Faktorizacija centrosimetričnih matrica

Kučić, Antica

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Antica Kučić

FAKTORIZACIJA CENTROSIMETRIČNIH MATRICA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Goran Muić
dr. sc. Sonja Žunar

Zagreb, rujan 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Faktorizacijom matrice prikazujemo matricu u obliku produkta matrica. Matrične nam faktorizacije daju mogućnost jednostavnijeg rješavanja nekih problema i ubrzavaju računski proces. Osnovni su alat numeričke matematike i najčešće se primjenjuju prilikom rješavanja sustava linearnih jednadžbi, a jedna od najpoznatijih faktorizacija je $QR-$faktorizacija.

Iako sam problem matrične faktorizacije postoji dugo i već su poznate brojne metode i efikasni algoritmi za provođenje pojedinih faktorizacija, danas je njihovo proučavanje još uvijek veoma aktivno područje. U prilog tome istaknimo članak K. Burnika (vidi [1]) i njegovu nedavno otkrivenu centrosimetričnu $QR-$faktorizaciju. Upravo će ona biti glavna tema ovog diplomskog rada.

U prvom su poglavlju rada dane definicije, tvrdnje i rezultati linearne algebre koji će se koristiti u ostalim poglavljima rada. Osnovni pojmovi potrebni za razumijevanje glavnog rezultata su vektorski prostori, skalarni produkt, norma, matrice i operacije s matricama te linearni operatori.

Drugim se poglavljem opisuje klasična $QR-$faktorizacija. Postupno se izgrađuje pojam Hausholderove refleksije te se iskazuje i dokazuje teorem $QR-$faktorizacije realne regularne matrice.

Kroz treće poglavlje čitatelju se približava pojam posebnog indefinitnog skalarnog produkta, tzv. *perplektičkog skalarnog produkta* te matrica koje taj produkt čuvaju, a zovu se *perplektičke matrice*. Nakon toga uvodi se pojam *centrosimetričnih matrica* te se ističu i dokazuju njihova svojstva. Pojašnjavaju se pojmovi *Moore-Penroseovog inverza* i *duplostožaste matrice* te postupno razvija ideja na kojoj će se temeljiti glavni rezultat ovog rada, a za koji će biti potrebni *blok perplektički reflektori* i *ulaganja matrica* kojima će se također posvetiti pažnja. U nastavku se detaljno razrađuje postupak provođenja centrosimetrične $QR-$faktorizacije, iskazuje i dokazuje teorem o istoj te izlaže pregledni algoritam za njezino provođenje koji olakšava razumijevanje dokaza glavnog rezultata rada. $QR-$faktorizacija centrosimetrične matrice opisana ovim radom će, za razliku od klasične $QR-$faktorizacije, sačuvati svojstvo centrosimetričnosti dobivenih matrica Q i R. Preciznije, dobivena matrica Q bit će perplektička ortogonalna matrica, a matrica R duplostožasta centrosimetrična matrica. Na kraju se rada na konkretnom primjeru postupno provodi centrosimetrična $QR-$faktorizacija.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

1.1 Vektorski prostori

Definicija 1.1.1. *Neka je G neprazan skup. Svako preslikavanje*

$$* : G \times G \to G$$

*nazivamo **binarnom operacijom** na skupu G. Svakom uređenom paru $(x, y) \in G \times G$ binarna operacija $*$ pridružuje element $z = x * y \in G$.*

Definicija 1.1.2. *Neka je G neprazan skup i $*$ binarna operacija na G za koju vrijede svojstva:*

(G1) $(x * y) * z = x * (y * z)$ *za sve* $x, y, z \in G$, *(asocijativnost)*

(G2) *postoji* $e \in G$ *takav da je* $e * x = x * e = x$ *za sve* $x \in G$, *(neutralni element)*

(G3) *za svaki* $x \in G$ *postoji* $y \in G$ *takav da je* $x * y = y * x = e$. *(inverzni element)*

*Uređeni par $(G, *)$ naziva se **grupa**.*
*Grupa $(G, *)$ je **komutativna** ili **Abelova grupa** ukoliko vrijedi i svojstvo:*

(G5) $x * y = y * x$ *za sve* $x, y \in G$. *(komutativnost)*

Definicija 1.1.3. *Uređena trojka $(G, +, \cdot)$ nepraznog skupa G na kojemu su definirane dvije binarne operacije + (zbrajanje) i $\cdot$ (množenje) je **prsten** ako vrijedi:*

(i) $(G, +)$ *je Abelova grupa,*

(ii) $(G, \cdot)$ *je polugrupa, to jest vrijedi*
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *za sve* $x, y, z \in G$, *(asocijativnost množenja)*

(iii) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ *za sve* $x, y, z \in G$

(distributivnost množenja u odnosu na zbrajanje slijeva)

(iv) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ *za sve* $x, y, z \in G$

(distributivnost množenja u odnosu na zbrajanje zdesna).

Neutralni element Abelove grupe $(G, +)$ *označavamo s* 0 *i zovemo nula. Ako postoji neutralni element strukture* $(G, \cdot)$*, označavamo ga s* 1 *i zovemo jedinica te u tom slučaju* $(G, +, \cdot)$ *nazivamo* ***prsten s jedinicom****. Ako za operaciju množenja vrijedi svojstvo komutativnosti, prsten nazivamo* ***komutativnim prstenom****.*

Definicija 1.1.4. *Uređenu trojku* $(G, +, \cdot)$ *nazivamo* ***poljem*** *ako vrijedi:*

(i) $(G, +)$ *je Abelova grupa,*

(ii) $(G^*, \cdot)$ *je Abelova grupa, pri čemu je* $G^* = G \backslash \{0\}$*,*

(iii) *distributivnost množenja u odnosu na zbrajanje slijeva i zdesna.*

Polje možemo definirati i drugačije, kao komutativni prsten s jedinicom $(G, +, \cdot)$ *kojemu su svi elementi iz* G^* *invertibilni. Najčešća oznaka za polje je* $\mathbb{F}$*.*

Definicija 1.1.5. *Neka je* $(V, +)$ *Abelova grupa i* $\mathbb{F}$ *polje. Za uređenu trojku* $(V, +, \cdot)$ *kažemo da je* ***vektorski prostor nad poljem*** $\mathbb{F}$ *ako je* $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ *preslikavanje za koje vrijedi:*

(V1) $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha \cdot \beta) \cdot a$ *za sve* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$*,* $a \in V$ *(kvaziasocijativnost)*

(V2) $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$ *za sve* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$*,* $a \in V$

(distributivnost množenja u odnosu na zbrajanje u $\mathbb{F}$*)*

(V3) $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$ *za sve* $\alpha \in \mathbb{F}$*,* $a, b \in V$

(distributivnost množenja u odnosu na zbrajanje u V*)*

(V4) $1 \cdot a = a$ *za sve* $a \in V$*.* *(multiplikativni neutralni element)*

Vektorski prostor nazivamo ***realnim vektorskim prostorom*** *ukoliko vrijedi* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ *odnosno* ***kompleksnim vektorskim prostorom*** *ukoliko vrijedi* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$*.*
Vektorom *nazivamo svaki element skupa* V*, a* ***skalarom*** *svaki element polja* $\mathbb{F}$*.*
Množenje vektora skalarom *naziv je za operaciju* $\cdot$ *i ona se osim* $\alpha \cdot a$ *nerijetko bilježi i* αa*.*
Nulvektor *je naziv za neutralni element Abelove grupe* $(V, +)$ *i označavamo ga s* 0_V*.*

Primjer 1.1.6. *Neka je n neki prirodan broj i neka je*

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n\},$$

skup svih uređenih $n-$torki realnih brojeva. Zbrajanje u $\mathbb{R}^n$ je definirano po koordinatama:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$

kao i množenje uređene $n-$torke s realnim brojem α:

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n).$$

Lako se provjeri da je $(\mathbb{R}^n, +)$ Abelova grupa i da je $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ realan vektorski prostor.

Definicija 1.1.7. *Za vektorski prostor V nad poljem $\mathbb{F}$, prirodan broj k, vektore $a_1, a_2, ..., a_k$ i skalare $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, vektor koji je oblika:*

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$$

zovemo ***linearnom kombinacijom*** *vektora $a_1, a_2, ..., a_k$ s koeficijentima $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$.*

Definicija 1.1.8. *Skup svih linearnih kombinacija vektora iz S, gdje je $S \subseteq V$, zovemo* ***linearnom ljuskom*** *ili* ***linearnim omotačem skupa*** *S te označavamo $[S]$. Pišemo:*

$$[S] = \{\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n : n \in \mathbb{N}, a_1, a_2, ..., a_n \in S, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}\}.$$

Definicija 1.1.9. *Ako se svaki vektor vektorskog prostora V nad poljem $\mathbb{F}$ može prikazati kao linearna kombinacija konačno mnogo vektora iz G, pri čemu je $G \subseteq V$, tj. ako je $V = [G]$, za skup G kažemo da* ***razapinje*** *ili* ***generira*** *prostor V. U tom slučaju skup G nazivamo* ***sustavom izvodnica*** *za V.*

Definicija 1.1.10. *Ukoliko vektorski prostor sadrži barem jedan konačan sustav izvodnica, kažemo da je* ***konačnogeneriran****.*

Primjer 1.1.11. *Za proizvoljan vektor $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ vrijedi*

$$x = x_1(1, 0) + x_2(0, 1).$$

Iz toga slijedi da se svaki $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ može zapisati kao linearna kombinacija vektora $e_1 = (1, 0)$ i $e_2 = (0, 1)$ što povlači da je $\{e_1, e_2\}$ sustav izvodnica za $\mathbb{R}^2$.
Generalno, vrijedi $\mathbb{R}^n = [\{e_1, e_2, ..., e_n\}]$, pri čemu je $e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$.
Zaključujemo da je vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ konačnogeneriran.

Definicija 1.1.12. *Skup vektora* $S = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ *koji je podskup vektorskog prostora* V *nad poljem* $\mathbb{F}$ *je* ***linearno nezavisan*** *ako nulvektor* 0_V *možemo pomoću vektora iz* S *prikazati na jedinstven način, drugim riječima ako iz jednadžbe*

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k = 0_V \tag{1.1}$$

slijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.
Ako postoji izbor $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ *pri čemu je barem jedan od skalara različit od nule i vrijedi* (1.1)*, za skup* S *kažemo da je* ***linearno zavisan***.

Primjer 1.1.13. *Skup* $\{e_1, e_2, ..., e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *je linearno nezavisan.*

Definicija 1.1.14. *Ako je* B *sustav izvodnica za* V *te linearno nezavisan skup u* V*, kažemo da je* B ***baza*** *prostora* V.

Primjer 1.1.15. *Skup* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *je baza za* $\mathbb{R}^n$*, a zovemo je* ***kanonska*** *ili* ***standardna*** *baza.*

Teorem 1.1.16. *Neka je vektorski prostor* V *konačnogeneriran i netrivijalan. Ako je* $G = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *sustav izvodnica za* V*, onda on sadrži podskup koji je baza prostora* V.

Korolar 1.1.17. *Svaki vektorski prostor koji je konačnogeneriran i netrivijalan ima konačnu bazu.*

Definicija 1.1.18. *Vektorski prostor s konačnom bazom nazivamo* ***konačnodimenzionalan*** *vektorski prostor, a u suprotnom ga zovemo* ***beskonačnodimenzionalnim***.

Definicija 1.1.19. *Neka je* V *netrivijalan konačnodimenzionalan vektorski prostor. Kažemo da je broj vektora u proizvoljnoj bazi vektorskog prostora* V *njegova* ***dimenzija***.
Označavamo je s $\dim V$.
Govorimo o $n-$***dimenzionalnom vektorskom prostoru*** V *ako vrijedi* $\dim V = n$.
Ako je $V = \{0_V\}$*, definiramo* $\dim V = 0$.

Napomena 1.1.20. *Primjer 1.1.15 pokazuje da je* $\dim \mathbb{R}^n = n$*, stoga se za* $\mathbb{R}^n$ *često koristi naziv* ***realan*** $n-$***dimenzionalni koordinatni prostor***.

Definicija 1.1.21. *Za* $W \neq \emptyset$ *koji je podskup vektorskog prostora* V *nad poljem* $\mathbb{F}$ *kažemo da je* ***potprostor*** *od* V *ukoliko je* W *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$ *uz iste operacije kao u* V *i to bilježimo* $W \leq V$.

1.2 Skalarni produkt

Definicija 1.2.1. *Za vektorski prostor V nad poljem $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ definiramo preslikavanje $s : V \times V \to \mathbb{F}$. To preslikavanje uređenom paru vektora pridružuje skalar $s(a, b) = \langle a|b\rangle \in \mathbb{F}$, a zovemo ga* ***skalarno množenje*** *ili* ***skalarni produkt*** *na prostoru V ako vrijede svojstva:*

(1) $\langle a|a\rangle \geq 0$ *za svaki $a \in V$, pri čemu $\langle a|a\rangle = 0$ akko $a = 0_V$,* *(pozitivna definitnost)*

(2) $\langle a|b\rangle = \overline{\langle b|a\rangle}$ *za sve $a, b \in V$,* *(hermitska simetričnost)*

(3) $\langle \lambda a|b\rangle = \lambda\langle a|b\rangle$ *za sve $a, b \in V, \lambda \in \mathbb{F}$,* *(homogenost)*

(4) $\langle a + b|c\rangle = \langle a|c\rangle + \langle b|c\rangle$ *za sve $a, b, c \in V$.* *(aditivnost)*

Skalarni produkt *ili* ***umnožak vektora*** *a i b naziv je za skalar $\langle a|b\rangle$, a* ***unitarni prostor nad poljem*** *$\mathbb{F}$ naziv je za uređeni par $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$.*

Primjer 1.2.2. *Za vektore $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ i $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ iz realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ definiramo*

$$\langle x|y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Lako se provjeri da vrijede sva svojstva iz definicije 1.2.1 iz čega zaključujemo da je $\mathbb{R}^n$ primjer realnog unitarnog prostora. Definirani skalarni produkt zovemo ***standardni*** *skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$.*

Definicija 1.2.3. *Ako za vektore a i b unitarnog prostora V vrijedi $\langle a|b\rangle = 0$, za njih kažemo da su međusobno* ***ortogonalni*** *i pišemo $a \perp b$.*

Definicija 1.2.4. *Za konačan skup vektora $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ u unitarnom prostoru V kažemo da je* ***ortogonalan*** *skup vektora ako vrijedi $a_i \perp a_j$ za $i \neq j$, za sve $i, j \in \{1, 2, ..., k\}$.*

Definicija 1.2.5. *Na unitarnom prostoru V nad poljem $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ definiramo preslikavanje*

$$||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$$

koje svakom vektoru $a \in V$ pridružuje realan broj $||a|| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$. Vrijede svojstva:

(1) $||a|| \geq 0$*, pri čemu $||a|| = 0$ akko $a = 0_V$ za svaki $a \in V$,* *(pozitivna definitnost)*

(2) $||\lambda a|| = |\lambda| \cdot ||a||$ *za sve $a \in V, \lambda \in \mathbb{F}$,* *(homogenost)*

(3) $||a + b|| \leq ||a|| + ||b||$ *za sve $a, b \in V$.* *(nejednakost trokuta)*

To preslikavanje zovemo ***norma*** *na prostoru* V. *Općenitije, ako je* V *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ *ili* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ *i* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ *je preslikavanje sa svojstvima (1)–(3), tada preslikavanje* $\|\cdot\|$ *zovemo* ***norma*** *na prostoru* V, *a uređeni par* $(V, \|\cdot\|)$ *zovemo* ***normirani prostor***.

