prostor (X, d) kompaktan.*

Dokaz. Neka je (x_n) niz u X. Tvrdimo da (x_n) ima gomilište u (X, d). Pretpostavimo suprotno. Tada za svaki $a \in X$ vrijedi da a nije gomilište niza (x_n) u (X, d) pa postoje $\varepsilon_a > 0$ i $N_a \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq N_a$ vrijedi $x_n \notin K(a, \varepsilon_a)$.

Neka je $\mathcal{U} = \{K(a, \varepsilon_a) \mid a \in X\}$. Za svaki $a \in X$ očito vrijedi $a \in K(a, \varepsilon_a)$ pa zaključujemo da je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač metričkog prostora (X, d). Prema pretpostavci teorema postoje $k \in \mathbb{N}$ i $a_1, \ldots, a_k \in X$ takvi da je

$$X = K(a_1, \varepsilon_{a_1}) \cup \cdots \cup K(a_n, \varepsilon_{a_n}).$$

Neka je $n = \max\{N_{a_1}, \ldots, N_{a_k}\}$. Tada je $n \geq N_{a_1}, \ldots, n \geq N_{a_k}$ pa slijedi

$$x_n \notin K(a_1, \varepsilon_{a_1}), \ldots, x_n \notin K(a_k, \varepsilon_{a_k}).$$

Stoga $x_n \notin K(a_1, \varepsilon_{a_1}) \cup \cdots \cup K(a_k, \varepsilon_{a_k})$.

Kako je $X = K(a_1, \varepsilon_{a_1}) \cup ... \cup K(a_n, \varepsilon_{a_n})$ slijedi $x_n \notin X$ što nije moguće. Zaključujemo da postoji gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru (X, d), prema tome (X, d) je kompaktan metrički prostor. □

Korolar 2.2.5. *Metrički prostor (X, d) je kompaktan ako i samo ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od (X, d) postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1 \cup \cdots \cup U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$.*

2.3 Topologija i topološki prostori

Definicija 2.3.1. *Neka je X neprazan skup te neka je $\mathcal{T}$ familija podskupova od X takva da vrijedi:*

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

2) *Ako je* $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ *indeksirana familija podskupova od* X *takva da je* $U_\alpha \in \mathcal{T}$ *za svaki* $\alpha \in A$ *onda je* $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$;

3) *Ako su* $U, V \in \mathcal{T}$ *onda je* $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Tada za $\mathcal{T}$ *kažemo da je topologija na skupu* X, *a za uređeni par* $(X, \mathcal{T})$ *kažemo da je topološki prostor.*

Napomena 2.3.2. *Neka je* $\mathcal{T}$ *familija podskupova nekog skupa* X. *Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*

1) *Ako je* $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ *indeksirana familija podskupova od* X *takva da je* $U_\alpha \in \mathcal{T}$ *za svaki* $\alpha \in A$ *onda je* $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$;

2) *Ako je* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ *onda je* $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{T}$.

Naime pretpostavimo da vrijedi prva tvrdnja. Neka je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$. *Funkcija*

$$F : \mathcal{U} \to \mathcal{P}(X), \ F(U) = U$$

za svaki $U \in \mathcal{U}$ *je indeksirana familija podskupova od* X *takva da je* $F(U) \in \mathcal{T}$ *za svaki* $U \in \mathcal{U}$. *Iz prve tvrdnje slijedi* $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} F(U) \in \mathcal{T}$.

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} F(U) = \{x \in X \mid \exists U \in \mathcal{U}, x \in F(U)\} = \{x \in X \mid \exists U \in \mathcal{U}, x \in U\} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Dakle $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{T}$. *Prema tome vrijedi druga tvrdnja.*

Obratno pretpostavimo da vrijedi druga tvrdnja. Neka je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ *indeksirana familija podskupova od* X *takva da je* $U_\alpha \in \mathcal{T}$ *za svaki* $\alpha \in A$. *Definiramo* $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$. *Imamo* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ *pa iz druge tvrdnje slijedi da je* $\bigcup_{V \in \mathcal{U}} V \in \mathcal{T}$. *No*

$$\bigcup_{V \in \mathcal{U}} V = \{x \in X \mid \exists V \in \mathcal{U}, x \in V\} = \{x \in X \mid \exists \alpha \in A, x \in U_\alpha\} = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Dakle $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$. *Prema tome vrijedi prva tvrdnja.*

Definicija 2.3.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $U \subseteq X$. Kažemo da je U otvoren skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako je $U \in \mathcal{T}$.*

Propozicija 2.3.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $\mathcal{T}_d$ familija svih otvorenih skupova u metričkom prostoru (X, d). Tada je $\mathcal{T}_d$ topologija na X.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz propozicije 1.3.8.

□

Za familiju $\mathcal{T}_d$ iz propozicije 2.3.4 kažemo da je toplogija inducirana metrikom d.

Uočimo sljedeće: ako je (X, d) metrički prostor te $U \subseteq X$ onda je U otvoren u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je U otvoren u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.

Definicija 2.3.5. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je metrizabilan ako postoji metrika d takva da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.*

Definicija 2.3.6. *Neka je X neprazan skup. Tada je $\mathcal{P}(X)$ topologija na X. Za $\mathcal{P}(X)$ kažemo da je diskretna topologija na X.*

Primjer 2.3.7. *Neka je X neprazan skup. Tada je $\mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_d$, gdje je d diskretna metrika na X.*

Očito je $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{P}(X)$. Pokažimo da je $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{T}_d$. Neka je $U \in \mathcal{P}(X)$. Neka je $x \in U$. Tada za $r = \frac{1}{2}$ imamo $K(x, r) = \{x\}$ pa je $K(x, r) \subseteq U$. Dakle U je otvoren skup u metričkom prostoru (X, d) pa je $U \in \mathcal{T}_d$.

Prema tome $\mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_d$ pa slijedi da je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ metrizabilan.

Definicija 2.3.8. *Neka je X neprazan skup. Tada je $\{X, \emptyset\}$ topologija na X. Za $\{X, \emptyset\}$ kažemo da je indiskretna topologija na X.*

Primjer 2.3.9. *Neka je X skup koji ima barem dva elementa. Tada topološki prostor $(X, \{X, \emptyset\})$ nije metrizabilan.*

Pretpostavimo suprotno. Tada je topološki prostor $(X, \{X, \emptyset\})$ metrizabilan pa postoji metrika d na X takva da je $\{X, \emptyset\} = \mathcal{T}_d$.

Odaberimo $a, b \in X$ takve da je $a \neq b$. Tada je $d(a, b) > 0$. Neka je $U = K(a, d(a, b))$. Tada je U otvoren skup u (X, d) dakle $U \in \mathcal{T}_d$ pa je $U = \emptyset$ ili $U = X$. No to nije moguće jer je $a \in U$ i $b \notin U$. Prema tome topološki prostor $(X, \{X, \emptyset\})$ nije metrizabilan.

Definicija 2.3.10. *Neka je X skup te neka su d i d' metrike na X. Kažemo da su metrike d i d' ekvivalentne ako postoje $M, N \in \mathbb{R}$ takvi da je*

$$d(x, y) \leq M d'(x, y) \text{ i } d'(x, y) \leq N d(x, y)$$

za sve $x, y \in X$.

