Paradoksi u elementarnoj teoriji vjerojatnosti

Kovačević, Kristina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Kristina Kovačević

PARADOKSI U ELEMENTARNOJ TEORIJI VJEROJATNOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, rujan, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj obitelji.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **3**

1 Povijest razvoja teorije vjerojatnosti **4**
1.1 Razvoj teorije vjerojatnosti 4
1.2 Aksiomatizacija teorije vjerojatnosti 5

2 Paradoksi u elementarnoj teoriji vjerojatnosti **7**
2.1 Monty Hall paradoks 7
2.2 Paradoksi slični Monty Hall paradoksu 12
2.2.1 Paradoks tri zatvorenika 12
2.2.2 Bertrandov paradoks kutija 14
2.3 Intranzitivne kocke 15
2.4 Bertrandov paradoks 19
2.4.1 Slučajne krajnje točke 20
2.4.2 Slučajna udaljenost od središta kružnice 21
2.4.3 Slučajno odabrano polovište tetive 22
2.5 Rođendanski paradoks 24
2.6 Problem dviju omotnica 31
2.6.1 Problem otvorene omotnice 33
2.7 Sankt-Peterburški paradoks 36

Bibliografija **41**

Uvod

Razvoj teorije vjerojatnosti vezan je uz igre na sreću, a smješta ga se u doba renesanse kada su se ishodi igara na sreću prestali gledati kao rezultati utjecaja nadnaravnih sila. Nastanak teorije vjerojatnosti tradicionalno se stavlja u 17. stoljeće i pripisuje Blaiseu Pascalu i Pierreu de Fermatu koji su razmjenom pisama tijekom 1654. godine postavili temelje suvremene teorije vjerojatnosti. Nedostatak egzaktne osnove definicije vjerojatnosti riješio je ruski matematičar Andrej Nikolajevič Kolmogorov koji je 1933. godine aksiomatizirao vjerojatnost.

Etimologija riječi *paradoks* datira u doba renesanse i dolazi od grčke riječi *parádoksos* koja u prijevodu ima značenje *neočekivan*. Paradoks se prema [4] definira kao zaključak koji je prividno ili u stvarnosti proturječan ispravnom zaključivanju, kao na primjer iskaz *„Nisam dovoljno bogat da kupujem jeftine stvari.*" Jedan od najpoznatijih filozofskih paradoksa s kojim su se mnogi susreli tijekom obrazovanja je onaj grčkog filozofa Sokrata: „Znam da ništa ne znam!"

Paradoksi o kojima su matematičari raspravljali u svojoj korespondenciji imali su važan utjecaj na neke vjerojatnosne rezultate, ali su također utjecali i na razvoj novih teorija u raznim disciplinama. Tako je, na primjer, rasprava o rješenju Sankt-Peterburškog paradoksa potaknula Daniela Bernoullija na razvoj teorije očekivane korisnosti koja je kasnije imala utjecaj na razvoj bihevioralne ekonomije kao interdisciplinarne znanosti koja analizira vezu između „kognitivnih, društvenih i emocionalnih faktora na ekonomsko odlučivanje čovjeka"[18].

Paradoksi obrađeni u glavnom dijelu ovog diplomskog rada prvenstveno su odabrani zbog svoje popularnosti i zanimljivosti. Vjerojatno najpoznatiji paradoks s kojim je zasigurno upoznat svatko tko je imalo zainteresiran za zanimljive vjerojatnosne probleme je Monty Hall paradoks. Ime je dobio po voditelju američke emisije *Let's Make a Deal* koja se temelji na njegovoj primjeni. Paradoks je ugledao svjetlo javnosti kada je izašao u matematičkoj kolumni *Ask Marilyn* časopisa *Parade*. Rješenje koje je predložila Marilyn vos Savan naišlo je na mnogobrojne kritike znanstvenika, a upravo je Monty Hall bio taj koji je stao u obranu Merylinina mišljenja. Vođen iskustvom steknutim za vrijeme vođenja emisije, organizirao je pokus kako bi široj javnosti dokazao ispravnost Marilynina rješenja. Monty Hall paradoks logički je ekvivalentan paradoksu tri zatvorenika i paradoksu Bertrandove kutije. Paradoks tri zatvorenika u svome iskazu ima zamijenjene pojmove automobila i koze iz Monty Hall paradoksa, sa slobodom i smaknućem zatvorenika. U paradoksu Bertrandove kutije postoje tri istovrsne kutije s po dva novčića, zlatnim ili srebrnim. Određuje se vjerojatnost da je drugi od novčića u izabranoj kutiji zlatni ako je prvi zlatni.

U igri bacanja triju kocaka s unaprijed određenim vrijednostima na stranama, naočigled se čini kako je riječ o tri kocke od kojih svaka pobjeđuje onu prethodnu, odnosno nema „najbolje" kocke! Greška u tom razmatranju je u tome što relacija „biti bolja od", definirana u toj igri, nije tranzitivna. Time se dolazi do paradoksa intranzitivnih kocaka.

Jedan od najpoznatijih paradoksa geometrijske vjerojatnosti svakako je Bertrandov paradoks, čija je zanimljivost postojanje tri različita odgovora na postavljeni problem ovisno o tumačenju riječi *slučajno* u iskazu problema.

Paradoks koji je najprimjereniji za primjenu u kurikulumu zbog svoje jednostavne formulacije i jednostavnog rješenja je rođendanski paradoks. Prikupljanje podataka i samostalno istraživanje mogu motivirati učenike na primjenu naučenog i time potaknuti interes za matematiku, a posebno za teoriju vjerojatnosti.

Problem dviju omotnica više je mozgalica nego paradoks, za koju razni autori nude razna rješenja iako se problem na prvi pogled čini vrlo jednostavan. Do paradoksalne izmjene omotnica dolazi u jednom obliku objašnjenja toga problema koje tvrdi kako uvijek treba promijeniti omotnicu jer je očekivana vrijednost u drugoj omotnice uvijek veća nego u onoj prvotno odabranoj, iako igrač nema uvid u iznose koji se nalazi niti u jednoj od omotnica. Time se omotnice mogu vrtiti u nedogled čime se igra nikada ne bi završila, što je apsurdno.

Na samom kraju diskutiramo tzv. Sankt-Peterburški paradoks koji opisuje igru s beskonačnim očekivanim dobitkom. Međutim, malo tko bi kao ulog za igru, u kojoj o pobjedi odlučuje rezultat bacanje novčića, bio spreman platiti 1000 dolara iako je očekivani dobitak beskonačan. Zbog toga je pred matematičare toga vremena postavljen problem određivanja metode koja bi omogućila računanje pravednog uloga igrača na samom početku igre.

U ovom su radu navedeni tek neki od paradoksa u elementarnoj teoriji vjerojanosti, oni najpopularniji. Ukupan opseg paradoksa je daleko veći i njihov utjecaj na razvoj matematike je neupitan. Neki od paradoksa su tijekom rasprava znanstvenika potaknuli i razvoj interdisciplinarnih znanosti. Time je omogućen napredak mnogih područja koja nisu usko vezana za matematiku, ali imaju utjecaj na razvoj kvalitete života razdoblja u kojem živimo i vremenima koja tek dolaze.

Na kraju, želim zahvaliti svima koji su mi bili potpora tijekom dosadašnjeg školovanja. Ovaj rad posvećujem svojoj obitelji. Roditeljima koji su mi omogućili da slijedim svoje snove i koji su tijekom cijelog mog života bili moralna vertikala i primjer čovjeka kakav jednoga dana trebam biti. Hvala bratu koji me uvijek poticao da budem bolja. Velika hvala mentoru, izv. prof. dr. sc. Vjekoslavu Kovaču, koji je u svakom trenutku bio dostupan i koji je svojim iskustvom i stručnošću upotpunio ovaj rad. Hvala na svim savjetima i prijedlozima, ali i slobodi koju ste mi pružili i time omogućili da ovaj diplomski rad zaista bude moje autorsko djelo. Također hvala svim profesorima i asistentima na nastavničkom smjeru te mentorima na praksi. Oni su nam poslužili kao primjer profesora kakvi jednoga dana trebamo biti.

Poglavlje 1

Povijest razvoja teorije vjerojatnosti

1.1 Razvoj teorije vjerojatnosti

Razvoj teorije vjerojatnosti prvenstveno je vezan uz igre na sreću, kojima se ljudi bave od davnina. Prema izvoru [9], pronalasci igraćih kocaka izrađenih od kamena i slonovače sežu u doba drevnog Egipta. Razvoj teorije vjerojatnosti, prema [8], vežemo uz doba renesanse kada su se rezultati igara, kao što je primjerice bacanje kocke, prestali gledati kao rezultat utjecaja nadnaravnih sila. U 16. stoljeću talijanski matematičar Girolamo Cardano (1501.–1576.) piše knjižicu iz kombinatorne teorije vjerojatnosti *Liber de ludo aleae*[1] (*Knjiga o kockanju*) u kojoj se bavi problemom računanja vjerojatnosti dobitka u igrama na sreću. Iako je namjena knjige bila pomoć profesionalnim kockarima s uputama za varanje, ondje je iskazana klasična definicija vjerojatnosti dobitka kao omjera broja povoljnih i broja mogućih ishoda.

Blaise Pascal i Pierre de Fermat svojom su razmjenom pisama tijekom 1654. godine postavili temelje suvremene kombinatorne teorije vjerojatnosti pa se nastanak teorije vjerojatnosti tradicionalno stavlja u 17. stoljeće. Dopisivali su se vezano za određene kockarske probleme: problem kocaka i problem bodova koji su potaknuli razvoj vjerojatnosti.

Njihove je rezultate sistematizirao i proširio nizozemski znanstvenik Christian Huygens (1629.–1695.), koji je ujedno i autor prve objavljene knjige o teoriji vjerojatnosti, *De ratiociniis in ludo aleae*, u kojoj se prvi puta razmišlja o očekivanju[2] kao o „pravednoj nagradi za koju bi igrač predao svoje mjesto u nekoj igri“[8], što će se s vremenom precizirati.

Prvo opsežno djelo u kojemu se teorijski diskutira o vjerojatnosti kao o broju između 0 i 1 je *Ars conjectandi* Jacoba Bernoullija (1654.–1705.), objavljeno posthumno 1713. godine. Iako djelo nije u potpunosti dovršeno, smatra se prvim kompletnim pregledom teorije vjerojatnosti i od tada teorija vjerojatnosti postaje zasebna matematička disciplina.

[1] Objavljena 87 godina nakon Cardanove smrti.

[2] Sam izraz *očekivanje* potječe od nizozemskog matematičara Fransa van Schootena.

Ars conjectandi sastoji se od četiri dijela, a posljednji i najvažniji dio ostao je nedovršen. U tome dijelu diskutira se primjena vjerojatnosti na donošenje ekonomskih odluka gdje je istaknuto da se vjerojatnost može odrediti i *a posteriori* iz promatranja frekvencije nekog događaja. Ovo je također prvo djelo u kojemu se definiraju vjerojatnosti *a priori* i *a posteriori*.

Bernoullijeve rezultate nadopunio je i pojednostavnio Abraham de Moivre (1667.–1754.). Iako su definiciju vjerojatnosti kao omjera broja povoljnih i broja mogućih ishoda koristili i Pascal i de Fermat, de Moivre prvi daje klasičnu definiciju vjerojatnosti *a priori*. De Moivreovi glavni doprinosi matematici vezani su upravo uz teoriju vjerojatnosti za koju je od velikog značaja bilo njegovo glavno djelo *The Doctrine of Chance: A method of calculating the probabilities of events in play*, objavljeno 1718. godine.

Pierre-Simone Laplace (1749.–1827.) svojim je djelom *Theorie Analytique des Probabilites* objavljenim 1812. godine utemeljio modernu teoriju vjerojatnosti. Ovo djelo predstavlja pregled do tada poznatih rezultata iz teorije vjerojatnosti njegovih prethodnika nadopunjenih mnogim Laplaceovim doprinosima. Drugo izdanje ovoga djela poznato je po 153 stranice dugom predgovoru koji je tiskan odvojeno, a cilj je bio približiti vjerojatnosni račun široj publici. Drugi dio djela počinje definicijom vjerojatnosti (koju preuzimamo iz [8]):

> *„Vjerojatnost događaja je omjer brojeva za taj događaj povoljnih i svih mogućih slučajeva, ako ne postoji razlog da pretpostavimo da neki slučaj nastupa češće od drugih, odnosno ako su svi slučajevi za nas jednako vjerojatni.“*

Očiti problem na ovaj način iskazane definicije vjerojatnosti je njezina cirkularnost, a upravo taj nedostatak egzaktne osnove riješio je ruski matematičar Andrej Nikolajevič Kolmogorov koji je 1933. godine na temelju teorije mjere i po uzoru na teoriju skupova aksiomatizirao vjerojatnost.

1.2 Aksiomatizacija teorije vjerojatnosti

Kolmogorov uvodi vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdje je Ω skup svih elementarnih događaja, $\mathcal{F}$ skup složenih događaja (koji sadržava nemoguć događaj i siguran događaj) i $\mathbb{P}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ vjerojatnost te vrijede aksiomi:

- $\forall A \in \mathcal{F} \qquad \mathbb{P}(A) \geq 0$;
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- ako se $A, B \in \mathcal{F}$ međusobno isključuju, onda je $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Prije uvođenja suvremene definicije vjerojatnosti, koja će biti korištena za dokaze u ovom diplomskom radu, potrebno je definirati σ-algebru [7].

Definicija 1.2.1. *Neka je Ω neprazan skup. Familija podskupova $\mathcal{F}$ od Ω zove se σ-algebra skupova na Ω ako vrijede sljedeća tri svojstva:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(ii) Ako je $A \in \mathcal{F}$, onda je i $A^c \in \mathcal{F}$ (zatvorenost na komplement).

(iii) Ako su $A_j \in \mathcal{F}$, $j \in \mathbb{N}$, onda je i $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$ (zatvorenost na prebrojive unije).

Uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ zove se izmjeriv prostor.

Suvremena definicija vjerojatnosti preuzeta iz [7], poprima sljedeći oblik.

