SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Kujundžić

RELACIJE I FUNKCIJE U SREDNJOŠKOLSKOJ NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Mladen Vuković

Zagreb, rujan 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj diplomski rad posvećujem svojim roditeljima, sestri i prijateljima koji su bili velika podrška na mom životnom putu. Hvala mami, tati i sestri na neizmjernoj ljubavi, razumijevanju, strpljenju i podršci u svakom trenutku. Hvala prijateljima koji su me uvijek ohrabrivali i tješili kada je bilo teško i veselili se mojim malim životnim pobjedama. Imati ovakav mali svijet velikih ljudi pravi je blagoslov.

Zahvaljujem mentoru, prof. dr. sc. Mladenu Vukoviću, na razumijevanju, savjetima i vodstvu pri izradi ovog diplomskog rada.

Sadržaj

Uvod

Relacije i funkcije su među temeljnim matematičkim pojmovima. Uvode se indirektno već od samih početaka školovanja kroz proučavanje odnosa među predmetima, količinama te brojevima. U ovom radu ćemo se osvrnuti na pristup u poučavanju pojmova relacije i funkcije u srednjoškolskoj nastavi matematike. Na samom početku definirat ćemo osnovne pojmove o skupovima koji su vezani uz relacije i funkcije. To su definicije koje bi svaki nastavnik trebao znati iako neke od njih nikada neće upotrijebiti na nastavi matematike u školi. U drugom poglavlju ovog rada proučavat ćemo ishode učenja najprije u aktualnom Kurikulumu u sklopu obrazovne reforme pod nazivom „Škola za život“, a zatim u starim kurikulumima i nastavnim programima za osnovnu i srednju školu. Vidjet ćemo kako se pojam relacije više ne definira u nastavi matematike ni u osnovnim ni u srednjim školama. Zato će sljedeća poglavlja ovog rada biti posvećena funkcijama. Prema novom Kurikulumu dogodile su se razne promijene u načinu rada kojima se želi poučavanje matematike i drugih predmeta prilagoditi razvoju kompetencija koje zahtjeva sadašnje vrijeme. Promijenjen je i pristup poučavanju funkcija u obrazovanju. No, je li taj novi pristup poučavanju funkcija bolji? Jesu li funkcije dovoljno zastupljene u nastavi matematike? Učenici će se s funkcijama susretati i kasnije, u visokoškolskom obrazovanju. Tada najčešće nastaje problem u shvaćanju i savladavanju novih pojmova povezanih s funkcijama zbog manjka predznanja koje student treba imati. Naravno, ne možemo za sve okriviti sustav, način poučavanja ni nastavnike. No, zasigurno dio problema leži i u pristupu poučavanju funkcija u osnovnoj i srednjoj školi. Zato ćemo pokušati predočiti način na koji se funkcije obrađuju u nekim udžbenicima za srednje škole. Uspoređujući udžbenike vidjet ćemo različite pristupe u uvođenju pojma funkcije, vrsti funkcija, njihovih svojstava i ostalih pojmova povezanih s funkcijama. Na kraju ćemo kroz dvije aktivnosti dati ideje kako uvesti pojam funkcije i pojam inverzne funkcije u nastavi matematike.

Poglavlje 1

Definicije nekih osnovnih pojmova o skupovima

Prije proučavanja kurikuluma i udžbenika u ovom radu navesti ćemo važnije stroge matematičke definicije vezane uz pojmove relacije i funkcije. To su definicije koje se ne poučavaju u osnovnoj i srednjoj školi, ali bi ih nastavnik trebao znati. Sve definicije su iz [24].

Neka su x i y skupovi. Tada skup $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ nazivamo **uređeni par**, i označavamo ga s (x, y).

Neka su A i B skupovi. Tada je klasa $\{(x, y) : x \in A, y \in B\}$ također skup. Navedenu klasu nazivamo **Kartezijev produkt** skupova A i B, te je označavamo sa $A \times B$.

Za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, rekurzivno definiramo uređenu n–torku ovako:

$$(x_1, x_2) = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$$

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) = ((x_1, \ldots, x_n), x_n + 1)$$

Za proizvoljni skup A sa $\cap A$ označavamo klasu $\{x : \text{za svaki } y \in A \text{ vrijedi } x \in y\}$, te je nazivamo **presjek** skupa A. Ako su A i B skupovi tada sa $A \cap B$ označavamo presjek $\cap\{A, B\}$. Analogno, ako je $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, te $A_1, \ldots, A_n$ skupovi, tada sa $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ označavamo presjek $\cap\{A_1, \ldots, A_n\}$.

Za proizvoljne skupove A i B sa $A \backslash B$ označavamo klasu $\{x : x \in A \text{ i } x \notin B\}$, te je nazivamo **razlika** skupova A i B. Neka je U neki skup, te $A \subseteq U$.Tada sa A^c označavamo klasu $U \backslash A$, te je nazivamo **komplement** skupa A (u odnosu na skup U).

Binarna relacija R na skupovima A i B je proizvoljni podskup Kartezijevog produkta $A \times B$. Ako su $A_1, \ldots, A_n$ skupovi tada je n–mjesna relacija proizvoljni podskup Kartezijevog produkta $A_1 \times \cdots \times A_n$.

Neka su A i B proizvoljni skupovi, te neka je $f \subseteq A \times B$ binarna relacija koja ima svojstvo da za svaki $x \in A$ postoji jedinstveni $y \in B$ tako da vrijedi $(x, y) \in f$. Tada binarnu relaciju f nazivamo **funkcija** i označavamo je sa $f : A \to B$. Skup A nazivamo **domena** funkcije, a skup B **kodomena** funkcije. Ako je $f : A \to B$ funkcija, te je $(x, y) \in f$, tada umjesto y pišemo i $f(x)$.

Kažemo da su skupovi A i B **ekvipotentni** ako postoji barem jedna bijekcija $f : A \to B$. Oznaka: $A \sim B$.

Za svaki $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ sa $\mathbb{N}_k$ označavamo skup $\{1, \ldots, k\}$, a $\mathbb{N}_0$ je prazan skup. Kažemo da je skup A **konačan** ako postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je skup A ekvipotentan sa skupom $\mathbb{N}_k$. Za skup X kažemo da je **beskonačan** ako nije konačan.

Ako su A i B ekvipotentni skupovi tada kažemo još da imaju istu **kardinalnost**, te pišemo $k(A) = k(B)$.

Poglavlje 2

Pregled ishoda učenja u kurikulumima

2.1 Kurikulum u vezi pojmova funkcije i relacije u sklopu projekta ”Škola za život”

Aktualni kurikulum nastavnog predmeta Matematika [4], koji od školske godine 2021./2022. vrijedi za sve razrede osnovnih škola i gimnazija, jest kurikulum u sklopu obrazovne reforme pod nazivom ”Škola za život”. Cilj reforme je prilagoditi dosadašnji način rada u školama razvoju kompetencija potrebnih u sadašnjem vremenu. Reformom se želi i stvoriti jednake prilike za sve učenike te omogućiti cjeloviti razvoj učenika. Danas matematika ima važnu ulogu u tehnološkom razvoju i unapređenju kvalitete življenja pa je potrebno prilagoditi i kurikulum nastavnog predmeta Matematika.

Matematičke kompetencije kod učenika razvijaju se kroz postupno učenje povezivanjem matematičkih procesa i domena.
Matematički procesi su:

- Prikazivanje i komunikacija
- Povezivanje
- Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje
- Rješavanje problema i matematičko modeliranje
- Primjena tehnologije

Domene su:

- Brojevi
- Algebra i funkcije
- Oblik i prostor
- Mjerenje
- Podatci, statistika i vjerojatnost

Bitno je naglasiti da domene povezuju srodne koncepte te je savladavanje koncepata jedne domene često preduvjet za savladavanje koncepata drugih domena. Za relacije i funkcije ishodi u kurikulumu su povezani kroz gotovo sve domene kurikuluma. Ovaj kurikulum organiziran je na način da se za svaki odgojno-obrazovni ishod navodi i razrada tog ishoda, odgojno-obrazovni ishodi na razini usvojenosti „dobar“ na kraju razreda, sadržaji te preporuke za ostvarivanje odgojno-obrazovnog ishoda.

S relacijama učenici se upoznaju od samog početka školovanja. Prema kurikulumu učenici se s relacijama susreću u dvjema domenama kurikuluma Matematike – Brojevi i Mjerenje već u prvom razredu osnovne škole. Tada učenici uspoređuju prirodne brojeve do 20 i nulu znakovima uspoređivanja <, > i =. Riječima određuju odnose među količinama (više – manje – jednako), među brojevima (veći – manji – jednak) te uspoređuju vrijednost kovanica i novčanica hrvatskog novca. Također, prepoznaju odnose među predmetima (dulji – kraći – jednako dug te veći – manji – jednak).

Slika 2.1: Primjer odnosa među predmetima u 1.razredu osnovne škole iz [9]

U drugom razredu osnovne škole naučeno o relacijama <, > i = u prvom razredu proširuje se na skup prirodnih brojeva do 100. Tako učenik uspoređuje prirodne brojeve do 100, određene iznose novca i jedinica za novac, a kod svakog mjerenja se počinje uspoređivanjem predmeta po duljini riječima dulji – kraći – jednako dug. Analogno, u trećem razredu osnovne škole naučeno u prvom i drugom razredu se proširuje na skup prirodnih brojeva do 10 000 te uspoređuje brojeve, mase tijela i volumene posuda. Uz to otkriva odnose pravaca, odnosno otkriva i relaciju paralelnosti pravaca.

2. **Usporedi.**

327 ◯ 3 275	764 ◯ 726	3 876 ◯ 5 892	5 678 ◯ 5 672
589 ◯ 296	253 ◯ 258	8 739 ◯ 8 723	4 234 ◯ 4 834

Slika 2.2: Primjer zadatka s usporedbom brojeva do 10 000 iz [16]

Volumene tekućina, posuda, površine likova i brojeve do milijun učenici uspoređuju u četvrtom razredu osnovne škole. Tada se i postavlja temelj za linearne jednadžbe i nejednadžbe kroz relacije. Učenici određuju vrijednosti nepoznate veličine u jednakostima ili nejednakostima, odnosno primjenjujući veze između računskih operacija.

1.razred	**2.razred**	**3.razred**	**4.razred**
MAT OŠ A.1.2. Uspoređuje prirodne brojeve do 20 i nulu.	MAT OŠ A.2.1. Služi se prirodnim brojevima do 100 u opisivanju i prikazivanju količine i redoslijeda.	MAT OŠ A.3.1. Služi se prirodnim brojevima do 10 000 u opisivanju i prikazivanju količine i redoslijeda.	MAT OŠ A.4.1. Služi se prirodnim brojevima do milijun.
MAT OŠ D.1.1. Analizira i uspoređuje objekte iz okoline prema mjerivu svojstvu.	MAT OŠ D.2.1. Služi se jedinicama za novac.	MAT OŠ C.3.2. Prepoznaje i crta pravce u različitim međusobnim odnosima.	MAT OŠ A.4.4. Primjenjuje četiri računske operacije i odnose među brojevima u problemskim situacijama.
MAT OŠ D.1.2. Služi se hrvatskim novcem u jediničnoj vrijednosti kune u skupu brojeva do 20.	MAT OŠ D.2.2. Procjenjuje, mjeri i crta dužine zadane duljine.	MAT OŠ D.3.1. Procjenjuje, mjeri i crta dužine zadane duljine.	MAT OŠ B.4.1. Određuje vrijednost nepoznate veličine u jednakostima ili nejednakostima.
	MAT OŠ D.2.3. Procjenjuje i mjeri vremenski interval.	MAT OŠ D.3.2. Procjenjuje i mjeri masu tijela.	MAT OŠ D.4.1. Procjenjuje i mjeri volumen tekućine.
		MAT OŠ D.3.4. Procjenjuje i mjeri volumen tekućine.	MAT OŠ D.4.2. Uspoređuje površine likova te ih mjeri jediničnim kvadratima.

Slika 2.3: Ishodi vezani uz relacije u nižim razredima osnovne škole

U petom razredu osnovne škole pri uspoređivanju u skupu prirodnih brojeva s nulom učenik barata relacijama $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $=$ i $\neq$. Navedene relacije primjenjuje pri uspoređivanju decimalnih brojeva. Također, kod decimalnih brojeva učenik primjenjuje jednakost među različitim zapisima brojeva, odnosno koristi relaciju ekvivalencije kod zapisa decimalnog broja. Primjer jednostavnog zadatka iz [6] u kojemu se koristi takva relacija ekvivalencije: *Decimalni broj* 0.5 *zapišite u obliku razlomka na dva načina.*

Nakon što otkrije skupove, učenik se upoznaje s odnosima među skupovima. Jedan od zadataka iz [6] u kojima učenici određuju odnose među skupovima je sljedeći:

a) *Ako s A označimo skup svih parnih prirodnih bojeva, u kojem su odnosu skupovi A i* $\mathbf{N}$*, je li koji kome podskup? Zapišite to koristeći se znakom* $\subseteq$.

b) *Zadan je skup* $B = \{n | n \text{ je neparan prirodni broj}\}$. *Vrijedi li koja od tvrdnji:* $B \subseteq \mathbf{N}$, $\mathbf{N} \subseteq B$?

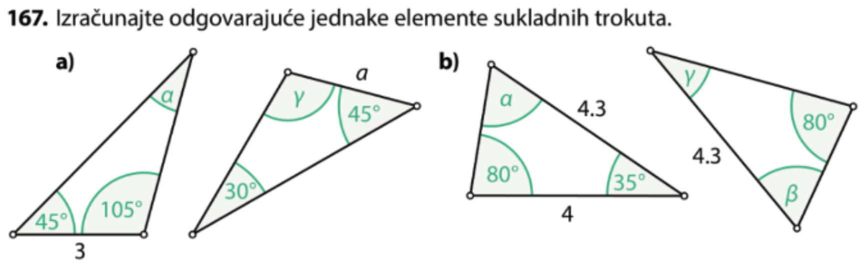
c) *U kojem su odnosu skupovi* $\mathbf{N}$ *i* $\mathbf{N}_0$?

d) *U kojem su odnosu skupovi* $C = \{7, 3, 9\}$ *i* $\mathbf{N}$?

e) *U kojem su odnosu skupovi* $\mathbf{N}$ *i* $\emptyset$?

Potom učenik analizira međusobne odnose skupova točaka u ravnini. Primjer zadatka sa skupovima iz [6] koje učenik petog razreda nauči riješiti je sljedeći:
Elementi skupa G su slova riječi "gitara", a elementi skupa T su slova riječi "tigar". Zapišite te skupove navodeći njihove elemente. Jesu li zadani skupovi jednaki? Objasnite. Nacrtajte pripadni Vennov dijagram.

Sadržaji o skupovima naučeni do petog razreda osnovne škole proširuju se dalje u šestom razredu na nenegativne racionalne brojeve i cijele brojeve. Osim kod brojeva, učenik primjenjuje relacije i u geometriji kod trokuta te u pravokutnom koordinatnom sustavu gdje se upoznaje s uređenim parom točaka.



Slika 2.4: Primjer zadatka s promjenom relacija kod trokuta iz [7]

U sedmom razredu se primjenjuje jednakost među različitim zapisima racionalnih brojeva te se koriste relacije kod uspoređivanja istih. Kao i u prethodnom razredu, kod rješavanja linearne jednadžbe se za određivanje nepoznatog brojnika ili nazivnika primjenjuje ekvivalentnost razlomaka. Ovdje je novost da se postavlja temelj za funkcije, koje se obrađuju u srednjoj školi. Radi se linearna ovisnost pri čemu se proučavanju međusobno zavisne veličine, uočene situacije linearne ovisnosti iz problema svakodnevnog života se prevode u algebarski zapis, tumače se grafički prikazi linearne ovisnosti te analiziraju promjene. Kao prošireni sadržaj navodi se povezivanje linearne ovisnosti s linearnom funkcijom. Primjer zadatka s linearnom ovisnosti iz [8] koje učenik nakon sedmog razreda može riješiti je sljedeći:
Početna cijena najma bicikla je 20 *kn. Za svaki sat posudbe dodatno se plaća* 5 *kn. Napišite formulom linearne ovisnosti ovisnost cijene najma bicikla o broju sati posudbe.*

Relacije među svim skupovima naučenim do osmog razreda obrađuju se u osmom razredu, a uz to se primjenjuju ekvivalencije jednadžbi kada se složenije linearne jednadžbe svode na oblik $ax + b = 0$. Također se otkrivaju i primjenjuju relacije u geometriji, primjerice relacija sličnosti trokuta.