Lema 2.3.11. *Neka je X skup te neka su d i d' metrike na X. Pretpostavimo da postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je $d(x, y) \leq Md'(x, y)$ za sve $x, y \in X$. Tada je $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_{d'}$.*

Dokaz. Neka je $U \subseteq \mathcal{T}_d$. Neka je $x \in U$. Tada postoji $r > 0$ takav da je

$$K_d(x, r) \subseteq U.$$

Možemo pretpostaviti da je $M > 0$. Tvrdimo da je

$$K_{d'}\left(x, \frac{r}{M}\right) \subseteq K_d(x, r).$$

Neka je $y \in K_{d'}\left(x, \frac{r}{M}\right)$. Tada je $d'(x, y) < \frac{r}{M}$ pa je $Md'(x, y) < r$. Kako je $d(x, y) \leq Md'(x, y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$ slijedi $d(x, y) < r$ dakle $y \in K_d(x, r)$. Prema tome vrijedi $K_{d'}\left(x, \frac{r}{M}\right) \subseteq K_d(x, r)$.

Imamo:

$$K_{d'}\left(x, \frac{r}{M}\right) \subseteq K_d(x, r) \subseteq U.$$

Slijedi $K_{d'}(x, \frac{r}{M}) \subseteq U$. Zaključujemo da je U otvoren skup u (X, d') odnosno $U \in \mathcal{T}_{d'}$. Time smo pokazali da je $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_{d'}$. □

Propozicija 2.3.12. *Neka je X skup te neka su d i d' ekvivalentne metrike na X. Tada je $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz leme 2.3.11. □

Lema 2.3.13. *Neka je X skup te neka su d, d' i d'' metrike na X takve da su d i d' ekvivalentne i d' i d'' ekvivalentne. Tada su d i d'' ekvivalentne.*

Dokaz. Znamo da postoje $A, B \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi:

$$d(x, y) \leq Ad'(x, y)$$

$$d'(x, y) \leq Bd''(x, y)$$

za sve $x, y \in X$.
Možemo pretpostaviti da je $A \geq 0$. Tada iz druge nejednakosti slijedi da je

$$Ad'(x, y) \leq ABd''(x, y)$$

za sve $x, y \in X$.
Stoga je

$$d(x, y) \leq (AB)d''(x, y)$$

za sve $x, y \in X$.
Na analogan način dobivamo da postoji $C \in \mathbb{R}$ takav da je

$$d''(x, y) \leq C d(x, y).$$

Prema tome metrike d i d'' su ekvivalentne.

$\square$

Primjer 2.3.14. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$ te neka su d_1 i d_∞ metrike na $\mathbb{R}^n$ iz primjera 1.1.6 i 1.1.7. Tvrdimo da su metrike d, d_1 i d_∞ ekvivalentne.*

Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, \dots, y_n)$. Označimo sa $u_i = |x_i - y_i|$ za $i \in \{1, \dots, n\}$. Vrijedi $u_1, \dots, u_n \geq 0$ i

$$d(x, y) = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$$

$$d_1(x, y) = u_1 + \cdots + u_n$$

$$d_\infty(x, y) = \max\{u_1, \dots, u_n\}$$

Vrijedi:

$$\sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2} \leq u_1 + \cdots + u_n \tag{2.1}$$

Naime (2.1) je ekvivalentno sa

$$u_1^2 + \cdots + u_n^2 \leq (u_1 + \cdots + u_n)^2$$

odnosno

$$u_1^2 + \cdots + u_n^2 \leq u_1^2 + \cdots + u_n^2 + 2 \sum_{i<j} u_i u_j.$$

Ova nejednakost očito vrijedi.

Očito je

$$u_1 + \cdots + u_n \leq n \cdot \max\{u_1, \dots, u_n\} \tag{2.2}$$

Nadalje lako se vidi

$$\max\{u_1, \dots, u_n\} \leq \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2} \tag{2.3}$$

Iz (2.2) i (2.3) slijedi

$$u_1 + \cdots + u_n \leq n \cdot \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}.$$

Ovo znači da je $d_1(x, y) \leq n \cdot d(x, y)$, a prema (2.1) vrijedi $d(x, y) \leq d_1(x, y)$. Stoga su metrike d i d_1 ekvivaletne.

Iz (2.1) i (2.3) slijedi

$$\max\{u_1, \dots, u_n\} \leq u_1 + \cdots + u_n$$

odnosno $d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y)$*, a prema (2.2) vrijedi* $d_1(x, y) \leq n \cdot d_\infty(x, y)$ *stoga su* d_1 *i* d_∞ *ekvivalentne metrike.*

Iz leme 2.3.13 slijedi da su d *i* d_∞ *ekvivalentne metrike.*

Propozicija 2.3.15. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je* $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana sa* $d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$*. Tada je* d' *metrika na* X *te je* $\mathcal{T}_{d'} = \mathcal{T}_d$*.*

Dokaz. Očito je $d'(x, y) \geq 0$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Nadalje jasno je da je $d'(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Također vidimo da je $d'(x, y) = d'(y, x)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Neka su $x, y, z \in X$. Vrijedi:

$$d'(x, y) \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y). \tag{2.4}$$

Ako je

$$d(x, z) \leq 1 \quad \text{i} \quad d(x, y) \leq 1,$$

onda je

$$d'(x, z) = d(x, z) \quad \text{i} \quad d'(z, y) = d(z, y)$$

pa iz (2.4) slijedi $d'(x, y) \leq d'(x, z) + d'(z, y)$.

Ako je

$$d(x, z) > 1 \quad \text{ili} \quad d(z, y) > 1,$$

onda je

$$d'(x, z) = 1 \quad \text{ili} \quad d'(z, y) = 1.$$

Iz definicije od $d'(x, y)$ je jasno da je $d'(x, y) \leq 1$ pa je $d'(x, y) \leq d'(x, z) + d'(z, y)$. Prema tome d' je metrika na X. Neka je $x_0 \in X$ i $r \in \langle 0, 1]$. Tvrdimo da je

$$K_{d'}(x_0, r) = K_d(x_0, r).$$

Neka je $x \in X$. Imamo:

$$x \in K_{d'}(x_0, r) \Leftrightarrow d'(x, x_0) < r \Leftrightarrow d(x, x_0) < r \Leftrightarrow x \in K_d(x_0, r).$$

Dakle $K_{d'}(x_0, r) = K_d(x_0, r)$.

Pokažimo sada da je $\mathcal{T}_{d'} = \mathcal{T}_d$. Neka je $U \in \mathcal{T}_{d'}$. Uzmimo $x_0 \in U$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $K_{d'}(x_0, r) \subseteq U$. Možemo pretpostaviti da je $r \leq 1$. Iz $K_{d'}(x_0, r) = K_d(x_0, r)$ slijedi da je $K_d(x_0, r) \subseteq U$. Prema tome U je otvoren skup u metričkom prostoru (X, d). Dakle $U \in \mathcal{T}_d$. Stoga je $\mathcal{T}_{d'} \subseteq \mathcal{T}_d$.

Analogno dobivamo da je $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_{d'}$. Dakle $\mathcal{T}_{d'} = \mathcal{T}_d$.

□

Primjer 2.3.16. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$ te neka je $d' : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$. Prema propoziciji 2.3.15 d' je metrika na $\mathbb{R}$ te $\mathcal{T}_{d'} = \mathcal{T}_d$. No metrike d i d' nisu ekvivalentne.*

Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $M \in \mathbb{R}, M \geq 0$ takav da je

$$d(x, y) \leq M \cdot d'(x, y) \quad \textit{za sve} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Posebno za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$d(x, 0) \leq M \cdot d'(x, y) \quad \textit{odnosno} \quad |x| \leq M \cdot d'(x, y).$$

No $d'(x, 0) \leq 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ pa slijedi da je $|x| \leq M$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Ovo je očito nemoguće, prema tome metrike d i d' nisu ekvivalentne.