Definicija 1.2.2. *Neka je Ω neprazan skup i $\mathcal{F}$ σ-algebra događaja. Vjerojatnost na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ je funkcija $\mathbb{P}\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ koja zadovoljava sljedeća tri aksioma:*

(A1) (nenegativnost) Za sve $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$.

(A2) (normiranost) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

(A3) (σ-aditivnost) Za svaki niz $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ po parovima disjunktnih događaja $A_j \in \mathcal{F}$ ($A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$) vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j).$$

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zove se vjerojatnosni prostor.

Poglavlje 2

Paradoksi u elementarnoj teoriji vjerojatnosti

2.1 Monty Hall paradoks

Monty Hall paradoks poznata je vjerojatnosna zagonetka koja je, kako tvrdi [12], ime dobila po voditelju američke emisije *Let's Make a Deal*, Montyju Hallu, a koja se temelji na primjeni ovoga paradoksa. Prema izvoru [16] ovaj paradoks prvi je predstavio američki matematičar Steve Selvin u svome pismu časopisu *American Statistician* 1975. godine, a poznat je postao 1991. godine kada je Marilyn vos Savant[1] u svojoj kolumni *Ask Marilyn* časopisa *Parade* odgovarala na pitanja čitatelja. Jedno od pitanja bilo je upravo ovaj paradoks.

> *Pretpostavimo da igrač sudjeluje u igri na sreću u kojoj bira između triju ponuđenih vrata. Iza jednih vrata nalazi se automobil, a iza preostalih dvaju vrata nalaze se koze. Nakon što igrač odabere vrata koja želi otvoriti, voditelj koji zna što je iza odabranih vrata, otvori jedna od preostalih vrata iza koji se nalazi koza i postavi pitanje igraču: „Želite li promijeniti odabir vrata?“. Ukoliko igrač odluči promijeniti odabir, ima li veće šanse za dobitak?*

Marilyn je tvrdila da igrač treba promijeniti svoj odabir jer time ima dva puta veću šansu za dobitak. Ovakav odgovor pokrenuo je lavinu reakcija javnosti, uključujući brojne znanstvenike, od kojih se velika većina nije slagala s njezinim odgovorom.

Mnogi su razmišljali na sljedeći način: ako voditelj otvori jedna od preostalih dvaju vrata i iza njih se nalazi koza, onda igrač može ili ostati pri svome prvotnome odabiru ili odabrati jedina preostala neotvorena vrata, što bi značilo da onda igrač bira jedna od

[1] Kolumnistica i spisateljica, osoba s najvišim do sada izmjerenim kvocijentom inteligencije.

dvaju neotvorenih vrata pa je mogućnost dobitka $\frac{1}{2}$. Zbog toga je svejedno hoće li igrač promijeniti svoj izbor jer je mogućnost dobitka jednaka.

Prema izvoru [6] upravo je Monty Hall, voditelj prethodno spomenute emisije, bio taj koji je kritičare Marilynina mišljenja uvjerio u suprotno. On je tijekom više od dvadeset godine vođenja emisije uočio kako su natjecatelji u krivu jer ne žele promijeniti odabir vrata misleći kako je šansa dobitka jednaka. U svome je domu, nakon što su brojni znanstvenici izrazili svoje neslaganje, organizirao simulaciju pokusa na sljedeći način: deset natjecatelja igralo je igru sa strategijom ne mijenjanja odabira vrata nakon što vide što se nalazi iza jednih od neodabranih vrata, a drugih deset natjecatelja igralo je igru sa strategijom promijene odabira vrata. Prva grupa natjecatelja imala je iza svojeg prvotnog odabira vrata četiri automobila i šest koza, dok je druga grupa natjecatelja iza promijenjenih vrata imala osam automobila i dvije koze. Monty Hall je zaključio kako je Marilyn vos Savant bila u pravu i kako je šansa dobitka zaista veća ukoliko se promijeni odabir vrata.

Egzaktan matematički odgovor daje teorija vjerojatnosti, a prije dokaza točnosti Marilynina odgovora potrebno je uvesti nekoliko definicija i teorema preuzetih iz [7] i [20].

Definicija 2.1.1. *Konačnu ili prebrojivu familiju događaja* $\{H_i : i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, *u vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *nazivamo potpun sustav događaja ako vrijedi:*

1. $\mathbb{P}(H_i) > 0$, *za sve* $i \in I$,

2. $H_i \cap H_j = \emptyset$, *za sve* $i \neq j$, $i, j \in I$,

3. $\bigcup_{i \in I} H_i = \Omega$.

Iz definicije uočavamo da u Monty Hall paradoksu potpun sustav događaja čine događaji H_i – nagrada se nalazi iza i-tih vrata, $i = 1, 2, 3$. Kako je raspored koza i automobila iza pojedinih vrata slučajan, vjerojatnost da se iza i-tih vrata nalazi automobil jednaka je za svaka vrata te vrijedi:

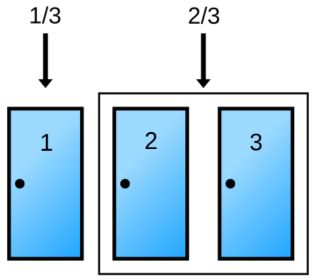
$$\mathbb{P}(H_1) = \mathbb{P}(H_2) = \mathbb{P}(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Sa slike 2.1 vidljivo je da ako je vjerojatnost da se automobil nalazi iza vrata koja je igrač prvotno odabrao jednaka $\frac{1}{3}$, onda je vjerojatnost da se on nalazi iza dvojih preostalih vrata jednaka $\frac{2}{3}$ jer događaji H_i čine potpun sustav događaja.

Definicija 2.1.2. *Neka je dan vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *i događaj* $B \in \mathcal{F}$ *za koji je* $\mathbb{P}(B) > 0$. *Funkciju* $\mathbb{P}(\cdot \mid B)$ *definiranu na* $\mathcal{F}$ *izrazom*

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \qquad A \in \mathcal{F},$$

nazivamo uvjetna vjerojatnost uz uvjet da se dogodio događaj A.



Slika 2.1: Raspored vjerojatnosti za događaje H_i (slika preuzeta iz [14]).

Vjerojatnost $\mathbb{P}(A \mid B)$ interpretiramo kao vjerojatnost pojave događaja A ako znamo da se dogodio događaj B.

Označimo s A_i – voditelj je otvorio i-ta vrata, $i = 1, 2, 3$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je igrač prvotno odabrao vrata broj jedan. Ako se nagrada nalazi iza prvih vrata, voditelj slučajno odabire između otvaranja vrata broj dva i tri pa je:

$$\mathbb{P}(A_2 \mid H_1) = \mathbb{P}(A_3 \mid H_1) = \frac{1}{2}.$$

Ukoliko se nagrada nalazi iza drugih vrata, voditelj mora otvoriti vrata broj tri pa vrijedi:

$$\mathbb{P}(A_1 \mid H_2) = 0, \quad \mathbb{P}(A_3 \mid H_2) = 1.$$

Analogno, ako se nagrada nalazi iza trećih vrata, voditelj mora otvoriti vrata broj dva:

$$\mathbb{P}(A_1 \mid H_3) = 0, \quad \mathbb{P}(A_2 \mid H_3) = 1.$$

Za određivanje vjerojatnosti događaja A_i potrebna je formula potpune vjerojatnosti koju daje sljedeći teorem.

Teorem 2.1.3. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor i* $\{H_i : i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$ *potpun sustav događaja na tom vjerojatnosnome prostoru. Tada za proizvoljan događaj* $A \in \mathcal{F}$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid H_i)\mathbb{P}(H_i).$$

Dokaz. Uzmimo proizvoljan događaj $A \in \mathcal{F}$. Korištenjem svojstava presjeka i činjenice da je $\Omega = \bigcup_{i \in I} H_i$ slijedi:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}\Big(A \cap \Big(\bigcup_{i \in I} H_i\Big)\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i \in I} \big(A \cap H_i\big)\Big).$$

Sada zbog svojstva σ-aditivnosti i koristeći prethodnu definiciju, dobivamo:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I}(A\cap H_i)\right) = \sum_{i\in I}\mathbb{P}(A\cup H_i) = \sum_{i\in I}\mathbb{P}(A \mid H_i)\mathbb{P}(H_i).$$

Kako je $A \in \mathcal{F}$ bio proizvoljan, tada tvrdnja teorema vrijedi za svaki $A \in \mathcal{F}$. □

Kako $\mathbb{P}(A_1)$ označava vjerojatnost da će voditelj otvoriti vrata koja je igrač prvotno odabrao, što se neće dogoditi, slijedi da je $\mathbb{P}(A_1) = 0$. Vjerojatnosti pojave događaja A_2 i A_3 računamo koristeći formulu potpune vjerojatnosti:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}(A_2 \mid H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A_2 \mid H_2)\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A_2 \mid H_3)\mathbb{P}(H_3)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_3) &= \mathbb{P}(A_3 \mid H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A_3 \mid H_2)\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A_3 \mid H_3)\mathbb{P}(H_3)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Potrebno je odrediti vjerojatnosti da se nagrada nalazi iza prvotno odabranih vrata te iza promijenjenih vrata, ako znamo koja je vrata voditelj otvorio. Izračun tražene vjerojatnosti omogućuje Bayesov teorem.

Teorem 2.1.4. *(Bayesov teorem). Neka je $(H_i)_{i\in I}$ potpun sustav događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada za svaki $A \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(A) > 0$ vrijedi:*

$$\mathbb{P}(H_j \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_j)\mathbb{P}(H_j)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_j)\mathbb{P}(H_j)}{\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A \mid H_i)\mathbb{P}(H_i)}.$$

Dokaz. Iz definicije uvjetne vjerojatnosti slijedi $\mathbb{P}(H_j \mid A) := \frac{\mathbb{P}(H_j\cap A)}{\mathbb{P}(A)}$ i $\mathbb{P}(H_j \cap A) = \mathbb{P}(A \mid H_j)\mathbb{P}(H_j)$ zbog čega je:

$$\mathbb{P}(H_j \mid A) = \frac{\mathbb{P}(H_j \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_j)\mathbb{P}(H_j)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Primjenom formule potpune vjerojatnosti za događaj A dobiva se:

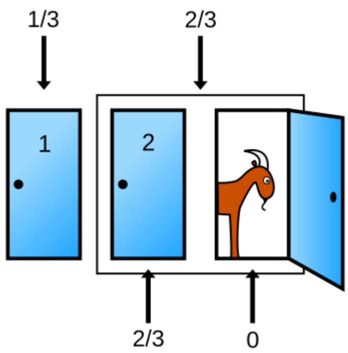
$$\mathbb{P}(H_j \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_j)\mathbb{P}(H_j)}{\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A \mid H_i)\mathbb{P}(H_i)}.$$ □

Primjenom Bayesovog teorem lako je izračunati vjerojatnost dobitka ukoliko igrač ostane pri svome prvotnome odabiru vrata i šansu dobitka ukoliko igrač promijeni svoj odabir. Ako voditelj igraču pokaže što se nalazi iza drugih vrata, a igrač ostane pri svome prvotnome odabiru, šansa dobitka prema Bayesovoj formuli je:

$$\mathbb{P}(H_1 \mid A_2) = \frac{\mathbb{P}(A_2 \mid H_1)\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

U drugu ruku, ukoliko igrač odluči promijeniti svoj odabir na treća vrata, onda je njegova šansa dobitka jednaka:

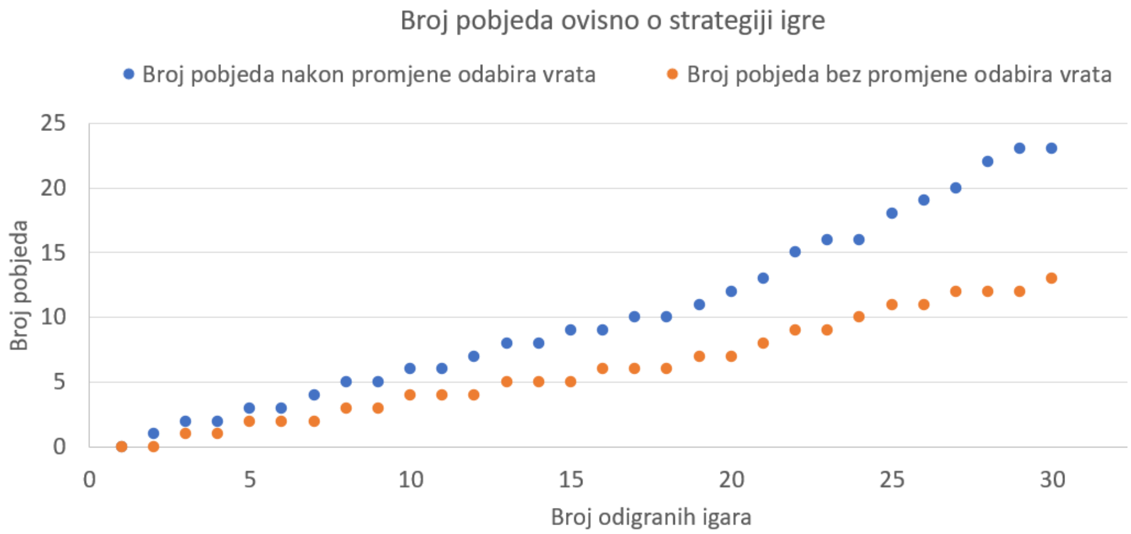
$$\mathbb{P}(H_3 \mid A_2) = \frac{\mathbb{P}(A_2 \mid H_3)\mathbb{P}(H_3)}{\mathbb{P}(A_2)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$



Slika 2.2: Nakon što voditelj iza jednih vrata pokaže kozu, jasno je da je vjerojatnost pobjede uz uvjet promjene odabira vrata jednaka $\frac{2}{3}$ (slika preuzeta iz [14]).

Analogno se računaju pripadne vjerojatnosti $\mathbb{P}(H_1 \mid A_3) = \frac{1}{3}$ i $\mathbb{P}(H_2 \mid A_3) = \frac{2}{3}$ ukoliko voditelj igraču pokaže što se nalazi iza trećih vrata. Dakle, ukoliko igrač promijeni odabir vrata, ima dvostruko veću šansu dobitka.