Primjer 1.2.6. *Standardni skalarni produkt na prostoru* $\mathbb{R}^n$ *inducira normu* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\|a\|_2 = \sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2}.$$

Propozicija 1.2.7. *Neka je* V *unitaran prostor. Za svaka dva vektora* $x, y \in V$ *vrijedi* ***Cauchy-Schwarz-Bunjakowskyjeva*** *nejednakost*

$$|\langle x \mid y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Jednakost se postiže akko su vektori x *i* y *linearno zavisni.*

Definicija 1.2.8. *Neka je* V *normirani prostor. Svaki vektor* $a \in V$ *za koji vrijedi*

$$\|a\| = 1$$

nazivamo ***jedinični*** *ili* ***normirani*** *vektor.*
Postupak kojim vektoru $a \in V \setminus \{0_V\}$ *pridružujemo vektor*

$$a_0 = \tfrac{1}{\|a\|} a$$

zovemo ***normiranje*** *vektora.*

Definicija 1.2.9. *Za skup vektora* $S = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ *u unitarnom prostoru* V *kažemo da je* ***ortonormiran*** *ako je taj skup ortogonalan i svi su mu članovi normirani, odnosno ako vrijedi*

$$\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij} \text{ za sve } i, j \in \{1, 2, ..., k\}.$$

Posebno, ako je ortonormiran skup S *baza za* V, *zovemo ga* ***ortonormiranom bazom***.

1.3 Matrice

Definicija 1.3.1. *Neka su* m *i* n *prirodni brojevi. Preslikavanje*

$$A : \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} \to \mathbb{F}$$

zovemo ***matrica tipa*** (m, n) *s elementima iz polja* $\mathbb{F}$.
Oznaka za skup svih matrica tipa (m, n) *je* $M_{mn}(\mathbb{F})$.

Matrica A uređenom paru (i, j), pri čemu je $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$, pridružuje skalar polja $\mathbb{F}$. Često za funkcijske vrijednosti koristimo oznaku a_{ij} umjesto $A(i, j)$ i bilježimo ih u pravokutnoj shemi poput:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Mogu se koristiti uglate, ali i okrugle zagrade. Praznina na pojedinom mjestu u matrici označava nulu. Matrica A ima *m redaka* i *n stupaca*. Kažemo da je uređena $n-$torka $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ *i−ti redak*, a uređena $m-$torka $(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})$ *j−ti stupac* matrice A.

Definicija 1.3.2. *Za matricu tipa (n, n) kažemo da je* ***kvadratna matrica*** *ili* ***matrica reda n****. Oznaka za skup svih matrica reda n s elementima iz polja $\mathbb{F}$ je $M_n(\mathbb{F})$.*
Uređenu $n-$torku $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$ matrice $A \in M_n(\mathbb{F})$ nazivamo ***glavna dijagonala****, a uređenu $n-$torku $(a_{1n}, a_{2,n-1}, ..., a_{n1})$* ***sporedna dijagonala*** *matrice A.*

Definicija 1.3.3. *Dvije su matrice* ***jednake*** *ako su istog tipa i ako su njihovi elementi na odgovarajućim pozicijama jednaki.*

Definicija 1.3.4. *Neka su $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ matrice tipa (m, n).* ***Zbroj matrica*** *A i B je matrica $C = [c_{ij}]$ koja je tipa (m, n) i takva da za njezine elemente vrijedi $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ za sve $i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n$. Koristimo oznaku $A + B = C$.*

Napomena 1.3.5. *Ukoliko su matrice različitog tipa, njihov zbroj ne definiramo.*

Definicija 1.3.6. *Matrica tipa (m, n) kojoj su svi elementi jednaki nuli zove se* ***nulmatrica*** *i označavamo ju s 0 ili 0_{mn}.*

Propozicija 1.3.7. *Skup matrica $M_{mn}(\mathbb{F})$ s operacijom zbrajanja matrica čini Abelovu grupu.*

Definicija 1.3.8. *Neka je $A = [a_{ij}]$ matrica tipa (m, n) i neka je $\lambda \in \mathbb{F}$.* ***Umnožak matrice*** *A* ***skalarom*** *λ je matrica $B = [b_{ij}]$ koja je tipa (m, n) i takva da za njezine elemente vrijedi $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ za sve $i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n$. Bilježimo $B = \lambda A$.*

Teorem 1.3.9. *Skup matrica $M_{mn}(\mathbb{F})$ s operacijama zbrajanja matrica i množenja matrica skalarom čini vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i dimenzija mu je $m \cdot n$.*

Definicija 1.3.10.

(a) *Matrica $D = [d_{ij}]$ reda n je* ***dijagonalna*** *ako za sve $i \neq j$ vrijedi $d_{ij} = 0$.*

(b) *Matrica* $S = [s_{ij}]$ *reda* n *je* ***skalarna*** *ako je dijagonalna i ako za sve* $i, j = 1, 2, ..., n$ *vrijedi* $s_{ii} = s_{jj}$.

(c) *Matrica* $I = [\delta_{ij}]$ *reda* n *je* ***jedinična*** *ako je skalarna i ako za svaki* $i = 1, 2, ..., n$ *vrijedi* $\delta_{ii} = 1$.

(d) *Matrica* $G = [g_{ij}]$ *reda* n *je* ***gornjetrokutasta*** *ako za sve* $1 \leq j < i \leq n$ *vrijedi* $g_{ij} = 0$.

(e) *Matrica* $H = [h_{ij}]$ *reda* n *je* ***donjetrokutasta*** *ako za sve* $1 \leq i < j \leq n$ *vrijedi* $h_{ij} = 0$.

Primjer 1.3.11. *Slijede primjeri matrica iz prethodne definicije reda* 3*:*

(a) $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ *je dijagonalna matrica.*

(b) $S = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ *je skalarna matrica.*

(c) $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *je jedinična matrica.*

(d) $G = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ *je gornjetrokutasta matrica.*

(e) $H = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ *je donjetrokutasta matrica.*

Definicija 1.3.12. ***Transponirana matrica*** *matrice* $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$ *je matrica* $B = [b_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{F})$ *takva da za njezine elemente vrijedi jednakost*

$$b_{ij} = a_{ji} \text{ za sve } i = 1, 2, ..., n, \ j = 1, 2, ..., m.$$

Koristimo oznaku $B = A^t$. *Za operaciju*

$$t : M_{mn}(\mathbb{F}) \to M_{nm}(\mathbb{F})$$

koja preslikava $A \mapsto A^t$ *koristimo naziv* ***transponiranje***.

Propozicija 1.3.13. *Za matrice* $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ *i skalar* λ *iz polja* $\mathbb{F}$ *vrijede jednakosti:*

(1) $(A^t)^t = A$,

(2) $(A + B)^t = A^t + B^t$,

(3) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.

Definicija 1.3.14. *Za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ kažemo da je **simetrična** ako vrijedi jednakost*

$$A = A^t$$

*odnosno **antisimetrična** ako vrijedi jednakost*

$$A = -A^t.$$

Definicija 1.3.15. *Ako za matrice A i B vrijedi da je broj stupaca matrice A jednak broju redaka matrice B, za te matrice kažemo da su **ulančane**.*

Definicija 1.3.16. *Za ulančane matrice $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ redom tipa (m, n) i (n, p) definiramo **umnožak matrica** A i B kao matricu $C = [c_{ij}]$ koja je tipa (m, p) i za čije elemente vrijedi:*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \text{ pri čemu } i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., p.$$

*Koristimo oznaku $C = A \cdot B = AB$. Time je definirana operacija **množenje matrica***

$$\cdot : M_{mn}(\mathbb{F}) \times M_{np}(\mathbb{F}) \to M_{mp}(\mathbb{F}).$$

Propozicija 1.3.17. *Za množenje matrica vrijedi:*

(1) *općenito nije komutativno,*

(2) *$(AB)C = A(BC)$ za sve A, B i C za koje je izraz definiran,*

(3) *$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$ za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$, za sve A i B za koje je izraz definiran,*

(kvaziasocijativnost)

(4) *$A(B + C) = AB + AC$ i $(A + B)C = AC + BC$ za sve A, B i C za koje je izraz definiran*

(distributivnost prema zbrajanju matrica slijeva i zdesna).

Propozicija 1.3.18. *Jednakost*

$$(AB)^t = B^t A^t$$

vrijedi za sve A i B za koje je izraz definiran.

Definicija 1.3.19. *Za kvadratnu matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ kažemo da je* ***regularna*** *ili* ***invertibilna*** *ako postoji matrica $B \in M_n(\mathbb{F})$ takva da vrijedi*

$$AB = BA = I.$$

Tada matricu B nazivamo ***inverznom matricom*** *matrice A te koristimo oznaku $B = A^{-1}$.*
U suprotnom, matricu A nazivamo ***singularnom matricom****.*

Definicija 1.3.20. *Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$.* ***Elementarne transformacije nad matricom*** *A su:*

(1) *zamjena dvaju redaka (stupaca),*

(2) *množenje retka (stupca) skalarom različitim od nule,*

(3) *pribrajanje retku (stupcu) drugog retka (stupca) pomnoženog skalarom različitim od nule.*

Primjer 1.3.21. *Neka je dana matrica A*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 & 5 \\ -3 & 0 & 7 & 4 \\ -9 & -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Uvedimo oznake

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uočimo da je matrica F dobivena zamjenom prvog i drugog retka jedinične matrice, a matrica G zamjenom trećeg i četvrtog stupca jedinične matrice.
Promotrimo sada

$$F \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 7 & 4 \\ 6 & 1 & -2 & 5 \\ -9 & -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Uočavamo da je elementarna transformacija nad retcima, točnije zamjena prvog i drugog retka matrice A, ostvarena množenjem matrice A slijeva matricom F.
Analogno, promotrimo li

$$A \cdot G = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 4 & 7 \\ -9 & -5 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

uočavamo da je elementarna transformacija nad stupcima, točnije zamjena trećeg i četvrtog stupca matrice A, ostvarena množenjem matrice A zdesna matricom G. Možemo zaključiti da se svaka elementarna transformacija zamjene redaka ili stupaca matrice može ostvariti množenjem matrice slijeva ili zdesna odgovarajućim matricama.

Primjer 1.3.22. *Neka je dana matrica A kao u prethodnom primjeru.*
Uvedimo oznake

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uočimo da je matrica F dobivena množenjem trećeg retka jedinične matrice skalarom 2*, a matrica G množenjem drugog stupca jedinične matrice skalarom* 5*.*
Promotrimo sada

$$F \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 & 5 \\ -3 & 0 & 7 & 4 \\ -18 & -10 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Uočavamo da je elementarna transformacija množenja retka matrice skalarom različitim od nule, točnije množenje trećeg retka matrice A skalarom 2*, ostvareno množenjem matrice A slijeva matricom F.*
Analogno, promotrimo li

$$A \cdot G = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 & 5 \\ -3 & 0 & 7 & 4 \\ -9 & -25 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

uočavamo da je elementarna transformacija množenja stupca matrice skalarom različitim od nule, točnije množenje drugog stupca matrice A skalarom 5*, ostvareno množenjem matrice A zdesna matricom G.*
Možemo zaključiti da se svaka elementarna transformacija množenja redaka ili stupaca matrice skalarom različitim od nule može ostvariti množenjem matrice slijeva ili zdesna odgovarajućim matricama.

Primjer 1.3.23. *Neka je dana matrica A kao u prethodna dva primjera.*
Uvedimo oznake

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Promotrimo

$$F \cdot A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 26 & 21 \\ -3 & 0 & 7 & 4 \\ -9 & -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Uočavamo da je množenjem matrice A matricom F slijeva dobivena matrica A kojoj je prvi redak uvećan za drugi redak pomnožen s 4.
Promotrimo

$$A \cdot G = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 7 & 4 \\ -9 & -5 & -10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Uočavamo da je množenjem matrice A matricom G zdesna dobivena matrica A kojoj je treći stupac uvećan za drugi stupac pomnožen s 2.

Definicija 1.3.24. *Matricu dobivenu jednom elementarnom transformacijom nad retcima ili stupcima jedinične matrice reda n nazivamo* ***elementarna matrica*** *reda n.*

Definicija 1.3.25. *Svaka je elementarna matrica invertibilna, a inverz elementarne matrice opet je elementarna matrica.*

Propozicija 1.3.26. *Elementarne transformacije nad retcima matrice* $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ *ostvarive su množenjem matrice A slijeva pogodnim elementarnim matricama reda m, dok su elementarne transformacije nad stupcima matrice A ostvarive množenjem matrice A zdesna pogodnim elementarnim matricama reda n.*

Definicija 1.3.27. *Neka su matrice* $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$. *Kažemo da je matrica A* ***ekvivalentna*** *matrici B ako matricu B možemo dobiti primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija na matricu A. Koristimo oznaku* $A \sim B$.