2.4 Kompaktni topološki prostori

Definicija 2.4.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $\mathcal{U}$ familija otvorenih skupova u $(X, \mathcal{T})$ takva da je $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Tada za $\mathcal{U}$ kažemo da je otvoreni pokrivač topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$.*

Uočimo sljedeće: ako je (X, d) metrički prostor te $\mathcal{U}$ familija podskupova od X onda je:

$\mathcal{U}$ otvoren pokrivač metričkog prostora (X, d) $\Leftrightarrow$ $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač topološkog prostora $(X, \mathcal{T}_d)$.

Definicija 2.4.2. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je kompaktan ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od $(X, \mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$.*

Neka je (X, d) metrički prostor. Tada iz korolara 2.2.5 zaključujemo da vrijedi sljedeće:

$$(X, d) \text{ kompaktan metrički prostor } \Leftrightarrow (X, \mathcal{T}_d) \text{ kompaktan topološki prostor}.$$

Primjer 2.4.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor takav da je $\mathcal{T}$ konačan. Tada je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan.*

Naime neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $(X, \mathcal{T})$. Tada je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ pa je $\mathcal{U}$ konačan skup. Dakle postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $\mathcal{U} = U_1 \cup \dots \cup U_n$.

Stoga je $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$.

Primjer 2.4.4. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor takav da je X konačan. Tada je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan.*

Naime skup $\mathcal{P}(X)$ je također konačan. Kako je $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ slijedi da je $\mathcal{T}$ konačan skup. Sada iz primjera 2.4.3 slijedi da je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kompaktan.

Primjer 2.4.5. *Neka je X beskonačan skup. Tada topološki prostor* $(X, \mathcal{P}(X))$ *nije kompaktan.*

Pretpostavimo suprotno. Neka je $\mathcal{U} = \{\{x\} \mid x \in X\}$*. Tada je* $\mathcal{U}$ *otvoreni pokrivač topološkog prostora* $(X, \mathcal{P}(X))$ *pa postoje* $n \in \mathbb{N}$ *i* $U_1, ..., U_n \in \mathcal{U}$ *takvi da je*
$X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$.

Slijedi da je X konačan skup kao unija konačno mnogo jednočlanih skupova. No to je u kontradikciji sa pretpostavkom da je X beskonačan. Dakle topološki prostor $(X, \mathcal{P}(X))$ *nije kompaktan.*

Poglavlje 3

Kompaktni skupovi

3.1 Potprostor topološkog prostora

Propozicija 3.1.1. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor te neka je* Y *neprazan podskup od* X. *Definiramo* $\mathcal{S} = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$. *Tada je* $\mathcal{S}$ *topologija na* Y.

Dokaz. Imamo $\emptyset = \emptyset \cap Y$ i $\emptyset \in \mathcal{T}$ pa slijedi $\emptyset \in \mathcal{S}$. Nadalje $Y = X \cap Y, X \in \mathcal{T}$ pa je $Y \in \mathcal{S}$.

Pretpostavimo da je $(\mathcal{V}_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{S}$. Za svaki $\alpha \in A$ iz $V_\alpha \in \mathcal{S}$ slijedi da postoji $U_\alpha \in \mathcal{T}$ takav da je $V_\alpha = U_\alpha \cap Y$.

Tada je $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}$ pa znamo da je $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

Imamo:

$$\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap Y) = \left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right) \cap Y$$

pa je $\bigcup\limits_{\alpha \in A} V_\alpha \in \mathcal{S}$.

Neka su V_1 i $V_2 \in \mathcal{S}$. Tada postoje $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ takvi da je $V_1 = U_1 \cap Y$ i $V_2 = U_2 \cap Y$. Vrijedi:

$$V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = (U_1 \cap U_2) \cap Y.$$

Kako je $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ slijedi da je $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{S}$. Dakle $\mathcal{S}$ je topologija na Y. □

Za $\mathcal{S}$ kažemo da je relativna topologija na Y određena topologijom $\mathcal{T}$. Za $(Y, \mathcal{S})$ kažemo da je potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$.

Propozicija 3.1.2. *Neka je* (Y, p) *potprostor metričkog prostora* (X, d). *Neka je* $V \subseteq Y$. *Tada je:*

V otvoren u (Y, p) $\Leftrightarrow$ postoji otvoren skup U u (X, d) takav da je $V = U \cap Y$.

Dokaz. Neka su $y_0 \in Y$ i $r > 0$. Tada je $K_p(y_0, r) = Y \cap K_d(y_0, r)$.

Naime neka je $y \in K_p(y_0, r)$. Tada je $y \in Y$ i $p(y, y_0) < r$ odnosno $d(y, y_0) < r$. Stoga je $y \in Y \cap K_d(y_0, r)$

Obratno neka je $y \in Y \cap K_d(y_0, r)$. Tada je $y \in Y$ i $d(y, y_0) < r$. No kako su $y, y_0 \in Y$ slijedi da je $p(y, y_0) < r$ pa je $y \in Y \cap K_p(y_0, r)$. Prema tome vrijedi:

$$K_p(y_0, r) = Y \cap K_d(y_0, r) \tag{3.1}$$

$\Rightarrow$ Pretpostavimo da je V otvoren skup u metričkom prostoru (Y, p). Tada za svaki $y \in V$ postoji $r_y > 0$ takav da je $K_p(y, r_y) \subseteq V$. Iz ovog lako zaključujemo da je $V = \bigcup\limits_{y \in V} K_p(y, r_y)$.

Definiramo $U = \bigcup\limits_{y \in V} K_d(y, r_y)$. Za svaki $y \in V$ skup $K_d(y, r_y)$ je otvoren u (X, d) to jest $K_d(y, r_y) \in \mathcal{T}_d$. Iz propozicije 2.3.4 slijedi da je $U \in \mathcal{T}_d$ pa je $U = \bigcup\limits_{y \in V} K_d(y, r_y)$ otvoren u (X, d).

Koristeći (3.1) dobivamo:

$$U \cap Y = \left(\bigcup_{y \in V} K_d(y, r_y) \right) \cap Y = \bigcup_{y \in V} \Big(K_d(y, r_y) \cap Y \Big) = \bigcup_{y \in V} K_p(y, r_y) = V.$$

Dakle $V = U \cap Y$.

$\Leftarrow$ Obratno pretpostavimo da postoji otvoren skup U u metričkom prostoru (X, d) takav da je $V = U \cap Y$. Neka je $y \in V$. Tada je $y \in U$ po postoji $r > 0$ takav da je $K_d(y, r) \subseteq U$. Stoga je

$$Y \cap K_d(y, r) \subseteq Y \cap U.$$

Prema (3.1) $K_p(y, r) \subseteq V$. Dakle V je otvoren skup u (Y, p). □

Korolar 3.1.3. *Neka je (Y, p) potprostor metričkog prostora (X, d). Tada je $(Y, \mathcal{T}_p)$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T}_d)$.*

Dokaz. Iz propozicije 3.1.2 slijedi da je

$$\mathcal{T}_p = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}_d\}$$

pa vidimo da tvrdnja korolara vrijedi. □

3.2 Kompaktni skupovi u metričkim i topološkim prostorima

Definicija 3.2.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Neka je $K \subseteq X$ te neka je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ familija otvorenih skupova. Pretpostavimo da je $K \subseteq \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U$. Tada za $\mathcal{U}$ kažemo da je otvoreni pokrivač skupa K u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$.*

Definicija 3.2.2. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Neka je $K \subseteq X$. Kažemo da je K kompaktan skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od K u $(X, \mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \dots U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $K \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n$.*

Uočimo sljedeće: ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor onda je X kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ ako i samo ako je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor.