Iz sljedećeg grafičkog prikaza moguće je vidjeti razliku u broju pobjeda primjenom dviju strategija spomenutih u ovom poglavlju. Grafički prikaz daje rezultate dobivene u 30 igara temeljinih na igri zadanoj Monty Hall paradoksom, korištenjem dviju različitih strategija. Prva strategija bila je ostanak pri prvotnom odabiru vrata, a broj pobjeda rezultiran tom strategijom prikazan je narančastim točkama grafa. Druga strategija bila je promjena prvotnog odabira vrata i broj pobjeda u 30 igara s tom strategijom prikazan je plavim točkama na donjem grafu. Očito je kako je broj pobjeda veći ukoliko igrač odluči promijeniti svoj prvotni odabir vrata pa je jasno kako prethodno dokazani rezultati vrijede i na malom uzorku pokusa.



2.2 Paradoksi slični Monty Hall paradoksu

Monty Hall paradoks logički je ekvivalentan paradoksu tri zatvorenika (kojeg treba razlikovati od Zatvoreničke dileme[2]) i paradoksu Bertrandove kutije.

2.2.1 Paradoks tri zatvorenika

Paradoks tri zatvorenika pojavio se u kolumni Martina Gardnera pod nazivom *Matematičke igre* časopisa *Scientific American* 1959. godine. Matematički je ekvivalentan Monty Hall paradoksu uz zamjenu pojmova automobila i koze sa slobodom i smaknućem zatvorenika, redom.

> *Tri su zatvorenika osuđena na smrt smještena u odvojenim ćelijama. Guverner je slučajnim odabirom jednog od zatvorenika odlučio osloboditi. Upravitelj zatvora zna tko će biti oslobođen, ali ne smije reći. Zatvorenik A moli upravitelja identitet jednog od dvojice koji će biti smaknuti. „Ako će B biti oslobođen, recite mi ime zatvorenika C. Ako će C biti oslobođen, recite mi ime zatvorenika B. Ako ću ja biti oslobođen, potajno bacite novčić kako biste odlučili hoćete mi reći ime zatvorenika B ili C."*
> *Upravitelj zatvoreniku A kaže da će zatvorenik B biti smaknut. Zatvorenik A je zadovoljan jer vjeruje da je njegova vjerojatnost preživljavanja porasla s* $\frac{1}{3}$ *na* $\frac{1}{2}$ *između njega i zatvorenika C. Potajno tu vijest govori zatvoreniku C koji*

[2]Klasičan primjer igre analizirane u teoriji igara.

obrazlaže da je šansa za oslobođenje i dalje $\frac{1}{3}$, ali zadovoljan je jer se njegova šansa za oslobođenjem popela na $\frac{2}{3}$. Koji je zatvorenik u pravu?

Rješenje ovog paradoksa leži u tome da zatvorenik A zapravo nije dobio nikakvu važnu informaciju jer je bilo sigurno da će upravitelj zatvora reći ime jednog od preostalih zatvorenika. Vjerojatnost oslobođenja svakog od zatvorenika na početku iznosi $\frac{1}{3}$ jer ne raspolažu nikakvim dodatnim informacijama. Nakon što upravitelj kaže da će zatvorenik B biti smaknut, razlog tome je što će ili zatvorenik C biti oslobođen krivnje (za što je vjerojatnost i dalje $\frac{1}{3}$) ili će zatvorenik A biti oslobođen, a novčić koji je bacao upravitelj odlučio je da kaže ime zatvorenika B (za što je vjerojatnost $\frac{1}{2}$) pa je vjerojatnost da je upravitelj rekao ime zatvorenika B zato što će zatvorenik A biti oslobođen jednaka $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Vjerojatnost oslobođenja zatvorenik C, ako je upravitelj rekao ime zatvorenika B dana je Bayesovom formulom:

$$\mathbb{P}(\text{oslobođen C} \mid \text{upravitelj rekao B}) = \frac{\mathbb{P}(\text{upravitelj rekao B} \mid \text{oslobođen C})\mathbb{P}(\text{oslobođen C})}{\mathbb{P}(\text{upravitelj rekao B})}.$$

Ako je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{upravitelj rekao B}) &= \mathbb{P}(\text{upravitelj rekao B} \mid \text{oslobođen A})\mathbb{P}(\text{oslobođen A}) \\ &+ \mathbb{P}(\text{upravitelj rekao B} \mid \text{oslobođen B})\mathbb{P}(\text{oslobođen B}) \\ &+ \mathbb{P}(\text{upravitelj rekao B} \mid \text{oslobođen C})\mathbb{P}(\text{oslobođen C}),\end{aligned}$$

onda je

$$\mathbb{P}(\text{oslobođen C} \mid \text{upravitelj rekao B}) = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

Dakle, vjerojatnost za oslobođenje zatvorenika A, nakon što je upravitelj rekao ime zatvorenika B, upola je manja nego vjerojatnost oslobođenja zatvorenika C. Zatvorenik A bit će oslobođen s vjerojatnošću $\frac{1}{3}$, dok je vjerojatnost oslobođenja zatvorenika C $\frac{2}{3}$ pa se može zaključiti da je razmišljanje zatvorenika C u iskazu Bertrandovog paradoksa bilo ispravno.

Gornje objašnjenje može se prikazati pomoću sljedeće tablice:

Oslobođeni zatvorenik	Upravitelj rekao B	Upravitelj rekao C	Suma
A	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
B	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
C	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

2.2.2 Bertrandov paradoks kutija

Bertrandov paradoks kutija je prema [3] postavio Joseph Bertrand 1889. godine u svome djelu *Calcul des probabilitiés* koji glasi:

> *Postoje tri kutije:*
>
> 1. *kutija u kojoj se nalaze dva zlatna novčića,*
> 2. *kutija u kojoj se nalaze dva srebrna novčića,*
> 3. *kutija u kojoj se nalazi jedan zlatni i jedan srebrni novčić.*
>
> *Slučajnim odabirom igrač odabire jednu od kutija i iz te kutije, ponovno slučajnim odabirom, izvlači jedan novčić. Ako je izvučeni novčić zlatni, kolika je vjerojatnost da je i drugi novčić unutar kutije zlatan?*

Zbog toga što su u igri zlatni i srebrni novčići, može se činiti da je vjerojatnost da je drugi novčić zlatni jednaka $\frac{1}{2}$. Koraci koji vode k pogrešnom zaključku da je tražena vjerojatnost upravo $\frac{1}{2}$ mogu biti sljedeći:

1. Odabrana kutija ne može biti ona sa dva srebrna novčića jer je jedan izvučeni novčić zlatni.
2. Odabrana kutija sadrži ili oba zlatna novčića (označimo kutiju sa dva zlatna novčića oznakom ZZ) ili jedan zlatni i jedan srebrni novčić (označimo tu kutiju oznakom ZS).
3. Vjerojatnost odabira jedne od tih dviju kutija je $\frac{1}{2}$ pa je i vjerojatnost da je drugi novčić zlatni također $\frac{1}{2}$.

Pogreška je upravo u posljednjem koraku prethodnog zaključivanja. Iako je odabir između te dvije kutije bio jednako vjerojatan, to ne vrijedi za vjerojatnost pojave drugog zlatnika ukoliko smo iz odabrane kutije izvukli prvi zlatnik. Tražena vjerojatnost da je i drugi novčić u kutiji zlatni jednaka je $\frac{2}{3}$, a može se dobiti razmišljanjem na sljedeći način:

1. Na početku je jednako vjerojatno da će biti izvučeno svih šest novčića.
2. Odabrani zlatni novčić ne može biti S iz kutije ZS ili bilo koji S iz kutije SS (a kutiju sa dva srebrna novčića označimo sa SS).
3. Može se zaključiti da je zlatnik ili Z iz kutije ZS ili jedan od Z iz kutije ZZ (njega je moguće odabrati na dva načina, kao na primjer prvi zlatni novčić i drugi zlatni novčić).
4. Dakle, od te tri mogućnosti za Z, dvije su u kutiji ZZ čija je vjerojatnost odabira tražena pa je zbog toga mogućnost da je odabrana kutija upravo ZZ jednaka $\frac{2}{3}$.

Alternativno, može se primijetiti da se kutija sa dva novčića iste vrste (ZZ ili SS) od tri ponuđene kutije odabire u $\frac{2}{3}$ vremena. Bez obzira tražimo li kutiju sa dva srebrna ili zlatna novčića, kutija sadrži dva novčića iste vrste $\frac{2}{3}$ vremena pa je problem ekvivalentan pitanju: „Kolika je vjerojatnost odabira kutije koja sadrži dva novčića iste vrste?”

2.3 Intranzitivne kocke

Paradoks intranzitivnih kocaka opisao je Martin Gardner u svojoj kolumni *Matematičke igre* časopisa *Scientific American* 1970. godine, dok će u ovom diplomskom radu biti riječ o obliku ovog paradoksa iznesenog prema [10] autora Jamesa Grimea. Riječ je o igri, kako ju Grime naziva „*tri neobične kocke*”, dva igrača sa tri igraće kocke koja poprima sljedeći oblik:

> *Na tri igraće kocke A, B, C napisani su proizvoljni prirodni brojevi tako da brojevi na istoj kocki mogu biti jednaki, a izbor brojeva ne mora biti jednak za svaku kocku. Kažemo da je kocka A* bolja *od kocke B ako je, prilikom istovremenog bacanja, vjerojatnost da na kocki A padne veći broj nego na kocki B, veća od vjerojatnosti da na kocki B padne broj veći nego na kocki A. Prema paradoksu intranzitivnih kocaka moguće je odabrati brojeve na kockama tako da je kocka A bolja od kocke B, kocka B bolja od kocke C i kocka C bolja od kocke A.*

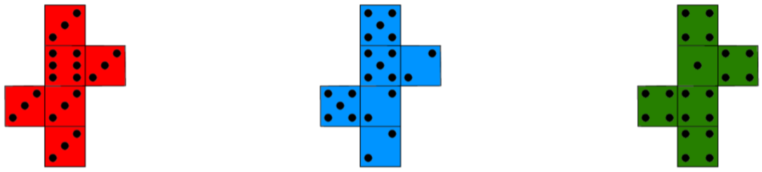
Ako $\mathbb{P}$ označava vjerojatnost, a slučajne varijable A i B brojeve dobivene na kockama A i B prilikom njihova bacanja, onda se izraz „kocka A je *bolja* od kocke B” matematički interpretira u oblik:

$$\mathbb{P}(A > B) > \mathbb{P}(B > A).$$

To bi značilo da, ako dva igrača igraju navedenu igru jedan protiv drugoga, tada će igrač s kockom A češće pobjeđivati igrača s kockom B, nego obratno. Analogno bi vrijedilo za bilo koje dvije od kocaka A, B i C iz čega je moguće zaključiti da ne postoji „najbolja” kocka. Koju god kocku odabere prvi igrač, drugi igrač uvijek može odabrati kocku koja će odnijeti pobjedu.

Tvrdnja ovog paradoksa je da postoje kocke s traženim svojstvom. Pretpostavimo da su dane simetrične kocke kao na slici 2.3 sa sljedećim brojevima:

- Crvena kocka: 3 3 3 3 3 6
- Plava kocka: 2 2 2 5 5 5
- Zelena kocka: 1 4 4 4 4 4



Slika 2.3: Kocake A (crvena), B (plava) i C (zelena) s označenim vrijednostima na stanama (slika preuzeta iz [10]).

Izračunajmo prethodno spomenute vjerojatnosti $\mathbb{P}(A > B)$, $\mathbb{P}(B > A)$ i pogledajmo odnos njihovih vrijednosti. Mogući ishodi bacanja kocaka A i B uređeni su parovi (a, b), pri čemu je a iz skupa $\{3, 6\}$, a b iz skupa $\{2, 5\}$. Matematičkim rječnikom, kažemo da je *skup svih ishoda pokusa* ili *prostor elementarnih događaja* određen s:

$$\Omega = \{(a, b) : a \in \{3, 6\}, b \in \{2, 5\}\}.$$

Vjerojatnost da će na kocki A pasti broj 3 je $\frac{5}{6}$, a vjerojatnost da će pasti broj 6 je $\frac{1}{6}$. Vjerojatnost da će na kocki B pasti broj 2 je $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, isto kao i za broj 5.