Proučavajući kurikulum, može se primijetiti kako se pojam "relacija" ne spominje nigdje. Ona se ne definira kao takva, ali se razne relacije obrađuju. Relacije se nalaze u svim matematičkim domenama. Također, pojam funkcije se otkriva kao dio proširenog sadržaja u sedmom razredu, no funkcije se obrađuju tek u srednjoj školi.

5.razred	6. razred	7. razred	8.razred
MAT OŠ A.5.1. Brojevnim izrazom u skupu prirodnih brojeva s nulom modelira problemsku situaciju.	MAT OŠ A.6.3. Primjenjuje različite zapise nenegativnih racionalnih brojeva.	MAT OŠ A.7.3. Primjenjuje različite zapise racionalnih brojeva.	MAT OŠ A.8.3. Prepoznaje odnose među skupovima $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ i $\mathbb{R}$ te raspravlja o pripadnosti rješenja jednadžbe skupu brojeva.
MAT OŠ A.5.4. Povezuje i primjenjuje ekvivalentne zapise decimalnoga broja.	MAT OŠ A.6.4. Primjenjuje uspoređivanje nenegativnih racionalnih brojeva.	MAT OŠ A.7.4. Primjenjuje uspoređivanje racionalnih brojeva.	MAT OŠ B.8.3. Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu.
MAT OŠ A.5.5. Računa s decimalnim brojevima.	MAT OŠ A.6.6. Prikazuje i primjenjuje cijele brojeve.	MAT OŠ B.7.2. Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu.	MAT OŠ C.8.3. Primjenjuje Talesov poučak.
MAT OŠ B.5.2. Prikazuje skupove i primjenjuje odnose među njima za prikaz rješenja problema.	MAT OŠ B.6.1. Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu.	MAT OŠ B.7.4. Primjenjuje linearnu ovisnost.	MAT OŠ C.8.4. Prikazuje međusobne odnose dviju kružnica u ravnini.
MAT OŠ C.5.1. Opisuje skupove točaka u ravnini te analizira i primjenjuje njihova svojstva i odnose.	MAT OŠ C.6.2 Konstruira trokute, analizira njihova svojstva i odnose.		MAT OŠ D.8.2. Primjenjuje oplošje i volumen geometrijskih tijela.
	MAT OŠ D.6.5. U pravokutnome koordinatnom sustavu u ravnini crta točke zadane cjelobrojnim koordinatama.		MAT OŠ C.8. Primjenjuje kompoziciju preslikavanja u ravnini.

Slika 2.5: Ishodi vezani uz relacije i funkcije u višim razredima osnovne škole

Kurikulum za srednju školu organiziran je prema ukupnom broju sati iz predmeta Matematika u školskoj godini za svaki razred. Za razliku od osnovne škole, u kurikulumu za srednje škole kod većine odgojno-obrazovnih ishoda se isprepliće više domena.
U suštini, sve naučeno o relacijama primjenjuje se i dalje kroz srednjoškolsko obrazovanje. Kroz sva četiri razreda učenici otkrivaju funkcije, njihova svojstva, crtaju grafove te primjenjuju funkcije u raznim problemskim zadacima te na primjerima iz svakodnevnog života. U sljedećoj tablici (Slika 2.6) navedeni su ishodi učenja povezani s funkcijama i relacijama u gimnazijama. Napisane oznake odgovaraju odgojno-obrazovnim ishodima za 140 sati godišnje u prvom, drugom i trećem razredu gimnazije te 128 sati godišnje u četvrtom razredu. Svi ti ishodi jednaki su i u drugim organizacijskim kategorijama po ukupnom broju sati. Iznimka su ishodi u trećem i četvrtom razredu koji se primjenjuju u kategorijama s većim brojem ukupnih sati godišnje. Uz te ishode navedeno je kod kojih kategorija se prvi put spominju te se isti nalaze i u svim idućim kategorijama s većim brojem sati. Razlika kod svih kategorija je u oznaci ishoda, gdje se zadnji broj, koji označava koji je to po redu odgojno-obrazovni ishod mijenja ovisno o proširenju gradiva u razredima

s većim brojem sati. Uz to, neki isti ishodi u kategorijama s većim brojem sati imaju više razrada tog ishoda te opširnije odgojno-obrazovne ishode na razini usvojenosti "dobar" na kraju razreda.

1. razred	2. razred	3. razred	4. razred
MAT SŠ B.1.2. Računa s algebarskim izrazima i algebarskim razlomcima.	MAT SŠ B.2.1. Rješava i primjenjuje kvadratnu jednadžbu.	MAT SŠ B.3.2. MAT SŠ C.3.1. Analizira eksponencijalnu i logaritamsku funkciju.	MAT SŠ B.4.3. Analizira svojstva funkcija.
MAT SŠ B.1.3. Primjenjuje proporcionalnost, postotke, linearne jednadžbe i sustave linearnih jednadžbi.	MAT SŠ B.2.2. Analizira funkciju.	MAT SŠ B.3.3. MAT SŠ C.3.2. Primjenjuje eksponencijalnu i logaritamsku funkciju.	MAT SŠ B.4.4. Tumači značenje limesa funkcije u točki.
MAT SŠ B.1.5. MAT SŠ D.1.1. Povezuje različite prikaze linearne funkcije.	MAT SŠ B.2.3. MAT SŠ C.2.1. Analizira grafički prikaz funkcije.	MAT SŠ B.3.5. MAT SŠ C.3.3. Primjenjuje svojstva trigonometrijskih funkcija.	MAT SŠ B.4.5. Povezuje definiciju derivacije funkcije u točki s problemom tangente i brzine.
MAT SŠ B.1.6. Primjenjuje linearnu funkciju pri rješavanju problema.	MAT SŠ B.2.4. MAT SŠ C.2.2. Primjenjuje kvadratnu funkciju.	MAT SŠ B.3.6. (kod 175 sati godišnje) Primjenjuje trigonometrijske identitete.	MAT SŠ B.4.7. Povezuje derivaciju funkcije i crtanje grafa funkcije.
MAT SŠ B.1.7. Prikazuje operacije sa skupovima i rješenja nejednadžbi s pomoću intervala.	MAT SŠ C.2.5. MAT SŠ D.2.3. Analizira položaj pravaca i ravnina u prostoru i računa udaljenost.	MAT SŠ B.3.6. MAT SŠ C.3.4. Analizira graf trigonometrijske funkcije.	MAT SŠ B.4.10. (kod 160 sati godišnje) Primjenjuje integral u problemskim zadatcima.
MAT SŠ C.1.2. MAT SŠ D.1.2. Primjenjuje Talesov poučak o proporcionalnosti dužina i sličnost trokuta.		MAT SŠ B.3.7. MAT SŠ C.3.5. Primjenjuje trigonometrijske funkcije.	

Slika 2.6: Ishodi vezani uz relacije i funkcije u gimnazijama

2.2 Pojmovi funkcije i relacije u starim kurikulumima i nastavnim programima za osnovnu i srednju školu

Prije aktualnog kurikuluma nastava matematike izvodila se prema Nacionalnom okvirnom Kurikulumu za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obavezno i srednjoškolsko obrazovanje iz 2010. godine (vidi [3]), a prije toga se u osnovnim školama izvodila prema Nastavnom planu i programu za osnovnu školu iz 2006., poznatom pod nazivom HNOS (vidi [2]), i u srednjim školama prema Nastavnom planu i programu za stjecanje školske spreme u programima opće, jezične, klasične i prirodoslovno-matematičke gimnazije iz 1994. godine (vidi [1]).

Nastavni plan i program za stjecanje školske spreme u programima opće, jezične, klasične i prirodoslovno-matematičke gimnazije iz 1994. zasniva se na ciljevima i zadaćama koje učenici trebaju savladati, odnosno sadržaji podijeljeni prema nastavnim cjelinama. Kao i u sadašnjem Kurikulumu, pojam "relacija" se nigdje ne navodi, no kroz sva četiri

razreda srednje škole obrađuju se razne relacije. Primjer zadatka s relacijama u skupovima brojeva iz prvog razreda gimnazije (vidi [20]) je sljedeći:
Skupovi A, B i C podskupovi su skupa prirodnih brojeva: $A = \{n : n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{n : n = 3k, k \in \mathbb{N}\}$, $C = \{n : n = 4k, k \in \mathbb{N}\}$. *Odredi skupove* $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$.

Iz sadržaja se vidi kako se u prvom razredu obrađuju linearne i racionalne funkcije, u drugom razredu kvadratna, eksponencijalna i logaritamska funkcija. Primjer zadatka u drugom razredu iz [21] u kojemu se primjenjuje eksponencijalna funkcija:
Ako netko uloži 5 000 *kuna uz kamatu od* 2.5% *i uz kontinuirano ukamaćivanje, koliko će nakon* 6 *godina iznositi kamate?*

Također, od učenika drugog razreda se očekuje da zna primijeniti trigonometrijske funkcije na rješavanje pravokutnog trokuta. U trećem razredu se definiraju trigonometrijske funkcije te se primjenjuju u geometriji, dok se u četvrtom razredu radi pojam funkcije, svojstva funkcija te derivacija i integrali. Primjer složenijeg zadatka iz udžbenika [22] za četvrti razred gimnazije u kojemu se određuje periodičnost funkcije je sljedeći:
Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadana funkcija i* $a > 0$ *takvi da vrijedi* $f(x + 1) = -f(x)$. *Pokaži da je* f *periodična s periodom* $2a$.

U HNOS-u su navedene teme koje se obrađuju po razredima te su za svaku temu napisani ključni pojmovi i očekivana obrazovna postignuća učenika. Ovaj nastavni plan i program je za cilj imao pronaći kompromis između tradicionalnog pristupa poučavanju i novih stajališta u nastavi matematike, pri čemu se pristup poučavanju želi usmjeriti na učenika, a ne na sadržaj. Ni ovdje se pojam "relacija" nigdje ne navodi, no relacije se obrađuju. U nastavi od prvog do četvrtog razreda osnovne škole uspoređivali su se brojevi do 5 i 20 u prvom razredu, do 100 u drugom razredu, do 1000 u trećem razredu i do milijun u četvrtom razredu, pri čemu se kod prve teme navodi da se će učenik zadani odnos zapisivati znamenkama i znakovima =, <, >. Također, u prvom razredu osnovne škole određivali su se odnosi među predmetima (veći-manji, unutar-izvan), a u trećem razredu se učenici upoznaju s paralelnosti i okomitosti pravaca. U nastavi od petog do osmog razreda osnovne škole nastavlja se s relacijama kod brojeva. U petom razredu su se uspoređivali prirodni brojevi, jednaki razlomci, decimalni brojevi. Kod razlomaka se kod obrazovnih postignuća navodi da će učenici uočavati ekvivalenciju između dijeljenja i razlomaka. Razlomci, cijeli brojevi i racionalni brojevi su se uspoređivali u šestom razredu. Tada bi prema ovom nastavnom planu i programu učenici kod jednadžbi oblika $ax + b = 0$ te primjene linearne jednadžbe svodili bi jednostavnije jednadžbe na oblik $ax + b = 0$, odnosno koristili su ekvivalenciju jednadžbi. Za razliku od aktualnog kurikuluma, prema ovom nastavnom planu i programu, učenici su već od sedmog razreda osnovne škole učili linearnu funkciju, crtali

njen graf te određivali joj tok, a u osmom razredu crtali grafove funkcija $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$. Po pitanju relacija, u osmom razredu određuju odnose među skupovima $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ i $\mathbb{R}$ te međusobne odnose pravca i ravnine.
S obzirom da se u fizici već u osnovnoj školi koriste razne formule koje u pozadini zapravo imaju funkcijske ovisnosti te se crtaju grafovi, bilo bi bolje učenike upoznati s funkcijama već u višim razredima osnovne škole. Prema HNOS-u vidimo kako su se učile linearna funkcija, kvadratna funkcija i funkcija drugog korijena. Ali, i u periodu korištenja HNOS-a u školama, trebalo je bolje uskladiti povezanost s ostalim predmetima. Učenicima bi bilo lakše najprije upoznati se s nekom funkcijom i njenim grafom, a potom ju, primjerice u fizici, znati primjenjivati. U suprotnom su nastavnici fizike ti koji trebaju na neki način objasniti funkcijsku ovisnost kada uče formule, jer učenici neće shvatiti dobro primjenu te formule ako ne znaju pozadinu. Isto vrijedi i za crtanje grafa nekakve ovisnosti, na primjer puta o vremenu. S druge strane, kod aktualnog kurikuluma je dobro što se u višim razredima osnovne škole posvećuje više pažnje skupovima i relacijama među njima. Time je i nastavnicima i učenicima lakše baratati raznim zapisima odnosa među skupovima kod brojeva i kasnije u srednjoj školi.

U Nacionalnom okvirnom kurikulumu iz 2010. godine su određena očekivana postignuća učenika za odgojno-obrazovna područja po ciklusima. Kako suvremeni svijet zahtijeva nove kompetencije, tako se i ovim kurikulumom željelo prilagoditi tim kompetencijama. U kurikulumu su prihvaćene temeljne kompetencije za cjeloživotno obrazovanje koje je odredila Europska unija. Prema NOK-u se te kompetencije stječu u četiri odgojno-obrazovnog ciklusa. Prvi ciklus čine niži razredi osnovne škole, drugi ciklus čine peti i šesti razred, treći ciklus sedmi i osmi razred, a četvrti ciklus prvi i drugi razred srednjih strukovnih i umjetničkih škola, odnosno sva četiri razreda gimnazija. Matematičko područje jedno je od sedam odgojno-obrazovnih područja općeg obaveznog i srednjoškolskog obrazovanja. Za svaki ciklus očekivana učenička postignuća razrađena su prema matematičkim procesima te matematičkim konceptima. Matematički procesi su: prikazivanje i komunikacija, povezivanje, logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, rješavanje problema i matematičko modeliranje te primjena tehnologije, a matematički koncepti su: brojevi, algebra i funkcije, oblik i prostor, mjerenje, podatci i infinitezimalni račun. U prvom ciklusu funkcije se nisu obrađivale, a od relacija se radilo uspoređivanje brojeva i mjera. U drugom ciklusu učenici su nastavljali s usporedbama u skupovima brojeva i mjera te uočavali pravilnosti u svezi s brojevima i njihovim zapisima. S time su nastavili i u trećem ciklusu.