Propozicija 3.2.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Neka je Y neprazan podskup od X. Neka je $\mathcal{S}$ relativna topologija na Y. Tada je Y kompaktan skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako i samo ako je $(Y, \mathcal{S})$ kompaktan.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Neka je Y kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Neka je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač topološkog prostora $(Y, \mathcal{S})$. Za svaki $V \in \mathcal{V}$ imamo da je $V \in \mathcal{S}$ pa iz definicije relativne topologije slijedi da postoji $U_V \in \mathcal{T}$ takav da je $V = U_V \cap Y$.

Neka je

$$\mathcal{U} = \{U_V \mid V \in \mathcal{V}\}.$$

Očito je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$.

Neka je $y \in Y$. Tada postoji $V \in \mathcal{V}$ takav da je $y \in V$. Očito je $V \subseteq U_v$ pa slijedi da je $y \in U_V$. Dakle $Y \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} U_V$. Prema tome $\mathcal{U}$ je otvoreni pokrivač od Y u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$. Budući da je Y kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$, postoje $n \in \mathbb{N}$ i $V_1, \dots V_n \in \mathcal{V}$ takvi da je

$$Y \subseteq U_{V_1} \cup \dots \cup U_{V_n}.$$

Slijedi

$$Y = Y \cap Y \subseteq (U_{V_1} \cup \dots \cup U_{V_n}) \cap Y,$$

$$Y \subseteq (U_{V_1} \cap Y) \cup \dots \cup (U_{V_n} \cap Y),$$

$$Y \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_n.$$

Dakle $Y \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_n$, a očito je $V_1 \cup \dots \cup V_n \subseteq Y$. Prema tome $Y = V_1 \cup \dots \cup V_n$.

Zaključujemo da je topološki prostor $(Y, \mathcal{S})$ kompaktan.

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da je topološki prostor $(Y, \mathcal{S})$ kompaktan. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od Y u $(X, \mathcal{T})$. Definiramo:

$$\mathcal{V} = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{U}\}.$$

Vrijedi $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}$. Naime ako je $U \in \mathcal{U}$ onda je $U \in \mathcal{T}$ pa je $U \cap Y \in \mathcal{S}$. Nadalje vrijedi

$$\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = Y.$$

Očito za svaki $V \in \mathcal{V}$ vrijedi $V \subseteq Y$ pa je $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \subseteq Y$. S druge strane iz $Y \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ slijedi

$$Y \subseteq \left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \right) \cap Y = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (U \cap Y) = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V.$$

Dakle $Y \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$. Prema tome zaista je $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = Y$.

Zaključujemo da je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač topološkog prostora $(Y, \mathcal{S})$. Budući da je $(Y, \mathcal{S})$ kompaktan topološki prostor postoje $n \in \mathbb{N}$ i $V_1, \dots V_n \in \mathcal{V}$ takvi da je

$$Y = V_1 \cup \cdots \cup V_n.$$

Za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ postoji $U_i \in \mathcal{U}$ takav da je $V_i = U_i \cap Y$. Stoga je

$$Y = V_1 \cup \cdots \cup V_n = (U_1 \cap Y) \cup \cdots \cup (U_n \cap Y) = (U_1 \cup \cdots \cup U_n) \cap Y.$$

Stoga je $Y \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Zaključujemo da je Y kompaktan skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$. □

Definicija 3.2.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $K \subseteq X$. Kažemo da je K kompaktan skup u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki niz (x_n) u X takav da je $x_n \in K$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $a \in K$ takav da je a gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru (X, d).*

Propozicija 3.2.5. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je K neprazan skup od X. Tada je K kompaktan skup u (X, d) ako i samo ako je $(K, d\,|_{K \times K})$ kompaktan metrički prostor.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Pretpostavimo da je K kompaktan skup u (X, d). Neka je (x_n) niz u K. Tada postoji $a \in K$ takav da je a gomilište niza (x_n) u (X, d). To znači da za svaki $\varepsilon > 0$ i za svaki $N \in \mathbb{N}$ postoji $n \geq N$ takav da je $d(x_n, a) < \varepsilon$. No za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$d(x_n, a) = d\,|_{K \times K}\,(x_n, a).$$

Stoga je jasno da je a gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru $(K, d\,|_{K \times K})$. Dokazali smo da je metrički prostor $(K, d\,|_{K \times K})$ kompaktan.

$\Leftarrow$ Analogno pokazujemo da kompaktnost metričkog prostora $(K, d\,|_{K \times K})$ povlači kompaktnost skupa K u metričkom prostoru (X, d). □

Propozicija 3.2.6. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je K podskup od X. Tada je K kompaktan skup u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je K kompaktan skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.*

Dokaz. Ako je $K = \emptyset$ tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da je K neprazan. Imamo da je $(K, d\ |_{K\times K})$ potprostor metričkog prostora (X, d). Tada iz korolara 3.1.3 slijedi da je $(K, \mathcal{T}_{d|_{K\times K}})$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T}_d)$. Dakle $\mathcal{T}_{d|_{K\times K}}$ je relativna topologija na K određena topologijom $\mathcal{T}_d$.

Koristeći propoziciju 3.2.5 i propoziciju 3.2.3 dobivamo sljedeće ekvivalencije:

$$K \text{ kompaktan u metričkom prostoru } (X, d)$$

$$\Leftrightarrow (K, d_{|K\times K}) \text{ kompaktan metrički prostor}$$

$$\Leftrightarrow (K, \mathcal{T}_{d|_{K\times K}}) \text{ kompaktan topološki prostor}$$

$$\Leftrightarrow K \text{ kompaktan u topološkom prostoru } (X, \mathcal{T}_d).$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

3.3 Zatvorenost i kompaktnost

Definicija 3.3.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Neka je $F \subseteq X$. Kažemo da je F zatvoren skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako je $X \setminus F$ otvoren skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ tj. ako je $X \setminus F \in \mathcal{T}$.*

Uočimo sljedeće: ako je (X, d) metrički prostor te $F \subseteq X$ onda je F zatvoren skup u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je F zatvoren skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.

Napomena 3.3.2. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor takav da je $\mathcal{T}$ konačan skup. Tada je svaki podskup od X kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$.*

Naime, ako je $K \subseteq X$ i $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$ onda je $\mathcal{U}$ konačan skup jer je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$. Imamo $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ te je $K \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n$.

Primjer 3.3.3. *Neka je X skup koji ima barem dva elementa. Odaberimo bilo koji $K \subseteq X$ takav da je $K \neq \emptyset$ i $K \neq X$. Prema prethodnoj napomeni skup K je kompaktan u topološkom prostoru $(X, \{\emptyset, X\})$. Tvrdimo da K nije zatvoren.*

Pretpostavimo suprotno. Tada je $X \setminus K$ otvoren skup u $(X, \{\emptyset, X\})$. Odnosno $X \setminus K \in \{\emptyset, X\}$ tj. $X \setminus K = \emptyset$ ili $X \setminus K = X$ pa je $K = X$ ili $K = \emptyset$ što nije moguće zbog načina na koji smo odabrali K. Dakle K nije zatvoren skup u $(X, \{\emptyset, X\})$.

Prema tome kompaktan skup u topološkom prostoru ne mora općenito biti zatvoren.

Definicija 3.3.4. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je Hausdorffov ako za sve $x, y \in X$ takve da je $x \neq y$ postoje U i $V \in \mathcal{T}$ takvi da je $x \in U$ i $y \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.*

Primjer 3.3.5. *Neka je X skup od barem dva elementa. Tada topološki prostor $(X, \{\emptyset, X\})$ nije Hausdorffov.*

Naime odaberimo $x, y \in X$ takve da $x \neq y$. Kada bi postojali $U, V \in \{\emptyset, X\}$ takvi da je $x \in U$, $y \in V$ i $U \cap V = \emptyset$ onda bi iz $x \in U$ i $y \in V$ slijedilo $U \neq \emptyset$ i $V \neq \emptyset$ pa bismo imali $U = V = X$, a to je nemoguće zbog $U \cap V = \emptyset$.