Obzirom da bacanje kocke A ne utječe na bacanje kocke B, kažemo da su ti događaji nezavisni. Na uvjetnu vjerojatnost se to odražava tako da za $\mathbb{P}(A) > 0$ vrijedi:

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B).$$

Tada je vjerojatnost presjeka $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Definicija 2.3.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Kažemo da su događaji $A, B \in \mathcal{F}$ nezavisni ako vrijedi:*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Razumno je zahtijevati da se kocke A i B bacaju nezavisno, to je implicitno zadano u formulaciji problema. Koristeći definiciju nezavisnosti, izračunajmo $\mathbb{P}\Big(\{(3, 2)\}\Big)$, odnosno vjerojatnost da na crvenoj kocki padne broj 3, a na plavoj kocki broj 2:

$$\mathbb{P}\Big(\{(3, 2)\}\Big) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}.$$

Analogno se dobiju vrijednosti za ostale mogućnosti:

$$\mathbb{P}\Big(\{(3, 5)\}\Big) = \frac{5}{12}, \qquad \mathbb{P}\Big(\{(6, 2)\}\Big) = \frac{1}{12}, \qquad \mathbb{P}\Big(\{(6, 5)\}\Big) = \frac{1}{12}.$$

Sada je moguće izračunati tražene vjerojatnosti $\mathbb{P}(A > B)$ i $\mathbb{P}(B > A)$. Vrijedi:

$$\mathbb{P}(A > B) = \mathbb{P}\Big(\{(3,2),(6,2),(6,5)\}\Big)$$

Kako su jednočlani događaji disjunktni, po svojstvu σ-aditivnosti iz definicije vjerojatnosti, vrijedi:

$$\mathbb{P}(A > B) = \mathbb{P}\Big(\{(3,2),(6,2),(6,5)\}\Big) = \mathbb{P}\Big(\{(3,2)\}\Big) + \mathbb{P}\Big(\{(6,2)\}\Big) + \mathbb{P}\Big(\{(6,5)\}\Big) = \frac{7}{12}.$$

S druge strane, kocka B je „bolja” od kocke A samo za uređeni par $(3,5)$ pa je:

$$\mathbb{P}(B > A) = \mathbb{P}\Big(\{(3,5)\}\Big) = \frac{5}{12}.$$

Dakle, vrijedi $\mathbb{P}(A > B) = \frac{7}{12} > \frac{5}{12} = \mathbb{P}(B > A)$, odnosno kocka A bolja je od kocke B. Analogno vrijedi:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B > C) &= \mathbb{P}\Big(\{(2,1),(5,1),(5,4)\}\Big)\\ &= \mathbb{P}\Big(\{(2,1)\}\Big) + \mathbb{P}\Big(\{(5,1)\}\Big) + \mathbb{P}\Big(\{(5,4)\}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\\ &= \frac{7}{12}.\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(C > B) = \mathbb{P}\Big(\{(4,2)\}\Big) = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{12}.$$

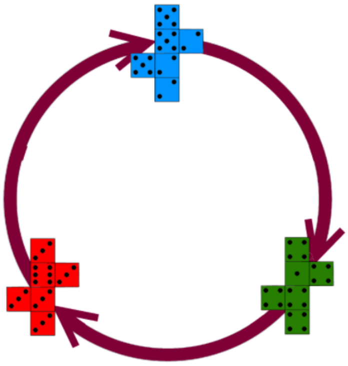
Dakle, vrijedi $\mathbb{P}(B > C) = \frac{7}{12} > \frac{5}{12} = \mathbb{P}(C > B)$, odnosno kocka B bolja je od kocke C.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A > C) &= \mathbb{P}\Big(\{(3,1),(6,1),(6,4)\}\Big)\\ &= \mathbb{P}\Big(\{(3,1)\}\Big) + \mathbb{P}\Big(\{(6,1)\}\Big) + \mathbb{P}\Big(\{(6,4)\}\Big)\\ &= \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\\ &= \frac{11}{36}.\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(C > A) = \mathbb{P}\Big(\{(4,3)\}\Big) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{36}.$$

Dakle, vrijedi $\mathbb{P}(C > A) = \frac{25}{36} > \frac{11}{36} = \mathbb{P}(A > C)$, odnosno kocka C bolja je od kocke A.

Paradoks je upravo u tome da od tri ponuđene kocke ne postoji najbolja, suprotno mišljenju da mora postojati „najbolja” između kocaka A, B i C. Međutim, dokazali smo da od svake kocke postoji bolja! Greška je u tome što relacija prethodno definirana sa „je bolja od” nema svojstvo tranzitivnosti.



Slika 2.4: Od svake kocke postoji *bolja* (slika preuzeta iz [10]).

Definicija 2.3.2. *Neka je ρ binarna relacija na skupu A. Kažemo da je relacija ρ tranzitivna ako*

$$\forall (x, y), (y, z) \in A \times A, \quad (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \quad \Longrightarrow \quad (x, z) \in \rho.$$

Prema definiciji tranzitivnosti preuzetoj iz [11], značilo bi da ako je relacija „biti bolja kocka" tranzitivna, tada mora biti:

$$\Big(\mathbb{P}(A > B) > \mathbb{P}(B > A)\Big) \wedge \Big(\mathbb{P}(B > C) > \mathbb{P}(C > B)\Big) \Longrightarrow \mathbb{P}(A > C) > \mathbb{P}(C > A),$$

a dokazano je da vrijedi $\mathbb{P}(C > A) > \mathbb{P}(A > C)$ iz čega slijedi da relacija „je bolja od" nije tranzitivna.

Na skupu igraćih kocaka moguće je smisliti relacije koje su tranzitivne, na primjer „ima veći očekivani broj od", ali niti jedna nije relevantna za ovakvu vrstu igre [17].

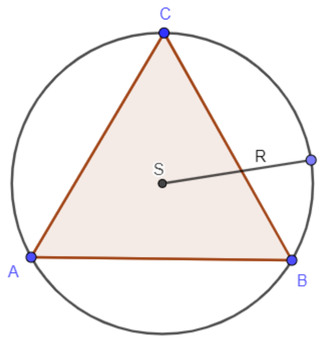
Izračunate vjerojatnosti moguće je i eksperimentalno potvrditi uzastopnim bacanjem kocaka. Iako je u stvarnome životu to dugotrajan proces, korištenje računalnog programa u kratkom vremenu omogućuje uvid u broj pobjeda pojedine kocke u proizvoljnom broju bacanja para kocaka. Rezultati takvog pokusa prikazani su u sljedećoj tablici u kojoj stupac A označava broj pobjeda kocke A, B označava broj pobjeda kocke B, a C označava broj pobjeda kocke C.

Broj bacanja	A	B	$\mathbb{P}(A > B)$	B	C	$\mathbb{P}(B > C)$	C	A	$\mathbb{P}(C > A)$
10	8	2	$\frac{4}{5}$	5	5	$\frac{1}{2}$	8	2	$\frac{4}{5}$
20	14	6	$\frac{7}{10}$	6	14	$\frac{3}{10}$	17	3	$\frac{17}{20}$
50	31	19	$\frac{31}{50}$	26	24	$\frac{13}{25}$	37	13	$\frac{37}{50}$
100	62	38	$\frac{31}{50}$	53	47	$\frac{53}{100}$	73	27	$\frac{73}{100}$
200	129	71	$\frac{129}{200}$	113	87	$\frac{113}{200}$	163	37	$\frac{163}{200}$
500	306	194	$\frac{153}{250}$	250	250	$\frac{1}{2}$	114	386	$\frac{193}{250}$
1000	597	403	$\frac{597}{1000}$	523	477	$\frac{523}{1000}$	790	210	$\frac{79}{100}$

2.4 Bertrandov paradoks

Bertrandov paradoks jedan je od najpoznatijih vjerojatnosnih problema francuskog matematičara Josepha Bertranda (1822.–1900.), opisan u već prije spomenutom djelu *Calcul des probabilitiés* iz 1888. godine. Zanimljivost ovog paradoksa je postojanje tri različita odgovora na problem ovisno o tumačenju riječi *slučajno*. Paradoks prema [15] poprima sljedeću formulaciju:

> *Kolika je vjerojatnost da duljina slučajno odabrane tetive kruga bude veća od stranice krugu upisanog jednakostraničnog trokuta?*



Slika 2.5: Jednakostraničan trokut i njemu opisana kružnica radijusa R.

Neka je dan krug radijusa R sa središtem u točki S i tome krugu upisan jednakostraničan trokut kao na slici 2.5. Jasno je da je ovo jedan geometrijski problem koji se može riješiti primjenom geometrijske vjerojatnosti. Ako postoji konačan broj jednako vjerojatnih događaja, vjerojatnost traženog događaja određuje se kao omjer broja za taj događaj povoljnih ishoda i svih mogućih ishoda. Na sličan način određuje se i geometrijska vjerojatnost, a prije prikaza sve tri verzije rješenja Bertrandova paradoksa, potrebno je definirati geometrijsku vjerojatnostu na $\mathbb{R}$.

Definicija 2.4.1. *(Geometrijska vjerojatnost na $\mathbb{R}$). Neka je Ω omeđen interval realnih brojeva i $\lambda(\Omega)$ njegova duljina, a A podinterval od Ω duljine $\lambda(A)$. Vjerojatnost da slučajno odabrana točka iz intervala Ω bude element njegovog podintervala A je kvocijent duljine intervala A i duljine intervala Ω, tj.*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}.$$

Funkciju $\mathbb{P}$ nazivamo geometrijska vjerojatnost.

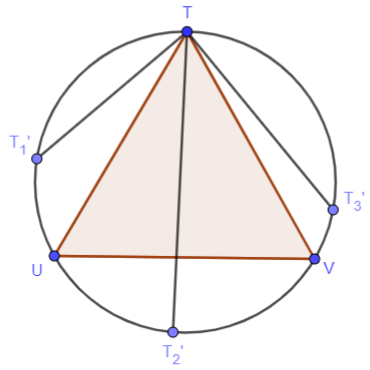
Važna pretpostavka ove definicije je omeđenost intervala, to jest zahtjev $\lambda(\Omega) < \infty$. Isti koncept jednako se definira za „zakrivljene” objekte, računajući duljine krivulja i njihovih lukova.

2.4.1 Slučajne krajnje točke

Prvi način tumačenja riječi *slučajno* iz iskaza paradoksa je slučajan odabir početne točke T jednakostraničnog trokuta $\triangle TUV$ koja je ujedno jedna od krajnjih točaka tetive kruga. Točke T_1', T_2' i T_3' na slici 2.6 predstavljaju neke od mogućih položaja točke T' tetive $\overline{TT'}$. Kako je točka T jedna krajnja točka tražene tetive $\overline{TT'}$, s iste se slike lako vidi da je, na primjer za točku T_2', tetiva $\overline{TT_2'}$ dulja od stranice trokuta $\triangle TUV$. To će također biti slučaj za svaku točku T' koja se nalazi na luku $\overset{\frown}{UV}$.

Koristeći definiciju geometrijske vjerojatnosti, moguće je odrediti vjerojatnost odabira točke T' tetive $\overline{TT'}$. U ovom slučaju, Ω je skup svih krajnjih točaka tetiva koje povlačimo iz točke T, a to je cijela kružnica. Skup A je skup svih krajnjih točaka tetive koje povlačimo iz točke T, a dulje su od stranice trokuta $\triangle TUV$. Iz prijašnjih zaključaka jasno je da je $A = \overset{\frown}{UV}$.

Kako je skup Ω cijela kružnica, jasno je da je $\lambda(\Omega) = 2R\pi$. Nadalje, potrebno je odrediti duljinu kružnog luka $\overset{\frown}{UV}$ kako bi korištenje definicije geometrijske vjerojatnosti na kružnici omogućilo računanje tražene vrijednosti. Kako su kružni lukovi nad tetivama jednake duljine jednaki, a stranice trokuta $\triangle TUV$ su upravo tetive kruga koje su jednakih



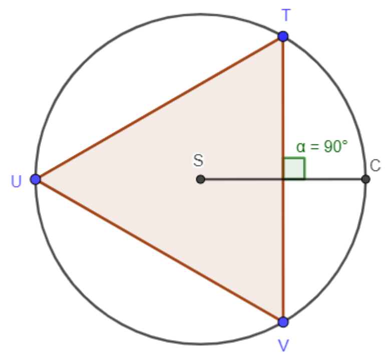
Slika 2.6: Odabir točke T' tetive $\overline{TT'}$.

duljina, vrijedi da te tetive na kružnici određuju tri luka jednake duljine. Iz toga slijedi da je $\lambda(\widehat{UV}) = \frac{1}{3} \cdot 2R\pi = \frac{2}{3}R\pi$. Sada je lako izračunati traženu vjerojatnost.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\frac{2}{3}R\pi}{2R\pi} = \frac{1}{3}.$$

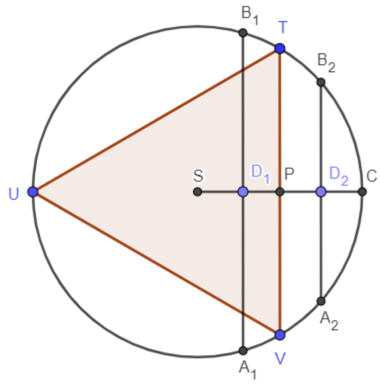
2.4.2 Slučajna udaljenost od središta kružnice

Neka je krugu radijusa R upisan jednakostraničan trokuti rotiran tako da jedna stranica trokuta bude okomita na radijus kako je prikazano na slici 2.7.



Slika 2.7: Jednakostraničan trokut kojemu je jedna stranica okomita na radijus.

Neka su točkama D_1 i D_2 radijusa povučene tetive $\overline{A_1B_1}$ i $\overline{A_2B_2}$ okomito na radijus tako da su im točke D_1 i D_2 polovišta. Sa slike 2.8 lako se vidi da je tetiva $\overline{A_1B_1}$ dulja od stranice trokuta $\triangle TUV$, dok je tetiva $\overline{A_2B_2}$ kraća od stranice trokuta. Također će svaka



Slika 2.8: Odabir tetiva $\overline{A_1B_1}$ i $\overline{A_2B_2}$.

tetiva povučena okomito na radijus u svim točkama dužine $\overline{SP}$ zadovoljavati zahtjev Bertrandovog paradoksa, odnosno biti dulja od stranice jednakostraničnog trokuta upisanog u krug.

U ovom slučaju rješenja Bertrandova paradoksa, skup Ω je radijus duljine R, odnosno dužina $\overline{SC}$, dok je skup A dužina $\overline{SP}$. Tražena vjerojatnost će, po definiciji geometrijske vjerojatnosti u $\mathbb{R}$, biti omjer duljina dužina $\overline{SP}$ i $\overline{SC}$. Kako je poznato da je $\lambda(\overline{SC}) = R$, preostaje odrediti $\lambda(\overline{SP})$. Budući da je trokut $\triangle SPV$ pravokutan trokut s kutovima mjera $30°$, $60°$ i $90°$, omjer duljina stranica $\overline{SV}$ i $\overline{SP}$ iznosi $\frac{1}{2}$ pa slijedi da je $\lambda(\overline{SP}) = \frac{1}{2}R$. Stoga je rješenje:

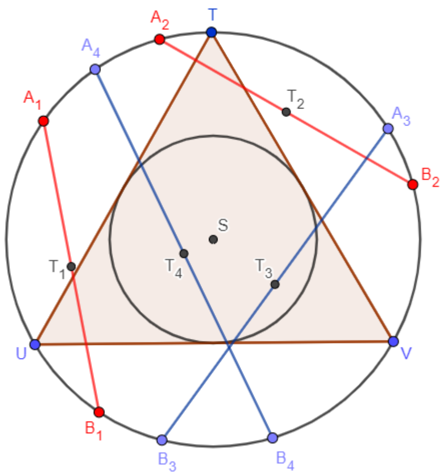
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\frac{1}{2}R}{R} = \frac{1}{2}.$$

Dodatno valja uočiti kako je dužina $\overline{SP}$ upravo radijus tom jednakostraničnom trokutu upisane kružnice r za koji vrijedi $r = \frac{R}{2}$. Upravo ta činjenica bit će korištena u sljedećem potpoglavlju.