S obzirom da nas zanimaju relacije i funkcije u srednjoškolskoj nastavi matematike, četvrti ciklus će se detaljnije analizirati. Očekivana učenička postignuća u četvrtom ciklusu za gimnazije vezana uz relacije i funkcije su sljedeća:

MATEMATIČKI PROCESI:

1. Prikazivanje i komunikacija
   Učenici će:
   - organizirano prikazati matematičke objekte, ideje, postupke i rješenja riječima, slikama, crtežima, maketama, dijagramima, grafovima, listama, tablicama, brojevima, simbolima i misaono
   - odabrati i primijeniti prikladan prikaz u skladu sa situacijom i namjerom, povezati različite prikaze i prelaziti s jednih na druge
   - izraziti ideje, rezultate i znanje jasnim, preciznim i sažetim govornim i matematičkim jezikom na različite načine

2. Povezivanje
   Učenici će:
   - uspostaviti i razumjeti veze i odnose među matematičkim objektima, idejama, pojmovima, prikazima i postupcima te oblikovati cjeline njihovim nadovezivanjem
   - povezati matematiku s vlastitim iskustvom, svakodnevnim životom u kući i zajednici te na radnomu mjestu i drugim odgojno-obrazovnim područjima
   - usporediti, grupirati i klasificirati objekte i pojave prema zadanom ili izabranom kriteriju

3. Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje
   Učenici će:
   - obrazložiti odabir matematičkih postupaka i utvrditi smislenost dobivenoga rezultata
   - pratiti, stvarati i vrjednovati lance matematičkih argumenata različitih vrsta te primjenjivati analogiju, generalizaciju i specijalizaciju
   - kreativno, kritički i fleksibilno misliti
   - prepoznati utjecaj ljudskih čimbenika i vlastitih uvjerenja na zaključivanje

4. Rješavanje problema i matematičko modeliranje
   Učenici će:
   - postaviti i analizirati problem, isplanirati njegovo rješavanje odabirom odgovarajućih matematičkih pojmova i postupaka, riješiti ga, te protumačiti i vrjednovati rješenje i postupak
   - modelirati situacije i procese iz drugih odgojno-obrazovnih područja te svakodnevnoga osobnoga, profesionalnoga i društvenoga života

MATEMATIČKI KONCEPTI

1. Brojevi

   Učenici će:

   - razlikovati prirodne, cijele, racionalne i realne brojeve, rabiti njihove različite zapise te prepoznati i rabiti svojstva i odnose skupova brojeva
   - uspoređivati brojeve, računati s njima pomoću tehnologije i bez nje te procijeniti rezultat računanja, odrediti ga egzaktno i zaokružiti ga

2. Algebra i funkcije

   Učenici će:

   - uvrstiti konkretne vrijednosti u formulu (osobito u funkciju zadanu formulom), izračunati vrijednost preostale veličine te u formuli izraziti jednu veličinu pomoću ostalih
   - opisati i izvesti jednostavne ovisnosti (veze) dviju veličina formulama, tablicama, grafovima i riječima; prevesti s jednoga od navedena četiri oblika na drugi te čitati, uspoređivati i tumačiti ovisnosti (veze)
   - prepoznati, odrediti i protumačiti karakteristične elemente i svojstva jednostavnih funkcija, analizirati linearne, kvadratne, eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske funkcije te rabiti njihova svojstva
   - primijeniti funkcije i njihove grafove te jednadžbe i nejednadžbe u rješavanju matematičkih problema i problema u ostalim odgojno-obrazovnim područjima i svakodnevnomu životu

3. Oblik i prostor

   Učenici će:

   - rabiti koordinatne zapise točke, pravca i kružnice te primijeniti koordinatnu geometriju za prikazivanje i istraživanje svojstava geometrijskih oblika
   - prepoznati, opisati i primijeniti sukladnost i sličnost geometrijskih oblika
   - prepoznati ravninske i prostorne oblike i njihova svojstva u svakodnevnomu okružju i umjetnosti te ih upotrijebiti za opis i analizu svijeta oko sebe

4. Mjerenje

   Učenici će:

   - preračunati standardne mjerne jedinice za duljinu, površinu, obujam, masu, vrijeme, temperaturu, kut i brzinu te ih primijeniti u svakodnevnomu životu

5. Podatci

   Učenici će:

   - prepoznati približnu linearnu vezu dviju varijabli, odrediti njezine koeficijente

te ju rabiti pri modeliranju
- protumačiti složene događaje, izraziti ih pomoću skupovnih operacija te izračunati njihovu vjerojatnost

6. Infinitezimalni račun
   Učenici će:
   - izračunati prirast i prosječni prirast tablično zadanih funkcija te jednostavnih formulom zadanih funkcija
   - pomoću derivacije ispitati tok i nacrtati graf polinoma, ponajprije kvadratnoga i kubnoga

Pregledom starih kurikuluma te aktualnog kurikuluma vidimo razvoj našeg odgojno-obrazovnog sustava koji se postupno od poučavanja usmjerenoga sadržaju prilagođava modernom vremenu te se prelazi na poučavanje usmjereno učeniku. Učenici uče razmišljati, razvijaju logiku te postupno otkrivaju novo gradivo. U nijednom kurikulumu se pojam ”relacija” ne spominje i ne definira, ali se proučavaju razni odnosi među brojevima, geometrijskim likovima, jednadžbama i u ostalim područjima matematike. One se proučavaju od samog početka školovanja te se konstantno koriste i dalje u školovanju. Učenje funkcija se postupno kroz kurikulume prebacuje na sve više razrede, odnosno u srednjoškolsko obrazovanje. Zbog korištenja funkcija u drugim predmetima svakako bi se trebalo voditi računa da se učenici upoznaju s funkcijama prije nego ih susretnu u nekim drugim predmetima ili usporedno upoznavati se u tim predmetima. Prebacivanjem funkcija u srednjoškolsko obrazovanje moguće je da će se dobro savladavanje funkcija svesti na više površno učenje samih osnova, bez shvaćanja pozadine funkcijskih ovisnosti i preslikavanja. To može predstavljati problem u visokoškolskom obrazovanju kada će se učenici kao studenti susresti s mnogo zahtjevnijim funkcijama i njihovim svojstvima, a za to je potreban dobar temelj kojeg profesori na fakultetima i očekuju da će studenti imati nakon završene srednje škole.

Poglavlje 3

Funkcije u srednjoškolskim udžbenicima

Kako se Kurikulum u sklopu obrazovne reforme uvodio postupno, u prva tri razreda srednje škole u školskoj godini 2020./2021. koristili su se udžbenici prilagođeni njemu, dok su se u četvrtom razredu i dalje koristili udžbenici pisani prema Nacionalnom okvirnom kurikulumu. U ovom poglavlju ćemo postupno, po svakom razredu, uspoređivati sadržaje udžbenika vezane uz funkcije. Kako se od školske godine 2021./2022. i u četvrtom razredu koriste udžbenici prilagođeni novom Kurikulumu, promatrat ćemo te nove udžbenike. Pri proučavanju udžbenika zanimat će nas na koji način se uvode pojedine funkcije, odnosno jesu li dani motivacijski zadaci. Ako jesu, zanima nas koja je svrha i što učenici iz njega mogu uočiti ili naučiti. Kako se bavimo srednjoškolskim obrazovanjem proučavat ćemo i definicije. Zanima nas koriste li se uopće i jesu li dovoljno precizne. Proučavanjem elementarnih funkcija i funkcija općenito otkrivaju se njihova svojstva i tvrdnje, no pojavljuju li se ona u svim udžbenicima? Ako se pojavljuju, kako su svojstva iskazana i jesu li izvedena? Jesu li tvrdnje precizno iskazane i jesu li dokazane? Kada se osvrnemo na udžbenike koje uspoređujemo trebamo se pitati je li način poučavanja u njima prilagođen učeniku i može li učenik koristeći se udžbenikom razumjeti i savladati pojedino gradivo.

3.1 Funkcije u prvom razredu gimnazije

U prvom razredu gimnazije se prema aktualnom Kurikulumu obrađuju linearne funkcije. U nekim udžbenicima govori se i o trigonometrijskim funkcijama kod pravokutnog trokuta, no zapravo se to odnosi na trigonometrijske omjere u pravokutnom trokutu. Trigonometrijske funkcije se kao funkcije obrađuju tek u trećem razredu srednje škole. Na koji način se obrađuju linearne funkcije vidjet ćemo usporedbom nekih od udžbenika.

Nastavna cjelina *Linearne funkcije* u prvom udžbeniku (vidi [20]) osmišljena je tako da se najprije uči koordinatni sustav, potom linearna funkcija i graf funkcije $f(x) = |x|$. Zatim se naučeno primjenjuje kod sustava linearnih jednadžbi i sjecišta dvaju pravaca. Konačno se radi primjena sustava linearnih jednadžbi. Osim ishoda učenja, na samom početku poglavlja navedeni su i razlozi zašto nam trebaju linearne funkcije u svakodnevnom životu.Kako se često postavlja pitanje "Što će nam to u životu?" i učenici ne vide da je matematika indirektno svuda oko njih, ovim pristupom ipak im se može približiti njena svrhovitost. S nekom od iznad navedenih situacija su se vjerojatno susreli i nesvjesno koristeći linearnu funkciju došli do potrebnih vrijednosti. Ako učenici i ne pročitaju uvod u poglavlje, ovo može biti smjernica nastavniku na koji način bi mogao zainteresirati učenike za gradivo. Dovoljna je neka ideja kako bi se osmislio motivacijski zadatak blizak učenicima i stvarnom životu. U drugom udžbeniku (vidi [21]) se pak navode samo ishodi učenja, ali i time se može približiti učeniku što će sve učiti i primjenjivati. Nastavna cjelina je koncipirana slično kao i u prvom udžbeniku.

Prije nego se krenu obrađivati linearne funkcije, u oba udžbenika se definiraju funkcije. U prvom udžbeniku (vidi [20]) one se uvode kroz dva primjera iz svakodnevnog života - primjer s grafičkim prikazom skupa podataka povezanih s promjenom duljine suknje kroz povijest i primjer s tablicom u kojoj se nalaze podaci vezani uz buku. Kroz te primjere želi se pokazati veza između ulaznih i izlaznih vrijednosti prikazanih u grafičkom prikazu, odnosno tablici. Objašnjava se da su ulazne vrijednost, primjerice, godine u prvom primjeru, a izlazne vrijednosti udaljenosti ruba suknje do poda. Funkcijama se nazivaju veze između veličina koje su na neki način povezane. Za funkcije se u udžbeniku još navodi sljedeće:

Funkcija svakoj ulaznoj vrijednosti pridružuje točno jednu izlaznu vrijednost.

Ovim načinom se želi približiti funkcije učenicima povezivanjem s primjerima, no način nije matematički precizan. U osnovnoj školi učenici se ne susreću sa strogim definicijama jer se naglasak stavlja na razumijevanje gradiva, dok definicije u kojima se koristi matematički jezik i simboli mogu zbuniti učenike. Tako i ovdje vidimo da je cilj da učenici razumiju što su to funkcije, a pritom si mogu i vizualizirati ovu rečenicu zamišljajući primjerice Vennove dijagrame.

Zapisivanje funkcije se objašnjava pomoću primjera u kojem se određuje ukupna cijena koju treba platiti za tri različite količine kikirikija koje želimo kupiti ako znamo cijenu kilograma kikirikija. S obzirom da se prema novom Kurikulumu funkcije se ne uče u osnovnoj školi, učenike se kroz primjere upoznaje s funkcijama općenito te im se na taj način približava pojam funkcije.

U drugom se udžbeniku (vidi [21]) funkcija uvodi promatranjem dvaju skupova i veze koju možemo uspostaviti između elemenata tih dvaju skupova. Iako se strogo ne definira što je funkcija, u udžbeniku je objašnjena na sljedeći način:

Svaki put kad svakom elementu skupa D pridružimo točno jedan element skupa K, kažemo da smo zadali funkciju sa skupa D u skup K i pišemo $f : D \to K$.
Ovdje je veza između elemenata iskazana matematički preciznije i koristeći matematičke simbole. Time se, možemo reći, učenike uvodi u matematički način pisanja i razmišljanja. Uvođenje zapisa funkcije matematičkim simbolima zahtijeva razumijevanje kako bi učenik doista bio svjestan da zapis $f : D \to K$ znači "funkcija sa skupa D u skup K", a pritom zna i koja je matematička pozadina u tom zapisu. Zato se u ovom udžbeniku uči i o domeni, kodomeni i slici funkcije. One se proučavaju i objašnjavaju kroz primjere. Dakle, u ovom udžbeniku funkcije se kroz primjere objašnjavaju učeniku, čime se želi postići razumijevanje pojma funkcija. S druge strane, želi se matematički preciznije i temeljito obuhvatiti pozadina koju učenici trebaju savladati kako bi u daljnjem učenju imali dobar temelj za razumijevanje raznih funkcija i njihovih svojstava.

Nastavna jedinica *Linearna funkcija* u prvom udžbeniku (vidi [20]) nema uvoda. Za početak se samo navodi kakve sve funkcije imamo te da su linearne funkcije najjednostavnije funkcije i da su one polinomi prvog stupnja. Linearna funkcija definira se na sljedeći način:
Ako ulaznu vrijednost označimo s x, a izlaznu s y, linearna je funkcija oblika

$$y = kx + l,$$

gdje su k i l zadani realni brojevi i $k \neq 0$. Realne brojeve k i l zovemo koeficijentima; k je linearni, a l slobodni koeficijent.
Naglašava se kako se za linearnu funkciju može pisati i $f(x) = kx + l$ te je tada $y = f(x)$. Primijetimo kako se ovdje funkcija definira isključivo koristeći pravilo pridruživanja, što nije matematički precizno.

Drugačiji pristup vidimo u drugom udžbeniku (vidi [21]). Linearna funkcija se uvodi kroz primjer iz svakodnevnog života, u kojemu se treba odrediti mjesečni račun pretplatnika kod nekog mobilnog operatera ako je imao određenu potrošnju podatkovnog prometa. Zadana je cijena mjesečne pretplate i cijena 1 MB podatkovnog prometa. Učenici trebaju uočiti uzorak i tada se na jednostavan način, koristeći nepoznanicu x za broj MB, može odrediti iznos računa za x MB. Kako bi se naglasila ovisnost iznosa računa o broju MB, koristi se funkciju. Naglasak je da je svakom broju MB pridružen jedan i samo jedan iznos računa. Određujući iz kojeg skupa je varijabla x, a iz kojeg rezultat $f(x)$, dobivamo precizno zadanu funkciju. U ovom slučaju tu funkciju se zapisuje na sljedeći način:

$$f : [0, \infty\rangle \to \langle 0, \infty\rangle, \quad f(x) = 0.49x + 40.$$

Ovakvim pristupom se koristi već naučeno o linearnim jednadžbama i funkcijama općenito kako bi se učeniku približile linearne funkcije. Učenik će osvijestiti što znači linearna ovisnost te će imati viziju u kakvim situacijama se ona primjenjuje.

U motivacijskom zadatku imamo precizno zadanu linearnu funkciju njenom domenom, kodomenom i pravilom pridruživanja. Isto tako, ovdje se linearna funkcija definira preciznije:
Neka su a i b realni brojevi, $a \neq 0$. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana pravilom $f(x) = ax + b$ naziva se linearna funkcija.

Pod nazivom linearnih funkcija u ovom udžbeniku svrstavaju se i funkcije oblika $f(x) = b$, odnosno konstantne funkcije.

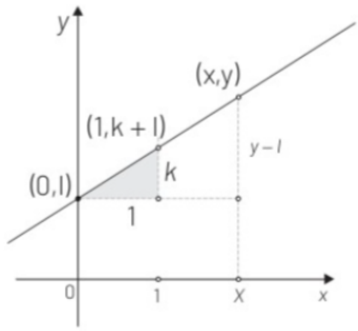
Sljedeće što se obrađuje u udžbenicima je graf linearne funkcije. Prije nego se krene otkrivati graf linearne funkcije, u prvom udžbeniku (vidi [20]) objašnjava se što je to općenito graf funkcije:
Ako u koordinatni sustav ucrtamo sve točke (x, y) kojima je apscisa ulazna vrijednost (nezavisna varijabla), a ordinata izlazna vrijednost (zavisna varijabla) neke funkcije, dobit ćemo graf te funkcije.

U drugom udžbeniku (vidi [21]) se pak graf funkcije definira precizno na sljedeći način:
Graf funkcije $f : D \to K$ je skup $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in D\}$.

Postavimo se ovdje u situaciju jednog učenika. Pročitamo li prvi opis grafa funkcije sasvim nam je jasno na koji način ćemo pristupiti crtanju grafa funkcije. Je li nam to dovoljno jasno iz definicije grafa? Ako znamo iščitati značenje matematičkog zapisa, prepoznajemo da imamo skup točaka oblika $(x, f(x))$. Ako smo savladali koordinatni sustav, znamo kako točke možemo ucrtati u koordinatni sustav. U suprotnom nastaje problem. Dakle, da bismo koristili ovakav zapis definicije, trebali bismo biti sigurni da su učenici naučili koordinatni sustav i ucrtavanje točaka te da se snalaze s matematičkim zapisima.

U prvom udžbeniku (vidi [20]) postupno se dolazi do toga da je graf linearne funkcije pravac čija je jednadžba $y = kx + l$. Primjenom sličnosti trokuta (Slika 3.1) pokazuje da je bilo koja točka (x, y) pravca doista točka pravca linearne funkcije.
Kod grafa linearne funkcije proučava se pravac i njegova jednadžba te kako linearni koeficijent k, koji određuje nagib tog pravca, utječe na pravac.

Za graf linearne funkcije $f(x) = ax + b$ u drugom udžbeniku (vidi [21]) se navodi da je to skup $\{(x, ax+b) : x \in \mathbb{R}\}$. Taj skup je pravac s jednadžbom $y = ax+b$. Objašnjavaju se i što koeficijenti a i b predstavljaju kod grafa linearne funkcije. Broj a se naziva koeficijentom smjera tog pravca, a broj b odsječkom na y-osi.



Slika 3.1: Graf linearne funkcije iz [20]

Za razliku od prvog udžbenika, u drugom udžbeniku (vidi [21]) se proučavaju rast i pad funkcija proučava detaljnije. Kroz primjere najprije se promatra kako graf linearne funkcije izgleda u ovisnosti o predznaku koeficijenta smjera, a potom što se događa s točkama oba pravaca ako povećavamo varijablu x. Ovdje se ne proučava samo kroz primjere, već se i dokazuje općenita tvrdnja:
Ako je koeficijent smjera a pozitivan, funkcija raste, a ako je koeficijent smjera a negativan funkcija pada.