Propozicija 1.3.28. *Ako su dane ekvivalentne matrice A i B tipa* (m, n), *onda postoji regularna matrica S reda m i regularna matrica T reda n takve da vrijedi jednakost* $B = SAT$.

Definicija 1.3.29. *Za matricu* $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$ *i skup stupaca matrice A* $\{S_1, S_2, ..., S_n\} \subset M_{m1}(\mathbb{F})$ *definiramo pojam* ***ranga matrice*** *A kao dimenziju linearne ljuske njenog skupa stupaca. Koristimo oznaku*

$$r(A) = \dim[\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}].$$

Napomena 1.3.30. *Ekvivalentna definicija je da je rang matrice A broj linearno nezavisnih stupaca matrice A jer je po teoremu 1.1.16 bilo koji sustav izvodnica moguće reducirati do baze.*

Teorem 1.3.31. *Ako je matrica A' dobivena primjenom elementarnih transformacija nad stupcima matrice A, onda vrijedi*

$$r(A) = r(A').$$

Teorem 1.3.32. *Broj linearno nezavisnih redaka matrice $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ jednak je broju linearno nezavisnih stupaca iste matrice.*

Korolar 1.3.33. *Za matricu $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ vrijedi jednakost*

$$r(A) = r(A^t).$$

Korolar 1.3.34. *Ako su dvije matrice A i B međusobno ekvivalentne, onda vrijedi jednakost*

$$r(A) = r(B).$$

Definicija 1.3.35. *Za $0 < r \leq \min(m, n)$, matricu $D_r \in M_{mn}(\mathbb{F})$ za koju vrijedi $[D_r]_{ii} = 1$ za svaki $i = 1, 2, ..., r$ i kojoj su svi drugi elementi nule zovemo* ***kanonska matrica ranga** r **i tipa** (m, n).*

Propozicija 1.3.36. *Matrica $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ranga r može se svesti na kanonsku matricu ranga r i tipa (m, n) primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija nad stupcima ili retcima matrice A.*

Teorem 1.3.37. *Za matricu $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ vrijedi $r(A) = r$ akko $A \sim D_r$.*

Korolar 1.3.38. *Dvije su matrice $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ekvivalentne akko su istog ranga.*

Propozicija 1.3.39. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$. Tada vrijedi*

$$r(A) = r(AA^t).$$

Propozicija 1.3.40. *Skup svih regularnih matrica iz $M_n(\mathbb{F})$ s operacijom množenja matrica je nekomutativna grupa.*

Napomena 1.3.41. *Grupu iz prethodne propozicije zovemo opća linearna grupa i označavamo je s $GL(n, \mathbb{F})$.*

Teorem 1.3.42. *Matrica reda n je regularna akko je ranga n, odnosno punog ranga.*

Korolar 1.3.43. *Svaka se regularna matrica može napisati u obliku umnoška elementarnih matrica.*

Korolar 1.3.44. *Dvije su matrice $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ekvivalentne akko postoje regularne matrice S reda m i T reda n takve da vrijedi jednakost $B = SAT$.*

Na sljedećem primjeru pokazat ćemo specifičnost koja vrijedi općenito, za svaku regularnu matricu, a to je da se one mogu svesti na jedinične matrice primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija samo po stupcima ili samo po retcima.

Primjer 1.3.45. *Transformirajmo danu matricu A primjenom elementarnih transformacija samo po retcima.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 20 \\ -3 & 8 & -54 \\ 2 & -1 & 13 \end{pmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{c} \textit{drugom retku dodamo prvi redak pomnožen s } 3 \\ \textit{trećem retku dodamo prvi redak pomnožen s } -2 \end{array} \right\}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 20 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 5 & -27 \end{pmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{c} \textit{prvom retku dodamo drugi redak pomnožen s } -3 \\ \textit{trećem retku dodamo drugi redak pomnožen s } 5 \end{array} \right\}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{c} \textit{drugi redak pomnožimo s } -1 \\ \textit{treći redak pomnožimo s } \frac{1}{3} \end{array} \right\} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{c} \textit{prvom retku dodamo treći redak pomnožen s } -2 \\ \textit{drugom retku dodamo treći redak pomnožen sa } 6 \end{array} \right\} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Na primjeru koji slijedi pokazat ćemo postupak određivanja inverza regularne matrice. Svakoj regularnoj matrici inverz se može odrediti svođenjem iste na jediničnu matricu primjenom elementarnih transformacija samo po retcima ili samo po stupcima.
Za svaku matricu $A \in GL(n, \mathbb{F})$ postoje elementarne matrice $B_1, B_2, ..., B_k$ reda n za koje vrijedi $I = B_k \cdots B_1 A$. Budući da je inverz jedinstven, vrijedi $A^{-1} = B_k \cdots B_1$ i $A^{-1} = (B_k \cdots B_1)I$. Iz toga zaključujemo da inverz matrice A možemo dobiti transformiranjem jedinične matrice I istim transformacijama koje primjenjujemo po retcima (ili stupcima) matrice A kako bismo od nje dobili jediničnu matricu. Opisano jednostavnije možemo prikazati ovako:

$$(A \vdots I) \sim \{\text{elementarne transformacije nad retcima (ili stupcima)}\} \sim (I \vdots A^{-1}).$$

Primjer 1.3.46. *Neka je matrica A kao u prethodnom primjeru. Odredimo joj inverz:*

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 20 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & -54 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 20 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -27 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -8 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -8 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-50}{3} & \frac{-19}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 23 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) = (I \mathrel{\vdots} A^{-1}).$$

Definicija 1.3.47. ***Ortogonalna matrica*** *je svaka matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ za koju vrijedi jednakost $AA^t = A^tA = I$, odnosno $A^{-1} = A^t$. Oznaku $O(n)$ koristimo za grupu svih ortogonalnih matrica reda n s obzirom na množenje matrica, a zovemo je* ***ortogonalna grupa****.*

Napomena 1.3.48. *Ortogonalne matrice čuvaju standardni skalarni produkt. Drugim riječima, ako je matrica A ortogonalna, tada vrijedi*

$$\langle Ax \,|\, Ay\rangle = \langle x \,|\, y\rangle \text{ za sve } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Neka je $A = [a_{ij}] \in O(n)$. Budući je $AA^t = I$, vrijede jednakosti

$$[AA^t]_{ij} = [I]_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{i} \quad [AA^t]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[A^t]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk},$$

iz kojih slijedi

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}.$$

Vrijedi da je suma kvadrata elemenata nekog retka (ili stupca što uočavamo ako krećemo od jednakosti $A^tA = I$) jednaka 1, a skalarni produkt dvaju različitih redaka (ili stupaca) jednak je 0.
Retke (ili stupce) matrice A možemo shvatiti kao vektore iz $\mathbb{R}^n$ pa kažemo da su oni **normirani** (duljine 1) i međusobno **okomiti** ili **ortogonalni** (zato što im je skalarni produkt jednak 0).

Primjer 1.3.49. *Primjer je ortogonalne matrice matrica:*

$$A = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Definicija 1.3.50. ***Determinantu*** *matrice A reda 2 definiramo kao*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

1.4 Linearni operatori

Definicija 1.4.1. *Za vektorske prostore V i W nad istim poljem $\mathbb{F}$ definiramo preslikavanje*

$$A : V \to W.$$

Ako za sve $a, b \in V, \alpha \in \mathbb{F}$ vrijede svojstva:

(1) $A(a + b) = A(a) + A(b)$, *(aditivnost)*

(2) $A(\alpha a) = \alpha A(a)$, *(homogenost)*

tada preslikavanje A nazivamo ***linearnim operatorom*** *ili* ***linearnim preslikavanjem****. Za skup svih linearnih operatora $V \to W$ koristimo oznaku $L(V, W)$.*

Definicija 1.4.2. *Za linearni operator $A : V \to W$ koji je bijektivan kažemo da je* ***izomorfizam vektorskih prostora*** *V i W.*

Definicija 1.4.3. *Za vektorske prostore V i W kažemo da su* ***izomorfni*** *ako postoji izomorfizam $A : V \to W$. Bilježimo $V \simeq W$.*

Teorem 1.4.4. *Vektorski prostori konačnih dimenzija definirani nad istim poljem $\mathbb{F}$ su izomorfni akko imaju jednake dimenzije.*

Korolar 1.4.5. *Svaki vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ dimenzije n izomorfan je prostoru $\mathbb{R}^n$.*

Propozicija 1.4.6. *Ako su V i W vektorski prostori konačnih dimenzija nad istim poljem $\mathbb{F}$, $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ baza za V, a $(b_1, b_2, ..., b_n)$ proizvoljan niz vektora u W, onda postoji jedinstven linearan operator $A \in L(V, W)$ tako da vrijedi*

$$A(e_i) = b_i, \text{ za } i = 1, 2, ..., n.$$

Ako je $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ baza za W, tada za vektor $A(e_j)$, pri čemu je $1 \leq j \leq n$, postoje jedinstveni skalari $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, ..., \alpha_{mj} \in \mathbb{F}$ takvi da vrijedi

$$A(e_j) = \alpha_{1j} f_1 + \alpha_{2j} f_2 + \cdots + \alpha_{mj} f_m.$$

Time smo operatoru A pridružili matricu

$$A(f, e) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matricu $A(f, e)$ zovemo **matricom linearnog operatora** A **u paru baza** (e) i (f). Preslikavanje $A \mapsto A(f, e)$ je bijekcija $L(V, W) \to M_{m,n}(\mathbb{F})$.

Poglavlje 2

Klasična QR-faktorizacija

2.1 Regularne matrice

Definicija 2.1.1. *U $n-$dimenzionalnom vektorskom prostoru V svaki skup oblika*

$$a + W = \{a + w : w \in W\},$$

gdje je a vektor iz V, a W potprostor od V dimenzije $n-1$, nazivamo ***hiperravninom****.*

Napomena 2.1.2. *U daljnjem će se tekstu pojavljivati hiperravnine koje prolaze kroz ishodište. Za hiperravnine u $n-$dimenzionalnom vektorskom prostoru V koje prolaze kroz ishodište u definiciji 2.1.1 može se uzeti da je vektor a nulvektor, drugim riječima takve su hiperravnine točno $(n-1)-$dimenzionalni potprostori od V.*

Definicija 2.1.3. *Za vektorski prostor V kažemo da je* ***direktna suma potprostora*** *$V_1, V_2, ..., V_m$ ako se svaki vektor $v \in V$ na jedinstven način može zapisati u obliku sume vektora $v_1 + v_2 + \cdots + v_m$ pri čemu su $v_i \in V_i$, za $i = 1, 2, ..., m$. Koristimo oznaku $V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \cdots \dotplus V_m$.*

Propozicija 2.1.4. *Ako su $W_1, W_2, ..., W_m$ potprostori vektorskog prostora V takvi da vrijedi $W_i \perp W_j$ za sve $i \neq j$, onda je njihova suma direktna.*

Definicija 2.1.5. *Za direktnu sumu međusobno ortogonalnih potprostora $W_1, W_2, \ldots, W_m$ koristimo naziv* ***ortogonalna*** *suma i označavamo je s $W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$.*

Definicija 2.1.6. *Za potprostor W unitarnog prostora V možemo definirati skup*

$$W^\perp = \{x \in V : x \perp w, w \in W\}.$$

Za $W^\perp$ kažemo da je ***ortogonalni komplement*** *od W u V.*

Može se pokazati da je $W^{\perp}$ potprostor prostora W te slijedi da je ortogonalna suma $W \oplus W^{\perp}$ dobro definirana.

Teorem 2.1.7. *Ako je V unitaran prostor i W njegov potprostor, onda za svaki $v \in V$ postoji jedinstveni $w \in W$ tako da je $v - w \perp W$, odnosno $V = W \oplus W^{\perp}$. Taj vektor w nazivamo* ***ortogonalna projekcija vektora** v **na potprostor** W.*

Napomena 2.1.8. *Svako polje $\mathbb{F}$ možemo shvatiti kao vektorski prostor nad samim sobom.*

Definicija 2.1.9. *Vektorski prostor linearnih operatora $L(V, \mathbb{F})$, pri čemu je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, zovemo* ***dualni prostor**, a označavamo ga s V'. Elemente prostora V' zovemo* ***linearnim funkcionalima**.*

Definicija 2.1.10. *Neka je $A \in L(V, W)$. Za svaki linearan funkcional $g \in W'$ definiramo preslikavanje $V \to \mathbb{F}$,*

$$v \mapsto g(Av), \quad v \in V,$$

čime smo dobili linearan funkcional na V, a označavamo ga s $A'g$. Zapravo je dobiveno preslikavanje $A' : W' \to V'$ takvo da vrijedi

$$(A'g)(v) = g(Av), \quad g \in W', \ v \in V.$$

Lako se pokaže da je preslikavanje linearno, odnosno da je $A' \in L(W', V')$. Operator A' zovemo ***adjungirani operator** operatora A.*

Definicija 2.1.11. *Za vektorske prostore V i W nad istim poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ definiramo* ***antilinearno preslikavanje** kao preslikavanje $\varphi : V \to W$ za koje vrijedi*

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \overline{\alpha}\varphi(x) + \overline{\beta}\varphi(y), \quad x, y \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$$

Za polje $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ svako antilinearno preslikavanje je i linearno, razlika postoji kada je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Definicija 2.1.12. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.* ***Konjugirani vektorski prostor** prostora V je vektorski prostor $\overline{V}$ koji je jednak V s obzirom na zbrajanje vektora, a u kojem je množenje skalarom definirano na sljedeći način:*

$$\lambda v = \overline{\lambda} v, \quad v \in V = \overline{V}, \lambda \in \mathbb{F}.$$

Za $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ne dobivamo novi vektorski prostor.