2.4.3 Slučajno odabrano polovište tetive

Neka je bilo koja točka unutar kruga, različita od središta kruga, odabrana kao polovište tetive.

Sa slike 2.9 vidljivo je da tetive obojene crvenom bojom imaju duljinu kraću od stranice trokuta, dok one obojene plavom bojom imaju duljinu veću od stranice trokuta. Ako se promotri međusobni odnos točaka T_i, $i = 1, 2, 3, 4$, i jednakostraničnom trokutu upisanog kruga, uočljivo je da se objema plavim tetivama polovišta nalaze unutar trokutu upisanog



Slika 2.9: Tetive kruga nastale slučajnim odabirom njihovih polovišta.

kruga, dok se tetivama crvene boje polovišta nalaze van toga kruga. Dakle, ako se odabrana polovišta tetiva nalaze unutar trokutu upisanog kruga, tetive će biti dulje od stranice jednakostraničnog trokuta.

Kako će u ovome slučaju biti potrebno računanje geometrijske vjerojatnosti u $\mathbb{R}^2$, potrebno je uvesti novu definiciju.

Definicija 2.4.2. *(Geometrijska vjerojatnost na $\mathbb{R}^2$). Neka je Ω ograničen podskup ravnine i $\lambda(\Omega)$ njegova površina, a A podskup od Ω površine $\lambda(A)$. Vjerojatnost da slučajno odabrana točka iz Ω bude sadržana u njegovom podskupu A je kvocijent površine skupa A i površine skupa Ω, tj.*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}.$$

Funkciju $\mathbb{P}$ nazivamo geometrijska vjerojatnost.

Skup Ω je krug opisan jednakostraničnom trokutu čiji je radijus R pa je njegova površina $\lambda(\Omega) = R^2 \cdot \pi$. Skup A je krug upisan trokutu, a u prethodnom potpoglavlju argumentirano je kako je radijus toga kruga $r = \frac{R}{2}$ pa je njegova površina $\lambda(A) = r^2 \cdot \pi = \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{R^2}{4} \cdot \pi$. Sada iz definicije geometrijske vjerojatnosti na $\mathbb{R}^2$ slijedi:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\frac{R^2}{4} \cdot \pi}{R^2 \cdot \pi} = \frac{1}{4}.$$

Dakle, različita tumačenja riječi *slučajno* dovode do tri različita rješenja kojima nije moguće pronaći grešku. Prema izvoru [15], moguće je napraviti tri pokusa za svaki od prethodno navedenih slučajeva koji bi potvrdili dobivene rezultate.

1. Okretanje kazaljke sata dva puta i označavanje točaka na kojima se kazaljka svaki puta zaustavi.

2. Bacanje slamki na mali krug.

3. Nasumično gađanje kruga strelica koje određuju polovišta tetiva.

Bertrandov paradoks daje do znanja da ne postoji jedinstvena metoda slučajnog odabira točki pa zato ne postoji ni jedinstveno rješenje. Tek kada je metoda slučajnog izbora točki poznata, moguće je reći da je problem u potpunosti zadan i rješenje dobro definirano. Rigoroznim jezikom rečeno: računanje vjerojatnosti nekog događaja ima smisla tek nakon što je precizno definiran vjerojatnosni prostor iz definicije 1.2.2.

2.5 Rođendanski paradoks

Rođendanski paradoks ili problem rođendana nije paradoks u pravom smislu te riječi, odnosno ne dovodi do logičke kontradikcije, ali se smatra paradoksom jer se matematički izračun suprotstavlja prirodnoj intuiciji. Prema [13] povijesno porijeklo ovoga paradoksa nije u potpunosti određeno. Paradoks se često pripisuje Richardu von Misesu koji je 1939. godine prvi proučavao problem sličan onome kakvim ga se danas poznaje, dok postoje izvori koji tvrde kako se Harold Davenport prvi bavio ovim problemom. Nekoliko je oblika iskaza ovoga paradoksa, a jedan od njih poprima sljedeći oblik:

> *Kolika je vjerojatnost da u skupu od n slučajno odabranih ljudi postoji bar dvoje koji imaju rođendan istoga datuma?*

Kako godina ukupno ima 365 dana (ne uključujući datum 29. veljače koji se ponavlja svake prijestupne godine), jasno je da će vjerojatnost traženog događaja biti 100% kada je broj ljudi $n = 366$. Kako se vjerojatnost u svakodnevnom životu često zamišlja kao linearna funkcija, za očekivati bi bilo da je vjerojatnost traženog događaja 50% za dvostruko manji broj ljudi, odnosno za $n = 183$. To bi značilo da će u skupu od 183 osobe, dvoje ljudi imati rođendan na isti datum. Međutim, ono što čini problem rođendana paradoksom je to što je broj osoba za koji je tražena vjerojatnost 50% mnogo manji od 183. Moguće je dokazati da se vjerojatnost od 50% postiže već za 23 osobe.

Neka je vjerojatnost rođendana uniformno distribuirana za sve datume u godini isključujući datum 29. veljače, a radi jednostavnosti zanemarimo mogućnost pojave blizanaca. Tada je vjerojatnost rođendana za svaki datum u godini jednaka $\frac{1}{365}$. Nadalje, neka je $n = 23$. Pitanje glasi: „Kolika je vjerojatnost da u skupu od 23 ljudi, postoji barem dvoje ljudi koji imaju rođendan istoga datuma?”, a odgovor na to pitanje daje teorija vjerojatnosti. Neka je tako definiran događaj, barem dvoje ljudi u skupu od 23 osobe ima rođendan istoga datuma, označen s A, a vjerojatnost toga događaja označena s $\mathbb{P}(A)$.

Jednostavnije je izračunati vjerojatnost suprotnog događaja, odnosno vjerojatnost da u skupu od 23 osobe nema dvoje ljudi koji imaju rođendan istoga datuma. Suprotni događaj tada se označava oznakom A^c, a vjerojatnost toga suprotnog događaja je $\mathbb{P}\left(A^c\right)$. Kako su događaji A i A^c međusobno disjunktni, za njihove vjerojatnosti vrijedi formula:

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}\left(A^c\right) \tag{2.1}$$

Neka su, kao u [13], na skupu od 23 osobe postupno definirana 23 događaja tako da svaki događaj odgovara jednoj osobi i sadrži sve moguće „raspodjele rođendana” takve da ta osoba ne dijeli rođendan niti s jednom osobom pridruženom jednom od prethodnih događaja. Rigoroznije rečeno, promatramo niz od 23 slučajna pokusa, pri čemu svaki sljedeći slučajni pokus ovisi o ishodima prethodnih slučajnih pokusa. Definirali smo niz događaja $A_1, A_2, \ldots, A_{23}$, pri čemu je notacija malo neprecizna (ali praktična), jer nije naznačena ovisnost događaja A_i o prethodnim ishodima slučajnih pokusa. Srećom, to neće predstavljati problem jer vjerojatnost događaja A_i neće ovisiti o konkretnim ishodima prvih $i - 1$ slučajnih pokusa. Tada za prvi suprotni događaj definiran na sljedeći način:

$$A_1^c = \{\text{u skupu od 1 čovjeka ne postoji dvoje ljudi koji imaju rođendan istoga datuma}\},$$

ne postoji niti jedna prethodno analizirana osoba pa prva od 23 osobe ne dijeli rođendan ni s kim zbog čega je vjerojatnost toga događaja:

$$\mathbb{P}\left(A_1^c\right) = \frac{365}{365} = 1.$$

Jednostavnije rečeno, od svih 365 mogućih datuma u godini, prva osoba može biti rođena na bilo koji od tih 365 datuma.

Za izračun $\mathbb{P}\left(A_2^c\right)$ iz skupa svih mogućih datuma u godini (njih 365) isključujemo onaj datum na koji prva osoba ima rođendan. Time je zadovoljen uvjet da svaka analizirana osoba nema rođendan na isti datum kao prethodne osobe. Dakle, za datum rođendana druge osobe preostaju 364 mogućnosti od 365 datuma i zato je:

$$\mathbb{P}\left(A_2^c\right) = \frac{364}{365}.$$

Analogni način razmišljanja vrijedi i za sljedeći po redu događaj,

$$A_3^c = \{\text{treća osoba nema rođendan na isti datum kao i dvije prethodno analizirane osobe}\},$$

iz čega slijedi da je vjerojatnost toga događaja:

$$\mathbb{P}\Big(A_3^c\Big) = \frac{363}{365}.$$

Iterativnim postupkom se za posljednji događaj A_{23}^c dobije vjerojatnost:

$$\mathbb{P}\Big(A_{23}^c\Big) = \frac{365-22}{365} = \frac{343}{365}.$$

Jasno je da $\mathbb{P}\Big(A^c\Big)$ možemo izračunati kao umnožak svih vjerojatnosti $\mathbb{P}\Big(A_i^c\Big)$ za $i = 1, 2, \ldots, 23$:

$$\mathbb{P}\Big(A^c\Big) = \prod_{i=1}^{23} \mathbb{P}\Big(A_i^c\Big).$$

Primjenom te formule jednostavnim računom dobije se vjerojatnost $\mathbb{P}\Big(A^c\Big)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(A^c\Big) &= \mathbb{P}\Big(A_1^c\Big)\cdot\mathbb{P}\Big(A_2^c\Big)\cdot\mathbb{P}\Big(A_3^c\Big)\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}\Big(A_{23}^c\Big)\\ &= \frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{343}{365}\\ &\approx 0.492703.\end{aligned}$$

Kako je $\mathbb{P}\Big(A^c\Big) \approx 0.492703$, sada je vjerojatnost $\mathbb{P}(A)$ lako izračunati primjenom formule:

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}\Big(A^c\Big)$$

iz koje slijedi:

$$\mathbb{P}(A) \approx 1 - 0.492703 \approx 0.507297 \approx 50.73\%.$$

Dakle, vjerojatnost da u skupu od 23 ljudi bar dvoje ima rođendan na isti datum iznosi 50.7297%. Jasno je da s porastom broja ljudi u promatranom skupu, raste i tražena vjerojatnost. Već za $n = 30$, ta će vjerojatnost biti veća od 70% što se može izračunati primjenjujući isti način računanja kao u primjeru s $n = 23$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(A^c\Big) &= \mathbb{P}\Big(A_1^c\Big)\cdot\mathbb{P}\Big(A_2^c\Big)\cdot\mathbb{P}\Big(A_3^c\Big)\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}\Big(A_{30}^c\Big)\\ &= \frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{336}{365}\\ &\approx 0.293684.\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}\Big(A^c\Big) \approx 1 - 0.293684 \approx 0.706316 \approx 70.63\%.$$

Broj ljudi	$\mathbb{P}(A)$
1	0%
5	2.71%
10	11.69%
20	41.14%
40	89.12%
80	99.991%
120	99.99999997%
350	$(100 - 3 \cdot 10^{-129})\%$
366	100%

Tablica 2.1: Vjerojatnosti pojave para s istim datumom rođendana ovisno o broju ljudi u promatranoj skupini.

Vjerojatnost od gotovo 100%, točnije 99.9%, dobije se primjenom istog računa za samo $n = 70$ osoba. Ako se usporedi ukupan broj svih mogućih datuma rođendana kojih je 365, sa brojem od 70 ljudi za koji je vjerojatnost da dvije osobe budu rođene na isti datum jednaka 99.9%, rezultat je nevjerojatan! U skupu od 70 ljudi gotovo je 100% sigurno da će dvije osobe biti rođene na isti datum. Upravo u tome pronalazimo kontradikciju s logičkim očekivanjem koje se nameće pri prvom susretu s ovim problemom.

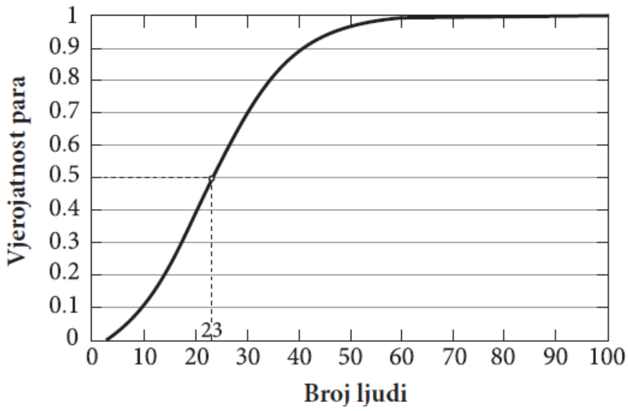
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(A^c\Big) &= \mathbb{P}\Big(A_1^c\Big) \cdot \mathbb{P}\Big(A_2^c\Big) \cdot \mathbb{P}\Big(A_3^c\Big) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\Big(A_{70}^c\Big) \\ &= \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{295}{365} \\ &\approx 0.000841.\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}\Big(A^c\Big) \approx 1 - 0.000841 \approx 0.999159 \approx 99.92\%.$$

Još neke vjerojatnosti $\mathbb{P}(A)$ za neke n za koje one prethodno nisu izračunate, mogu se vidjeti u tablici 2.1.

Zbog prethodno spomenutog problema da ljudski mozak vjerojatnost često percipira kao linearnu funkciju, dok je iz tablice vidljivo kako rast vjerojatnosti nije linearan, prethodno dobivene rezultate nije na odmet prikazati grafički i promotriti graf tako dobivene funkcije prikazan na slici 2.10.

Iz grafičkog prikaza 2.10 uočljivo je da rast vrijednosti vjerojatnosti nije linearan. Ubrzani porast vrijednosti vjerojatnosti podsjeća na rast eksponencijalne funkcije.