Uspoređivanjem udžbenika vidimo kako u prvom udžbeniku dokaza nema, a u drugom ima te se u dugom udžbeniku malo više poučava i teorija. S obzirom da se radi o prvom razredu srednjoškolskog obrazovanja često se postavlja pitanje nije li možda preveliki skok u načinu poučavanja između osnovne i srednje škole. Tu se krije i problem predznanja učenika i njihovog pristupa učenju matematike u osnovnoj školi. Nije rijetkost da uče šablonski i bez razumijevanja. Ovakvim jednostavnim dokazima u prvom razredu mogu naučiti razmišljati na način da poznavajući teoriju i razumijevajući ju, mogu riješiti razne nestandardne zadatke. Pristupajući raznim problemima uče se razmišljati, logički povezivati, zaključivati i pritom argumentirati svoje zaključke. Baš kako je u ovom udžbeniku osmišljeno, otkrivajući neko pravilo na konkretnim primjerima, lako se dolazi do načina na koji se općenita tvrdnja može dokazati ili opovrgnuti. Tim pristupom ne bi trebalo biti velikih problema kod učenikovog razumijevanja dokaza. S druge strane pak, u prvom udžbeniku formalnih dokaza nema, ali se ipak potiče učenike na razmišljanje o problemu i uči ih se da si postavljaju pitanja o tome je li zaključak do kojeg su došli doista istinit. To smo mogli vidjeti kod uvođenja grafa linearne funkcije kao što je opisano na prethodnoj stranici.

U drugom udžbeniku je zanimljivo što je zadnji zadatak za vježbu povezan s grafom funkcije $f(x) = |x|$, koji je tema sljedeće nastavne jedinice. Jedan podzadatak tog zadatka je sljedeći:

Nacrtaj grafove funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}.$$

Dakle, crtajući razlomljenu funkciju učenici primjenjuju definiciju funkcije apsolutne vrijednosti. To im je dobra priprema za ono što slijedi.

Kao što je navedeno, sljedeće se u oba udžbenika obrađuje graf funkcije $y = |x|$. Najprije se ponavlja definicija apsolutne vrijednosti i temeljem toga zaključuje kako graf funkcije treba izgledati. U drugom udžbeniku (vidi [21]) učenici su kroz prethodno spomenuti zadatak to već mogli savladati. Sada samo nadograđuju naučeno.
Drugi način crtanja grafa funkcije apsolutne vrijednosti je tako da se prvo crta graf linearne funkcije i zatim se dio pravca u donjoj poluravnini zrcali s obzirom na os apscisa. Kroz primjere i zadatke se crtaju razne varijacije funkcije apsolutne vrijednosti oblika $f(x) = |kx+l|$.

Uspoređujući ova dva udžbenika vidimo kako se u oba kroz primjere pokušava što više približiti gradivo učeniku i objasniti na konkretnim primjerima. Drugi udžbenik matematički preciznije kroz definicije i dokaze produbljuje razmišljanje o matematičkoj pozadini raznih formula, zaključaka i primjera. U prvom udžbeniku se linearna funkcija definira različito od onog što je najčešće korišteno u raznoj literaturi. Koristi se formulu $y = kx + l$ za linearnu funkciju, što se najčešće podrazumijeva kao linearna jednadžba. Iako to pojednostavljuje razumijevanje povezanosti linearne funkcije i jednadžbe, u budućem matematičkom obrazovanju učenici mogu zamjenjivati pojmove jednadžbe i funkcije. Različiti pristup smo vidjeli i kod grafa funkcije, gdje se u drugom udžbeniku koristi stroga matematička definicija grafa, no za takav pristup učenici bi trebali ima dobro predznanje o koordinatnom sustavu, ucrtavanju točaka u koordinatni sustav, ali i razumijevanju matematičkih izraza.

3.2 Funkcije u drugom razredu gimnazije

U drugom razredu gimnazije se prema aktualnom Kurikulumu obrađuju kvadratne funkcije i uči se općenito o funkcijama. Na početku nastavnih cjelina u promatranim udžbenicima navedeni su ishodi učenja. Učenicima to daje uvid što će učiti, odnosno što se od njih očekuje da znaju nakon što završe s nastavnom cjelinom.

U prvom udžbeniku (vidi [22]) nastavna cjelina *Kvadratna funkcija* osmišljena je tako da se najprije uvodi i definira kvadratna funkcija. Potom se crtaju grafovi funkcije $f(x) = ax^2$ i translacije grafa, a onda se to primjenjuje na crtanje grafa funkcije $f(x) = ax^2+bx+c$. U drugom udžbeniku (vidi [13]) je cjelina malo drugačije osmišljena. O kvadratnoj funkciji uči se unutar nastavne jedinice u kojoj se obrađuje graf funkcije $f(x) = ax^2$ i translacije grafa. Potom se obrađuje graf funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ i ekstremi. Nul-točke polinoma drugog stupnja i njegov graf se obrađuju u zasebnoj nastavnoj jedinici.

U prvom udžbeniku (vidi [22]) se započinje motivacijskim zadatkom iz fizike u kojem se lopta baca uvis te je zbog djelovanja gravitacijske sile formula za dostignutu visinu $s(t) = -\frac{g}{2}t^2+vt$. Od učenika se traži da pomoću programa dinamičke geometrije nacrta graf funkcije s i promatra kako promjena vrijednosti v utječe na graf. Ovime se učenika potiče na samostalno istraživanje o grafu kvadratne funkcije. Uz primjenu tehnologije, učenik će bez poznavanja kvadratne funkcije doći do zaključaka čiju će točnost provjeriti kroz postupno proučavanje crtanja grafa funkcije i njegovih svojstava. U drugom udžbeniku (vidi [13]) dana je uvodna pričica o Galileo Galileu koji je istraživao zakonitosti o slobodnom padu tijela. Jednadžbom $s = \frac{g}{2}t^2$ izražava se prijeđeni put nekog tijela pri slobodnom padu u vremenu t. Kako bi se naglasila ovisnost prijeđenog puta o vremenu jednadžbu možemo zapisati u obliku funkcije $s(t) = \frac{g}{2}t^2$. To je kvadratna funkcija jer je prijeđeni put proporcionalan s kvadratom vremena.

Slobodni pad i vertikalni hitac učenici su već susreli u nastavi fizike u prvom razredu srednje škole. Dakle, samo se prisjećaju već poznatih formula o kojima će sada produbiti znanje. Pritom je motivacijski zadatak iz prvog udžbenika možda bolji način kako učenicima približiti ono o čemu će se raditi kroz nastavnu cjelinu.

U prvom udžbeniku se kvadratna funkcija definira na sljedeći način:
Kvadratna funkcija je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdje su koeficijenti a, b, c realni brojevi i $a \neq 0$.

U drugom udžbeniku (vidi [13]) kvadratna funkcija se slično definira. Razlika je što se ovdje imenuju koeficijenti funkcije. Iako nazivi nisu bitni za definiranje funkcije, njihovo poznavanje učenicima će olakšati snalaženje u drugim literaturama, ali i kasnije u matematičkom obrazovanju.

Najviše se pažnje u udžbenicima pridaje crtanju grafa kvadratne funkcije, odnosno parabole. Crtanje grafa kvadratne funkcije proučava se postupno, počevši od funkcije $f(x) = ax^2$. Kreće se od najjednostavnije kvadratne funkcije $f(x) = x^2$, čiji se graf crta slično u oba udžbenika. Objašnjava se i simetričnost grafa, značenje parnosti, tjeme i rast, odnosno pad funkcije. Potom se kroz primjere proučava crtanje grafova funkcije oblika $f(x) = ax^2$. Dolazi se zaključka da je koeficijentom a potpuno određen smjer otvorenosti parabole. U oba udžbenika detaljno se komentira promjena oblika parabole ovisno o predznaku i iznosu vodećeg koeficijenta. Zatim se na sličan način crtaju grafovi funkcija $f(c) = ax^2 + c$ i $f(x) = a(x - x_0)^2$ pomoću grafa funkcije $f(x) = ax^2$. Dakle, postupno se nadograđuje znanje i učenici otkrivaju mogućnosti kako sve grafovi kvadratne funkcije mogu izgledati. Potom se do sada naučeno primjenjuje za crtanje grafa funkcije $f(x) = a(x - x_0) + y_0$. Ovdje se očekuje od učenika da su savladali prethodne grafove funkcija te sada naučeno mogu direktno primijeniti na crtanje grafa ovog oblika, bez dodatnih pomoćnih tablica vrijednosti funkcije.

Konačno, dolazimo do grafa funkcije $f(x) = ax^2+bx+c$. U oba udžbenika objašnjavaju se dvije metode za crtanje grafa. Prva metoda u oba udžbenika je korištenje transformacije funkcije $f(x) = ax^2+bx+c$ u oblik $f(x) = a(x-x_0)^2+y_0$ postupkom nadopunjavanja do kvadrata binoma. Nakon transformacije znamo kako nacrtati graf zadane kvadratne funkcije pomoću translacija grafa funkcije $f(x) = ax^2$. U prvom udžbeniku se na primjeru najprije pokazuje kako se nadopunjava trinom do kvadrata binoma, a zatim se izvodi općeniti postupak za funkcije oblika $f(x) = ax^2 + b + c$. U drugom udžbeniku se kao i u prvom udžbeniku izvodi opći postupak transformacije kvadratne funkcije iz oblika $f(x) = ax^2 + bx + c$ u oblik $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$. Razlika je u tome što se najprije izvodi opći postupak, a potom se kroz primjer objašnjava primjena naučenog na crtanju grafa konkretne kvadratne funkcije. Postupno uvođenje transformacije iz prvog udžbenika je učenicima jasnije jer prvo na konkretnoj funkciji dobiju ideju kako transformirati trinom, a potom ju primjenjuju na općenitim funkcijama. Već sada se spominju minimum i maksimum funkcije, te se navodi kako su to ekstremi funkcije, pri čemu se oni u drugom udžbeniku opširnije objašnjavaju. Time učenici počinju učiti nove pojmove vezane uz funkciju koje će kasnije u višim razredima razvijati i nadograđivati. U prvom udžbeniku se nul-točka definira na sljedeći način: *Nul-točka kvadratne funkcije* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *je realni broj* x *za koji vrijedi* $f(x) = 0$.

Kratko se navodi da ovisno o diskriminanti kvadratne jednadžbe ovisi koliko funkcija može imati nul-točki. Nul-točke se obrađuju zasebno u drugom udžbeniku (vidi [13]). Definiraju se kao i u prvom udžbeniku, ali se ovdje na jednostavnim primjerima objašnjava kako o diskriminanti kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ ovisi broj nul-točaka. Ovaj pristup je bolji od čistog navođenja koliko nul-točki ima funkcija ovisno o diskriminanti. Iako su učenici diskriminantu naučili kod kvadratnih jednadžbi, dobro je proučiti primjenu na konkretnim primjerima i osvijestiti način zaključivanja o broju nul-točki.

Druga metoda kojom crtamo graf kvadratne funkcije jest pomoću njenih svojstava i karakterističnih točaka, odnosno ispitivanjem tijeka funkcije. U oba udžbenika se daju se algoritmi kojim se učenici mogu voditi kada rade ispitivanje tijeka funkcije. Algoritmi se malo razlikuju, ali nijedan od tih algoritama nije manjkav, jer kada usporedimo način na koji se oni primjenjuju zapravo dobivamo isto.

Promatrajući nastavnu cjelinu "Kvadratna funkcija", vidimo da se u oba udžbenika obrađuju temeljni pojmovi, no neki dijelovi su različiti. U prvom udžbeniku se više pažnje posvećuje crtanju grafova i to je popraćeno raznim primjerima i brojnim zadacima za uvježbavanje. U cilju je da učenik razumije svaku vrstu transformacija koje se rade s grafom funkcije $f(x) = ax^2$. Kada učenici to dobro savladaju, dva načina crtanja grafa funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ će im biti jasnija. Pritom će i nove pojmove bolje savladati jer su do tada već došli do raznih zaključaka kroz primjere. Sada će ih samo primijeniti i imenovati neke bitne elemente. U drugom se udžbeniku više pažnje posvećuje crtanju grafa funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$, svojstvima grafa i novim pojmovima. To je također dobro i korisno, jer učenici mogu temeljito savladati pojmove koje će kasnije sve više koristiti te povezivati s drugim funkcijama i nadograđivati znanje o njima. Bilo bi dobro kada bi se pri poučavanju obuhvatilo oba detaljnije objašnjena dijela. Kada učenici na jednostavnijim funkcijama dobro savladaju transformacije, pojmove, svojstva i njihovu primjenu, kod ostalih funkcija će puno lakše i brže savladavati gradivo povezano uz nove, do sada im nepoznate funkcije.

Sljedeća nastavna cjelina u udžbenicima posvećena je funkcijama općenito. U prvom udžbeniku (vidi [22]) cjelina je koncipirana na način da se prvo savladavaju osnovni pojmovi vezani uz funkciju, a zatim graf funkcije. Na kraju se obrađuje bijekcija i inverzna funkcija. Dakle, postupno se izgrađuju bitni elementi povezani s funkcijama općenito. U drugom udžbeniku (vidi [13]) cjelina je osmišljena malo drugačije. Prvo se obrađuje zadavanje funkcije i određivanje područja definicija. Slijede grafovi jednostavnih funkcije, na koje se nadovezuje određivanje domene i slike funkcije. Nakon toga proučava se slaganje funkcije i injektivnost te inverzna funkcija i njen graf.

Prije otkrivanja osnovnih pojmova, učenicima se u prvom udžbeniku zadaje da trebaju istražiti formule i/ili grafove kojima su opisane veze između raznih elemenata iz matematike, fizike i kemije. Na primjer, vezu između napona i jakosti struje uz stalan otpor te vezu između postotka naučenog gradiva i broja ponavljanja (za ostale primjere pogledati [22]). Dakle, želi se povezati matematika s drugim predmetima, a istovremeno učenici otkrivaju neke pravilnosti na već poznatim pojmovima. U budućnosti kada budu učili neku od pravilnosti, ovakvo istraživanje im može pomoći pri razumijevanju.

U udžbeniku se navodi kako je za precizno zadavanje funkcije potrebno opisati tri podatka: domenu funkcije, kodomenu funkcije i pravilo po kojem funkcija djeluje. Domena i kodomena se kratko opisuju, a uz njih se opisuje i slika funkcije. Sve je objašnjeno kroz jednostavne primjere te se na taj način, bez kompliciranja, objašnjavaju temeljni pojmovi vezani za funkciju. Učenik će ovakvim postupnim objašnjavanjem zasigurno bolje razumjeti ove pojmove. Spominje se i prirodna domena funkcije. Objašnjava se kako rečenicom "Dana je funkcija $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$" se ne preciziraju domena i kodomena, već je zadano samo pravilo po kojem funkcija djeluje. Ovo je vrlo bitno naglasiti jer se može zanemariti na kojem skupu je funkcija definirana i time dolaziti do krivih zaključaka.

U drugom udžbeniku (vidi [13]) na početku se želi objasniti kako se zadaju funkcije. Navodi se niz primjera pridruživanja koja su svuda oko nas jer je ideja pridruživanja temelj definicije funkcije. Pomoću Vennovih dijagrama se prikazuju primjeri onoga što je, a što nije funkcija. U ovom udžbeniku se funkcija definira i imenuju se svi njeni elementi:
Ako je svakom elementu x nekog skupa A pridružen točno jedan element y skupa B, tada kažemo da je definirana funkcija (preslikavanje) f iz skupa A u skup B. Pišemo $f : A \to B$ i $y = f(x)$. Element x naziva se još argument funkcije f, a y vrijednost te funkcije. Da je elementu x pridružen y zapisujemo još i simbolom: $x \mapsto y$ (čita se: x se preslikava u y).

Iako je u drugom udžbeniku dana definicija funkcije, a u prvom udžbeniku nije, sve bitne činjenice su navedene u oba udžbenika. Učenicima je možda lakše kada se kroz priču popraćenu s nekoliko primjera objasne svi pojmovi, ali i definicija dana u drugom udžbeniku je dovoljno razumljiva. Posebice ako se učenik osvrne i na Vennove dijagrame iz kojih se vidi što je, a što nije funkcija. Razlika između udžbenika je i u tome što u drugom udžbeniku se za sada ne spominje slika ni prirodna domena funkcije.