Propozicija 3.3.6. *Svaki metrizabilan topološki prostor je Hausdorffov.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{T})$ metrizabilan topološki prostor. Tada postoji metrika d na X takva da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Neka su $x, y \in X$ takvi da je $x \neq y$. Tada je $d(x, y) > 0$. Definiramo:

$$r = \frac{d(x, y)}{2} > 0.$$

Neka je $U = K(x, r)$ i $V = K(y, r)$. Prema propoziciji 1.3.6 vrijedi da su $U, V \in \mathcal{T}$. Očito vrijedi $x \in U$ i $y \in V$.

Dokažimo da je $U \cap V = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno. Neka je $z \in U \cap V$. Tada je $z \in U$ i $z \in V$.
Kako je $z \in U$ vrijedi

$$d(x, z) < \frac{d(x, y)}{2} = r.$$

Kako je $z \in V$ vrijedi

$$d(y, z) < \frac{d(x, y)}{2} = r.$$

Imamo

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + r = 2r = d(x, y),$$

što očito nije moguće. Dakle $U \cap V = \emptyset$. Prema tome topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je Hausdorffov. □

Lema 3.3.7. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor. Neka je $x \in X$ te neka je K kompaktan skup takav da $x \notin K$. Tada postoje U i $V \in \mathcal{T}$ takvi da je $x \in U$, $K \subseteq V$ i $U \cap V = \emptyset$.*

Dokaz. Tvrdnja je jasna ako je $K = \emptyset$. Pretpostavimo da je $K \neq \emptyset$. Neka je $y \in K$. Tada je $x \neq y$ pa postoje $U_y, V_y \in \mathcal{T}$ takvi da je $x \in U_y, y \in V_y$ i $U_y \cap V_y = \emptyset$. Neka je

$$\mathcal{V} = \{V_y \mid y \in K\}.$$

Tada je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač od K. Budući da je K kompaktan skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $y_1, \ldots, y_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}.$$

S druge strane $x \in U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$. Očito su skupovi $V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$ i $U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$ otvoreni u $(X, \mathcal{T})$. Pokažimo da su ovi skupovi disjunktni.

Neka je $z \in U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$. Tada je $z \in U_{y_i}$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ pa $z \notin V_{y_i}$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dakle $z \notin V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$.
Stoga je

$$(V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}) \cap (U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}) = \emptyset.$$

Time je tvrdnja dokazana. □

Propozicija 3.3.8. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Pretpostavimo da je $S \subseteq X$ takav da za svaki $x \in S$ postoji $U_x \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in U_x \subseteq S$. Tada je $S \in \mathcal{T}$.*

Dokaz. Za sve $x \in S$ postoji $U_x \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in U_x \subseteq S$. Slijedi $S = \bigcup_{x \in X} U_x$. Stoga je $S \in \mathcal{T}$. □

Teorem 3.3.9. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor. Neka je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je K zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Pokažimo da je $X \setminus K$ otvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Neka je $x \in X \setminus K$. Tada je $x \in X$ i $x \notin K$ pa prema lemi 3.3.7 postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da $x \in U$, $K \subseteq V$ i $U \cap V = \emptyset$. No tada je i $U \cap K = \emptyset$. Dakle $U \subseteq X \setminus K$. Sada prema propoziciji 3.3.8 slijedi da je $X \setminus K \in \mathcal{T}$ odnosno $X \setminus K$ je otvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Dakle K je zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$.

□

Korolar 3.3.10. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je K kompaktan skup u (X, d). Tada je K zatvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Prema propoziciji 3.2.6 K je kompaktan skup u pripadnom topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$. No topološki prostor $(X, \mathcal{T}_d)$ je metrizabilan pa prema propoziciji 3.3.6 slijedi da je $(X, \mathcal{T}_d)$ Hausdorffov. Sada imamo da je K kompaktan skup u Hausdorffovom prostoru pa prema teoremu 3.3.9 slijedi da je K zatvoren u $(X, \mathcal{T}_d)$. Stoga je K zatvoren skup u metričkom prostoru (X, d). □

Primjer 3.3.11. *Neka je X beskonačan skup. Prema primjeru 2.4.5 topološki prostor $(X, \mathcal{P}(X))$ nije kompaktan, dakle X nije kompaktan skup u $(X, \mathcal{P}(X))$ no očito je X zatvoren u $(X, \mathcal{P}(X))$. Prema tome zatvoren skup u topološkom prostoru ne mora biti kompaktan.*

Neka je d diskretna metrika na X. Tada je $\mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_d$ (prema primjeru 2.3.7). Stoga X nije kompaktan skup u (X, d).

Prema tome zatvoren skup u metričkom prostoru ne mora biti kompaktan.

Propozicija 3.3.12. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Pretpostavimo da je F zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$ takav da je $F \subseteq K$. Tada je F kompaktan u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od F u $(X, \mathcal{T})$. Definirajmo:

$$\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cup (X \setminus F).$$

Tvrdimo da je $\mathcal{U}'$ otvoren pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$. Očito je $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{T}$. Neka je $x \in K$.
Ako je $x \in F$ onda postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $x \in U$.
Ako $x \notin F$ onda je $x \in X \setminus F$, a $X \setminus F \in \mathcal{U}'$.
U svakom slučaju postoji $U' \in \mathcal{U}'$ takav da je $x \in U'$. Prema tome $\mathcal{U}'$ je otvoren pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$. Budući da je K kompaktan skup postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U'_1, \dots, U'_n \in \mathcal{U}'$ takvi da je

$$K \subseteq U'_1 \cup \dots \cup U'_n. \tag{3.2}$$

Tvrdimo da postoje $k \in \mathbb{N}$ i $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}$ takvi da je

$$K \subseteq (U_1 \cup \dots \cup U_k) \cup (X \setminus F).$$

To je jasno, ako postoje $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ takvi da je $U'_i \in \mathcal{U}$ i $U'_j = X \setminus F$. Naime iz (3.2) grupiranjem slijedi postojanje traženih $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}$.

Ako su $U'_1, \dots, U'_n \in \mathcal{U}$ onda prema (3.2) vrijedi

$$K \subseteq (U'_1 \cup \dots \cup U'_n) \cup (X \setminus F).$$

Ako je $U'_1 = \dots = U'_n = X \setminus F$ onda je $K \subseteq X \setminus F$ pa odaberemo bilo koji $U_1 \in \mathcal{U}$ te imamo

$$K \subseteq U_1 \cup (X \setminus F).$$

Dakle postoje $k \in \mathbb{N}$ i $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}$ takvi da je

$$K \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_k \cup (X \setminus F).$$

Iz $F \subseteq K$ slijedi

$$F \subseteq (U_1 \cup \dots \cup U_k) \cup (X \setminus F),$$

a iz ovog slijedi

$$F \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_k.$$

Time smo dokazali da je F kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. □

Korolar 3.3.13. *Neka je (X, d) metrički prostor. Pretpostavimo da je K kompaktan skup u (X, d) te da je F zatvoren skup u (X, d) takav da je $F \subseteq K$. Tada je F kompaktan skup u (X, d).*