Slika 2.10: Prikaz rasta vjerojatnosti pojave para s istim datumom rođendana ovisno o broju ljudi u promatranom skupu (grafički prikaz preuzet iz [13]).

Očito se s porastom broja n ovakav račun komplicira pa se nameće pitanje je li moguće odrediti formulu koja bi pojednostavnila računanje tražene vjerojatnosti za proizvoljan n. Neka je zbog jednostavnosti računa $n = 6$. Tada se primjenom formule korištene u prethodnim izračunima za $\mathbb{P}\left(A^c\right)$ i $n = 6$ dobiva:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A^c\right) &= \mathbb{P}\left(A_1^c\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_2^c\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_3^c\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_4^c\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_5^c\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_6^c\right) \\
&= \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \frac{361}{365} \cdot \frac{360}{365} \\
&= \frac{1}{365^6} \cdot 365 \cdot (365-1) \cdot (365-2) \cdot (365-3) \cdot (365-4) \cdot (365-5) \\
&= \frac{1}{365^6} \cdot \frac{365!}{(365-6)!}.
\end{aligned}$$

Kako je u ovom izračunu n bio jednak 6, prirodno se nameće zamjena broja 6 sa n u prethodnom izvodu, čime slijedi:

$$\mathbb{P}\left(A^c\right) = \frac{1}{365^n} \cdot \frac{365!}{(365-n)!} = \frac{365!}{365^n \cdot (365-n)!}.$$

Tada je

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{365!}{365^n \cdot (365-n)!}. \tag{2.2}$$

Uvrštavanjem svih n za koje su prethodno izračunate vjerojatnosti pojave dviju osoba s istim datumom rođendana, moguće je uvjeriti se u ispravnost ove formule. Na primjer, uvrštavanjem $n = 30$ u prethodno dobivenu formulu dobije se:

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{365!}{365^{30} \cdot (365 - 30)!} \approx 0.706316 \approx 70.63\%,$$

što je upravo tražena vjerojatnost za $n = 30$.

Formula (2.2) pojednostavljuje računanje tražene vjerojatnosti za proizvoljan n, odnosno broj slučajno odabranih ljudi, ali ju je moguće poopćiti i za d jednako vjerojatnih rođendana. Neka je $\mathbb{P}(n, d)$ vjerojatnost da dvije osobe od n ljudi imaju rođendan na isti datum od d jednako vjerojatnih datuma. Tada formula 2.2 poprima sljedeći oblik:

$$\mathbb{P}(n, d) = 1 - \frac{d!}{d^n \cdot (d - n)!}. \tag{2.3}$$

U prethodnim je primjerima d bio jednak 365 jer se tražila vjerojatnost da dvije osobe imaju rođendan na isti datum u godini dana. Iz formule (2.3) moguće je izračunati traženu vjerojatnost za proizvoljan broj datuma d, ali je bitno naglasiti da vjerojatnost pojave rođendana na svaki od d datuma mora biti jednaka.

Prema [13], jedan zanimljiv nematematički pristup može objasniti zašto se ovdje radi o neočekivanom paradoksu. Naime, postavljajući pitanje o vjerojatnosti da dvije osobe imaju rođendan istoga datuma, ljudi često potpuno nesvjesno sebe promatraju kao jednu od tih osoba i time intuitivno krivo smatraju kako je vjerojatnost rođendanskog paradoksa mnogo manja nego što ona uistinu jest. Na taj način rješava se jedan drugačiji problem:

> *Kolika je vjerojatnost da će netko u grupi od n ljudi imati rođendan istoga datuma kao i ti?*

Na primjer, da bi vjerojatnost da netko u skupu od n ljudi ima rođendan isti dan kada i *ti* bude 50%, u promatranom skup moraju biti mnogo veći od 23 (broj osoba u skupini u kojoj je moguće naći dvije osobe rođene na *neki* isti datum koji nije unaprijed određen). Vjerojatnost da neka osoba ima rođendan na isti datum kao i *ti* je $\frac{1}{365} \approx 0.27\%$ pa je vjerojatnost suprotnog događaja, da neka osoba nema rođendan na taj datum, dobivena primjenom formule (2.1) jednaka:

$$1 - \frac{1}{365} \approx 0.9973 \approx 99.73\%.$$

Tada je vjerojatnost da dvije osobe nemaju rođendan na taj datum jednaka $\left(1 - \frac{1}{365}\right)^2$ pa je vjerojatnost da imaju rođendan na taj datum jednaka $1-\left(1-\frac{1}{365}\right)^2$. Analogno je vjerojatnost da neka od n osoba ima rođendan na taj datum jednaka:

$$1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)^n.$$

Označimo traženi događaj sa A: netko od n ljudi ima rođendan istoga datuma kao i *ti*. Vjerojatnost toga događaja je onda:

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)^n. \tag{2.4}$$

Sada je moguće odrediti n za koji će $\mathbb{P}(A)$ biti barem 50%, ali najprije je potrebno izraziti n iz formule (2.4).

$$\left(1 - \frac{1}{365}\right)^n = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Logaritmiranjem obiju strana jednakosti i upotrebom svojstava logaritama slijedi:

$$n \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{365}\right) = \ln\Big(1 - \mathbb{P}(A)\Big).$$

Vrijedi da je $\ln\left(1 - \frac{1}{365}\right) \neq 0$ što omogućuje dijeljenje pa slijedi:

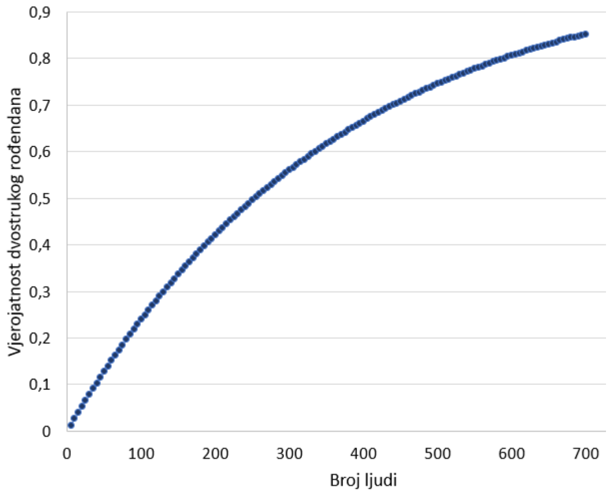
$$n = \frac{\ln\Big(1 - \mathbb{P}(A)\Big)}{\ln\left(1 - \frac{1}{365}\right)}.$$

Potrebno je naći n za koji je $\mathbb{P}(A) \geq 50\%$ pa je potrebno željeni postotak vjerojatnosti, u obliku decimalnog broja 0.5, uvrstiti u prethodnu formulu čime se dobije:

$$n = \frac{\ln\Big(1 - \mathbb{P}(A)\Big)}{\ln\left(1 - \frac{1}{365}\right)} \geq \frac{\ln(1 - 0.5)}{\ln\left(1 - \frac{1}{365}\right)} \geq 252.65.$$

Dakle, za $n \geq 253$, $n \in \mathbb{N}$, će vjerojatnost da netko u skupu on n ljudi ima rođendan na isti dan kao i *ti* biti veća od 50%. Uočimo kako je taj broj mnogo veći od 23 osobe, koliko ih je u rođendanskom paradoksu potrebno da dvije osobe imaju rođendan na *neki* isti datum. To pokazuje koliko je bitno egzaktno definiranje problema jer već male razlike u tumačenju problema mogu dati velike razlike u rezultatu, isto kao što je bio slučaj i u Bertrandovom paradoksu.

Na slici 2.11 prikazan je grafički prikaz funkcije vjerojatnosti događaja A ovisno o broju ljudi u promatranom skupu. Vidljivo je kako funkcija vjerojatnosti toga događaja



Slika 2.11: Prikaz rasta vjerojatnosti pojave dvostrukog rođendana ovisno o broju ljudi u promatranom skupu.

raste mnogo sporije nego funkcija vjerojatnosti u rođendanskom paradoksu na slici 2.10. U ovome se slučaju vjerojatnost od 90% ne postiže čak niti za $n = 700$, dok se u rođendanskom paradoksu postizala već za n nešto veći od 40 osoba.

Ovaj je problem zbog jednostavnog izračuna traženih vjerojatnosti lako uklopiti u nastavu matematike. Potrebno je tek osnovno poznavanje pojmova i računa iz kombinatorike i teorije vjerojatnosti. Samostalno istraživanje, prikupljanje podataka i primjena naučenih znanja odličan su način na koji se učenike može motivirati za matematiku, posebnice teoriju vjerojatnosti, kao i pokazati primjenu naučenih znanja na problem iz svakodnevnog života.

2.6 Problem dviju omotnica

Problem dviju omotnica pojavljuje se u nekoliko varijanti, najčešće kao mozgalica. Osnovni iskaz ovog problema ima sljedeći oblik.

> *Neka su dane dvije omotnice takve da jedna od njih sadrži dvostruko više novca nego druga. Nakon odabira jedne od omotnica, moguće je zadržati iznos koji se nalazi u toj omotnici ili promijeniti svoj odabir i dobiti iznos koji se nalazi u drugoj omotnici, ne znajući u kojoj se omotnici nalazi koji iznos. Treba li ostati pri prvotnome odabiru ili ipak odabrati drugu omotnicu?*

Neki izvori, kao što je [19], dozvoljavaju da igrač najprije pogleda što se nalazi u prvotno odabranoj omotnici, ali o tom će slučaju riječ biti nešto kasnije. Slijedi jedno od mogućih načina tumačenja problema dviju omotnica i njegova rješenja zbog kojeg je ovaj problem poznat i pod nazivom *paradoks razmjene*.

Pretpostavimo da igrač ne zna koji se iznos novca nalazi u prvotno odabranoj omotnici. Neka se u prvoj omotnici nalazi iznos x. To znači da se u drugoj omotnici nalazi ili iznos $\frac{x}{2}$ ili iznos $2x$. Kako je odabir između dviju omotnica slučajan, jednako je vjerojatno da se u drugoj omotnici nalazi manji ili veći od navedenih iznosa. Slijedi da je očekivana vrijednost novčanog iznosa u drugoj omotnici jednaka:

$$\frac{\frac{x}{2} + 2x}{2} = \frac{5}{4}x. \tag{2.5}$$

Kako vrijedi nejednakost $\frac{5}{4}x > x$, očito treba promijeniti prvotni odabir omotnice i odabrati drugu jer je očekivani iznos novca u drugoj omotnici već od iznosa u prvoj omotnici. Međutim, ako je prvotno bila odabrana druga omotnica, isti bi argumenti vrijedili i za nju. Tada bi očekivani iznos u prvoj omotnici bio veći od iznosa u drugoj omotnici. Dakle, ponovno bi trebalo promijeniti odabir i izabrati prvu omotnicu, ali onda bi ponovno očekivani iznos bio veći u drugoj omotnici i tako u nedogled! Ovim bi pristupom igrač omotnice izmjenjivao beskonačno dugo i nijednu ne bi otvorio pa ne bi osvojio niti jedan od iznosa. Kako je očito racionalnije otvoriti bilo koju od omotnica i na taj način osvojiti barem neki od iznosa nego ne osvojiti ništa, dolazimo do paradoksa o razmjeni omotnica.

Naime, jasno je da ukoliko igrač nema nikakav uvid u iznose koji se nalaze u omotnicama, potpuno je svejedno koju će od omotnica odabrati jer je vjerojatnost odabira omotnice s većim iznosom jednaka $\frac{1}{2}$, isto kao i vjerojatnost odabira omotnice sa manjim iznosom. Izračun očekivane vrijednosti u drugoj omotnici opisan u prethodnom paragrafu, čija je vrijednost izračunata u (2.5), bio bi točan kada bi igrač odabrao omotnicu koja sadrži iznos x i bacanjem simetričnog novčića donio odluku o tome hoće li promijeniti svoj odabir ili ne, ali problem dviju omotnica nije tako postavljen jer igrač ne zna koji se iznos nalazi u omotnici koju je prvotno odabrao.

Neka su manji i veći iznos u omotnicama redom označeni oznakama y i $2y$, koje će se u svrhu računanja koristiti u ovome poglavlju. Omotnice se biraju slučajno pa je vjerojatnost odabira svake od njih jednaka i time je očekivana dobit u svakoj od njih jednaka:

$$\frac{1}{2} \cdot (y + 2y) = \frac{3}{2}y.$$

Jednostavno, ukupni iznos novca u omotnicama jednak je $y + 2y = 3y$. Ako igrač prvotno odabere i otvori omotnicu s iznosom y, zamjenom dobiva omotnicu s iznosom $2y$ i time profitira iznos razlike, y. Ako pak prvotno odabere omotnicu u kojoj se nalazi iznos $2y$, zamjenom dobiva omotnicu s iznosom y i time gubi iznos y. Tada je očekivana vrijednost razlike između profita i gubitka ukoliko igrač uvijek zamijeni omotnice jednaka:

$$\frac{y + (-y)}{2} = \frac{y - y}{2} = 0, \tag{2.6}$$

iz čega je jasno da igrač strategijom zamjene omotnice neće biti niti u profitu niti na gubitku.

Dakle, očekivana vrijednost iznosa u obje omotnice jednaka je i iz (2.6) je vidljivo kako zamjena omotnica nema nikakvu prednost pred zadržavanjem prvotno odabrane omotnice. Stoga nema razloga preferirati jednu omotnicu u odnosu na drugu. To se zaključuje u slučaju kada se ne zna koji se iznos novca nalazi u kojoj omotnici, odnosno kada igrač nema uvid u iznos koji se nalazi u prvotno odabranoj omotnici.