Propozicija 2.1.13. *Vektorski prostori V i $\overline{V}$ su izomorfni.*

Propozicija 2.1.14. *Svako antilinearno preslikavanje $\varphi : V \to W$ je linearno preslikavanje $V \to \overline{W}$. Vrijedi i obrat.*

Korolar 2.1.15. *Skup svih antilinearnih preslikavanja $V \to W$ je jednak $L(V, \overline{W})$.*

Korolar 2.1.16. *Ako je antilinearno preslikavanje $V \to W$ izomorfizam, onda je i odgovarajuće linearno preslikavanje $V \to \overline{W}$ izomorfizam.*

Definicija 2.1.17. *Za unitaran vektorski prostor V sa skalarnim produktom $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ i za svaki $w \in V$ možemo definirati preslikavanje*

$$l_w : V \to \mathbb{F}, \quad v \mapsto \langle v \,|\, w \rangle.$$

Budući da je skalarni produkt u prvom argumentu linearan, l_w je linearan funkcional na V.

Teorem 2.1.18. *Uz oznake iz prethodne definicije, preslikavanje $w \mapsto l_w$ je antilinearan izomorfizam vektorskih prostora V i V'. Posebno, za svaki $l \in V'$ postoji jedinstveni $w \in V$ takav da je $l = l_w$, odnosno da vrijedi*

$$l(v) = \langle v \,|\, w \rangle, \quad v \in V.$$

Za unitaran vektorski prostor V sa skalarnim produktom $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_V$ i unitaran vektorski prostor W sa skalarnim produktom $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_W$, za $A \in L(V, W)$ i za svaki $w \in W$ definiramo preslikavanje

$$V \to \mathbb{F}, \quad v \mapsto \langle Av \,|\, w \rangle_W,$$

koje je linearan funkcional na V. Iz teorema 2.1.18 slijedi da postoji jedan i samo jedan vektor $A^* w \in V$ tako da vrijedi

$$\langle Av \,|\, w \rangle_W = \langle v \,|\, A^* w \rangle_V, \quad v \in V.$$

Time je dobiveno preslikavanje

$$A^* : W \to V, \quad w \mapsto A^* w,$$

za koje vrijedi

$$\langle Av \,|\, w \rangle_W = \langle v \,|\, A^* w \rangle_V, \quad v \in V, w \in V. \tag{2.1}$$

Lema 2.1.19. *Linearan operator $A^* \in L(W, V)$ jedinstveno je određen s* (2.1)*, a zovemo ga* ***hermitski adjungirani operator operatora*** *A.*

Definicija 2.1.20. *Ako za linearan operator $U : V \to V$ na realnom ili kompleksnom unitarnom prostoru V konačne dimenzije vrijedi jedna od sljedećih ekvivalentnih tvrdnji:*

(i) $U^* U = U U^* = I$,

(ii) $\langle Ux \,|\, Uy \rangle = \langle x \,|\, y \rangle$ *za sve* $x, y \in V$,

(iii) $\|Ux\| = \|x\|$ *za svaki* $x \in V$,

(iv) $Ue_1, Ue_2, ..., Ue_n$ *je ortonormirana baza za* V *za svaku ortonormiranu bazu* $e_1, e_2, ..., e_n$,

(v) $Ue_1, Ue_2, ..., Ue_n$ *je ortonormirana baza za* V *za neku ortonormiranu bazu* $e_1, e_2, ..., e_n$,

nazivamo ga ***unitaran operator****. Ako je* V *realan prostor, unitaran operator često nazivamo* ***ortogonalnim operatorom****.*

Definicija 2.1.21. *Neka je* $a \neq 0$ *vektor unitarnog prostora* V*. Za proizvoljan* $x \in V$ *možemo definirati linearni operator*

$$T_a(x) = x - \frac{2\langle x \,|\, a\rangle}{\langle a \,|\, a\rangle} a.$$

Tako definiran linearni operator na potprostoru $W = \langle a\rangle^{\perp}$ *djeluje kao identiteta. Drugim riječima, za svaki* $y \in W$*, budući da je* $\langle y \,|\, a\rangle = 0$*, vrijedi*

$$T_a(y) = y.$$

Za $x = a$ *dobivamo*

$$T_a(a) = a - \frac{2\langle a \,|\, a\rangle}{\langle a \,|\, a\rangle} a = a - 2a = -a.$$

Iz teorema 2.1.7 slijedi $V = W \oplus \langle a\rangle$*. Nadalje, gornje jednakosti povlače da za* $y \in W$ *i skalar* λ *vrijedi*

$$T_a(y + \lambda a) = y - \lambda a.$$

Dakle, imamo

$$T_a^2(y + \lambda a) = T_a(y - \lambda a) = y + \lambda a,$$
$$\|T_a(y + \lambda a)\|^2 = \|y - \lambda a\|^2 = \|y\|^2 + \|\lambda a\|^2 = \|y + \lambda a\|^2,$$

to jest $T_a^2 = I$ *i* T_a *je unitaran operator. Za* T_a *koristimo naziv* ***unitarna refleksija s obzirom na hiperravninu*** $\langle a\rangle^{\perp}$.

Definicija 2.1.22. ***Blok matricom*** *nazivamo svaku matricu* (A_{ij}) *kojoj su elementi* A_{ij} *matrice sa skalarnim elementima. Svaku od matrica* A_{ij} *zovemo* ***submatricom****.*

Definicija 2.1.23. *Ako je* $(V, \langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle)$ *konačnodimenzionalan realan unitaran prostor unutar kojeg se nalaze linearno nezavisni vektori* b *i* c *takvi da vrijedi* $\|b\| = \|c\|$*, onda vrijedi*

$$\langle b - c \,|\, b + c\rangle = \|b\|^2 + \langle b \,|\, c\rangle - \langle c \,|\, b\rangle - \|c\|^2 = 0,$$

drugim riječima $b - c \perp b + c$*. Iz toga slijedi*

$$T_{b-c}(b+c) = b+c,\ T_{b-c}(b-c) = -b+c,$$

to jest

$$T_{b-c}(b) = c,\ T_{b-c}(c) = b.$$

Hausholderova refleksija *naziv je za operator T_{b-c}.*
Analogno vrijedi u kompleksnom vektorskom prostoru ukoliko vrijedi $\langle b\,|\,c\rangle = \langle c\,|\,b\rangle$, odnosno ako je skalarni produkt vektora b i c realan.

Teorem 2.1.24. *Ako je matrica A reda n realna regularna matrica, onda postoje ortogonalna matrica $Q \in M_n(\mathbb{R})$ i gornjetrokutasta matrica $R \in M_n(\mathbb{R})$ takve da vrijedi*

$$A = QR.$$

Dokaz. Zapišimo matricu A u obliku blok matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \text{ pri čemu je } b = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \alpha_{12} \in \mathbb{R}^{n-1},\ A_{22} \in M_{n-1,n-1}(\mathbb{R}).$$

Ako je α_{21} različit od 0, tada postoji Hausholderova refleksija T_1 na $\mathbb{R}^n$ tako da vrijedi

$$T_1 b = \|b\|\, e_1,$$

iz čega slijedi

$$T_1 A = T_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|b\| & \alpha'_{12} \\ 0 & A'_{22} \end{pmatrix}$$

za neke $\alpha'_{12} \in \mathbb{R}^{n-1}$ i $A'_{22} \in M_{n-1,n-1}(\mathbb{R})$, pri čemu je matrica A'_{22} regularna.
Označimo s b' prvi vektor-stupac matrice A'_{22} reda $n-1$. Ako b' nije proporcionalan vektoru e'_1 kanonske baze od $\mathbb{R}^{n-1}$, tada postoji Hausholderova refleksija T'_2 na $\mathbb{R}^{n-1}$ tako da vrijedi

$$T'_2 b' = \|b'\|\, e'_1,$$

iz čega slijedi

$$T_2 T_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|b\| & \alpha'_{12} \\ 0 & A'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|b\| & \alpha'_{12} \\ 0 & T'_2 A'_{22} \end{pmatrix}, \text{ pri čemu je } T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T'_2 \end{pmatrix}$$

te je prvi stupac matrice $T'_2 A'_{22}$ vektor $\|b'\| e'_1$. Postupak možemo nastaviti i na taj način dobili bismo niz ortogonalnih matrica $T_1, T_2, ..., T_{n-1}$ reda n tako da je matrica

$$R = T_{n-1} \ldots T_2 T_1 A$$

gornjetrokutasta, a matrica

$$Q = (T_{n-1} \ldots T_2 T_1)^{-1}$$

ortogonalna. Kako je očito $QR = A$, ovo dokazuje tvrdnju teorema. □

Poglavlje 3

Centrosimetrična QR-faktorizacija

3.1 Perplektičke matrice

U prvom smo poglavlju definirali standardni skalarni produkt i označavali smo ga $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, a sada ćemo definirati indefinitni skalarni produkt kojeg ćemo označavati s $[\cdot, \cdot]$.

Definicija 3.1.1. *Neka je $m \in \mathbb{N}$. Ako za funkciju $[\cdot, \cdot] : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ vrijede sljedeća svojstva:*

(i) $[\alpha x_1 + \beta x_2, y] = \alpha [x_1, y] + \beta [x_2, y]$ *za sve* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, x_1, x_2, y \in \mathbb{C}^m$,
(linearnost u prvom argumentu)

(ii) $[x, y] = \overline{[y, x]}$ *za sve* $x, y \in \mathbb{C}^m$, *(hermitičnost)*

(iii) $[x, y] = 0$ *za svaki* $y \in \mathbb{C}^m \implies x = 0$, *(nedegeneriranost)*

(iv) funkcija $[\cdot, \cdot]$ *nije pozitivno definitna, tj. ne zadovoljava svojstvo (1) iz definicije 1.2.1,*

onda je nazivamo ***indefinitni skalarni produkt****.*

Napomena 3.1.2. *Ako u definiciji 3.1.1 zamijenimo $\mathbb{C}$ sa $\mathbb{R}$, dobit ćemo definiciju indefinitnog skalarnog produkta na prostoru $\mathbb{R}^m$. U tom je slučaju svojstvo (ii) jednostavnije:*

(ii') $[x, y] = [y, x]$ *za sve* $x, y \in \mathbb{R}^m$. *(simetričnost)*

U daljnjem tekstu opisat ćemo posebnu $QR-$faktorizaciju. Ta faktorizacija proizlazi iz posebnog indefinitnog skalarnog produkta koji se naziva perplektički skalarni produkt. Da bismo definirali perplektički skalarni produkt, svakom vektoru pridružujemo njegov reverz.

Definicija 3.1.3. *Svakom vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ možemo pridružiti njegov* ***reverz****:*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Oznaka za reverz od x je x^R.

Definicija 3.1.4. *Za jediničnu matricu I_n reda n definiramo* ***reverz*** *R_n* ***jedinične matrice*** *reda n na sljedeći način:*

$$R_n := \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$

Lako je provjeriti da za svaki prirodan broj n vrijedi $R_n^2 = I_n$. Upravo iz tog razloga R_n se u literaturi naziva i **matricom zamjene**.
Reverz vektora $x \in \mathbb{R}^n$ sada se može definirati i formulom $x^R := R_n x$.

Definicija 3.1.5. *Za svaka dva vektora $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiramo njihov* ***perplektički (skalarni) produkt*** *sa*

$$[x, y]_{R_n} = \langle x, R_n y \rangle,$$

gdje je $\langle \cdot | \cdot \rangle$ standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$. Često umjesto $[x, y]_{R_n}$ koristimo oznaku $[x, y]$.

Definicija 3.1.6. *Definiramo* ***kvadratnu normu*** *$q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ formulom*

$$q(x) := [x, x].$$

Napomena 3.1.7. *Primjetimo da q nije "prava" norma jer ne zadovoljava svojstvo $q(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$, kao što pokazuje sljedeći primjer.*

Primjer 3.1.8. *Neka je $x \in \mathbb{R}^2$ zadan s*

$$x = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Tada je njegov reverz

$$x^R = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Računajući njegovu kvadratnu normu dobivamo

$$q(x) = [x, x] = \langle x, R_n x\rangle = -5 \cdot 4 + 4 \cdot (-5) = -40 < 0.$$

Propozicija 3.1.9. *Za svaki vektor $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$q(x)^2 \leq \|x\|_2^4.$$

Dokaz. Uočimo da za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $\left\|x^R\right\|_2 = \|x\|_2$. Korištenjem propozicije 1.2.7 slijedi da za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$q(x)^2 = \langle x, x^R\rangle^2 \leq \|x\|_2^2 \left\|x^R\right\|_2^2 = \|x\|_2^4.$$

□

Definicija 3.1.10. *Matrica Q reda n je R_n–**ortogonalna** ili **perplektička** ako vrijedi*

$$Q^t R_n Q = R_n. \tag{3.1}$$

Definicija 3.1.11. *Za grupu realnih matrica reda n koje čuvaju perplektički produkt koristimo oznaku $P(n)$. Simbolima tu grupu definiramo na sljedeći način:*

$$P(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) : [Ax, Ay] = [x, y], \forall x, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

*Grupu $P(n)$ zovemo **realna perplektička grupa**.*

Lema 3.1.12. *Neka je Q realna matrica reda n. Tada je $Q \in P(n)$ ako i samo ako je Q perplektička matrica.*

U tekstu koji slijedi vektore iz $\mathbb{R}^n$ identificirat ćemo s vektorima-stupcima. Za potrebe dokaza leme 3.1.12 koristit ćemo sljedeće leme koje se lako dokažu direktnim računom:

Lema 3.1.13. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ i $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^n$. Tada za svaki $a_{i,j}$, pri čemu su $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, vrijedi*

$$a_{i,j} = e_i^t A e_j.$$

Lema 3.1.14. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$. Tada vrijedi*

$$\langle x \,|\, y\rangle = x^t y,$$

pri čemu je $\langle \cdot \,|\, \cdot\rangle$ standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. Dokažimo sada lemu 3.1.12. Pretpostavimo li da je $Q \in P(n)$, onda za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$[Qx, Qy] = [x, y],$$

odnosno

$$\langle Qx \,|\, R_n Qy \rangle = \langle x \,|\, R_n y \rangle.$$

Po lemi 3.1.14 slijedi

$$(Qx)^t R_n Qy = x^t R_n y,$$

a po propoziciji 1.3.18 dobivamo

$$x^t Q^t R_n Qy = x^t R_n y.$$

Posebno, uvrstimo li $x = e_i$ i $y = e_j$ za $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ u zadnju jednakost, primjenom leme 3.1.13 dobivamo

$$(Q^t R_n Q)_{i,j} = (R_n)_{i,j}, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

odnosno

$$Q^t R_n Q = R_n$$

pa je po definiciji 3.1.10 matrica Q perplektička.
Dokažimo i obrat. Neka je Q perplektička matrica. Za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$[Qx, Qy] = \langle Qx \,|\, R_n Qy \rangle = (Qx)^t R_n Qy = x^t Q^t R_n Qy = x^t R_n y = \langle x \,|\, R_n y \rangle = [x, y],$$

pri čemu druga jednakost slijedi po lemi 3.1.14, treća po propoziciji 1.3.18, četvrta jer je Q perplektička matrica, tj. $Q^t R_n Q = R_n$ i peta po lemi 3.1.14. Iz dobivenog zaključujemo da je $Q \in P(n)$. □

Definicija 3.1.15. *Za svaki prirodan broj n, grupa perplektičkih ortogonalnih matrica reda n*

$$\mathrm{PO}(n) := \mathrm{P}(n) \cap \mathrm{O}(n)$$

zove se ***perplektička ortogonalna grupa*** *reda n.*

Glavni problem kojemu u daljnjem tekstu posvećujemo pažnju jest pitanje možemo li konstruirati varijantu QR−faktorizacije dane realne matrice A u kojoj je Q perplektička ortogonalna matrica. Glavna poteškoća u rješavanju tog problema je pronalazak ispravnog oblika matrice R. Ukoliko proučavamo posebne tipove matrice A, možemo pronaći djelomično rješenje. Točnije, problem možemo riješiti za matrice koje su invarijantne na istovremeno "reverziranje", tj. pisanje unatrag, svojih redaka i stupaca, a zovemo ih *centrosimetrične matrice*; stoga ćemo ih u nastavku pobliže opisati.

3.2 Centrosimetrične matrice

Definicija 3.2.1. *Realna matrica A reda* (n, k) *je* ***centrosimetrična*** *ako i samo ako vrijedi*

$$A = R_n A R_k. \tag{3.2}$$

Napomena 3.2.2. *Množenjem jednakosti* (3.2) *zdesna matricom* R_k *dobivamo ekvivalentnu jednakost* $AR_k = R_n A$. *Prema tome, realna matrica A reda* (n, k) *je centrosimetrična ako i samo ako vrijedi*

$$AR_k = R_n A.$$

Propozicija 3.2.3. *Ako je H realna matrica reda n, onda su svojstva*

$$H^t R_n H = R_n, \quad H^t H = HH^t = I_n, \quad R_n H = HR_n \tag{3.3}$$

takva da bilo koja dva od tih svojstava povlače treće svojstvo. Posebno je svaka perplektička ortogonalna matrica centrosimetrična.

Dokaz. Pretpostavimo li da je H perplektička ortogonalna matrica, vrijedi $H^t R_n H = R_n$ i $H^t H = HH^t = I_n$. Slijedi da je $HR_n = HH^t R_n H = R_n H$ što znači da je H centrosimetrična matrica.
Ako je H ortogonalna i centrosimetrična matrica, imamo $H^t H = HH^t = I_n$ i $R_n H = HR_n$ iz čega slijedi $H^t R_n H = H^t H R_n = R_n$.
Pretpostavimo li da je H perplektička i centrosimetrična matrica, vrijedi $H^t R_n H = R_n$ i $R_n H = HR_n$. Budući je $R_n^2 = I_n$, slijedi $H^t H = H^t R_n R_n H = H^t R_n H R_n = R_n^2 = I_n$, dakle $H^t = H^{-1}$, tj. H je ortogonalna matrica.
Iz toga zaključujemo da bilo koje dvije jednakosti iz (3.3) povlače treću. □

Napomena 3.2.4. *Ako je A matrica reda* (m, n)*, tada ćemo za svaki* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *s* a_j *u daljnjem tekstu označavati* $j-$*ti stupac matrice A.*

Propozicija 3.2.5. *Realna matrica A reda* (n, k) *je centrosimetrična ako i samo ako za svaki* $i = 1, 2, ..., k$ *vrijedi* $a_i = a^R_{k-i+1}$.

Dokaz. Pretpostavimo li da je matrica A centrosimetrična, onda iz jednakosti (3.2) slijedi $a_i = a^R_{k-i+1}$ za svaki $i = 1, 2, ..., k$ jer se množenjem matrice A s R_k zdesna okreće poredak stupaca matrice A, a množenjem matrice AR_k s R_n slijeva okreće poredak redaka matrice AR_k.
Pokažimo i drugi smjer. Neka je $a_i = a^R_{k-i+1}$ za svaki $i = 1, 2, ..., k$. Tada vrijedi $A = R_n A R_k$ pa je A centrosimetrična. □

Propozicija 3.2.6. *Ako je matrica A reda* (m, n) *centrosimetrična, onda je dvostupčana submatrica od A definirana kao*

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{k,k} & a_{k,n-k+1} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m-k+1,k} & a_{m-k+1,n-k+1} \end{pmatrix}$$

centrosimetrična za svaki $k = 1, ..., \lceil \frac{\min\{m,n\}}{2} \rceil$.

Dokaz. Uočimo najprije da, da bi submatrica A_k bila dobro definirana, mora vrijediti $k \leq n - k + 1$ i $k \leq m - k + 1$. S obzirom da je matrica A centrosimetrična, po propoziciji 3.2.5 za svaki $k = 1, 2, ..., n$ vrijedi $a_k = a^R_{n-k+1}$. Istaknimo da je to istinito za sve $k \leq n$ za koje je A_k dobro definirana. Ukoliko je A_k dobro definirana, vrijedi $2k - 1 \leq \min\{m, n\}$, što je ekvivalentno s $k \leq \frac{\min\{m,n\}+1}{2}$. Označimo sa d najveći takav k. Tada vrijedi $d = \lfloor \frac{\min\{m,n\}+1}{2} \rfloor = \lceil \frac{\min\{m,n\}}{2} \rceil$. Provjerimo sada da za sve $k = 1, 2, ..., d$ vrijedi jednakost (3.2) za A_k. Imamo:

$$R_{m-2k+2} A_k R_2 = \begin{pmatrix} a_{m-k+1,n-k+1} & a_{m-k+1,k} \\ \vdots & \vdots \\ a_{k,n-k+1} & a_{k,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k,k} & a_{k,n-k+1} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m-k+1,k} & a_{m-k+1,n-k+1} \end{pmatrix} = A_k$$

iz čega slijedi tvrdnja propozicije. □

Definicija 3.2.7. *Za realnu matricu A reda n neka je X realna matrica koja zadovoljava uvjete:*

(1) $AXA = A$,

(2) $XAX = X$,

(3) $(AX)^t = AX$,

(4) $(XA)^t = XA$.

Matricu X nazivamo ***Moore-Penroseov generalizirani inverz*** *matrice A ili* ***Moore-Penroseov pseudoinverz*** *matrice A. Može se pokazati da Moore-Penroseov generalizirani inverz od A uvijek postoji i da je on jedinstven, a oznaka koju za njega koristimo je* A^+.

Propozicija 3.2.8. *Neka su* X, Y *i* Z *realne matrice reda n za koje vrijedi* $Z = XY$. *Ako je* $X \in O(n)$ *ili* $Y \in O(n)$, *tada je* $Z^+ = Y^+ X^+$.

Dokaz. Neka je $W = Y^+ X^+$. Analizirajmo slučajeve:
Slučaj 1. Primijetimo da je $X^+ = X^{-1} = X^t$. Potrebno je provjeriti Moore-Penroseove uvjete za W.

1. $ZWZ = XYY^+X^tXY = XYY^+Y = XY = Z$.

2. $WZW = Y^+X^tXYY^+X^+ = Y^+YY^+X^t = Y^+X^t = W$.

3. $(ZW)^t = W^tZ^t = (Y^+X^+)^t(XY)^t = (X^+)^t(Y^+)^tY^tX^t = X(Y^+)^tY^tX^t = X(YY^+)^tX^t = XYY^+X^t = ZW$.

4. $(WZ)^t = Y^tX^tW^t = Y^tX^tX(Y^+)^t = Y^t(Y^+)^t = (Y^+Y)^t = Y^+Y = Y^+X^tXY = WZ$.

Stoga zaključujemo da je $W = Z^+$.
Slučaj 2. Primijetimo da je $Y^+ = Y^{-1} = Y^t$. Ponovno provjerimo Moore-Penroseove uvjete za W.

1. $ZWZ = XYY^+X^+XY = XX^+XY = XY = Z$.

2. $WZW = Y^+X^+XYY^+X^+ = Y^+X^+XX^+ = Y^+X^+ = W$.

3. $(ZW)^t = W^tZ^t = (X^+)^tYY^tX^t = (X^+)^tX^t = (XX^+)^t = XX^+ = XYY^tX^+ = ZW$.

4. $(WZ)^t = Z^tW^t = Y^tX^t(X^+)^tY = Y^t(X^+X)^tY = Y^tX^+XY = WZ$.

Iz toga zaključujemo da je $W = Z^+$. □

Propozicija 3.2.9. *Za realnu matricu A reda n vrijedi* $(A^t)^+ = (A^+)^t$.

Dokaz. Potrebno je za $(A^+)^t$ provjeriti Moore-Penroseove uvjete. Koristeći propoziciju 1.3.18 i Moore-Penroseove uvjete za matricu A^+, računamo:

1. $A^t(A^+)^tA^t = (A^+A)^tA^t = (AA^+A)^t = A^t$,

2. $(A^+)^tA^t(A^+)^t = (AA^+)^t(A^+)^t = (A^+AA^+)^t = (A^+)^t$,

3. $(A^t(A^+)^t)^t = ((A^+A)^t)^t = (A^+A)^t = A^t(A^+)^t$,

4. $((A^+)^tA^t)^t = ((AA^+)^t)^t = (AA^+)^t = (A^+)^tA^t$,

iz čega slijedi tvrdnja. □

Propozicija 3.2.10. *Neka je A centrosimetrična matrica reda* (n, m) *i B centrosimetrična matrica reda* (m, k). *Tada je matrica AB centrosimetrična.*

Dokaz. Računom dobivamo $R_nABR_k = R_nR_nAR_mBR_k = AB$ iz čega slijedi da je matrica AB centrosimetrična. □

Propozicija 3.2.11. *Neka su A i B centrosimetrične matrice reda n. Tada su i matrice $A + B$, AB, αA (za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$), A^t, A^{-1} (kada postoji) i A^+ centrosimetrične.*

Dokaz. Dokažimo tvrdnju najprije za $A + B$. Vrijedi

$$R_n(A + B) = R_nA + R_nB = AR_n + BR_n = (A + B)R_n,$$

iz čega slijedi da je $A + B$ centrosimetrična matrica.
Tvrdnja za AB slijedi direktno iz propozicije 3.2.10.
Za $\alpha \in \mathbb{R}$ imamo

$$R_n\alpha A = \alpha R_nA = \alpha AR_n,$$

što povlači da je αA centrosimetrična.
Dokažimo tvrdnju za A^t. Vrijedi

$$R_nA^t = R_n^tA^t = (AR_n)^t = (R_nA)^t = A^tR_n$$

pa zaključujemo da je A^t centrosimetrična.
Ako je A regularna matrica, vrijedi

$$R_nA^{-1} = R_n^{-1}A^{-1} = (AR_n)^{-1} = (R_nA)^{-1} = A^{-1}R_n,$$

stoga je A^{-1} centrosimetrična matrica.
Budući je $R_n^t = R_n$ i $R_n^tR_n = R_nR_n^t = R_n^2 = I_n$, iz propozicije 3.2.8 slijedi $(R_nA)^+ = A^+R_n$ i $(AR_n)^+ = R_nA^+$. Dakle, vrijedi

$$A^+R_n = (R_nA)^+ = (AR_n)^+ = R_nA^+,$$

odnosno matrica A^+ je centrosimetrična. □

Propozicija 3.2.12. *Ako je V centrosimetrična matrica reda (n, k), onda je i matrica V^tR_nV centrosimetrična.*

Dokaz. S obzirom da je V centrosimetrična matrica, vrijedi $R_nVR_k = V$. Vrijedi i jednakost $V^t = R_kV^tR_n$. Iz čega slijedi

$$R_kV^tR_nVR_k = V^tVR_k = V^tR_nV$$

pa zaključujemo da je V^tR_nV centrosimetrična matrica. □

Ideja koju ćemo koristiti u daljnjem tekstu u kojemu ćemo prezentirati algoritam pomoću kojeg se može provesti $QR-$faktorizacija centrosimetrične matrice, počiva na ideji reduciranja zadane centrosimetrične matrice A.
Prije svega potrebno je utvrditi da gornjetrokutasta matrica nije pogodna forma za matricu R. Kako bismo se u to uvjerili, pretpostavimo da je A centrosimetrična kvadratna matrica te da su matrice Q i R dobivene standardnom $QR-$faktorizacijom matrice A.
Pretpostavimo li sada da smo dobili matricu Q koja je perplektička ortogonalna i matricu R koja je centrosimetrična, iz činjenice da je matrica R gornjetrokutasta i centrosimetrična izveo bi se zaključak da matrica R mora biti dijagonalna.
Na taj bi način došli do zaključka da je svaka centrosimetrična matrica produkt perplektičke ortogonalne matrice i dijagonalne matrice, međutim taj zaključak nije ispravan, a opovrgnut ćemo ga sljedećim kontraprimjerom.