Slijedeće se obrađuje graf funkcije. U prvom udžbeniku (vidi [22]) definira se graf funkcije, a potom i slika funkcije koju se već objašnjavalo.
Graf funkcije $f : D \to K$ je skup $\{(x, f(x)) : x \in D\}$.

Slika funkcije $f : D \to K$ je skup svih vrijednosti funkcije, tj. to je skup

$$\{f(x) : x \in D\}.$$

U drugom udžbeniku graf funkcije se definira na sljedeći način:
Graf Γ_f funkcije f skup je svih točaka $(x, f(x))$ za sve x iz domene $\mathcal{D}$ funkcije f:

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in \mathcal{D}, y = f(x)\}.$$

Vidimo kako ova definicija koristi drugačiji matematički zapis i u njemu se dodatno označava i graf s Γ_f. No, čitajući ovu definiciju, za razliku od one iz prvog udžbenika, učenik lakše može shvatiti što je graf već iz teksta. Iako, učenici bi sada već trebali baratati sa ovakvim matematički zapisima i znati ih pročitati. U oba udžbenika se objašnjava i vertikalni test.

U drugom udžbeniku se kroz primjere objašnjavaju i funkcije koje su zadane različitim formulama na različitim intervalima. Također, navodi se kako zakon pridruživanja često nije zadan eksplicitnom formulom pa se učenicima daje primjer kako shvatili na što se misli. Dakle, usporedimo li ovaj udžbenik i prvi udžbenik vidimo kako se ovdje objašnjavaju i neki dodatni oblici funkcija te načini zadavanja funkcija. S obzirom da se u drugom razredu učenici ne susreću s ovakvim funkcijama i načinima zadavanja, pitanje je je li potrebno proširivati temu. Svakako ovo može poslužiti za razvijanje učenikovog razmišljanja, ali ovo bi bilo dobro ostaviti kao prošireni sadržaj ili dodatni sadržaj za učenike koji sami žele proučavati dodatno funkcije.

Uz linearne i kvadratne funkcije, uči se crtati i racionalne funkcije oblika $f(x) = \frac{a}{x}$ te funkcije korjenovanja koje su oblika $f(x) = \sqrt{ax + b}$.

U prvom udžbeniku (vidi [22]) za početak se crta graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ te detaljno objašnjava i ponašanje funkcije. Ovdje se spominju i asimptote funkcije kojima će učenici više učiti tek kasnije, ali će imati viziju što su to asimptote. Kod crtanja grafova funkcija korjenovanja postupak je isti kao kod crtanja racionalne funkcije. Ali, kod crtanja grafa funkcije $h(x) = \sqrt{2x + 1}$ objašnjava se i drugi način crtanja pomoću transformacija grafa funkcije $f(x) = \sqrt{x}$.

U drugom udžbeniku (vidi [13]) su drugačije i detaljnije objašnjeni i grafovi jednostavnih funkcija. Funkcija obrnute proporcionalnosti objašnjava se promatranjem dvaju sličnih trokuta te se dolazi do zaključka da ako se površina trokuta ne mijenja, onda su stranica i visina na tu stranicu obrnuto proporcionalne. Veza visine i stranice može se opisati funkcijom obrnute proporcionalnosti $f(x) = \frac{k}{x}$, pri čemu je $k > 0$ neki čvrsti broj. Za graf se navodi kako se naziva hiperbola te se kroz primjere promatraju njena svojstva. Dodatno, graf racionalne funkcije kojoj su u brojniku i/ili nazivniku linearne funkcije dobiva se translacijom grafa funkcije $f(x) = \frac{k}{x}$. Graf funkcije drugog korijena se također postupno objašnjava na primjeru iz svakodnevnog života. Najprije se daje primjer ovisnosti prijeđenog puta o vremenu koji se iskazuje formulom $s(t) = \frac{1}{2}at^2$ te se crta graf kvadratne funkcije. Za obratni problem, ovisnost vremena o prijeđenom putu, potrebno je koristiti funkciju drugog korijena. Veza se zapisuje u obliku $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$. Crtanjem grafa funkcije dolazi se do zaključka da je graf jedna grana parabole kojoj je os apscisa os, a tjeme joj je u ishodištu. Uočimo kako se u primjeru koristi inverzna funkcija. Kako učenici još nisu učili kako odrediti inverznu funkciju, ovo je dobar primjer u kojem se učenici nesvjesno njom koriste.

Tek sada se u drugom udžbeniku objašnjavaju prirodna domena i slika funkcije i to kroz niz primjera. Učenici kada vide sliku s grafom funkcije, možda će bolje shvatiti ova dva pojma. Lakše ih je razumjeti kada se vizualizira, nego kada se o njima govori teorijski. S obzirom da određivanje slike funkcije nije jednostavno, u udžbeniku se određuju samo slike najjednostavnijih funkcija.

U zadnjoj nastavnoj jedinici u prvom udžbeniku (vidi [22]) obrađuje se bijektivnost te inverzna funkcija. Kreće se od injektivnosti funkcije koja se uvodi pomoću prikaza Vennovim dijagramima, a definira se na sljedeći način:

Za funkciju $f : D \to K$ kažemo da je injekcija ako svaka dva različita elementa iz domene D preslikava u dva različita elementa kodomene K, tj.

$$\textit{ako su } x_1, x_2 \in D \textit{ takvi da je } x_1 \neq x_2, \textit{ tada je } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Injektivnost se ispituje na dva načina: koristeći se definicijom ili koristeći horizontalni test. Potom slijedi surjektivnost koja se također uvodi pomoću prikaza dviju funkcija Vennovim dijagramima i definira se na sljedeći način:

Za funkciju $f : D \to K$ kažemo da je surjekcija ako za svaki $y \in K$ postoji $x \in D$ takav da je $f(x) = y$.

I surjektivnost možemo provjeriti na dva različita načina, koristeći se definicijom ili horizontalnim testom. Kako se horizontalni test koristi i kod injektivnosti i kod surjektivnosti, lako je zaključiti i povezati što je bijektivnost.

Ako je $f : D \to K$ injekcija i surjekcija, tada ju nazivamo bijekcija.

Inverzna funkcija uvodi se promatrajući bijektivnu funkciju $f : [0,2] \to [0,4]$, $f(x) = x^2$. Zamjenom redaka tablice vrijednosti ove funkcije dobivamo tablicu vrijednosti nove funkcije koja preslikava elemente iz $[0,4]$ u $[0,2]$. Takva funkcija je $f^{-1} : [0,4] \to [0,2], f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ te se naziva inverznom funkcijom. Crtajući grafove funkcija f i f^{-1} uočavamo da su njihovi grafovi osnosimetrični s obzirom na pravac $y = x$.

U drugom udžbeniku (vidi [13]) dodatno se obrađuje slaganje funkcija, odnosno kompozicija funkcija. To se u prethodnom udžbeniku ne spominje. Ono je detaljno objašnjeno uz popratnu sliku pa učenici mogu razumjeti kako općenito ispravno slagati funkcije.
Injektivnost funkcije se objašnjava i definira slično kao i u prvom udžbeniku. Potom se definira inverzna funkcija, prije nego se objasne surjektivnost i bijektivnost funkcije. Kao uvodni primjer za inverznu funkciju dana je pretvorba stupnjeva Celzijusa u Fahrenheitove i obratno, uz popratnu motivacijsku priču iz svakodnevnog života. Učenik se samostalno treba uvjeriti da za sve realne brojeve x i y vrijedi $g(f(x)) = x$ i $f(g(x)) = y$. Za razliku od prvog udžbenika, u ovom udžbeniku je dana definicija inverzne funkcije i ona glasi:
Funkcija g inverzna je funkciji f ako vrijedi:

$$g(f(x)) = x, \text{ za svaki } x \in \mathcal{D}_f,$$
$$f(g(x)) = y, \text{ za svaki } y \in \mathcal{D}_g.$$

Pišemo $g = f^{-1}$. *U isto vrijeme je funkcija* f *inverzna funkciji* g *te je isto tako* $f = g^{-1}$. *Zato kažemo da su funkcije* f *i* g *međusobno inverzne.*

Surjekcija i bijekcija definiraju se kao u prethodnom udžbeniku, a uvjet postojanja inverzne funkcije ovdje se strogo navodi:
Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$ *ima inverznu funkciju onda i samo onda ako je* f *bijekcija.*
Na kraju se obrađuje graf inverzne funkcije gdje se komentira kako su grafovi funkcije i njoj inverzne funkcije simetrični s obzirom na pravac $y = x$.

Usporedbom udžbenika vidimo kako u drugom udžbeniku postoje neki dodatni pojmovi i primjeri funkcija. S obzirom da je ovo gradivo u kojemu treba dobro savladati osnove, a mnogo je novih pojmova i različitih zadataka, takve dodatne stvari bi bilo dobro ostaviti kao dodatni sadržaj. Taj sadržaj mogu proučavati učenici koji žele proširiti svoje znanje. S razlomljenom funkcijom i kompozicijom funkcija učenici će se sigurno susresti kasnije i detaljno ih proučavati, a sada ih to može zbuniti. Različiti poredak kojim se uvode pojmovi nije toliko bitan, ali je bitno u oba slučaja biti uvjeren da su učenici savladali jedan pojam prije nego se krene dalje. Ne treba samo prelaziti po svojstvima funkcija, već treba što bolje objasniti sva njena svojstva i pojmove povezane uz funkcije. Ako sada učenici dobro ne savladaju ovo gradivo, kasnije će imati problem kada se ono bude proširivalo.

3.3 Funkcije u trećem razredu gimnazije

U trećem razredu gimnazije se prema aktualno Kurikulumu obrađuju eksponencijalna i logaritamska funkcija te trigonometrijske funkcije. One obuhvaćaju veliki dio gradiva koje se obrađuje u trećem razredu pa ćemo istaknuti samo najbitnije i/ili zanimljive dijelove tih tema.

U prvom udžbeniku (vidi [19]) se eksponencijalne i logaritamske funkcije obrađuju unutar jedne nastavne cjeline, a trigonometrijske funkcije u drugog nastavnoj cjelini. Na početku svake se navode ishodi učenja, motivacijska priča te razrada odgojno - obrazovnih ishoda. Time se nastavniku daje na uvid ishodi iz Kurikuluma, a učenik može vidjeti što će sve naučiti i gdje je se pojedine funkcije primjenjuju. U drugom udžbeniku (vidi [15]) eksponencijalna i logaritamska funkcija isto se obrađuju zajedno u jednoj nastavnoj cjelini, dok se trigonometrijske funkcije obrađuju kroz dvije nastavne cjeline. U jednoj cjelini se uči o njima, a u drugoj se radi graf. Na početku cjelina navode se samo ishodi učenja, što je dovoljno učeniku kako bi znao što će naučiti.

U prvom udžbeniku (vidi [19]) se nakon kratkog uvodnog ponavljanja o linearnoj i kvadratnoj funkciji i njihovim grafovima definira nova funkcija formulom $f(x) = 2^x$ te se crta njen graf. Potom se crta i graf funkcije $f(x) = 2^{-x}$. Usporedbom grafova uočava se da je graf funkcije $f(x) = 2^{-x}$ simetričan grafu funkcije $f(x) = 2^x$ u odnosu prema osi ordinata. Grafovi su smješteni iznad osi apscisa te joj se $y = 2^x$ približava s lijeve strane, a $y = 2^{-x}$ s desne strane. Potom se pokušava nacrtati graf funkcije $f(x) = (-2)^x$. Za $x = -\frac{1}{2}$ i $x = \frac{1}{2}$ se ne dobivaju realne vrijednosti funkcije pa pripadne točke ne možemo prikazati u koordinatnom sustavu. Zaključak je da baza potencije funkcije $f(x) = a^x$ ne može biti negativna. Za $a = 0$ ili $a = 1$ sve vrijednosti funkcije su jednake pa je takva funkcija konstanta. Dakle, postupno se dolazi do definicije eksponencijalne funkcije:
Funkcija oblika $f(x) = a^x$, gdje je a realni broj $a > 0$ i $a \neq 1$, naziva se eksponencijalna funkcija u skupu realnih brojeva.

Svojstva eksponencijalnih funkcija proučavaju se kroz niz primjera u kojima se uspoređuju grafovi različitih eksponencijalnih funkcija. Pritom se dolazi i do zaključka da nijedan graf ne siječe x-os, ali joj se približavaju. Dakle, eksponencijalna funkcija nema nultočku, ali je x-os asimptota grafa eksponencijalne funkcije. Za asimptote se ne daje definicija, ali ih se objašnjava. Komentira se i razlika eksponencijalnih funkcija prema tijeku funkcije, odnosno rastu ili padu funkcije. Kroz zadatke i primjere pokazuje se da je eksponencijalna funkcija injektivna. Kako je već poznato da je funkcija i surjektivna, to povlači da je eksponencijalna funkcija bijekcija.

U ovom udžbeniku (vidi [19]) se sve objašnjava kroz primjere i time se učeniku olakšava razumijevanje ove funkcije. Ide se postupno i tek kada se otkrije jedno svojstvo prelazi se na novo svojstvo. Učenik u svakom trenutku može pogledati u primjere i objašnjenje i razjasniti nejasnoće ukoliko se pojave.

U nizu primjera crtaju se grafovi funkcija koje se dobivaju transformacijama grafa eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x$. S obzirom da su se transformacije radile već kod linearne i kvadratne funkcije, učenicima ovo nije nešto potpuno novo i uvježbavanjem ih mogu dobro savladati. Novost im je jedino crtanje grafa $g(x) = a^{x+c}$, no s obzirom da ostalo znaju, ovo ne bi trebalo predstavljati veliki problem.

U drugom udžbeniku (vidi [15]) eksponencijalna funkcija uvodi motivacijskim zadatkom iz stvarnog života:
Cijena rabljenog automobila ovisi o više čimbenika od kojih je vrlo bitna godina proizvodnje, odnosno starost automobila. Svake se godine vrijednost nekog automobila umanjuje za 25% *u odnosu na prethodnu. Ako je kao nov automobil stajao* 15 000 *eura, kolika mu je vrijednost nakon n godina?*

Zadatak je riješen i učenici već iz njega mogu prepoznati postupke kojima će se služiti pri rješavanju eksponencijalne funkcije i crtanju njenog grafa. Definicija eksponencijalne funkcije slična je onoj iz prvog udžbenika. Za razliku od prvog udžbenika, ovdje se uvjeti pozitivnosti broja koji je baza potencije objašnjava nakon definicije. Postupno dolaženje do zaključaka o uvjetima prije definiranja funkcije, kao što se radi u prvom udžbeniku, možda je bolji način. Učenici postupno zaključuju i na kraju se objedini sve poznato i zapiše na formalni način. Prije nego se krene s proučavanjem grafova eksponencijalne funkcije izvodi se svojstvo monotonosti eksponencijalne funkcije algebarski uz primjenu svojstva potencija. Ovdje učenici primjenom svoga dosadašnjeg znanja lako mogu izvesti ovo svojstvo.

Graf eksponencijalne funkcije i njegova svojstva obrađuju se u zasebnoj nastavnoj jedinici. Na početku se promatra graf funkcije $f(x) = 10^x$, jer baza $a = 10$ ima posebnu ulogu u računanju potencija. Graf se crta u mjerilu 1:1 i 10:1. S obzirom na brz rast funkcije, zaključuje se da je graf lakše crtati u koordinatnom sustavu s različitim mjerilima na koordinatnim osima. Ovime se želi pokazati da postoje i neke specijalne eksponencijalne funkcije. Također, učenici mogu vidjeti kako u situacijama brzog rasta funkcije ne moraju crtati strogo u mjerilu 1:1. To će im olakšati da kada se nađu u situaciji da trebaju crtati grafove nekih funkcija koje brzo rastu ili padaju, slobodno mogu prilagoditi mjerilo bez da smanje točnost i preciznost grafičkog prikaza.

Kako se zbog glatkoće krivulje može zaključiti da je funkcija definirana za svaki realni broj x, vrijedi da je definirana i za svaki iracionalni broj. Ispravnost tog zaključka u [15] se provjerava algebarski. Postupak provjere može biti zbunjujući i nejasan učenicima koji nisu u potpunosti ovladali temeljnim znanjima o eksponencijalnoj funkciji. Zato je ovaj postupak možda primjereniji za kasnije, kada učenici već svladaju eksponencijalnu funkciju.