2.6.1 Problem otvorene omotnice

Na početku ovog poglavlja napomenuto je da neki izvori, kao što je [19] prema kojemu će biti izneseno ovo potpoglavlje, dopuštaju da igrač prije odluke o zamjeni omotnica pogleda koji se iznos nalazi u prvotno odabranoj omotnici. Tada razlikujemo dva problema: *problem otvorene omotnice* koji igraču dopušta da otvori odabranu omotnicu i *problem zatvorene omotnice* koji zahtjeva da igrač bez otvaranja prvotno odabrane omotnice donese odluku o promjeni. Iz prethodnog je paragrafa jasno da je u slučaju *problema zatvorene omotnice* potpuno svejedno hoće li igrač ostati pri svome prvotnome odabiru ili ipak promijeniti omotnicu jer je vjerojatnost odabira jedne od dviju istovrsnih omotnica jednaka za svaku od omotnica te dodatno, jer je računski dokazano kako su očekivani dobitci u oba slučaja jednaki. Dakle, može se reći kako je *problem zatvorene omotnice* simetričan u odnosu na odabir prve ili druge omotnice. Međutim, *problem otvorene omotnice* narušava tu simetriju jer otvaranjem prvotno odabrane omotnice igrač dolazi do informacije o iznosu koji se u njoj nalazi što može utjecati na odluku o nastavku igre.

Za početak, ukoliko igrač zna kojom količinom novca raspolaže osoba koja je punila omotnice, nazovimo tu osobu *organizator igre*, i u svojoj prvotno odabranoj omotnici vidi iznos veći od $\frac{1}{3}$ iznosa kojim organizator igre raspolaže, odmah zaključuje kako je vjerojatnost da se u drugoj omotnici nalazi veći iznos jednaka 0 i kako nema smisla mijenjati odabir omotnice. Naime, kada bi iznos u drugoj omotnici bio veći od iznosa u omotnicama, onda bi on bio veći od $\frac{2}{3}$ kapitala kojim organizator igre raspolaže pa bi ukupan iznos u obje omotnice premašio ukupni kapital organizatora igre, što je nemoguće!

Nadalje, ukoliko se u prvoodabranoj omotnici nalazi iznimno velik iznos novca, označimo ga sa x, igrač će pomisliti kako je vjerojatnost da se u drugoj omotnici nalazi duplo veći iznos $2x$ vrlo mala. Neka $p(x)$ označava vjerojatnost da je iznos x koji je igrač vidio u prvoj omotnici manji od iznosa u omotnicama. To znači da se u omotnicama nalaze iznosi x i $2x$. Onda je očekivani iznos u drugoj omotnici jednak:

$$x \cdot p(x) + 2x \cdot \Big(1 - p(x)\Big).$$

Ukoliko igrač ne zna točan ukupni kapital kojim raspolaže organizator igre, ali ima informaciju o iznosu koji se nalazi u prvotno odabranoj omotnici, ta mu informacija i dalje može biti od koristi. Da bi igraču informacija o iznosu novca u prvoj omotnici bila od koristi, morao bi znati procijeniti kolika je vjerojatnost da će organizator igre određeni iznos staviti u omotnicu. Bez smanjenja općenitosti, za prethodno definirane iznose y i $2y$ za manji i veći iznos u omotnicama redom, u ovom se razmatranju može ograničiti na manji iznos y jer on potpuno određuje veći iznos $2y$. Neka je $p(y)$ vjerojatnost da će organizator igre u omotnicu s manjim iznosom staviti iznos y. Za prethodno komentiran slučaj, kada igrač u prvoj omotnici vidi neki iznos x koji je veći od $\frac{1}{3}$ novca kojim organizator raspolaže, može se reći da je $p(x) = 0$ jer ta omotnica sigurno nije omotnica s manjim iznosom zato što iznos x ne može biti manji od iznosa. Tada je očekivani iznos u drugoj omotnici jednak:

$$0 \cdot 2x + 1 \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{2}.$$

Ovo je predstavljalo jedan ekstreman primjer, a izračun je svakako složeniji kada je u pitanju slučaj općenitiji od ovoga.

Zbog jednostavnosti računanja, neka igrač u prvoj omotnici vidi iznos od 100 kn. Traži se očekivana vrijednost u drugoj omotnici uz uvjet da se u prvoj omotnici nalazi iznos od 100 kn. To svakako podsjeća na uvjetnu vjerojatnost! Prvu i drugu omotnicu označimo oznakama O_1 i O_2, redom. Ako je igrač u prvoj omotnici O_1 nakon otvaranja vidio iznos od 100 kn, očekivana vrijednost u omotnici O_2 bit će jednaka:

$$\mathbb{P}(O_2 > O_1 \mid O_1 = 100 \text{ kn}) \cdot 200 \text{ kn} + \mathbb{P}(O_1 > O_2 \mid O_1 = 100 \text{ kn}) \cdot 50 \text{ kn}.$$

Tražene vrijednosti potrebne za izračun očekivanog iznosa u omotnici O_2 daje Bayesova formula:

$$\mathbb{P}(O_2 > O_1 \mid O_1 = 100 \text{ kn}) = \frac{\mathbb{P}(O_1 = 100 \text{ kn} \mid O_2 > O_1)\mathbb{P}(O_2 > O_1)}{\mathbb{P}(O_1 = 100 \text{ kn})}, \tag{2.7}$$

$$\mathbb{P}(O_1 > O_2 \mid O_1 = 100 \text{ kn}) = \frac{\mathbb{P}(O_1 = 100 \text{ kn} \mid O_1 > O_2)\mathbb{P}(O_1 > O_2)}{\mathbb{P}(O_1 = 100 \text{ kn})}. \tag{2.8}$$

Kako $p(y)$ označava vjerojatnost da će organizator igre u omotnicu s manjim iznosom staviti iznos y, onda se ove dvije formule mogu zapisati na jednostavniji način. Naime, $\mathbb{P}(O_1 = 100 \text{ kn} \mid O_2 > O_1)$ interpretira se kao vjerojatnost da se u omotnici O_1 nalazi iznos od 100 kn, ako je poznato da omotnica O_1 sadrži manji od iznosa. Ako je poznato da omotnica O_1 sadrži manji od iznosa, a znamo da se u omotnici O_1 nalazi 100 kn, može se pisati:

$$\mathbb{P}(O_1 = 100 \text{ kn} \mid O_2 > O_1) = p(100).$$

Analogno, $\mathbb{P}(O_1 = 100 \text{ kn} \mid O_1 > O_2)$ interpretira se kao vjerojatnost da se u omotnici O_1 nalazi iznos od 100 kn, ako je poznato da omotnica O_2 sadrži manji od iznosa. Kako je poznato da se u omotnici O_1 nalazi iznos od 100 kn, onda omotnica O_2 sadrži manji iznos jedino ako sadrži 50 kn pa se koristi sljedeći zapis:

$$\mathbb{P}(O_1 = 100\text{ kn} \mid O_1 > O_2) = p(50).$$

Ponuđene omotnice su identične pa je vjerojatnost da se u svakoj od njih nalazi ili veći ili manji iznos, jednaka. Kao da organizator baca simetričan novčić kako bi odlučio u koju omotnicu ide manji, a u koju veći od iznosa. Zato vrijedi:

$$\mathbb{P}(O_2 > O_1) = \mathbb{P}(O_1 > O_2) = \frac{1}{2}.$$

Prema teoremu 2.1.3 nazivnik poprima sljedeći oblik:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(O_1 = 100\text{ kn}) = {} & \mathbb{P}(O_1 = 100\text{ kn} \mid O_2 > O_1) \cdot \mathbb{P}(O_2 > O_1) \\ & + \mathbb{P}(O_1 = 100\text{ kn} \mid O_1 > O_2) \cdot \mathbb{P}(O_1 > O_2),\end{aligned}$$

a upotrebom prethodno uvedenih oznaka slijedi:

$$\mathbb{P}(O_1 = 100\text{ kn}) = \frac{1}{2}p(100) + \frac{1}{2}p(50).$$

Sada formule (2.7) i (2.8) poprimaju sljedeći oblik:

$$\mathbb{P}(O_2 > O_1 \mid O_1 = 100\text{ kn}) = \frac{\frac{1}{2} \cdot p(100)}{\frac{1}{2} \cdot p(100) + \frac{1}{2} \cdot p(50)} = \frac{p(100)}{p(100) + p(50)},$$

$$\mathbb{P}(O_1 > O_2 \mid O_1 = 100\text{ kn}) = \frac{\frac{1}{2} \cdot p(50)}{\frac{1}{2} \cdot p(100) + \frac{1}{2} \cdot p(50)} = \frac{p(50)}{p(100) + p(50)}.$$

Supstitucijom tih vrijednosti u formulu za izračun očekivane vrijednosti iznosa novca u omotnici O_2 ako se u omotnici O_1 nalazi iznos od 100 kn, za očekivani iznos u omotnici O_2 dobiva se:

$$\frac{p(100)}{p(100) + p(50)} \cdot 200\text{ kn} + \frac{p(50)}{p(100) + p(50)} \cdot 50\text{ kn}.$$

Isto će vrijediti i za svaki drugi iznos x koji igrač vidi u prvoj omotnici, za koji će očekivani iznos u drugoj omotnici onda iznositi:

$$\frac{p(x)}{p(x) + p\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot 2x + \frac{p\left(\frac{x}{2}\right)}{p(x) + p\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{x}{2},$$

ako $p(x)$ i $p\left(\frac{x}{2}\right)$ označavaju vjerojatnosti da će organizator igre u omotnicu s manjim iznosom staviti iznose x i $\frac{x}{2}$, redom. Lako se može izračunati da će iznos u drugoj omotnici biti veći od x samo ako je $p(x) > \frac{1}{2}p\left(\frac{x}{2}\right)$, za svaki x iz skupa organizatoru igre dozvoljenih iznosa. Više o mogućim distribucijama organizatoru igre dozvoljenih iznosa može se pročitati u [19].

Dakle, ukoliko igrač vidi iznos koji se nalazi u prvotno odabranoj omotnici, očekivani iznos u drugoj omotnici moguće je izračunati jedino ako se znaju vjerojatnosti da će organizator igre određeni iznos staviti u omotnicu.

2.7 Sankt-Peterburški paradoks

Sankt-Peterburški paradoks smatra se paradoksom teorije vjerojatnosti i teorije odlučivanja u ekonomiji. Zbog znamenite analize ovog paradoksa u svome djelu *Izlaganje nove teorije mjerenja rizika* iz 1738. godine, ovaj je paradoks ime dobio po Danielu Bernoulliju[3], nećaku Jacoba i sinu Johanna Bernoullija, koji je dio svoga života proveo u Sankt-Petersburgu. Međutim, ovaj je problem prvi postavio Danielov nećak, Nicolas Bernoulli, koji je 1713. godine u razmjeni pisama s francuskim matematičarem Perreom Rémondom de Montmortom iznio ranu verziju ovog paradoksa. Jedna od suvremenijih verzija Sankt-Peterburškog paradoksa ima sljedeći oblik:

> *Kockarnica nudi igru na sreću u kojoj se baca simetričan novčić sve dok na njemu ne padne glava. Ukoliko glava padne pri n–tom bacanju, igrač osvaja 2^n dolara. Koliko iznosi pravedan ulog igrača na samom početku igre?*

Ako glava padne u prvom bacanju, igrač osvaja 2 dolara. Ako glava padne u drugom bacanju, osvaja 4 dolara. Padne li glava prvi puta u trećem bacanju, osvaja 8 dolara i tako dalje do n–tog u kojemu igrač, ukoliko na novčiću tek tada prvi puta padne glava, osvaja 2^n dolara. Očito se iznos potencijalnog dobitka udvostručuje za svako bacanje koje je rezultiralo novčićem okrenutim na stranu pisma. Kako je u pitanju bacanje simetričnog novčića, vjerojatnost da pri njegovu bacanju padne pismo jednaka je $\frac{1}{2}$, a vjerojatnost da padne glava je također jednaka $\frac{1}{2}$ pa je i vjerojatnost da igrač osvoji iznos od 2 dolara isto $\frac{1}{2}$. Vjerojatnost da pri prvom bacanju novčića padne pismo, a pri drugom bacanju padne glava je onda $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Time igrač osvaja 4 dolara. Analognim načinom razmišljanja, ukoliko glava padne tek pri trećem bacanju, igrač s vjerojatnošću $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ osvaja 8 dolara. Uz pretpostavku da su vremensko trajanje igre i fond dobitaka neograničeni, za slučajnu varijablu X koja predstavlja isplatu za jednu odigranu igru, očekivani dobitak igrača iznosi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + 16 \cdot \frac{1}{16} + \dots \\ =& 1 + 1 + 1 + 1 + \dots \\ =& \infty.\end{aligned}$$

[3]Švicarski matematičar koji prvi uvodi tehnike diferencijalnog računa u teoriju vjerojatnosti.

Iz toga slijedi da, koliko god igrač novca uloži na samom početku igre, uvijek će profitirati dok će kockarnica bankrotirati!

Uzimajući u obzir samo očekivanu vrijednost dobitka, igrač bi trebao zaigrati igru za bilo koju cijenu. To bi značilo da ukoliko igrač na početku igre uloži 1000 dolara, svejedno bi trebao profitirati i osvojiti više od 1000 dolara. Odredimo broj bacanja potrebnih do završetka igre, odnosno događaja da na novčiću po prvi puta padne glava, koji bi igraču omogućio da profitira od unaprijed uloženih 1000 dolara. Neka je sa n označen broj bacanja kojim igra završava time da na novčiću po prvi puta pada glava. Kada glava prvi puta padne u n–tom bacanju, očekivani će dobitak biti 2^n. Kako je potrebno odrediti broj bacanja nakon kojeg će igrač profitirati, odnosno osvojiti više od 1000 dolara koliko je uložio, potrebno je riješiti nejednadžbu:

$$2^n > 10^3.$$

Logaritmiranjem obiju strana nejednakosti i primjenom svojstava logaritama, nejednadžba poprima sljedeći oblik:

$$n \cdot \log 2 > 3 \cdot \log 10.$$

Vrijedi da je $\log 10 = 1$ i $\log 2 > 0$ što omogućuje dijeljenje s tim brojem i ne utječe na znak nejednakosti pa slijedi:

$$n > \frac{3}{\log 2}$$
$$n > 9.96.$$

Kako je broj bacanja prirodan broj, može se pisati $n \geq 10$, $n \in \mathbb{N}$. Iz toga slijedi da igrač, nakon što je ulaskom u igru uložio 1 000 dolara, može profitirati tek nakon deset bacanja, odnosno nakon što od početka igre padne barem 9 pisama za redom. Vjerojatnost događaja da za redom padne 9 pisama nakon čega padne glava jednaka je:

$$\frac{1}{2^{10}} \approx 0.098\%.$$

Ta je vjerojatnost izrazito mala pa bi se moglo reći da je taj događaj gotovo nemoguć! U sljedećoj tablici prikazane su vjerojatnosti dobitka izražene u postotcima i očekivani iznos dobitka za prvih pet bacanja, ako u n–tom bacanju na novčiću prvi puta padne glava, za $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Iz tablice je vidljivo kako je vjerojatnost pobjede, na primjer u petom bacanju vrlo mala i iznosi tek nešto više od 3%, dok je dobitak predviđen za pobjedu u petom bacanju tek 32 dolara što se ne smatra velikim dobitkom.