Dokaz. Prema propoziciji 3.2.6 skup K je kompaktan u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$. Očito je F zatvoren skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$ pa iz propozicije 3.3.12 slijedi da je F kompaktan skup u $(X, \mathcal{T}_d)$. Sada iz propozicije 3.2.6 slijedi da je F kompaktan skup u metričkom prostoru (X, d). □

Propozicija 3.3.14. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je K kompaktan skup u (X, d). Tada je K zatvoren i omeđen u (X, d).*

Dokaz. Prema korolaru 3.3.10 skup K je zatvoren u metričkom prostoru (X, d). Neka je

$$\mathcal{U} = \{K(x, r) \mid x \in X,\ r > 0\}.$$

Imamo da je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač skupa K u (X, d). Budući da je K kompaktan u (X, d) postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je

$$K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n. \tag{3.3}$$

Svaki element od $\mathcal{U}$ je očito omeđen skup u (X, d). Dakle $U_1, \ldots, U_n$ su omeđeni skupovi pa iz korolara 1.3.13 slijedi da je $U_1 \cup \cdots \cup U_n$ omeđen skup u (X, d). Sada iz (3.3) slijedi da je K omeđen u metričkom prostoru (X, d) jer je podskup omeđenog skupa. □

Zatvoren i omeđen skup u metričkom prostoru ne mora biti kompaktan, što prikazuje sljedeći primjer:

Primjer 3.3.15. *Neka je X beskonačan skup. Neka je d diskretna metrika na X. Promotrimo metrički prostor (X, d). Skup X je očito zatvoren u (X, d), a i omeđen jer je $X = K(x, 2)$ za sve $x \in X$. No X nije kompaktan skup.*

Naime, kada bi X bio kompaktan skup u (X, d) onda bi (X, d) bio kompaktan metrički prostor pa bi prema korolaru 1.3.16 bio potpuno omeđen, a to je nemoguće prema primjeru 1.3.15.

Drugi način da utvrdimo da X nije kompaktan skup u (X, d) je da promotrimo familiju

$$\mathcal{U} = \{\{x\} \mid x \in X\}.$$

Za svaki $x \in X$ vrijedi $\{x\} = K\left(x, \frac{1}{2}\right)$ pa je $\{x\}$ otvoren skup u (X, d). Stoga je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač skupa X u (X, d). Kada bi X bio kompaktan tada bi postojali $n \in \mathbb{N}$ i $\{x_1\}, \ldots, \{x_n\} \in \mathcal{U}$ takvi da je

$$X \subseteq \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_n\},$$

što nije moguće jer je X beskonačan skup.

3.4 Kompaktni skupovi u $\mathbb{R}^n$

Definicija 3.4.1. *Neka je $\mathcal{F}$ familija skupova te neka je S skup. Kažemo da je $\mathcal{F}$ dobar za S ako postoje $n \in \mathbb{N}$ i $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ takvi da je $S \subseteq F_1 \cup \cdots \cup F_n$.*

Uočimo sljedeće: ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $K \subseteq X$ onda je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ ako i samo ako za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od K u $(X, \mathcal{T})$ vrijedi da je $\mathcal{U}$ dobar za K.

Pretpostavimo da je $\mathcal{F}$ familija skupova te da su S i T skupovi takvi da je $\mathcal{F}$ dobar za S i $\mathcal{F}$ dobar za T. Tada je $\mathcal{F}$ očito dobar za $S \cup T$.

Teorem 3.4.2. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$. Tada je $[a, b]$ kompaktan skup u $(\mathbb{R}, d)$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $[a, b]$ u $(\mathbb{R}, d)$. Neka je

$$\Omega = \{x \in [a, b] \mid \mathcal{U} \text{ dobar za } [a, x]\}.$$

Budući da je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $[a, b]$ postoji $U_1 \in \mathcal{U}$ takav da je $a \in U_1$. Tada je $\{a\} \subseteq U_1$ pa je očito $\mathcal{U}$ dobar za $\{a\}$. No $\{a\} = [a, a]$ pa zaključujemo da je $a \in \Omega$.

Iz $\Omega \subseteq [a, b]$ slijedi da je b gornja međa od Ω. Dakle Ω je neprazan odozgo omeđen skup pa prema propoziciji 1.5.8 postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je c supremum skupa Ω.
Budući da je c gornja međa od Ω te da je $a \in \Omega$ vrijedi da je

$$a \leq c.$$

Nadalje iz činjenice da je b gornja međa od Ω te da je c najmanja gornja međa vrijedi da je

$$c \leq b.$$

Prema tome:

$$a \leq c \leq b \text{ tj. } c \in [a, b].$$

Budući da je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od $[a, b]$ postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $c \in U$. Imamo da je U otvoren skup u $(\mathbb{R}, d)$ pa postoji $r > 0$ takav da je

$$K(c, r) = \langle c - r, c + r \rangle \subseteq U. \tag{3.4}$$

Vrijedi da je $c - r < c$ pa $c - r$ nije gornja međa skupa Ω. Stoga postoji $x \in \Omega$ takav da je

$$c - r < x \tag{3.5}$$

Iz definicije od Ω slijedi da je $\mathcal{U}$ dobar za $[a, x]$. Iz (3.4) je očito da je $\mathcal{U}$ dobar za $\langle c - r, c + r \rangle$. Stoga je $\mathcal{U}$ dobar za

$$[a, x] \cup \langle c - r, c + r \rangle.$$

Tvrdimo da je $[a, c + r\rangle \subseteq [a, x] \cup \langle c - r, c + r \rangle$.
Neka je $y \in [a, c + r\rangle$. Tada je

$$a \leq y < c + r.$$

Ako je $y \leq x$ onda je $y \in [a, x]$.
Ako je $x < y$ onda iz (3.5) slijedi da je $c - r < y$. Dakle

$$c - r < y < c + r \text{ pa je } y \in \langle c - r, c + r\rangle.$$

U svakom slučaju vrijedi da je $y \in [a, x] \cup \langle c - r, c + r\rangle$. Time smo dokazali da vrijedi:

$$[a, c + r\rangle \subseteq [a, x] \cup \langle c - r, c + r\rangle. \tag{3.6}$$

Kako je $\mathcal{U}$ dobar za $[a, x] \cup \langle c - r, c + r\rangle$ te vrijedi (3.6) slijedi da je $\mathcal{U}$ dobar za $[a, c + r\rangle$. Očito je $[a, c] \subseteq [a, c + r\rangle$ pa je $\mathcal{U}$ dobar za $[a, c]$.

Tvrdimo da je $c = b$. Pretpostavimo suprotno. Tada je $c < b$. Uočimo da je

$$c < \min\{c + r, b\}.$$

Odaberimo $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$c < x < \min\{c + r, b\}.$$

Imamo da je $c < x < c + r$ i $x < b$.
Slijedi da je $a < x$ te da je $[a, x] \subseteq [a, c + r\rangle$. Iz činjenice da je $\mathcal{U}$ dobar za $[a, c + r\rangle$ slijedi da je $\mathcal{U}$ dobar za $[a, x]$ i $x \in [a, b]$ pa imamo da je $x \in \Omega$. No kako je $c = \sup \Omega$ slijedi da je $x \leq c$ što je u kontradikciji sa $c < x$. Prema tome $c = b$. Kako je $\mathcal{U}$ dobar za $[a, c]$ slijedi da je $\mathcal{U}$ dobar za $[a, b]$.

Zaključujemo da je svaki otvoren pokrivač od $[a, b]$ u $(\mathbb{R}, d)$ dobar za $[a, b]$. Prema tome $[a, b]$ je kompaktan skup u $(\mathbb{R}, d)$.