Kroz niz primjera u kojima se crtaju grafovi različitih eksponencijalnih funkcija proučavaju se svojstva eksponencijalne funkcije. Pristup je sličan onome iz prvog udžbenika. Na kraju se sva svojstva objedinjuju na jednom mjestu te na taj način učenici lako mogu ponoviti koja su sva svojstva eksponencijalne funkcije.

Dakle, vidjeli smo dva različita pristupa poučavanju eksponencijalne funkcije. U jednom udžbeniku se graf radi od samog početka, a u drugom se prvo definira funkcija, a potom crta njen graf i promatraju svojstva. U prvom udžbeniku se detaljnije objašnjavaju grafovi te se pokazuje i kako crtati grafove koji se dobivaju transformacijama grafa eksponencijalne funkcije. U drugom se kroz motivacijski zadatak učenici svakako upoznaju s grafom eksponencijalne funkcije pa im on kasnije nije nepoznat. U prvom udžbeniku je bolje što se postupno dolazi do definicije tako da se otkriju uvjeti kada eksponencijalna funkcija može biti definirana. Na taj način učenici postupno dolaze od konkretnih prema općenitom zaključku. Svakako način u kojemu se više objašnjava i time približava učeniku nepoznato je bolji za učenika. Postupnim zaključivanjem će puno bolje razumjeti i zapamtiti gradivo.

Sljedeće što obrađuje u udžbenicima je logaritamska funkcija. U prvom udžbeniku (vidi [19]) definira ju se na sljedeći način:
Funkcija oblika $f(x) = \log_a x$, gdje je $a > 0$, $a \neq 1$, naziva se logaritamska funkcija po bazi a.

Crtanjem grafova funkcija $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ i $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ u istom koordinatnom sustavu dolazi se do zaključka da su grafovi funkcija simetrični s obzirom na simetralu prvog i trećeg kvadranta. Kada se u istome koordinatnom sustavu crtaju graf eksponencijalne funkcije i njoj pripadne logaritamske funkcije, može se uočiti da su grafovi izravno povezani zamjenom mjesta koordinata odgovarajućih točaka grafa. Dakle, njihovi grafovi su simetrični s obzirom na pravac $y = x$ te su funkcije međusobno inverzne. S obzirom da su eksponencijalna i logaritamska funkcija po istoj bazi a inverzne funkcije, svojstva tih dviju funkcija su slična ili ista. Sva svojstva se otkrivaju postupno kroz primjere. Na taj način učenici će bolje uočiti i razumjeti ta svojstva.

Kao i kod eksponencijalne funkcije pokazuje se i kako dobiti razne funkcije translacijama logaritamske funkcije $f(x) = \log_a x$. Proučava se kako crtati grafove složenijih logaritamskih funkcija i pomoću simetrije s obzirom na pravac $y = x$ grafove njima inverznih funkcija. A zatim se objašnjava kako odrediti zapise takvih inverznih funkcija.

U drugom udžbeniku (vidi [15]) se u uvodu u logaritamsku funkciju nadovezuje na motivacijski zadatak kod eksponencijalne funkcije. Postavlja se obrnuto pitanje: ako je poznata cijena rabljenog automobila, kolika mu je starost? Zadaje se cijena od 4500 eura i postavlja se pitanje za koji n je $4500 = 15\,000 \cdot (0.75)^n$. Do rješenja se dolazi pomoću računala, crtajući graf odgovarajuće eksponencijalne funkcije $f(n) = 15 \cdot (0.75)^n$ i pravca $y = 4.5$. Već ovdje učenici mogu uočiti neke poveznice između eksponencijalne i logaritamske funkcije i njihovih grafova. No, osim grafički do rješenja se može doći rješavanjem jednadžbe koristeći algoritme.U ovom udžbeniku logaritamska funkcija se definira na drugačiji način nego u prvom udžbeniku:
Logaritamska funkcija po bazi a je pridruživanje $x \mapsto \log_a x$, kojim se pozitivnom realnom broju x pridružuje njegov logaritam. Pišemo: $f(x) = \log_a x$.

Usporedbom definicija iz oba udžbenika možemo zaključiti da je ova definicija preciznija, iako je pisana na nestandardni način. Iz teksta se može protumačiti što su joj domena i kodomena. Kod definicije u prvom udžbeniku je dano pravilo pridruživanja te su navedeni uvjeti za keoficijent a. U ovoj definiciji uvjeti nedostaju pa joj je to mana.

O grafu logaritamske funkcije, njegovim svojstvima i poveznici grafa eksponencijalne i logaritamske funkcije u ovom udžbeniku se ne radi preopširno. Proučavanjem grafičkih prikaza eksponencijalne i logaritamske funkcije u opće slučaju dolazi se do zaključaka o povezanosti tih funkcija i svojstvima logaritamske funkcije.

U ovom udžbeniku se kod primjene eksponencijalne i logaritamske funkcije definira i logistička funkcija te se navodi kako se ona koristi za pojave pri kojima nakon naglog rasta ili pada dolazi do smirivanja.

Kao i kod eksponencijalne funkcije, i ovdje vidimo dva različita pristupa poučavanju. U prvom udžbeniku se puno detaljnije objašnjava te se želi kroz postupno objašnjavanje što više približiti gradivo učeniku. Kroz razne primjere učenici otkrivaju postupno bitna svojstva grafova, dok u drugom udžbeniku se ne posvećuje toliko pažnje tim svojstvima. U prvom udžbeniku se dodatno objašnjava i crtanje grafova dobivenih transformacijama grafa logaritamske funkcije, što je izostavljeno u drugom udžbeniku. Iako su se učenici već upoznali s tranformacijama grafova linearne i kvadratne funkcije, korisno im je vidjeti u primjerima na koji način se to radi s logaritamskom funkcijom.

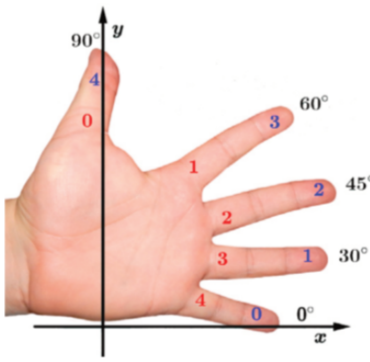
Iduće se u udžbenicima obrađuju trigonometrijske funkcije. U oba udžbenika se za početak objašnjava i definira na sličan način eksponencijalno preslikavanje. U prvom udžbeniku (vidi [19]) navodi se da se u pravokutni koordinatni sustav smjesti kružnica k polumjera 1 sa središtem u ishodištu i brojevni pravac usporedan s y-osi, kojemu je ishodište u točki $A(1,0)$. Kada bismo brojevni pravac namatali na tu jediničnu kružnicu, pozitivan dio brojevnog pravca bi namatali u pozitivnom smjeru, a negativan dio u negativnom smjeru. Pritom se svakom broju s brojevnog pravca pridružuje točno jednu točku na kružnici. Takvo preslikavanje nazivamo eksponencijalno preslikavanje i njega se u udžbeniku definira se na sljedeći način:
Eksponencijalno preslikavanje je funkcija E sa skupa realnih brojeva na skup svih točaka kružnice k koje realnom broju t pridružuje točku $E(t)$ brojevne kružnice. Pišemo još $t \mapsto E(t)$. Kružnicu k nazivamo brojevna kružnica.

U oba udžbenika se na sličan način objašnjavaju i definiraju sve trigonometrijske funkcije. U daljnjem tekstu su objašnjenja i navedene definicije iz prvog udžbenika (vidi [19]). Nakon što se definiralo eksponencijalno preslikavanje, promatra se povezanost trigonometrijskih omjera i brojevne kružnice. Postupno se uz objašnjena dolazi do definicija trigonometrijskih funkcija. Sinus i kosinus se istovremeno definiraju na sljedeći način:
Neka je t realni broj i točka $E(t)$ pridružena broju t eksponencijalnim preslikavanjem. Funkcija koja realnom broju t pridružuje apscisu točke $E(t)$ naziva se kosinus, a pridružena vrijednost označuje se $\cos t$. *Funkcija koja realnom broju t pridružuje ordinatu točke $E(t)$ naziva se sinus, a pridružena vrijednost označuje se* $\sin t$. *Vrijedi* $-1 \leq \sin t \leq 1$ *i* $-1 \leq \cos t \leq 1$.

U prvom razredu srednje škole funkcije tangens i kotangens za šiljaste kuteve u pravokutnom trokutu su definirane s pomoću funkcija sinus i kosinus pa slijedi da je tangens definiran za sve realne brojeve t za koje je $\cos t \neq 0$, a kotangens je definiran za sve realne brojeve t za koje je $\sin t \neq 0$. U primjeru se određuje za koje realne brojeve t vrijedi $\cos t \neq 0$, a u zadatku učenici sami trebaju odrediti za koje realne brojeve t vrijedi $\sin t \neq 0$. Dakle, primjenjujući eksponencijalno preslikavanje i definicije sinusa i kosinusa dolazi se do traženih brojeva t. Učenici na taj način sami otkrivaju domenu tangensa i kotangensa koristeći dosadašnje znanje. Također, ovdje ne rješavaju trigonometrijske jednadžbe već se koriste brojevnom kružnicom i eksponencijalnim preslikavanjem, što im je dobra priprema za kasnije. Tada će biti upoznati s načinom određivanja svih rješenja jednadžbi pomoću brojevne kružnice. Nakon što se odrede vrijednosti brojeva t, tangens i kotangens se također definiraju pomoću trigonometrijske kružnice.

U prvom udžbeniku (vidi [19]) je zanimljiv način na koji se učenicima želi olakšati pamćenje vrijednosti nekih trigonometrijskih omjera pomoću menmotehnike. Na slici 3.2

je prikazano na koji način se učenici pomoću svog dlana mogu prisjetiti vrijednosti. Ono što trebaju dodatno zapamtiti su formule $\sin x = \frac{\sqrt{N}}{2}$ i $\cos x = \frac{\sqrt{N}}{2}$, pri čemu se za N uvrštavaju plavi brojevi sa slike u formulu za sinus, a crveni brojevi u formulu za kosinus. S x je označena pripadajuće vrijednost kuta koji je napisan iznad tog prsta.



Slika 3.2: Mnemotehnika iz [19]

Ova tehnika nije baš poznata među učenicima, a može mnogo olakšati pamćenje vrijednosti trigonometrijskih funkcija i time smanjiti strah i neizvjesnost učenika kada u ispitima znanja računaju s tim vrijednostima. Vrijednosti nisu teške za zapamtiti, ali je lako zabuniti se. Ovu tehniku bi svakako trebalo pokazati svim učenicima, jer je vrlo korisna.

U drugom udžbeniku (vidi [15]) se kao zanimljivost navodi postojanje funkcija sekans $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ i kosekans $\csc x = \frac{1}{\sin x}$, koje se ne koriste kod nas, ali se koriste primjerice u SAD-u. Ovo nije nešto što učenici trebaju znati, ali je dobro poznavati nazive i oznaka ako se slučajno pojave u nekoj literaturi.

Kao što su se i kod svih funkcija koje su se do sada učile crtali njihovi grafovi, crtaju se i grafovi trigonometrijskih funkcija. Grafovi se crtaju postupno uz detaljna objašnjenja i grafičke prikaze. Crtaju se složeniji grafovi sinusoida koji se dobivaju transformacijama. Crtanje graf sinusoide $f(x) = A\sin(Bx + C) + D$, $A \neq 0$, $B > 0$ objašnjeno je postupno kroz primjere. Postupno se objašnjava amplituda, kružna frekvencija, fazni pomak i parametar D te njihov utjecaj na graf sinusoide. Zatim se kroz primjere objašnjavaju i crtaju grafovi složenijih funkcija. Kako je sinusoida zbog svoje periodičnosti drugačiji graf od onih s kojima su se učenici do sada upoznali, postupno objašnjavanje transformacija je vrlo bitno za razumijevanje.

Grafovi trigonometrijskih funkcija u drugom udžbeniku (vidi [15]) obrađuju se u posebnoj nastavnoj cjelini. Na samom početku dan je motivacijski primjer s atrakcijom *Das*

Wiener Riesenrad u zabavnom parku u Prateru. To je veliki kotač na kojemu su smještene kabine iz kojih se vidi panorama grada. U primjeru se prati visina kabine iznad tla prilikom punog obilaska korača. Nakon tog primjera se do grafova svih trigonometrijskih funkcija dolazi na sličan način kao u prvom udžbeniku. Imati ovakav primjer na početku je dobro jer si učenik može vizualizirati vrtnju tog kotača i lakše povezivati s crtanjem grafa sinusoide.

Kroz niz primjera se objašnjava crtanje grafa harmonijske funkcije $f(x) = C \sin(\omega x + \phi)$. Kada usporedimo s prvim udžbenikom vidimo kako funkcije nisu jednake. U prvom udžbeniku se crta graf funkcije $f(x) = A \sin(Bx + C) + D$. Razlika između tih dviju funkcija je samo u parametru D koji sinusoidu pomiče duž y-osi. Ostali parametri u funkcijama su isti, samo se koriste drugačije oznake. Zanemarivanje parametra D u ovom udžbeniku ne predstavlja problem jer se pomicanje grafa duž y-osi radi jednako kao i za graf bilo koje druge funkcije. Ovdje je naglasak na savladavanju crtanja sinusoide s parametrima koje učenici do sada nisu upoznali.

U oba udžbenika se trigonometrijske funkcije obrađuju na vrlo sličan način. U drugom udžbeniku se daje motivacijski zadatak, koji pomaže učeniku vizualizirati namatanje na kružnicu i crtanje sinusoide. U prvom udžbeniku je dana mnemotehnika za vrijednosti trigonometrijskih funkcija kuteva način na koji učenici mogu puno lakše pamtiti te vrijednosti. Razlika između udžbenika je i u tome što se svojstva trigonometrijskih funkcija detaljno proučavaju tek nakon što se nauče svi njihovi grafovi, dok se u prvom udžbeniku promatraju odmah nakon što se nacrta graf svake funkcije. Možda je prirodnije proučiti graf nakon što se nacrta, no ni pristup u drugom udžbeniku nije loš za učenike.

3.4 Funkcije u četvrtom razredu gimnazije

Prema aktualnom Kurikulumu u četvrtom razredu gimnazije analiziraju se funkcije te se uvode derivacije funkcije. Kao što je navedeno u uvodu ovog poglavlja, analizirat će se novi udžbenici prilagođeni ovom Kurikulumu. S obzirom da se kroz sva četiri razreda postupno uvode i objašnjavaju pojmovi i svojstva funkcija, ovdje ćemo već poznate stvari komentirati, a one nove više analizirati. Također, kod derivacija ćemo se samo osvrnuti i komentirati na dijelove povezane sa svojstvima i grafom funkcija.

Nastavna cjelina *Funkcije* u prvom udžbeniku (vidi [17]) osmišljena je tako da se prvo definira pojam funkcije i područje definicije, potom se proučavaju svojstva funkcija. Slijedi kompozicija funkcija i inverzna funkcija. Zadnje se obrađuje limes funkcije kojemu ćemo se ovdje više posvetiti nego već poznatim pojmovima i svojstvima. U drugom udžbeniku (vidi [23]) najprije se obrađuju domena, graf i slika funkcije. Nakon promatranja svojstava funkcija uči se kompozicija funkcije. Na kraju se obrađuje neprekidnost i limes funkcije.

U prvom udžbeniku (vidi [17]) najprije se ponavlja definicija funkcije te neki bitni pojmovi povezani uz samu definiciju. Nakon što se definira graf funkcije, ponavljaju se do sada naučeni grafovi elementarnih funkcija. Objašnjava se i definira prirodna domena i slika funkcije. Ono što se do sada u nekim udžbenicima nije radilo, a objašnjava se, je određivanje funkcija iz vrijednosti funkcije. Navodi se i kako je moguće da je funkcija zadana pravilom pridruživanja tako da formula kojom se zadanoj vrijednosti x pridružuje vrijednost funkcije $f(x)$ nije odmah vidljiva. U drugom udžbeniku (vidi [23]) se na sličan način, ali drugačijim redoslijedom ponavlja pojam funkcije i osnovni pojmovi vezani uz funkciju te graf funkcije. Dodatno se ponavlja pojam nul-točke, predznak funkcije i jednakost funkcija. Dakle, vidimo da se ovo početno ponavljanje osnovnih pojmova vezanih uz funkciju razlikuje u nekim elementima u ova dva udžbenika, no oni važni pojmovi su definirani i objašnjeni i to je najbitnije. Učenicima je važno ovo znati, jer će koristiti u nadolazećim zadacima s novim pojmovima.