Primjer 3.2.13. *Neka je A matrica*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Budući su po propoziciji 3.2.3 perplektičke ortogonalne matrice centrosimetrične, lako slijedi da su jedine 2×2 *perplektičke ortogonalne realne matrice:*

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

odnosno

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pretpostavimo li da je svaka od tih matrica pomnožena zdesna nekom dijagonalnom matricom $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$*, pri čemu su* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, dobit ćemo matrice* $\pm \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ *te* $\pm \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.
Očito ne možemo izabrati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tako da matrica A bude jednaka nekoj od ovih matrica, stoga ona ne može biti produkt perplektičke ortogonalne i dijagonalne matrice.*

S obzirom da želimo da matrica R bude centrosimetrična, moramo odbaciti pretpostavku da je matrica R gornjetrokutasta.
U nastavku ćemo dokazati da je za $QR-$faktorizaciju centrosimetrične matrice A jedan pogodni ciljani oblik matrice R tzv. *duplostožasta matrica* koju ćemo množiti slijeva odgovarajućom matricom $Q \in \mathrm{PO}(n)$. Definirajmo zato sada pojam duplostožaste matrice.

Definicija 3.2.14. *Za matricu A reda* (m, n) *kažemo da je* ***duplostožasta matrica*** *ako i samo ako je dvostupčana matrica*

$$\begin{pmatrix} a_{k+1,k} & a_{k+1,n-k+1} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m-k,k} & a_{m-k,n-k+1} \end{pmatrix}$$

za svaki $k = 1, 2, ..., \lceil \frac{\min\{m,n\}}{2} \rceil$ *nulmatrica.*

Za konstrukciju matrice Q u najavljenom algoritmu potrebni su nam blok perplektički reflektori, stoga ih u nastavku pobliže opišimo.

Definicija 3.2.15. *Neka je J realna regularna matrica reda n.* ***Skalarni produkt pridružen matrici*** *J definiramo kao (moguće indefinitni) skalarni produkt na prostoru $\mathbb{R}^n$ dan formulom $[x, y]_J = x^t Jy$ za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$. Takav skalarni produkt nazivamo* ***(realni) ortosimetrični skalarni produkt*** *ako vrijedi $J^t = \tau J$ za neki $\tau \in \mathbb{R}, |\tau| = 1$.*

Napomena 3.2.16. *Primijetimo da je indefinitni skalarni produkt $[\cdot, \cdot]_{R_n}$ ortosimetričan jer vrijedi $R_n^t = R_n$.*

Definicija 3.2.17. *Neka je J matrica ortosimetričnog skalarnog produkta. Realna matrica H reda n zove se $J-$**reflektor** ako vrijedi*

$$H^t JH = J, \quad JH = H^t J, \quad H^2 = I. \tag{3.4}$$

Propozicija 3.2.18. *Neka je J realna regularna matrica reda n. Bilo koje dvije jednakosti iz* (3.4) *povlače treću.*

Dokaz. Pretpostavimo najprije da vrijedi $H^t JH = J$ i $JH = H^t J$, tada je

$$J = H^t JH = JH^2.$$

S obzirom da je J regularna matrica, slijedi da je $H^2 = I$.
Pretpostavimo sada da vrijedi $H^t JH = J$ i $H^2 = I$. Budući je H regularna matrica i da vrijedi $H^{-1} = H$, slijedi

$$J = H^t JH = H^t JH^{-1}.$$

Množenje s H zdesna povlači da je $JH = H^t J$.
Napokon, pretpostavimo li da vrijede jednakosti $JH = H^t J$ i $H^2 = I$, zbog $H^{-1} = H$ dobivamo

$$H^t J = JH = JH^{-1}.$$

Množenje s H zdesna povlači da je $H^t JH = J$.

□

Definicija 3.2.19. *Neka je J matrica ortosimetričnog skalarnog produkta. Kažemo da realne kvadratne matrice X i Y zadovoljavaju:*

(i) svojstvo $J-$izometrije ako vrijedi

$$X^tJX = Y^tJY, \tag{3.5}$$

(ii) svojstvo $J-$simetrije ako vrijedi

$$Y^tJX = X^tJY. \tag{3.6}$$

Definicija 3.2.20. *Neka je J regularna matrica reda n ortosimetričnog skalarnog produkta, a V proizvoljna realna matrica reda (n, k). Tada matricu H reda n definiranu jednadžbom*

$$H = H(V) = I - 2V(V^tJV)^+V^tJ \tag{3.7}$$

*nazivamo **blok $J-$ reflektor** (generiran s V).*

Propozicija 3.2.21. *Neka je H blok $J-$reflektor. Tada vrijedi*

$$H^tJH = J, \quad JH = H^tJ, \quad H^2 = I.$$

Drugim riječima, H je $J-$reflektor.

Dokaz. Po pretpostavci je skalarni produkt matrice J ortosimetričan, tj. vrijedi $J^t = \tau J$ za neki $\tau \in \mathbb{R}, |\tau| = 1$. Iz (3.7) po propozicijama 1.3.18 i 3.2.9 slijedi

$$\begin{aligned} H^t = I - 2J^tV(V^tJ^tV)^+V^t = I - 2\tau JV(V^t(\tau J)V)^+V^t &= I - 2\tau JV(\tau^{-1}(V^tJV)^+)V^t \\ &= I - 2JV(V^tJV)^+V^t. \end{aligned}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} H^tJH &= (I - 2JV(V^tJV)^+V^t)J(I - 2V(V^tJV)^+V^tJ) \\ &= J - 2JV(V^tJV)^+V^tJ - 2JV(V^tJV)^+V^tJ + 4JV(V^tJV)^+V^tJV(V^tJV)^+V^tJ. \end{aligned}$$

Primjenom pravila poništavanja $A^+AA^+ = A^+$ (vidi definiciju 3.2.7 (2)) za $A = V^tJV$ dobivamo

$$H^tJH = J - 4JV(V^tJV)^+V^tJ + 4JV(V^tJV)^+V^tJ = J,$$

čime je dokazana jednakost $H^tJH = J$. Uočimo

$$J^{-1}H^tJ = J^{-1}(I - 2JV(V^tJV)^+V^t)J = I - 2V(V^tJV)^+V^tJ = H.$$

Iz dobivenog slijedi jednakost $JH = H^tJ$. Prema propoziciji 3.2.18 zaključujemo da iz dokazane dvije jednakosti slijedi i $H^2 = I$. □

Sljedeći ćemo teorem iskazati za poseban slučaj, kada je $J = R_n$. On daje dovoljne uvjete na matrice $X, Y \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ za postojanje matrice H oblika (3.7) koja zadovoljava $HX = Y$. Dovoljni uvjeti za postojanje takve matrice H su za $J = R_n$ dani jednadžbama (3.5) i (3.6).

Teorem 3.2.22. *Neka su X i Y realne matrice reda (n, k) takve da zadovoljavaju uvjete* (3.5) *i* (3.6) *za $J = R_n$ te neka je $V = Y - X$. Vrijedit će da je $H(V)X = Y$ ako i samo ako vrijedi*

$$r(V^t R_n V) = r(V). \tag{3.8}$$

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [6] (*dokaz Teorema 4.3*) i vrijedi za svaku ortosimetričnu matricu J, uključujući i $J = R_n$. □

Korolar 3.2.23. *Neka su X i Y centrosimetrične matrice reda (n, k) takve da zadovoljavaju uvjete* (3.5) *i* (3.6) *za $J = R_n$ te neka je $V = Y - X$. Tada je $H(V)X = Y$.*

Dokaz. Ako su matrice X i Y centrosimetrične, onda je i matrica V centrosimetrična, odnosno vrijedi $R_n V = V R_k$. Mi trebamo dokazati da V zadovoljava uvjet (3.8), koji je po upravo rečenom ekvivalentan jednakosti $r(V^t V R_k) = r(V)$.
Množenje $V^t V$ s R_k zdesna permutira stupce od $V^t V$, ali ne utječe na rang, stoga vrijedi $r(V^t V R_k) = r(V^t V)$. Po propoziciji 1.3.39 je $r(V^t V) = r(V)$. Teorem 3.2.22 povlači $H(V)X = Y$. □

Iz korolara 3.2.23 očito je da matrica $H(V)$ definirana s (3.7) za $J = R_n$ i $V = X - Y$ pridružuje matrici X matricu Y. Preostaje još pokazati da je $H(V)$ perplektička ortogonalna matrica za što će poslužiti sljedeće tri propozicije.

Propozicija 3.2.24. *Neka je V centrosimetrična matrica reda (n, k). Ako je $H(V)$ definirana s* (3.7) *za $J = R_n$, onda je $H(V)$ centrosimetrična matrica.*

Dokaz. Iz propozicija 3.2.11 i 3.2.12 slijedi da su i matrice $(V^t R_n V)^+$ i V^t centrosimetrične pa imamo

$$\begin{aligned} R_n H(V) &= R_n - 2R_n V(V^t R_n V)^+ V^t R_n = R_n - 2V R_k (V^t R_n V)^+ V^t R_n \\ &= R_n - 2V(V^t R_n V)^+ R_k V^t R_n = R_n - 2V(V^t R_n V)^+ V^t R_n R_n \\ &= (I_n - 2V(V^t R_n V)^+ V^t R_n) R_n = H(V) R_n \end{aligned}$$

iz čega zaključujemo da je $H(V)$ centrosimetrična matrica. □

Propozicija 3.2.25. *Ako je V centrosimetrična matrica reda (n, k) i ako je $H(V)$ definirana s* (3.7) *za $J = R_n$, onda je $H(V)$ perplektička ortogonalna matrica, tj. $H(V) \in \mathrm{PO}(n)$.*

Dokaz. Prema propoziciji 3.2.24 matrica $H(V)$ je centrosimetrična. Potrebno je dokazati da je ona ortogonalna. Budući po propoziciji 3.2.21 vrijedi da je $H(V)^2 = I_n$, dovoljno je pokazati da je $H(V)$ realna simetrična matrica, odnosno da vrijedi $H(V)^t = H(V)$. S obzirom da je V centrosimetrična matrica, propozicije 1.3.18, 3.2.9 i 3.2.12 povlače da vrijedi:

$$\begin{aligned}
H(V)^t &= (I_n - 2V(V^tR_nV)^+V^tR_n)^t = I_n - 2R_nV((V^tR_nV)^+)^tV^t \\
&= I_n - 2R_nV(V^tR_nV)^+V^t = I_n - 2VR_k(V^tR_nV)^+V^t \\
&= I_n - 2V(V^tR_nV)^+R_kV^t = I_n - 2V(V^tR_nV)^+V^tR_n = H(V),
\end{aligned}$$

stoga je $H(V)$ simetrična. Budući je $H(V)^tH(V) = H(V)H(V)^t = H(V)^2 = I_n$ slijedi da je $H(V)$ i ortogonalna matrica. Propozicija 3.2.3 povlači da je $H(V)$ perplektička matrica. □

Prije prelaska na samu centrosimetričnu QR−faktorizaciju pojasnimo još pojam *ulaganja* koji ćemo koristiti u pojašnjavanju provođenja te faktorizacije te pokažimo propozicijom da ono čuva svojstvo perplektičke ortogonalnosti.

Definicija 3.2.26. *Za prirodne brojeve m i n takve da je $m \leq n$ i da je $n - m$ paran broj,* ***ulaganje*** *matrice A reda m u I_n je matrica*

$$E_n(A) = \begin{pmatrix} I_k & & \\ & A & \\ & & I_k \end{pmatrix}$$

pri čemu je $k = \frac{n-m}{2}$.

Propozicija 3.2.27. *Neka su m i n prirodni brojevi takvi da vrijedi $m \leq n$ i da je $n - m$ paran broj. Ako je matrica A reda m iz* $\mathrm{PO}(m)$*, onda je i $E_n(A) \in \mathrm{PO}(n)$.*

Dokaz. Neka je matrica $A \in \mathrm{PO}(m)$. Pokažimo da je $E_n(A)$ perplektička matrica provjerom uvjeta (3.1). Imamo

$$E_n^t(A)R_nE_n(A) = \begin{pmatrix} & & I_kR_kI_k \\ & A^tR_mA & \\ I_kR_kI_k & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & R_k \\ & R_m & \\ R_k & & \end{pmatrix} = R_n$$

pa slijedi da je matrica $E_n(A)$ perplektička matrica. Kako bismo dokazali da je matrica $E_n(A)$ ortogonalna, računamo

$$E_n^t(A)E_n(A) = \begin{pmatrix} I_k & & \\ & A^tA & \\ & & I_k \end{pmatrix}$$

i

$$E_n(A)E_n^t(A) = \begin{pmatrix} I_k & & \\ & AA^t & \\ & & I_k \end{pmatrix}.$$

Budući je matrica A ortogonalna, vrijedi $A^tA = AA^t = I_m$, iz čega slijedi $E_n^t(A)E_n(A) = E_n(A)E_n^t(A) = I_n$, što znači da je $E_n(A)$ ortogonalna matrica. Zaključujemo da je $E_n(A) \in \mathrm{PO}(n)$. □

3.3 Centrosimetrična QR-faktorizacija

Već smo najavili potrebu za restrikcijom prilikom provođenja $QR-$faktorizacije na centrosimetrične matrice. Istaknimo da se time naš početni problem modificirao u sljedeći:
Ako je dana centrosimetrična realna matrica A, možemo li konstruirati QR−faktorizaciju matrice A s centrosimetričnim matricama Q i R?
U daljnjem ćemo tekstu prezentirati cjelovito rješenje za taj problem.
Objasnimo najprije osnovni korak faktorizacije.
Neka su $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ te neka su

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_n \\ x_2 & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_2 \\ x_n & x_1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad V := Y - X, \tag{3.9}$$

gdje je parametre α_1 i α_2 još potrebno odrediti. U daljnjem tekstu koristit ćemo sljedeću, kraću notaciju:

$$X := \begin{bmatrix} x & x^R \end{bmatrix}, \quad Y := \begin{bmatrix} \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_n & \alpha_2 e_1 + \alpha_1 e_n \end{bmatrix}, \quad V := \begin{bmatrix} v & v^R \end{bmatrix}.$$