□

Korolar 3.4.3. *Neka ja d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je K zatvoren i omeđen skup u $(\mathbb{R}, d)$. Tada je K kompaktan skup u $(\mathbb{R}, d)$.*

Dokaz. Budući da je K omeđen, postoje $x \in \mathbb{R}$ i $r > 0$ takvi da je

$$K \subseteq K(x, r).$$

Znamo da je $K(x, r) = \langle x - r, x + r\rangle$. Stoga je

$$K \subseteq \langle x - r, x + r\rangle,$$

pa je $K \subseteq [x - r, x + r]$. Prema teoremu 3.4.2 skup $[x - r, x + r]$ je kompaktan u $(\mathbb{R}, d)$. Iz korolara 3.3.13 slijedi da je K kompaktan skup u $(\mathbb{R}, d)$. □

Propozicija 3.4.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je (x_n) Cauchyjev niz u (X, d). Tada je (x_n) omeđen niz.*

Dokaz. Odaberimo bilo koji $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \geq n_0$ vrijedi

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Slijedi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi da je $d(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$ pa je $x_n \in K(x_{n_0}, \varepsilon)$. Prema tome

$$\{x_n \mid n \geq n_0\} \subseteq K(x_{n_0}, \varepsilon)$$

što povlači da je $\{x_n \mid n \geq n_0\}$ omeđen skup u metričkom prostoru (X, d). Vrijedi:

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x_n \mid n \geq n_0\} \cup \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_{n_0}\}. \tag{3.7}$$

Jednočlani podskupovi od X su očito omeđeni u (X, d) pa iz (3.7) slijedi da je skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen kao unija konačno mnogo omeđenih skupova (prema propoziciji 1.3.13). Dakle (x_n) je omeđen niz u (X, d). □

Propozicija 3.4.5. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je (x_n) omeđen niz u $(\mathbb{R}, d)$. Tada (x_n) ima gomilište u $(\mathbb{R}, d)$.*

Dokaz. Budući da je (x_n) omeđen niz u $(\mathbb{R}, d)$ postoje x_0 i $r > 0$ takvi da je

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq K(x_0, r).$$

Dakle

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \subseteq [x_0 - r, x_0 + r].$$

Prema tome

$$x_n \in [x_0 - r, x_0 + r] \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Skup $[x_0 - r, x_0 + r]$ je kompaktan u $(\mathbb{R}, d)$ prema teoremu 3.4.2 pa slijedi da postoji $a \in [x_0 - r, x_0 + r]$ takav da je a gomilište niza (x_n) u $(\mathbb{R}, d)$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Teorem 3.4.6. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Tada je $(\mathbb{R}, d)$ potpun metrički prostor.*

Dokaz. Neka je (x_n) Cauchyjev niz u $(\mathbb{R}, d)$. Tada iz propozicije 3.4.4 slijedi da je (x_n) omeđen niz u $(\mathbb{R}, d)$ pa prema propoziciji 3.4.5 postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je a gomilište niza (x_n). Sada iz propozicije 1.4.7 slijedi da $x_n \to a$, dakle (x_n) je konvergentan niz u $(\mathbb{R}, d)$. Zaključujemo da je $(\mathbb{R}, d)$ potpun metrički prostor. □

Propozicija 3.4.7. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka je d' euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je (x_i) niz u $\mathbb{R}^n$ te neka su $(x_i^1), \ldots, (x_i^n)$ komponentni nizovi od (x_i), to jest nizovi u $\mathbb{R}$ takvi da je $x_i = (x_i^1, \ldots, x_i^n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka je $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a^1, \ldots, a^n)$. Tada $x_i \to a$ u $(\mathbb{R}^n, d)$ ako i samo ako $x_i^1 \to a^1, \ldots, x_i^n \to a^n$ u $(\mathbb{R}, d')$.*

$\Rightarrow$ Pretpostavimo da $x_i \to a$. Neka je $k \in \{1, \dots, n\}$. Dokažimo da

$$x_i^k \to a^k.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $i \geq i_0$ vrijedi

$$d(x_i, a) < \varepsilon.$$

Neka je $i \geq i_0$. Imamo:

$$d'(x_i^k, a^k) = |x_i^k - a^k| = \sqrt{(x_i^k - a^k)^2} \leq \sqrt{(x_i^1 - a^1)^2 + \cdots + (x_i^k - a^k)^2} = d(x_i, a) < \varepsilon.$$

Dakle $d'(x_i^k, a^k) < \varepsilon$ za svaki $i \geq i_0$. Prema tome $x_i^k \to a^k$.

$\Leftarrow$ Obratno, pretpostavimo da $x_i^1 \to a^1, \dots, x_i^n \to a^n$. Dokažimo da $x_i \to a$. Neka je $\varepsilon > 0$. Za svaki $k \in \{1, \dots, n\}$ iz $x_i^k \to a^k$ slijedi da postoji $i_0^k \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $i \geq i_0^k$ vrijedi

$$|x_i^k - a^k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Neka je $i_0 = \max\{i_0^1, \dots, i_0^n\}$. Neka je $i \geq i_0$. Tada je $i \geq i_0^1, \dots, i \geq i_0^n$ pa je

$$|x_i^1 - a^1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \dots, |x_i^n - a^n| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},$$

što povlači da je

$$d(x_i, a) = \sqrt{(x_i^1 - a^1)^2 + \cdots + (x_i^n - a^n)^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

Dakle $d(x_i, a) < \varepsilon$ za svaki $i \geq i_0$. Prema tome $x_i \to a$.

Lema 3.4.8. *Neka su $p, q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuće funkcije. Tada je i $p \circ q$ strogo rastuća funkcija.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je $q(n) < q(n+1)$ pa iz propozicije 1.2.15 slijedi da je $p(q(n)) < p(q(n+1))$, tj. $(p \circ q)(n) < (p \circ q)(n+1)$. Time je tvrdnja leme dokazana. □

Lema 3.4.9. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je (x_n) niz u X te neka je (y_n) podniz niza (x_n).*

1) Pretpostavimo da je (x_n) omeđen niz u (X, d). Tada je (y_n) omeđen niz u (X, d).

2) Pretpostavimo da je (x_n) konvergentan niz u (X, d). Tada je (y_n) konvergentan niz u (X, d).

Dokaz. Budući da je (y_n) podniz niza (x_n) postoji strogo rastuća funkcija $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $y_n = x_{p(n)}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

(1) Vrijedi

$$\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x_{p(n)} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}. \tag{3.8}$$

□

Skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je omeđen u (X, d) jer je (x_n) omeđen niz u (X, d) pa iz (3.8) slijedi da je $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen skup u (X, d), dakle (y_n) je omeđen niz u (X, d).

(2) Budući da je (x_n) konvergentan postoji $a \in X$ takav da $x_n \to a$. Neka je U otvoren skup u X takav da je $a \in U$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi da je $x_n \in U$. Neka je $n \geq n_0$. Iz propozicije 1.2.15 slijedi da je $p(n) \geq n$ pa je $p(n) \geq n_0$. Stoga je $x_{p(n)} \in U$, tj. $y_n \in U$ za svaki $n \geq n_0$. Zaključujemo da $y_n \to a$. Prema tome (y_n) je konvergentan niz u (X, d).