Sljedeće se u oba udžbenika ponavljaju svojstva funkcija: parnost i neparnost, periodičnost, monotonost i omeđenost. Načini ponavljanja se razlikuju, jer se u prvom udžbeniku svojstva detaljnije analiziraju, ali se svi pojmovi definiraju na sličan način. U prvom udžbeniku se dodatno ponavlja naučeno o asimptotama, što je dobro jer je to priprema za njihovo određivanje pomoću limesa funkcije.

Kompozicija funkcija se u oba udžbenika na sličan način obrađuje. Kroz niz primjera se objašnjava i analizira kako odrediti kompozicije raznih funkcija. Dodatno se u prvom udžbeniku (vidi [17]) detaljno ponavlja inverz funkcije koji se također objašnjava postupno.

U drugom udžbeniku (vidi [23]) se inverzne funkcije samo definiraju i kratko komentiraju kroz jedan primjer.

Svojstva funkcija su nam bitna zbog daljnjeg razumijevanja novog gradiva. Trebaju se dobro savladati kako bi se mogla kasnije bez problema primjenjivati. U prvom udžbeniku je ponavljanje detaljnije napravljeno i ako učenici nisu savladali neko od svojstava, kroz ovakav ga pristup mogu dobro ponoviti i razumjeti. Isto vrijedi i za kompoziciju funkcije i invezne funkcije.

Na kraju se obrađuje potpuno novo gradivo, a to su neprekidnost i limes funkcije. Kreće se o neprekidnosti funkcije. U oba udžbenika se neprekidna funkcija objašnjava kao funkcija čiji graf se može nacrtati s jednim potezom olovke. Samim spominjanjem crtanja grafa jednim potezom učenici odmah mogu vizualizirati što je to neprekidna funkcija. Ali, ovdje treba biti oprezan jer funkcija može biti neprekidna i imati domenu koja nije povezani skup pa njezin graf ne možemo nacrtati u jednom potezu. Stoga bi bilo dobro napomenuti učenicima da postoje i takvi slučajevi, ali će se s njima upoznati kasnije.

Prije nego se definira limes funkcije, objašnjava se limes funkcije u točki. U prvom udžbeniku (vidi [17]) se promatranjem grafova funkcija uočava kako se ponašaju vrijednosti funkcija blizu zadane točke, čime se učenicima približava što znači blizina nekog broja. Limes funkcije u točki definira se na sljedeći način:
Realni broj L je limes funkcije f u točki a ako za svaki niz (x_n) koji teži broju a niz funkcijskih vrijednosti $(f(x_n))$ teži broju L. Tada pišemo $L = \lim_{x\to a} f(x)$.
Ako niz $(f(x_n))$ teži u beskonačnost za svaki niz (x_n) koji teži broju a, tada pišemo $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.
Napomenimo ovdje da učenicima znaju što znači da neki niz realnih brojeva teži nekom realnom broju, jer je to u udžbeniku obrađeno u poglavlju o nizovima.

U drugom udžbeniku (vidi [23]) se kroz primjere racionalnih funkcija proučava ponašanje vrijednosti funkcije i to u slučaju kada x teži prema broju, a potom kada x neograničeno raste. Ovdje se limes funkcije u točki definira malo drugačije:
Broj L je limes ili granična vrijednost funkcije f u točki a ako za svaki niz (x_n) koji teži prema a, niz $(f(x_n))$ teži broju L. Pišemo $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

U ovoj definiciji nije naglašeno da je broj L realni broj, no kada su definirali limes niza su to naučili. Uočimo kako se u ovoj definiciji izostavlja slučaj kada niz $(f(x_n))$ teži u beskonačnost za svaki niz (x_n) koji teži broju a. To će se naučiti kasnije kroz primjere.

U oba udžbenika se navodi kako za elementarne funkcije i sve funkcije neprekidne u točki a u svakoj točki a iz domene vrijedi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Nakon proučavanja limesa funkcija i neprekidnosti, navode se svojstva limesa funkcija. U drugom udžbeniku svojstva se iskazuju u obliku teorema. Zatim se kratko objašnjavaju i jednostrani limesi. U prvom udžbeniku se sve proučava kroz primjere, dok su jednostrani limesi izostavljeni. U oba udžbenika se detaljno objašnjava i izvodi limes $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, a u drugom se objašnjavaju i izvode još i limesi $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{q}{x}\right)^x = e$ i $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{q}{x}\right)^x = e$. Time se završavaju limesi u drugom udžbeniku.

U prvom udžbeniku (vidi [17]) dodatno se radi neprekidnost funkcije i proširenje funkcije. Definira se neprekidna funkcija na sljedeći način:
Funkcija f neprekidna je u točki a u kojoj je definirana ako postoji limes funkcije f u toj točki i koji je jednak vrijednosti funkcije u toj točki.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Funkcija f neprekidna je funkcija ako je neprekidna u svakoj točki iz područja definicije.
Vratimo li se malo u tekstu, vidjet ćemo kako smo spomenuli da se navodi da za elementarne funkcije i sve funkcije neprekidne u točki a u svakoj točki a iz domene vrijedi $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Tu se dakle već uzima da su funkcije neprekidne i onda vrijedi i dana jednakost. Preciznije je definirati neprekidnost baš kao što je to ovdje navedeno. Svakako se neprekidnosti i limesima općenito treba posvetiti više pažnje te bi se trebalo dati više primjera i paziti kako i kojim redoslijedom se objašnjava gradivo. Kasnije će se to primjenjivati kod derivacija i crtanja grafova funkcija. Ako se sada ono ne savlada, učenici će kasnije imati problema.

Unutar nastavne cjeline *Derivacija* u prvom udžbeniku (vidi [17]) osvrnut ćemo se na dio koji je povezan s funkcijama, a osmišljen je tako da se proučavaju rast i pad funkcije, ekstreme te crtanje grafa funkcije. U drugom udžbeniku (vidi [23]) dio koji ćemo komentirati koncipiran je na način da se proučava monotonost i ekstremi, a zatim tijek funkcije.

Najprije se u prvom udžbeniku uvodi pojam derivacije funkcije u točki kroz motivacijski primjer o biciklistu. Promatra se *s-t* graf iz kojeg se iščitavaju potrebni podaci i određuju razne brzine. U zadatku se koristi učenicima poznata formula za određivanje srednje brzine. Proučavanjem grafa iz primjera i tangente na tu krivulju postupno se dolazi do pojma derivacije funkcije u točki te se ona u udžbeniku definira na sljedeći način:
Neka je funkcija f neprekidna na intervalu I te neka je $x_0 \in I$ i Δx prirast argumenta takav da je $x_0 + \Delta x \in I$. Derivacija funkcije f u točki x_0 je broj $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ako taj limes postoji.

Ako derivacija postoji u svakoj točki intervala, kažemo da je funkcija derivabilna na tom intervalu.

Navodi se kako je geometrijsko značenje derivacije funkcije f u točki x_0 koeficijent smjera tangente na graf funkcije u točki $(x_0, f(x_0))$. Njezino fizikalno značenje je brzina promjene funkcije u x_0, što se može zaključiti iz motivacijskog primjera. U drugom udžbeniku (vidi [23]) pojam derivacije također se uvodi postupno, kroz problem brzine i problem tangente. Problemi se promatraju najprije u općem slučaju, a potom se objašnjavaju i kroz primjere. Derivacija funkcije f u točki x_0 ovdje se definira na sličan način.

Nakon što se savladaju računanje derivacija i pravila deriviranja, u prvom udžbeniku (vidi [17]) se ponavljaju otprije poznate činjenice o rastu i padu funkcije, no postoje funkcije koje su po dijelovima monotone pa se njih sada više proučava. Definiraju se na sljedeći način:
Za funkciju f kažemo da je po dijelovima monotona na intervalu $I = \langle a, b\rangle$, $I \subset D_f$ ako postoji konačno mnogo točaka takvih da je $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$ i da je funkcija monotona na svakom od intervala $\langle a, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$, $\ldots$, $\langle x_n, b\rangle$. Interval na kojem funkcija raste ili pada nazivamo interval monotonosti.

Potom se promatra funkcija po njezinim intervalima monotonosti te se dolazi do zaključaka iz kojih slijedi sljedeći teorem:
Neka je funkcija f derivabilna na intervalu $I = \langle a, b\rangle$, $I \subset D_f$. Funkcija f raste na intervalu I ako i samo ako je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in I$. Funkcija f pada na intervalu I ako i samo ako je $f'(x) < 0$ za svaki $x \in I$.

Točke u kojima funkcija prelazi iz rastuće u padajuću ili obratno definiraju se na sljedeći način:
Stacionarna točka funkcije je svaka točka x_0 u kojoj je tangenta na graf funkcije usporedna s osi x. Za stacionarnu točku vrijedi $f'(x_0) = 0$.

U drugom udžbeniku (vidi [23]) se intervali monotonosti uvode opisno. Zaključci do kojih se dolazi su napisani slično onima u definiciji iz prvog udžbenika. Također, objašnjava se i stacionarna točka, ali se ne daje njena stroga definicija. Kroz primjere se kao i u prvom udžbeniku objašnjava određivanje monotonosti funkcija. Iako se ne daju definicije, svi pojmovi su opisani slično kao u definicijama. Ovdje je najbitnije da učenici shvate kako odrediti intervale monotonosti te kako se derivacija i tangenta povezuju s tim intervalima.

Slijede ekstremi funkcije, koji su u prvom udžbeniku uvedeni pomoću grafa funkcije na kojoj su istaknute točke u kojima funkcija poprima najveće ili najmanje vrijednosti. Ekstremi se definiraju na sljedeći način:

Funkcija f ima lokalni minimum u točki x_0 ako postoj interval $\langle a, b\rangle$ koji sadržava x_0 tako da za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ vrijedi da je $f(x_0) < f(x)$.
Funkcija f ima lokalni maksimum u točki x_0 ako postoj interval $\langle a, b\rangle$ koji sadržava x_0 tako da za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ vrijedi da je $f(x_0) > f(x)$.
Lokalni minimum ili lokalni maksimum funkcije nazivamo lokalnim ekstremima funkcije.

Kroz primjere u kojima se određuju ekstremi funkcije uočava se kako je potrebno odrediti nužan uvjet za postojanje lokalnog ekstrema. Tu primjenjujemo Fermatov teorem o nužnom uvjetu za lokalni ekstrem:
Ako funkcija f koja je definirana na intervalu $\langle a, b\rangle$ ima lokalni ekstrem u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$, tada postoji vrijednost derivacije $f'(x_0)$ i vrijedi da je $f'(x_0) = 0$.

Ovaj iskaz teorema je krivi jer funkcija može imati ekstrem, ali ne mora biti derivabilna. Kako je ovaj teorem jako bitan, on se i dokazuje u ovom udžbeniku. Poslije dokaza se pokazuju moguće situacije pri određivanju ekstrema funkcije, što će učenicima olakšati daljnje rješavanje zadataka s određivanjima ekstrema. Uz to, imajući na umu koje mogućnosti sve postoje, mogu provjeriti svoja rješenja.

U drugom udžbeniku (vidi [23]) postupno se dolazi do lokalnih ekstrema te se oni definiraju slično kao u prvom udžbeniku. Potom se postupno pokazuje Fermatov teorem, čiji je iskaz u ovom udžbeniku točan. Teorem glasi:
Neka je funkcija f derivabilna na intervalu oko točke x_0. Ako je x_0 točka lokalnog ekstrema, tada je $f'(x_0) = 0$.

Globalni ekstremi se u oba udžbenika ne obrađuju preopširno. U prvom udžbeniku (vidi [18]) oni su opisani na način da je globalni maksimum funkcije najveća vrijednost koju funkcija poprima na promatranome zatvorenom intervalu ili na njezinom području definicije, a najmanja takva vrijednost je globalni minimum. Navodi se kako funkcije može imati ekstrem na intervalu samo u stacionarnim točkama, rubnim točkama intervala i točkama loma i prekida u kojima ne postoji derivacija funkcije. Pritom točke loma nisu objašnjene pa ih ne bi trebalo ni spominjati. U drugom udžbeniku (vidi [23]) se daje definicija:
Za realni broj M kažemo da je globalni maksimum funkcije f ako postoji $x_0 \in \mathcal{D}_f$ takav da je $M = f(x_0)$ i $f(x) \leq M$ za svaki $x \in \mathcal{D}_f$.
Za realni broj m kažemo da je globalni minimum funkcije f ako postoji $x_0 \in \mathcal{D}_f$ takav da je $m = f(x_0)$ i $f(x) \geq m$ za svaki $x \in \mathcal{D}_f$.

Ovdje se navodi kako neprekidna funkcija definirana ne intervalu ima svoj globalni maksimum i minimum te se on postiže ili u točki lokalnog ekstrema ili u rubnim točkama intervala. Uočimo kako se ovdje govori o neprekidnim funkcijama, dok su u prvom udžbeniku obuhvaćene sve funkcije. Definicija je preciznija i učenici će pri računanju znati odrediti već iz računa globalne ekstreme.

Kod ekstrema se još promatra i ponašanje druge derivacije u točki ekstrema. Prethodno je pokazano kako je nužan uvjet za postojanje ekstrema postojanje stacionarne točke funkcije. Ali, time nije određeno da je ta točka ujedno i ekstrem. U prvom udžbeniku (vidi [18]) se postupno dolazi zaključka da ako u stacionarnoj točki x_0 funkcija ima drugu derivaciju i vrijedi $f''(x) \neq 0$, onda funkcija ima ekstrem u toj točki ako f' mijenja predznak u toj točki. Ako je $f''(x) > 0$, onda je u x_0 lokalni minimum, a ako je $f''(x) < 0$, onda je u x_0 lokalni maksimum. Ova tvrdnja se i dokazuje u udžbeniku te je to dovoljan uvjet koji jamči postojanje i vrstu ekstrema.

U drugom udžbeniku (vidi [23]) se o ovom uvjetu ne govori. Opisuje se kako druga derivacija određuje konveksnost, odnosno konkavnost funkcije. Navodi se da funkcija f konveksna na intervalu $\langle a, b\rangle$ ako i samo ako je $f''(x) > 0$ za $x \in \langle a, b\rangle$, a konkavna na tom intervalu ako i samo ako je $f''(x) < 0$ za $x \in \langle a, b\rangle$. Pritom se za točku u kojoj funkcija prelazi iz konveksne u konkavnu ili obratno kaže da se naziva točka pregiba ili točka infleksije i za tu točku vrijedi $f''(x) = 0$. Dakle, u prvom udžbeniku se dao uvjet koji nam osigurava postojanje ekstrema, dok se u drugom udžbeniku njega zanemarilo i radilo intervale konveksnosti i konkavnosti. Sigurnost postojanja ekstrema pomaže u računu potrebnom za crtanje grafa funkcije. Učenike može zbuniti ako pri određivanju intervala zakrivljenosti dobiju da njihova točka uopće nije ekstrem funkcije. Zato bi bilo dobro objasniti i uvjet postojanosti ektrema.

Konačno se crtaju grafovi funkcije uz pomoć svega do sada naučenog. U prvom udžbeniku se sada objašnjavaju intervali zakrivljenosti. Postupno se objašnjava što konveksnost i konkavnost znače i kako ih odrediti. Definiraju se na sljedeći način:
Neka funkcija f ima drugu derivaciju u svakoj točki intervala $\langle a, b\rangle$.
Ako je $f''(x) > 0$ za $x \in \langle a, b\rangle$, tada je funkcija konveksna na intervalu $\langle a, b\rangle$.
Ako je $f''(x) < 0$ za $x \in \langle a, b\rangle$, tada je funkcija konkavna na intervalu $\langle a, b\rangle$.
Točka u kojoj konveksnost prelazi u konkavnost ili obratno nazivamo točka pregiba ili točka infleksije. Za točku pregiba x_0 vrijedi $f''(x_0) = 0$.

Intervali zakrivljenosti objašnjavaju se kroz niz primjera te ih učenici mogu dobro razumjeti.