Kako bismo odredili parametre α_1 i α_2, koristimo nužne uvjete (3.5) i (3.6) za $J = R_n$ te dobivamo jednadžbe

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \|x\|_2^2 \\ 2\alpha_1\alpha_2 = q(x). \end{cases} \tag{3.10}$$

Ako je $x = 0$, tada je jedino realno rješenje sustava jednadžbi (3.10) dano sa $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
Ako je pak $x \neq 0$, tada je jedno rješenje sustava jednadžbi (3.10)

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\|x\|_2^2 + \sqrt{\|x\|_2^4 - q(x)^2}}{2}}, \qquad \alpha_2 = \frac{q(x)}{2\alpha_1}.$$

Dobiveni parametri α_1 i α_2 su realni brojevi jer iz propozicije 3.1.9 slijedi da je $\sqrt{\|x\|_2^4 - q(x)^2}$ realan broj.
Za proučavanje cjelokupnog skupa rješenja sustava jednadžbi (3.10) uvedimo za prvu jednadžbu sustava oznaku (E1), a za drugu (E2).
Uočimo da je $\alpha_1 = 0$ ili $\alpha_2 = 0$ ako i samo ako $q(x) = 0$.
Pretpostavimo da je $q(x) \neq 0$ i da je (α_1, α_2) rješenje jednadžbi (E1) i (E2). Ako je $\alpha_1 \neq 0$, tada iz (E2) slijedi $\alpha_2 = \frac{q(x)}{2\alpha_1}$. Sada (E1) povlači

$$4\alpha_1^4 - 4\|x\|_2^2\alpha_1^2 + q(x)^2 = 0. \tag{3.11}$$

Uvrštavanjem supstitucije $t = \alpha_1^2$ u (3.11) dobivamo

$$4t^2 - 4\|x\|_2^2 t + q(x)^2 = 0.$$

Diskriminanta D dobivene kvadratne jednadžbe je

$$D = 16(\|x\|_2^4 - q(x)^2)$$

koja je prema propoziciji 3.1.9 uvijek nenegativna. Iz toga slijedi da su rješenja

$$t_{1,2} = \frac{\|x\|_2^2 \pm \sqrt{\|x\|_2^4 - q(x)^2}}{2}$$

realni brojevi. Dobivamo da je $\alpha_1 = \pm\sqrt{t_1}$ ili $\alpha_1 = \pm\sqrt{t_2}$, što su sve realni brojevi jer je $t_{1,2} \geq 0$ po propoziciji 3.1.9. Zaključujemo da je cjelokupan skup rješenja

$$\left(\pm\sqrt{t_1}, \pm\frac{q(x)}{2\sqrt{t_1}}\right), \left(\pm\sqrt{t_2}, \pm\frac{q(x)}{2\sqrt{t_2}}\right).$$

Slučaj za $\alpha_2 \neq 0$ je analogan.
Pretpostavimo li da je $\alpha_1 = 0$, onda je $q(x) = 0$ te iz (E1) imamo $\alpha_2 = \pm\|x\|_2$. Slučaj za $\alpha_2 = 0$ je analogan.
Sljedeća je ideja u provođenju željene faktorizacije napraviti osnovni korak redukcije dane matrice A. Pritom je potrebno konstruirati perplektički blok-reflektor $H(V)$ za koji vrijedi $H(V)X = Y$. Njegovo je postojanje osigurano korolarom 3.2.23. Podsjetimo da je $H(V)$ definiran jednadžbom

$$H(V) = I - 2V(V^t R_n V)^+ V^t R_n$$

te da iz propozicije 3.2.25 slijedi da je $H(V)$ perplektička ortogonalna matrica.
Istaknimo da $H(V)$ nije jedinstveno određen zato što možemo izabrati bilo koje rješenje sustava (3.10) za konstrukciju $H(V)$.
Uočimo da je za sam izračun $H(V)$ potrebno izračunati $(V^t R_n V)^+$ što je Moore-Penroseov pseudoinverz matrice. Iz uvjeta definicije 3.2.7 taj pseudoinverz nije jednostavno izračunati, stoga ćemo u nastavku pokazati kako to učiniti upotrebom nekoliko pogodnih pravila. S obzirom da je $V = [v \quad v^R]$, imamo

$$V^t R_n V = \begin{pmatrix} q(v) & \|v\|_2^2 \\ \|v\|_2^2 & q(v) \end{pmatrix}.$$

Daljnjim direktnim računom imamo $\det(V^t R_n V) = 0$ ako i samo ako $q(v) = 0$ ili $q(v) = \pm\|v\|_2^2$. Iz toga slijede jednostavna pravila za računanje $(V^t R_n V)^+$:

1. Ako je $q(v) = \|v\|_2^2 \neq 0$, onda je $(V^t R_n V)^+ = \frac{1}{4q(v)}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Ako je $q(v) = -\|v\|_2^2 \neq 0$, onda je $(V^t R_n V)^+ = \frac{1}{4q(v)}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Ako je $q(v) = 0$, onda je $(V^t R_n V)^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Ako je $\det(V^t R_n V) \neq 0$, onda je $(V^t R_n V)^+ = (V^t R_n V)^{-1}$.

Teorem 3.3.1. *(Centrosimetrična QR–faktorizacija). Ako je matrica A reda (m, n) centrosimetrična, onda postoje matrice Q i R sa sljedećim svojstvima:*

(1) *Q je perplektička ortogonalna matrica,*

(2) *R je duplostožasta centrosimetrična matrica,*

(3) *$A = QR$.*

Dokaz. Za danu matricu A konstruirat ćemo matrice Q i R takve da vrijede svojstva (1)-(3). Neka je $d = \lceil \frac{\min\{m,n\}}{2} \rceil$.
Nastavimo redom za $k = 1, 2, ..., d$ s konstrukcijom perplektičkih ortogonalnih matrica $Q_1, Q_2, ..., Q_d$. Označimo sa $A^{(k)}$ "radnu matricu nakon koraka k" te najprije definirajmo $A^{(0)} := A$. Ideja je za svaki korak $k = 1, 2, ..., d$ pronaći matricu Q_k koja poništava unose u $k-$tom i $(n - k + 1)$-om stupcu radne matrice $A^{(k-1)}$ u redcima $k + 1, \dots, m - k + 2$ i pritom ostavlja prvih $k - 1$ i zadnjih $k - 1$ stupaca matrice $A^{(k-1)}$ nepromijenjenima.
Za $k = 1, 2, ..., d$ definiramo sljedeće matrice reda $(m - 2k + 2) \times 2$:

$$X_k := \begin{pmatrix} a_{k,k}^{(k-1)} & a_{k,n-k+1}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m-k+1,k}^{(k-1)} & a_{m-k+1,n-k+1}^{(k-1)} \end{pmatrix} \quad Y_k := \begin{pmatrix} \alpha_1^{(k)} & \alpha_2^{(k)} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \alpha_2^{(k)} & \alpha_1^{(k)} \end{pmatrix} \quad V_k := Y_k - X_k$$

pri čemu su $\alpha_1^{(k)}$ i $\alpha_2^{(k)}$ parametri koji se računaju iz jednadžbe (3.10) na temelju X_k.
U nastavku računamo perplektički blok-reflektor $H(V_k)$:

$$H(V_k) := I_{m-2k+2} - 2V_k(V_k^t R_{m-2k+2} V_k)^+ V_k^t R_{m-2k+2}.$$

Kako bi svaka matrica Q_k ostavljala stupce reducirane prethodnim koracima nepromijenjenima, koristimo sljedeće ulaganje:

$$Q_k := E_m(H(V_k)).$$

Uočimo da je Q_k primjereno uložena jer je $H(V_k)$ perplektička ortogonalna kvadratna matrica reda $m-2k+2$. Iz propozicije 3.2.27 slijedi da je Q_k perplektička ortogonalna matrica. Iskoristimo sljedeću lemu kako bismo opravdali činjenicu da matrica Q_k ne mijenja stupce koji su reducirani prethodnim koracima.

Lema 3.3.2. *Ako je $k < t \leq d$, onda vrijedi:*

(1) $Q_t a_k^{(k)} = a_k^{(k)}$,

(2) $Q_t a_{n-k+1}^{(k)} = a_{n-k+1}^{(k)}$.

Dokaz. Neka je $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ standardna baza za $\mathbb{R}^m$. Tada za vektor $a_k^{(k)}$ vrijedi

$$a_k^{(k)} = \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k}^{(k)} e_i + \alpha_1^{(k)} e_k + \sum_{i=m-k+2}^{m} a_{i,k}^{(k)} e_i + \alpha_2^{(k)} e_{m-k+1}.$$

Neka je $j = t - k$. Primjenom Q_t na $a_k^{(k)}$ imamo

$$Q_t a_k^{(k)} = Q_{k+j} a_k^{(k)} = \begin{pmatrix} I_k & & \\ & E_{m-2k}(H(V_{k+j})) & \\ & & I_k \end{pmatrix} a_k^{(k)} = a_k^{(k)},$$

što povlači tvrdnju (1). Korištenjem tvrdnje (1) i činjenice da je $Q_t \in \mathrm{PO}(m)$ po propoziciji 3.2.27, slijedi

$$Q_t a_{n-k+1}^{(k)} = Q_t R_m a_k^{(k)} = R_m Q_t a_k^{(k)} = R_m a_k^{(k)} = a_{n-k+1}^{(k)}$$

što dokazuje tvrdnju (2). □

Prikažimo primjenu matrice Q_k na $A^{(k-1)}$ za $k = 1, 2, 3$ kada je A matrica 7×5 shematski:

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{Q_1} \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \\ & \times & \times & \times & \\ & \times & \times & \times & \\ & \times & \times & \times & \\ & \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{Q_2} \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \\ & & \times & & \\ & & \times & & \\ & & \times & & \\ & \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{Q_3} \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \\ & & \times & & \\ & & & & \\ & & \times & & \\ & \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}.$$

Definirajmo $A^{(k)}$ sa

$$\begin{cases} A^{(0)} := A \\ A^{(k)} := Q_k A^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, ..., d. \end{cases} \tag{3.12}$$

Promotrimo li pobliže sustav jednadžbi (3.12), zapravo imamo:

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= A, \\ A^{(1)} &= Q_1 A^{(0)} = Q_1 A, \\ A^{(2)} &= Q_2 A^{(1)} = Q_2 Q_1 A, \\ &\vdots \\ A^{(d)} &= Q_d A^{(d-1)} = Q_d Q_{d-1} \cdots Q_1 A. \end{aligned}$$

Definirajmo sada

$$Q := (Q_d Q_{d-1} \cdots Q_1)^{-1}.$$

Budući je $Q_k \in \mathrm{PO}(n)$ za svaki $k = 1, 2, ..., d$ te je PO(n) grupa, slijedi da je $Q \in \mathrm{PO}(n)$ čime je dokazano svojstvo (1) teorema 3.3.1. Primijetimo i da je, s obzirom da je $Q_d Q_{d-1} \cdots Q_1$ ortogonalna matrica, matrica Q ekvivalentno definirana formulom

$$Q = (Q_d Q_{d-1} \cdots Q_1)^t.$$

Za matricu R uzimamo

$$R = A^{(d)}.$$

Tvrdimo da je matrica R duplostožasta matrica. Potrebno je provjeriti vrijedi li za matricu R definicija 3.2.14.
Iz sustava jednadžbi (3.12) slijedi

$$\begin{pmatrix} a^{(k)}_{k,k} & a^{(k)}_{k,n-k+1} \\ \vdots & \vdots \\ a^{(k)}_{m-k+1,k} & a^{(k)}_{m-k+1,n-k+1} \end{pmatrix} = H(V_k) \begin{pmatrix} a^{(k-1)}_{k,k} & a^{(k-1)}_{k,n-k+1} \\ \vdots & \vdots \\ a^{(k-1)}_{m-k+1,k} & a^{(k-1)}_{m-k+1,n-k+1} \end{pmatrix},$$

a s obzirom da je A centrosimetrična matrica, iz propozicije 3.2.6 i korolara 3.2.23 dobivamo $H(V_k)X_k = Y_k$. Zato je

$$Y_k = \begin{pmatrix} a^{(k)}_{k,k} & a^{(k)}_{k,n-k+1} \\ \vdots & \vdots \\ a^{(k)}_{m-k+1,k} & a^{(k)}_{m-k+1,n-k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{(k)}_1 & \alpha^{(k)}_2 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \alpha^{(k)}_2 & \alpha^{(k)}_1 \end{pmatrix}.$$

Korištenjem sustava jednadžbi (3.12) lako je pokazati da vrijedi

$$A^{(d)} = Q_d Q_{d-1} \cdots Q_{k+1} A^{(k)} \text{ za svaki } k = 1, 2, ..., d-1.$$

Iz dobivenog i leme 3.3.2 za svaki $k = 1, 2, ..., d$ slijedi

$$\begin{pmatrix} a^{(d)}_{k,k} & a^{(d)}_{k,n-k+1} \\ \vdots & \vdots \\ a^{(d)}_{m-k+1,k} & a^{(d)}_{m-k+1,n-k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{(k)}_{k,k} & a^{(k)}_{k,n-k+1} \\ \vdots & \vdots \\ a^{(k)}_{m-k+1,k} & a^{(k)}_{m-k+1,n-k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{(k)}_1 & \alpha^{(k)}_2 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \alpha^{(k)}_2 & \alpha^{(k)}_1 \end{pmatrix}.$$

S obzirom da je $R = A^{(d)}$, za svaki $k = 1, 2, ..., d$ vrijedi

$$\begin{pmatrix} r_{k+1,k} & r_{k+1,n-k+1} \\ \vdots & \vdots \\ r_{m-k,k} & r_{m-k,n-k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{(d)}_{k+1,k} & a^{(d)}_{k+1,n-k+1} \\ \vdots & \vdots \\ a^{(d)}_{m-k,k} & a^{(d)}_{m-k,n-k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

te slijedi da je R duplostožasta matrica.
Iz propozicije 3.2.11 slijedi da je Q centrosimetrična, a zbog $Q^tA = R$ i propozicije 3.2.10 zaključujemo da matrica R mora biti centrosimetrična jer je produkt dviju centrosimetričnih matrica. Time je dokazano i svojstvo (2) teorema 3.3.1.
Sada napokon imamo

$$QR = QQ^tA = A$$

što dokazuje svojstvo (3) teorema 3.3.1.
Za jednostavnije shvaćanje koraka ovog dokaza možemo napisati algoritam prema kojemu se provodi $QR-$faktorizacija centrosimetričnih matrica reda (m, n).