Broj bacanja	Vjerojatnost pobjede	Dobitak
1	50%	2 dolara
2	25%	4 dolara
3	12.5%	8 dolara
4	6.25%	16 dolara
5	3.125%	32 dolara
6	1.5625%	64 dolara

Dakle, iako je očekivana vrijednost dobitka beskonačna, vjerojatnost osvajanja velikog dobitka iznimno je mala. Također je vrlo malo vjerojatno da bi bilo tko uložio veliki novčani iznos samo zato što izračun očekivanog dobitka tvrdi kako će igrač „u prosjeku" profitirati. Time se postavlja pitanje, ako očekivani iznos dobitka nije vrijednost kojom se treba voditi, koji bi pristup omogućio izračun pravednog uloga za igru? Tijekom vremena predloženo je nekoliko pristupa rješenju ovog paradoksa, a do dva slična rješenja gotovo istovremeno došli su Daniel Bernoulli i Gabriel Cramer.

Poznati citat Daniela Bernoullija u njegovoj verziji rješenja ovoga paradoksa, preuzet iz [5], u prijevodu poprima sljedeći oblik:

> *Određivanje vrijednosti predmeta ne smije se temeljiti samo na njegovoj cijeni, nego na korisnosti koju taj predmet ima. Cijena predmeta ovisi o stvari o kojoj je riječ i jednaka je za sve, ali korist koju određeni predmet ima ovisi o osobnim preferencijama osobe koja vrši procjenu. Stoga, nema sumnje da je dobitak od tisuću dukata značajniji za siromaha, nego za bogataša, iako obojica dobivaju isti iznos.*

Iz toga razloga Daniel Bernoulli 1738. godine uvodi ideju srednje koristi koja se temelji na tome da ako igrač ima puno novca, mali dobitak za njega ima malo značenje. Naime, korisnost novca opada s količinom već postojećeg bogatstva, tako da milijun dolara ima veće značenje igraču prosječnog bogatstva, nego već postojećem milijunašu. Ovakav pristup rješenju ima temelje u očekivanom ponašanju čovjeka ovisno o njegovom statusu. Ako se ovo Bernoullijevo razmišljanje stavi u kontekst vremena u kojemu je nastalo, uočljivo je kako je ono preteča razvoja bihevioralne ekonomije[4] koja ima veliko značenje u ekonomiji modernog doba, a počela se intenzivnije razvijati drugom polovinom prošlog stoljeća. Bernoullijeva ideja srednje korisnosti je prema [2] bila prethodnik razvoja *teorije očekivane korisnosti* koja *„preporučuje koju bi opciju razumni pojedinac trebao odabrati u složenoj*

[4] Bihevioralna ekonomija istražuje utjecaj psihologije pojedinca na njegovo ekonomsko odlučivanje. [18]

situaciji na temelju svoje tolerancije na rizik i osobne preferencije". Bernoulli tvrdi da igrač ne treba maksimizirati očekivanu vrijednost dobitka, nego za njega očekivanu korisnost toga dobitka.

Neka je K trenutni kapital igrača prije početka igre, a funkcija korisnosti označena s U (engl. *utility*) u varijabli K logaritamska funkcija $U(K) = \ln K$. Ukoliko se za funkciju korisnosti uzme

$$\text{ln(kapital nakon dobitka)} - \text{ln(početni kapital)},$$

a sa u se označi početni ulog za igru, dobiva se da je očekivana inkrementalna korisnost jednaka:

$$\Delta\mathbb{E}(U) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left[\ln\left(K + 2^k - u\right) - \ln(K)\right] < +\infty.$$

Kako je $K + 2^k - u$ kockarov kapital nakon dobitka, a K početni kockarov kapital, očito je kako ova formula daje vezu između kockarova početnog kapitala i iznosa koji bi trebao uložiti u igru. Tako bi milijunaš za ovu igru trebao biti spreman platiti do 10.94 dolara, dok bi igrač s kapitalom od 1000 dolara trebao biti spreman platiti do 5.94 dolara.

Prije nego je Daniel Bernoulli objavio svoje rezultate, 1728. godine je ženevski matematičar Gabriel Cramer došao do slične ideje vođen sljedećim razmišljanjem:

> *Matematičari novac procjenjuju proporcionalno njegovoj kvantiteti, a razumni ljudi proporcionalno njegovoj potencijalnoj vrijednosti.*[1]

Prema [14] Cramer je predložio i pretpostavku o ograničenim resursima kockarnice koja nudi igru. Neka je za ovu igru resurs kockarnice, odnosno najveći mogući dobitak igrača, milijun dolara. Za svako bacanje od dvadesetog na dalje u kojemu na novčiću po prvi puta padne glava, iznos koji bi igrač trebao dobiti veći je od milijun dolara. Zbog ograničenih resursa kockarnice je dobitak za svako od tih bacanja jednak milijun dolara. Tada je očekivana vjerojatnost dobitka igrača dana sljedećim izrazom:

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + \ldots + 2^{19} \cdot \frac{1}{2^{19}} + \left(\frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{2^{21}} + \ldots\right) \cdot 10^6.$$

Kako je:

$$\frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{2^{21}} + \ldots = \sum_{k=20}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{20}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{524288} \approx 1.90735 \cdot 10^{-6},$$

slijedi da je očekivana vjerojatnost dobitka jednaka:

$$19 + 1.90735 \approx 21.$$

Iznos od 21 dolar prihvatljiviji je za kockarnicu nego za igrača. Kao što je vidljivo iz prethodne tablice s vjerojatnostima pobjede i iznosima dobitka u prvih nekoliko bacanja novčića, vjerojatnost da će igrač profitirati ukoliko uloži 21 dolar jednaka je tek 3.125%. U svojim pismima Danielu Bernouliju, Cramer je također tvrdio kako se ovaj problem može riješiti smanjenjem granične korisnosti dobiti. Međutim, on je za razliku od Bernoullija, koji je u obzir uzimao ukupni kapital igrača, razmatrao samo dobit. Bernoullijeva i Cramerova rješenja nisu u potpunosti zadovoljavajuća jer se igra lako može promijeniti tako da se paradoks ponovno pojavi.

Mnogi matematičari, među kojima su Jean-Baptiste le Rond d'Alembert i John Maynard Keynes, također odbacuju maksimiziranje očekivanog dobitka pa čak i teorije korisnosti. Iako je ovaj paradoks star čak tri stoljeća, nove ideje i rješenja se i dalje predlažu. Poznati hrvatski matematičar koji se specijalizirao za teoriju vjerojatnosti, William Feller, ponudio je matematički ispravno rješenje koje uključuje uzorkovanje. Iako je za razumijevanje potrebno dublje znanje teorije vjerojatnosti i statistike, ideja njegova rješenja je intuitivno jasna i logična: izvođenje igre na velikom broju ljudi, praćenje rezultata i računanje očekivane vrijednosti dobitka temeljene na tim rezultatima.

Bibliografija

[1] *Gabriel Cramer, Swiss mathematician*, https://healthyornot.blogs.com/cal/2007/08/gabriel-cramer-.html, pristupljeno: 1. 9. 2021.

[2] *Očekivana hipoteza korisnosti - Expected utility hypothesis*, https://hrvwiki.net/wiki/Expected_utility_hypothesis, pristupljeno: 1. 9. 2021.

[3] *Paradoks Bertrandsove kutije - Bertrands box paradox - Wikipedia*, https://hr.ert.wiki/wiki/Bertrand%27s_box_paradox, pristupljeno: 16. 7. 2021.

[4] *Paradoks, značenje i definicija*, https://jezikoslovac.com/word/6at0, pristupljeno: 1. 9. 2021.

[5] *Science Quotes by Daniel Bernoulli*, https://todayinsci.com/B/Bernoulli_Daniel/BernoulliDaniel-Quotations.htm, pristupljeno: 30. 8. 2021.

[6] *Way Back Machine*, http://web.archive.org/web/20030614011541/http://parentdirectededucation.org/Thinking%20Parent/Vos%20Savant.htm, pristupljeno: 4. 3. 2021.

[7] M. Benšić i N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2014.

[8] F. M. Brückler, *Povijest matematike II*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2010.

[9] J. Cvitković, *Svakodnevica ljudi i faraona Egipta*, Završni rad, Sveučilište Jurja Dobrile u Puli, 2016, https://repozitorij.unipu.hr/islandora/object/unipu:782, pristupljeno: 1. 3. 2021.

[10] J. Grime, *Non-transitive Dice*, https://singingbanana.com/dice/article.htm, pristupljeno: 7. 7. 2021.

[11] D. Ilišević i G. Muić, *Uvod u matematiku*, https://web.math.pmf.unizg.hr/~ilisevic/Slike/UMskripta.pdf, pristupljeno: 15. 7. 2021.

[12] D. Krizmanić i H. Rizvić, *Zamijeniti ili ne zamijeniti?*, Matematičko-fizički list **64** (2013), br. 253, 44–43.

[13] J. Matotek i I. Stipančić-Klaić, *Rođendanski paradoks*, Poučak **18** (2017), br. 70, 36–45.

[14] J. Okopni, *Paradoksi u teoriji vjerojatnosti i teoriji slučajnih procesa*, Diplomski rad, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2020, pristupljeno: 1. 3. 2021.

[15] I. Plavčić, T. Škrtić i D. Pavrlišak, *Bertrandov paradoks*, Hrvatski matematički elektronički časopis, br. 16, `http://e.math.hr/math_e_article/br16/plavcic_skrtic_pavrlisak/bertrand`, pristupljeno: 19. 7. 2021.

[16] S. Selvin, *Letters to the Editor*, The American Statistician **29** (1975), br. 1, 67–71., pristupljeno: 4. 3. 2021.

[17] A. Čoić i V. Kovač, *Intranzitivne kocke*, Matematičko-fizički list **68** (2018), br. 271, 174–175.

[18] H. Šarganović, *Bihevioralna ekonomija i psihologija ekonomskog ponašanja i odlučivanja potrošača na tržištu*, `https://www.ceps.edu.ba/Files/DIT/Godina%205%20Broj%202/10.pdf?ver=1`, pristupljeno: 1. 9. 2021.

[19] Z. Šikić, *Druga kći, Monty Hall i dvije omotnice – zbunjujuće vjerojatnosti*, Poučak **20** (2019), br. 77, 10–16.

[20] N. Šuvak i S. Jelić, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, 2010, `http://www.mathos.unios.hr/uvis/Vjezbe/Materijali_2010_2011/uvis_201011_02.11.2010_slides.pdf`, pristupljeno: 20. 6. 2021.

Sažetak

U ovom diplomskom radu odabrano je i opisano nekoliko poznatih i zanimljivih vjerojatnosnih paradoksa: Monty Hall i njemu slični paradoksi, paradoks intranzitivnih kocaka, Bertrandov paradoks geometrijske vjerojatnosti, popularni rođendanski paradoks prikladan za primjenu u školskoj matematici te problem dviju omotnica kod kojeg paradoks leži u sugeriranom objašnjenju. Na samom kraju obrađen je Sankt-Peterburški paradoks za koji se rješenja predlažu zadnjih 300 godina, a neki prijedlozi rješenja imali su važan utjecaj na razvoj ekonomije.

Pojava raznih paradoksa i rasprava o njihovim mogućim rješenjima tijekom korespondencije matematičara u razdoblju renesanse postavile su temelje suvremene teorije vjerojatnosti. Neki od paradoksa potaknuli su razvoj interdisciplinarnih znanosti i time omogućili napredak područja koja nisu usko vezana samo uz matematiku. Ti rezultati imaju utjecaj na vrijeme u kojemu živimo, a s obzirom da neki još nisu definitivno razrješeni, zasigurno će nastaviti svoj utjecaj i na vremena koja tek dolaze.

Summary

In this thesis, several well known and interesting paradox are selected and described: the Monty Hall and similar paradoxes, intransitive dice paradox, Bertrand's paradox on geometric probability, the popular birthday problem, suitable for implementation in school mathematics, and the two envelopes problem, where the paradox lies in a possible misleading explanation. At the very end, the thesis studies the Saint Petersburg paradox, which has been discussed for the last 300 years and some proposed solutions had an important impact on the development of the economics.

The emergence of various paradoxes and discussions of their possible solutions during the correspondence of mathematicians in the Renaissance period laid the foundations of modern probability theory. Some of the paradoxes have spurred the development of interdisciplinary sciences and thus enabled the advancement of areas that are not closely related to mathematics alone. These results have an impact on the times we are living in, but since some have not yet been fully resolved, they will certainly continue to have an impact on the times yet to come.

Životopis

Dana 31. 12. 1995. rođena sam u Slavonskom Brodu, gdje sam završila Osnovnu školu Antuna Mihanovića i opću gimnaziju Matija Mesić. Po završetku srednje škole 2014. godine upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Nakon stjecanja zvanja sveučilišne prvostupnice edukacije matematike, 2018. godine upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički na istom fakultetu. Na posljednjoj sam godini odradila studentsku praksu u Osnovnoj školi Voltino i II. Gimnaziji u Zagrebu gdje sam dobila uvid u osnove rada u odgojno-obrazovnom sustavu. Trenutno radim kao student pripravnik u sektoru aktuaristike Wiener osiguranja na odjelu neživotnih osiguranja.