Propozicija 3.4.10. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Ako je $n \in \mathbb{N}$ te ako su $(x_i^1), \dots, (x_i^n)$ omeđeni nizovi u $(\mathbb{R}, d)$ onda postoji strogo rastuća funkcija $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da su nizovi $(x_{p(i)}^1), \dots, (x_{p(i)}^n)$ konvergentni u $(\mathbb{R}, d)$.*

Dokaz. Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom po n.
Za $n = 1$ tvrdnja slijedi iz propozicije 3.4.5 i propozicije 1.2.20.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka su $(x_i^1), \dots, (x_i^{n+1})$ omeđeni nizovi u $(\mathbb{R}, d)$. Iz činjenice da tvrdnja vrijedi za n slijedi da postoji strogo rastuća funkcija $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da su nizovi $(x_{p(i)}^1), \dots, (x_{p(i)}^n)$ konvergentni u $(\mathbb{R}, d)$. Niz $(x_{p(i)}^{n+1})$ je omeđen u $(\mathbb{R}, d)$ kao podniz niza (x_i^{n+1}) prema lemi 3.4.9.

Iz propozicija 3.4.5 i 1.2.20 slijedi da niz $(x_{p(i)}^{n+1})$ ima konvergentan podniz u $(\mathbb{R}, d)$, dakle postoji strogo rastuća funkcija $q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(x_{p(q(i))}^{n+1})$ konvergentan niz u $(\mathbb{R}, d)$.

Nizovi $(x_{p(q(i))}^1), \dots, (x_{p(q(i))}^n)$ su podnizovi nizova $(x_{p(i)}^1), \dots, (x_{p(i)}^n)$ pa su prema lemi 3.4.9 konvergentni.

Dakle $(x_{(p \circ q(i))}^1), \dots, (x_{(p \circ q(i))}^{n+1})$ su konvergentni nizovi u $\mathbb{R}$. Prema lemi 3.4.8 funkcija $p \circ q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je strogo rastuća i time smo dokazali da tvrdnja vrijedi za $n + 1$.

Stoga je tvrdnja propozicije dokazana. □

Teorem 3.4.11. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka je (x_i) omeđen niz u $(\mathbb{R}^n, d)$. Tada (x_i) ima podniz koji je konvergentan u $(\mathbb{R}^n, d)$.*

Dokaz. Neka su $(x_i^1), \dots, (x_i^n)$ komponentni nizovi od (x_i). Neka je p euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Skup $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ je omeđen u $(\mathbb{R}^n, d)$ jer je (x_i) omeđen niz u $(\mathbb{R}^n, d)$ pa iz leme 1.3.11 slijedi da postoji $r > 0$ takav da je

$$\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq K_d\left((0, \dots, 0), r\right).$$

Neka je $i \in \mathbb{N}$. Tada je $x_i \in K_d((0,\dots,0), r)$ pa je $d(x_i, (0,\dots,0)) < r$. Odnosno

$$d((x_i^1,\dots,x_i^n),(0,\dots,0)) < r.$$

Stoga je

$$\sqrt{\left(x_i^1\right)^2 + \cdots + \left(x_i^n\right)^2} < r.$$

Neka je $j \in \{1,\dots,n\}$. Tada je

$$\left|x_i^j\right| \leq \sqrt{\left(x_i^1\right)^2 + \cdots + \left(x_i^n\right)^2}$$

pa je $\left|x_i^j\right| < r$, tj. $x_i^j \in \langle -r, r\rangle$. Dakle

$$\{x_i^j \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq K_p(0,r).$$

Stoga je niz $\left(x_i^j\right)_{i\in\mathbb{N}}$ omeđen u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, p)$. Dakle nizovi $\left(x_i^1\right),\dots,\left(x_i^n\right)$ su omeđeni u $(\mathbb{R}, p)$ pa prema propoziciji 3.4.10 postoji strogo rastuća funkcija $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da su nizovi $(x_{p(i)}^1),\dots,(x_{p(i)}^n)$ konvergentni nizovi u $(\mathbb{R}, p)$.
Stoga postoje $a^1,\dots,a^n \in \mathbb{R}$ takvi da

$$x_{p(i)}^1 \to a^1,\dots,x_{p(i)}^n \to a^n.$$

Za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x_{p(i)} = (x_{p(i)}^1,\dots,x_{p(i)}^n)$$

pa iz propozicije 3.4.7 slijedi da $x_{p(i)} \to (a^1,\dots,a^n)$ u $(\mathbb{R}^n, d)$. Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Korolar 3.4.12. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Tada je $(\mathbb{R}^n, d)$ potpun metrički prostor.*

Dokaz. Neka je (x_i) Cauchyjev niz u $(\mathbb{R}^n, d)$. Tada je prema propoziciji 3.4.4 (x_i) omeđen niz u $(\mathbb{R}^n, d)$ pa iz teorema 3.4.11 i propozicije 1.2.18 slijedi da postoji $a \in \mathbb{R}^n$ takav da je a gomilište niza (x_i) u $(\mathbb{R}^n, d)$. Sada propozicija 1.4.7 povlači $x_i \to a$. Prema tome (x_i) je konvergentan niz u $(\mathbb{R}^n, d)$. Stoga je $(\mathbb{R}^n, d)$ potpun. □

Korolar 3.4.13. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Tada je K kompaktan skup u $(\mathbb{R}^n, d)$ ako i samo ako je K zatvoren i omeđen u $(\mathbb{R}^n, d)$.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Kako je K kompaktan onda je K zatvoren i omeđen prema propoziciji 3.3.14.

$\Leftarrow$ Neka je K zatvoren i omeđen u $(\mathbb{R}^n, d)$. Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}^n$ takav da je $x_i \in K$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq K$$

pa zaključujemo da je niz (x_i) omeđen u $(\mathbb{R}^n, d)$. Prema teoremu 3.4.11 postoji podniz (y_i) od (x_i) i $a \in \mathbb{R}^n$ takav da

$$y_i \to a.$$

Očito je $y_i \in K$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ pa iz leme 1.5.11 slijedi da je $a \in K$. Prema propoziciji 1.2.18 a je gomilište niza (x_i) u $(\mathbb{R}^n, d)$. Stoga je, prema definiciji, K kompaktan skup u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$. $\square$

Bibliografija

1. C. O. Christenson, W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.
2. W. A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*, Oxford University Press, 1975.
3. S. B. Nadler, *Continuum theory*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

Sažetak

Diplomski rad podijeljen je na tri glavna poglavlja u kojima se proučavaju elementarni aspekti kompaktnosti.

U prvom poglavlju definirali smo metriku i metričke prostore, proučavali nizove u metričkim prostorima, definirali pojmove kompaktan i potpun metrički prostor te karakterizirali kompaktnost preko potpunosti i potpune omeđenosti.

U drugom poglavlju proučavali smo kompaktne topološke prostore. Definirali smo pojam otvorenog pokrivača te karakterizirali kompaktnost preko otvorenih pokrivača.

U trećem poglavlju bavili smo se s kompaktnim skupovima u metričkim i topološkim prostorima. Povezali smo zatvorenost i kompaktnost te na kraju proučavali kompaktne skupove u $\mathbb{R}^n$.

Summary

The thesis is divided into three main chapters in which the elementary aspects of compactness are studied.

In the first chapter, we defined metrics and metric spaces, studied sequences in metric spaces, defined the notions of a compact and a complete metirc space, and characterized compactness by completeness and complete boundedness.

In the second chapter, we studied compact topological spaces. We defined the notions of an open cover and characterized compactness by open covers.

In the third chapter, we dealt with compact sets in metric and topological spaces. We connected closedness and compactness and finally studied compact sets in $\mathbb{R}^n$.

Životopis

Rođena sam 18.7.1996. godine u Zadru. Svoje školovanje započela sam u osnovnoj školi Privlaka. Nakon završetka osnovne škole upisala sam opću gimnaziju Jurja Barakovića u Zadru. Srednju školu završila sam 2015. godine te iste godine upisala preddiplomski sveučilišni studij matematike, nastavnički smjer, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij završila sam 2019. godine te upisala diplomski studiji matematike nastavnički smjer.