ALGORITAM 1. $QR-$faktorizacija centrosimetrične matrice

---

procedure 1.ALGORITAM $\qquad \triangleright A$ je matrica reda (m, n)
    $d \leftarrow \lceil \frac{\min\{m,n\}}{2} \rceil$
    $A^{(0)} \leftarrow A$
    for $k = 1, 2, ..., d$ **do**
        $r \leftarrow m - 2k + 2$
        $x \leftarrow [a_{k,k}^{(k-1)} \quad \dots \quad a_{m-k+1,k}^{(k-1)}]^t$
        $X_k \leftarrow [x \quad x^R]$
        if $q(x) \neq 0$ **then**
            $\alpha_1^{(k)} \leftarrow \sqrt{\frac{\|x\|_2^2 + \sqrt{\|x\|_2^4 - q(x)^2}}{2}}$
            $\alpha_2^{(k)} \leftarrow \frac{q(x)}{2\alpha_1}$
        else
            $\alpha_1^{(k)} \leftarrow \|x\|_2$
            $\alpha_2^{(k)} \leftarrow 0$
        end if
        $Y_k \leftarrow [\alpha_1^{(k)} e_1 + \alpha_2^{(k)} e_r \quad \alpha_1^{(k)} e_r + \alpha_2^{(k)} e_1]$
        $V_k \leftarrow Y_k - X_k$
        $H(V_k) \leftarrow I_r - 2V_k(V_k^t R_r V_k)^+ V_k^t R_r$
        $Q_k \leftarrow E_m(H(V_k))$
        $A^{(k)} \leftarrow Q_k A^{(k-1)}$
    end for
    $Q \leftarrow (Q_d Q_{d-1} \cdots Q_1)^t$
    $R \leftarrow A^{(d)}$
    return $\{Q, R\}$
end procedure

□

Primjer 3.3.3. *Neka je dana matrica A:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Odredimo za matricu A centrosimetričnu QR−faktorizaciju prateći ALGORITAM 1.
Broj redaka dane matrice A je $m = 6$, a broj stupaca $n = 3$.
Sada možemo izračunati $d = \lceil \frac{\min\{6,3\}}{2} \rceil = 2$.
Definirajmo matricu $A^{(0)} = A$.
Budući smo izračunali da je $d = 2$, postupak ćemo provoditi za $k = 1, 2$.
Za $k = 1$ računamo redom:

$$r = m - 2k + 2 = 6 - 2 \cdot 1 + 2 = 6,$$

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$X_1 = [x \quad x^R] = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Potom računamo

$$q(x) = [x, x]_{R_n} = \langle x, R_n x \rangle = 3 \cdot 0 + (-4) \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) + 0 \cdot 3 = 0.$$

S obzirom da smo dobili $q(x) = 0$, zaključujemo da su parametri $\alpha_1^{(1)}$ i $\alpha_2^{(1)}$ određeni formulama $\alpha_1^{(1)} = \|x\|_2$ i $\alpha_2^{(1)} = 0$. Izračunajmo zato najprije

$$\|x\|_2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 2^2 + 4^2 + 2^2 + 0^2} = 7.$$

Zaključujemo da su $\alpha_1^{(1)} = 7$ i $\alpha_2^{(1)} = 0$.
Nastavljamo s računanjem matrica Y_1 i V_1 koje su:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \alpha_2^{(1)} & \alpha_1^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \quad i \quad V_1 = Y_1 - X_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & -2 \\ -2 & -4 \\ -4 & -2 \\ -2 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = [v \quad v^R].$$

Potom računamo $H(V_1)$ po formuli

$$H(V_1) = I_6 - 2V_1(V_1^t R_6 V_1)^+ V_1^t R_6.$$

Kako bismo došli do rješenja za $H(V_1)$ potrebno je odrediti matricu V_1^t koja je jednaka

$$V_1^t = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

te matricu $(V_1^t R_6 V_1)^+$ koju ćemo izračunati koristeći se pravilima opisanima u tekstu prethodnog potpoglavlja. Izračunajmo najprije $V_1^t R_6 V_1$:

$$V_1^t R_6 V_1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot R_6 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & -2 \\ -2 & -4 \\ -4 & -2 \\ -2 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 56 \\ 56 & 0 \end{pmatrix}$$

te njezinu determinantu

$$\det(V_1^t R_6 V_1) = 0 \cdot 0 - 56 \cdot 56 = -3136.$$

Budući je $\det(V_1^t R_6 V_1) \neq 0$, prema spomenutim pravilima o računanju Moore-Penroseovog inverza zaključujemo da je $(V_1^t R_6 V_1)^+ = (V_1^t R_6 V_1)^{-1}$ stoga izračunajmo

$$(V_1^t R_6 V_1)^{-1} = \tfrac{1}{56} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (V_1^t R_6 V_1)^+.$$

Uvrstimo li dobiveno u formulu za $H(V_1)$, dobivamo

$$H(V_1) = I_6 - 2 \cdot \tfrac{1}{56} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & -2 \\ -2 & -4 \\ -4 & -2 \\ -2 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot R_6$$

$$= \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 24 & -32 & 16 & 32 & 16 & 0 \\ -32 & 16 & 0 & 24 & 32 & 16 \\ 16 & 0 & 16 & -32 & 24 & 32 \\ 32 & 24 & -32 & 16 & 0 & 16 \\ 16 & 32 & 24 & 0 & 16 & -32 \\ 0 & 16 & 32 & 16 & -32 & 24 \end{pmatrix}.$$

Sada računamo

$$Q_1 = E_6(H(V_1)) = H(V_1) = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 24 & -32 & 16 & 32 & 16 & 0 \\ -32 & 16 & 0 & 24 & 32 & 16 \\ 16 & 0 & 16 & -32 & 24 & 32 \\ 32 & 24 & -32 & 16 & 0 & 16 \\ 16 & 32 & 24 & 0 & 16 & -32 \\ 0 & 16 & 32 & 16 & -32 & 24 \end{pmatrix}$$

te

$$A^{(1)} = Q_1 A^{(0)} = Q_1 A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Nastavimo postupak za $k = 2$.
Računamo redom:

$$r = m - 2k + 2 = 6 - 2 \cdot 2 + 2 = 4,$$

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$X_2 = [x \quad x^R] = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Izračunajmo sada

$$q(x) = [x, x]_{R_n} = \langle x, R_n x \rangle = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 50.$$

Budući smo dobili $q(x) \neq 0$, parametre $\alpha_1^{(2)}$ i $\alpha_2^{(2)}$ određujemo formulama $\alpha_1^{(2)} = \sqrt{\frac{\|x\|_2^2 + \sqrt{\|x\|_2^4 - q(x)^2}}{2}}$ i $\alpha_2^{(2)} = \frac{q(x)}{2\alpha_1}$. Da bismo proveli željeni račun, najprije je potrebno izračunati $\|x\|_2$ na sljedeći način:

$$\|x\|_2 = \sqrt{4^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2} = 5\sqrt{2}.$$

Uvrstimo li dobiveno u formule za parametre $\alpha_1^{(2)}$ i $\alpha_2^{(2)}$, dobivamo:

$$\alpha_1^{(2)} = \sqrt{\frac{(5\sqrt{2})^2 + \sqrt{(5\sqrt{2})^4 - 50^2}}{2}} = 5,$$
$$\alpha_2^{(2)} = \frac{50}{2 \cdot 5} = 5.$$

Izračunajmo u nastavku matrice Y_2 i V_2:

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \quad i \quad V_2 = Y_2 - X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \\ -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sada ćemo izračunati $H(V_2)$ koristeći formulu

$$H(V_2) = I_4 - 2V_2(V_2^t R_4 V_2)^+ V_2^t R_4.$$

Najprije zapišimo matricu V_2^t:

$$V_2^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

a potom koristeći pravila prethodnog potpoglavlja odredimo matricu $(V_2^t R_4 V_2)^+$. Izračunajmo najprije matricu $V_2^t R_4 V_2$:

$$V_2^t R_4 V_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot R_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \\ -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}$$

te determinantu

$$\det(V_2^t R_4 V_2) = 20 \cdot 20 - 20 \cdot 20 = 0.$$

Budući je dobivena determinanta jednaka nuli, izračunajmo $q(v)$ i $\|v\|_2$:

$$q(v) = [v, v]_{R_n} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-3) - 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 = 20,$$
$$\|v\|_2 = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-3)^2 + 1^2} = 2\sqrt{5}.$$

S obzirom da je $q(v) = \|v\|_2^2 \neq 0$*, po gore navedenim pravilima za računanje Moore-Penroseovog inverza vrijedi da je*

$$(V_2^t R_4 V_2)^+ = \frac{1}{4q(v)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4 \cdot 20} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{80} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uvrštavanjem dobivenog u formulu za $H(V_2)$ *dobivamo*

$$H(V_2) = I_4 - 2 \cdot \frac{1}{80} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \\ -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot R_4 = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -9 & 3 \\ 3 & -9 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Odredimo sada matricu Q_2

$$Q_2 = E_6(H(V_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.3 & 0.3 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.1 & -0.9 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & -0.9 & 0.1 & 0.3 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

te matricu $A^{(2)}$

$$A^{(2)} = Q_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.3 & 0.3 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.1 & -0.9 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & -0.9 & 0.1 & 0.3 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

S obzirom da je matrica Q definirana formulom $Q = (Q_d Q_{d-1} \cdots Q_1)^t$*, a matrica R formulom* $R = A^{(d)}$ *slijedi da su tražene matrice Q i R sljedeće:*

$$Q = (Q_2 Q_1)^t = \frac{1}{560} \cdot \left(\begin{pmatrix} 24 & -32 & 16 & 32 & 16 & 0 \\ -32 & 16 & 0 & 24 & 32 & 16 \\ 16 & 0 & 16 & -32 & 24 & 32 \\ 32 & 24 & -32 & 16 & 0 & 16 \\ 16 & 32 & 24 & 0 & 16 & -32 \\ 0 & 16 & 32 & 16 & -32 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \right)^t$$

$$= \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 30 & -20 & -40 & -20 & 40 & 0 \\ -40 & 23 & -9 & 21 & 43 & 20 \\ 20 & -9 & 47 & -13 & 21 & 40 \\ 40 & 21 & -13 & 47 & -9 & 20 \\ 20 & 43 & 21 & -9 & 23 & -40 \\ 0 & 40 & -20 & -40 & -20 & 30 \end{pmatrix}$$

te

$$R = A^{(2)} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Za kraj provjerimo čemu je jednako QR:

$$QR = \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 30 & -20 & -40 & -20 & 40 & 0 \\ -40 & 23 & -9 & 21 & 43 & 20 \\ 20 & -9 & 47 & -13 & 21 & 40 \\ 40 & 21 & -13 & 47 & -9 & 20 \\ 20 & 43 & 21 & -9 & 23 & -40 \\ 0 & 40 & -20 & -40 & -20 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

Iz dobivenog zaključujemo da zaista vrijedi $QR = A$.

Bibliografija

[1] K. Burnik, *A structure-preserving QR factorization for centrosymmetric real matrices*, Linear Algebra and its Applications **484** (2015), 356–378.

[2] Z. Franušić i J. Šiftar, *Linearna algebra 1, skripta*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~fran/predavanja-LA1.pdf`, (kolovoz 2021.).

[3] ———, *Linearna algebra 2, skripta*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~fran/predavanja-LA2.pdf`, (kolovoz 2021.).

[4] D. S. Mackey, N. Mackey i F. Tisseur, *Structured tools for structured matrices*, Electronic Journal of Linear Algebra **10** (2003), 106–145.

[5] G. Muić i M. Primc, *Vektorski prostori, skripta*, `https://vdocuments.site/vektorski-prostori-mirko-primc-skripta.html`, (kolovoz 2021.).

[6] S. Singer i S. Singer, *Orthosymmetric block reflectors*, Linear Algebra and its Applications **429** (2008), 1354–1385.

[7] ———, *Ortosimetrični skalarni produkti - teorija i algoritmi, skripta*, `https://www.fsb.unizg.hr/mat-4/Ortosimetricni_skalarni_produkti/pred.pdf`, (kolovoz 2021.).

[8] I. Soldo, *Različiti načini množenja matrica*, Osječki matematički list **5** (2005), br. 1, 1–8.

Sažetak

U ovom radu proučavamo $QR-$faktorizaciju centrosimetrične realne matrice A u kojoj su realne matrice Q i R centrosimetrične. Ta se faktorizacija može dobiti primjenom preglednog algoritma koji koristi perplektičke ortogonalne blok-reflektore i koji je u ovom radu detaljno opisan i proveden na konkretnom primjeru.

Summary

In this thesis, we study a $QR-$factorization of a centrosymmetric real matrix A such that the real matrices Q and R are centrosymmetric. This factorization can be obtained by applying a refined algorithm which uses perplectic orthogonal block-reflectors and which is both described in detail and illustrated on a concrete example in this thesis.

Životopis

Rođena sam 17. rujna 1996. godine u Karlovcu. U rodnom gradu završila sam Osnovnu školu Grabrik i Gimnaziju Karlovac prirodoslovno - matematičkog smjera. U Karlovcu sam završila i srednju glazbenu školu teorijskog smjera i na maturi branila maturalni rad *Povezanost glazbe i matematike*. Na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu 2018. godine stekla sam zvanje sveučilišne prvostupnice edukacije matematike i upisala diplomski studij Matematika - nastavnički smjer.