U oba udžbenika sljedeće se uvode asimptote grafa funkcije. U prvom udžbeniku se kratko ponavljaju asimptote funkcija koje su se do sada učile. Određivanje asimptota se

objašnjava kroz niz primjera pri čemu se prikazuju i grafovi funkcija što doprinosi razumijevaju. U drugom udžbeniku (vidi [23]) se vertikalna asimptota se definira slično kao u prvom udžbeniku, no kosa i horizontalna asimptota definiraju se potpuno drugačije. Definirane su zajedno i to na sljedeći način: *Pravac $y = kx + l$ je desna kosa asimptota funkcije f ako udaljenost točke T do pravca teži k 0 kada x teži prema ∞.*
Pravac $y = kx + l$ je lijeva kosa asimptota funkcije f ako udaljenost točke T do pravca teži k 0 kada x teži prema $-\infty$.
Ako je $k = 0$, tada se pravac $y = l$ naziva desna horizontalna, odnosno lijeva horizontalna asimptota.
Nakon definicije navedene su i formule pomoću kojih se određuju vrijednosti koeficijenata k i l iste kao u definiciji iz prvog udžbenika. Ovdje se samo kroz dva grafa određuju asimptote, što nije dovoljno da bi učenici savladali određivanje asimptota. Iako su im poznate formule koje trebaju koristiti, posebice kod kose i horizontalne asimptote gdje imamo desnu i lijevu asimptotu trebaju vidjeti kako odrediti koja je točno asimptota. Dakle, asimptote bi se trebale dobro objasniti sada kada se obrađuju i time bi ih učenici lakše savladali.

Na kraju se obrađuje primjena diferencijalnog računa na grafički prikaz funkcije, odnosno tijek funkcije. U oba udžbenika se objašnjavaju koraci postupka koji se potom primjenjuju u raznim primjerima. Dok su u drugom udžbeniku koraci kratko navedeni te se od učenika očekuje da sve elemente znaju odrediti, u prvom udžbeniku postupak je osmišljen tako da se uz korake daje i kratki podsjetnik što se treba napraviti.

Gradivo četvrtog razreda učenicima je jako izazovno i nerijetko dolazi do problema sa razumijevanjem i savladavanjem tog gradiva. Mnogo je novih pojmova, formula, definicija i pravila. Iako su im neke stvari poznate iz prethodnih razreda, sada ih se još nadograđuje. Vidjeli smo dva različita pristupa u udžbenicima gdje se u jednom objašnjava uz puno primjera, dok se u drugom objasni i pokaže na pokojem primjeru. U cilju treba biti postupno savladavanje gradiva s razumijevanjem. Suprotno, učenici će površno naučiti zadatke, a kasnije ako se susretnu u visokoškolskom obrazovanju s limesima i derivacijama neće znati primijeniti na zahtjevnije problemske zadatke.

Za kraj ovog poglavlja osvrnimo se malo na cjelokupni dojam o udžbenicima. Vidjeli smo različite pristupe u poučavanju u udžbenicima kroz sve razrede. Ono što treba biti za cilj svakog udžbenika je da se što bolje objasni gradivo. Pritom se treba razvijati matematičko razmišljanje, logičko zaključivanje, argumentiranje i kreativnost učenika. Vidjeli smo kako se u prvom razredu u jednom udžbeniku još radi opisno i tek tamo gdje je to nužno se koriste matematički jezik i simboli. U drugom se pak koriste precizne matematičke definicije pisane matematičkim jezikom i simbolima, ali možda učenici još nemaju dovoljno znanja da znaju protumačiti simbole. Postupnim uvođenjem matematičkog jezika i simbola učenicima će se omogućiti da ga nauče čitati i razumjeti pozadinu nekog zapisa i definicije. Potom u udžbenicima vidimo dokaze. Treba li koristiti dokaze u srednjim školama? Apsolutno da, ali opet treba paziti na koji način se objašnjava u tim dokazima. U literaturi za visokoškolsko obrazovanje često znamo vidjeti kratke dokaze, napisane s puno simbola i djelomično objašnjenje jer se očekuje da jedan student zna protumačiti dokaz. A nažalost, često se zna dogoditi da se na samom početku kroz nekoliko semestara studenti bore s time. To je posljedica manjka korištenja matematičkog jezika i dokazivanja u srednjoškolskom obrazovanju. Dakle, dokaze treba raditi u srednjim školama uz pravilna i detaljna objašnjenja. Time se razvija i razmišljanje učenika i potiče ih se na postavljanje pitanja i razmišljanje o tvrdnjama i činjenicama. Dakako to ne znači da treba pretjerivati s dokazima, ali one bitnije bi trebalo uvrstiti u program, baš kao što je to napravljeno u nekima od promatranih udžbenika. U nekim udžbenicima se štedi na primjerima, što može biti jedan veliki minus za učenika. Nisu svi učenici dobri u matematici toliko da će shvatiti kroz kratko objašnjenje ili pokoji primjer o čemu se radilo u nekoj nastavnoj jedinici. Primjeri u udžbenicima koriste tome da učenik ako nešto ne razumije može pogledati u primjer i otkriti gdje je problem u njegovom pristupu ili graška u postupku. Svi udžbenici imaju svoje prednosti i mane, ali se treba težiti tome da se osnovni ishodi učenja srednjoškolskog obrazovanja obrade dovoljno dobro tako da svi učenici mogu razumjeti i savladati to gradivo.

Poglavlje 4

Aktivnosti

Proučavajući kurikulume vidjeli smo kako se naš odgojno-obrazovni sustav postupno od poučavanja usmjerenoga sadržaju prilagođava modernom vremenu te se prelazi na poučavanje usmjereno učeniku. Učenici uče razmišljati, razvijaju logiku te postupno otkrivaju novo gradivo. Sukladno tome dobro je uključiti motivacijske aktivnosti u nastavu kroz koje će učenici radeći individualno, u paru ili u grupama otkriti novi pojam, svojstvo, pravilo i slično. U ovom radu napravit ćemo dvije aktivnosti, jednu za uvođenje funkcija i drugu za uvođenje inverzne funkcije.

4.1 Aktivnost: Pojam funkcije

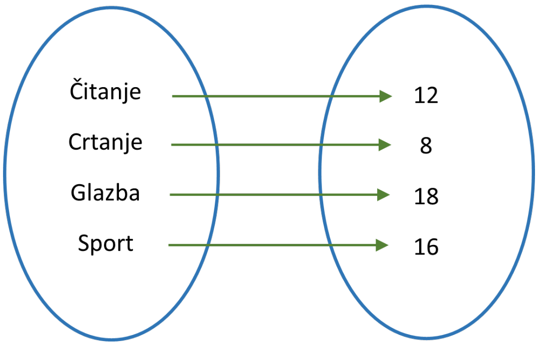
Cilj aktivnosti: učenici će kroz aktivnosti otkriti pojam funkcije

Oblik rada: diferencijalna nastava u obliku individualnog rada, frontalna nastava

Nastavna metoda: metoda dijaloga, metoda rješavanja zadataka

Tijek aktivnosti:
Nastavnik na ploču crta tablicu u kojoj u jednom stupcu piše četiri aktivnosti: čitanje, crtanje, glazba i sport. Učenicima objašnjava kako želi znati kojima od navedenih aktivnosti se bave u slobodno vrijeme. Kada navede pojedinu aktivnost, učenici će podići ruke. Nakon što nastavnik prebroji ruke, dobiveni broj zapisat će u tablicu u red gdje se nalazi odgovarajuća aktivnost. Na isti način će napraviti za svaku od aktivnosti. Proučavajući tablicu, učenici kroz diskusiju dolaze do zaključka da je svakoj aktivnosti pridružen određeni broj učenika. S obzirom da smo ovo pridruživanje mogli povezati sa skupovima, nastavnik pita učenike na koji način se to može napraviti. Učenici dolaze do zaključka da bi elementi prvog skupa bile sve navedene aktivnosti, a elementi drugog skupa svi brojeva iz tablice.

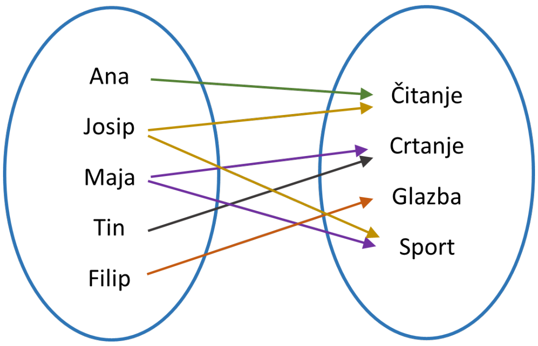
Pritom nastavnik navodi kako smo ovo pridruživanje mogli prikazati i pomoću Vennovih dijagrama te ih crta na ploču (Slika 4.1).



Slika 4.1: Primjer Vennovih dijagrama s elementima iz tablice

Na ovaj način se definirala funkcija ili pridruživanje koje svakom elementu iz prvog skupa pridružuje jedan element iz skupa drugog skupa. Prvi skup nazivamo domenom funkcije, a drugi skup kodomenom funkcije.

Sljedeće nastavnik nasumično odabire nekoliko učenika, primjerice 5, pri čemu pazi da izabere barem jednog učenika koji je prethodno podigao ruku za dvije ili više aktivnosti. Skicira potom Vennov dijagram u kojemu prvi skup predstavlja odabrane učenike, a drugi skup aktivnosti (Slika 4.2). Povezuje učenike i aktivnosti kojima se bave. Kroz diskusiju se dolazi do zaključka da su skupovi povezani, ali je jedan element iz prvog skupa povezan s više elemenata iz drugog skupa. Tada to pridruživanje nije funkcija, jer se elementu domene pridružuje više elemenata kodomene. Na kraju nastavnik definira funkciju i dodatno napominje kako je funkcija zadana svojom domenom, kodomenom i pravilom pridruživanja.



Slika 4.2: Primjer Vennovih dijagrama kada pridruživanje nije funkcija

Napomenimo kako bi se kod ovih aktivnosti mogao uvesti i pojam relacije. Time bi se funkcija mogla matematički precizno definirati pomoću relacija. No, prema aktualnom Kurikulumu relacije se ne spominju u srednjoškolskom obrazovanju. Načine na koje se funkcije definiraju bez korištenja pojma relacije vidjeli smo u prethodnom poglavlju.

4.2 Aktivnost: Inverzna funkcija

Cilj aktivnosti: učenici će otkriti inverznu funkciju

Oblik rada: diferencijalna nastava u obliku individualnog rada, diferencijalna nastava u obliku rada u paru, frontalna nastava

Nastavna metoda: metoda dijaloga, metoda rješavanja zadataka

Tijek aktivnosti:
Učenici će u paru riješiti kratki zadatak. Nastavnik podijeli nastavne listiće na kojima se nalazi zadatak. Učenici koji su u paru dobivaju različite zadatke. Jedan učenik treba zamisliti neki broj. Potom računa s tim brojem prema uputi koju mu čita drugi učenik: "Zamisli jedan broj. Pomnoži ga s 8. Dobiveni broj podijeli s 4. Dobivenom broju dodaj 15. Koji broj si dobio?" Kada prvi učenik kaže broj koji je dobio, drugi učenik treba otkriti koji broj je prvi učenik zamislio. Pritom nema upute kako doći do broja koji je prvi učenik zamislio, nego treba promisliti i sam otkriti način kako doći do tog broja. Dodatno nastavnik treba napomenuti učenicima da ne otkrivaju način na koji su došli do broja.
Zatim se učenici zamijene i ponavljaju postupak, pri čemu je uputa za računanje drugačija. Kada završe s ovom aktivnosti, kroz diskusiju se dolazi do zaključka da su trebali napraviti obrnuti postupak kako bi dobili broj koji je zamišljen. Nastavnik navodi kako se taj obrnuti postupak naziva inverzni postupak. Odnosno, ako navedenu uputu napišemo u obliku funkcije, taj inverzni postupak će također biti funkcija koju nazivamo inverzna funkcija.

Sljedeći zadatak je zapisati danu uputu za računanje iz prethodnog zadatka u obliku funkcije. Ovo nastavnik postupno zapisuje na ploči te uz diskusiju s učenicima dolazi do odgovarajuće linearne funkcije $f(x) = 2x + 15$. Zaključuje se kako je ta funkcija bijekcija. Nastavnik naglašava kako ako je funkcija bijekcija, onda ona sigurno ima inverz. Uz diskusiju s učenicima određuje se inverz ove funkcije.
Potom zajedno uz diskusiju određuju i inverz kvadratne funkcije, nakon čega nastavnik daje definiciju funkcije. Za korake koje su koristili pri određivanju ovih inverznih funkcija nastavnik naglašava da su to općenito koraci postupka određivanja inverza funkcije.

Zaključak

Relacije i funkcije su među temeljnim matematičkim pojmovima. Uvode se indirektno već od samih početaka školovanja kroz proučavanje odnosa među predmetima, količinama te brojevima. U radu smo proučavali pristup u poučavanju tih pojmova u srednjoškolskoj nastavi matematike. Na samom početku naveli smo definicije osnovnih pojmova povezanih uz relacije i funkcije, koje bi svaki nastavnik trebao znati. Neke od njih neće upotrijebiti na nastavi matematike u školi, ali je nužno da nastavnik matematike ima šire znanje od onog koje prenosi učenicima. Proučavajući ishode učenja u aktualnom Kurikulumu u sklopu obrazovne reforme pod nazivom „Škola za život" vidjeli smo kako se funkcije ne uče u osnovnoj školi, nego tek u prvom razredu srednje škole. Prema Kurikulumu pojam relacije se nigdje ne spominje, odnosno relacije se uče indirektno promatranjem odnosa među veličinama, bojevima, predmetima i slično. Zatim smo u starim kurikulumima i nastavnim programima za osnovnu i srednju školu vidjeli kako su se funkcije prije ovog kurikuluma obrađivale u sedmom i osmom razredu osnovne škole. S obzirom na opsežnost gradiva vezanog uz funkcije, učenje funkcija samo u srednjim školama može biti opasno jer je moguće da će se učenje funkcija svesti na površno učenje samih osnova, bez shvaćanja pozadine funkcijske ovisnosti i preslikavanja. To može dovesti do još većeg problema jer će se učenici s funkcijama susretati i kasnije, u visokoškolskom obrazovanju. Tada najčešće nastaje problem zbog manjka predznanja koje student treba imati.

Prema novom Kurikulumu dogodile su se razne promjene u načinu rada kojima se želi poučavanje matematike prilagoditi razvoju kompetencija koje zahtjeva sadašnje vrijeme. Sukladno tome promijenjen je i pristup poučavanju funkcija u obrazovanju. Proučavajuću udžbenike vidjeli smo kako se kroz uvodne zadatke i primjere pokušava gradivo približiti učeniku. Ali, vidjeli smo i brojne razlike među udžbenicima kroz sve razrede. Svakako se treba težiti tome da se što bolje objasni gradivo i pritom kod učenika razvija matematičko razmišljanje, logičko zaključivanje i kreativnost. Treba razmišljati i o tome kakvo predznanje iz osnovne škole učenik ima. To se posebice odnosi na prvi srednje škole, kada učenici možda nisu dovoljno upoznati s matematičkim jezikom i simbolima. Stoga bi se trebalo postupno uvoditi matematički jezik i simbole te na taj način učenicima omogućiti da ga nauče ispravno čitati te razumjeti pozadinu nekog zapisa. O predznanju treba razmišljati i kod definicija i dokaza, čiji tekstovi i zapisi bi trebali biti prilagođeni znanju učenika na određenoj razini obrazovanja. U nekim slučajevima smo vidjeli i netočne definicije i iskaze teorema, što nije poželjno. Učenici će naučiti krivo te u daljnjem obrazovanju mogu imati problema s razumijevanjem povezanih pojmova ili korištenjem teorema. Dakle, u udžbenicima se treba obratiti pažnja na učenikovo razumijevanje, ali i matematičku preciznost. Cilj udžbenika, ali i poučavanja matematike u osnovnim i srednjim školama treba biti prilagođeno tako da svi učenici mogu razumjeti i savladati određeno gradivo.

Bibliografija

[1] *Nastavni programi za gimnazije*, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske, Zagreb, 1994.

[2] *Nastavni plan i program za osnovnu školu*, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske, Zagreb, 2006.

[3] *Nacionalni okvirni Kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obavezno i srednjoškolsko obrazovanje*, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske, Zagreb, 2010.

[4] *Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2.*, Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske, Zagreb, 2019. Dostupno na: `https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT_kurikulum_1_71.pdf`

[5] S. Antoliš, A. Copić, *Matematika 4: udžbenik sa zbirkom zadataka za 4.razred za prirodoslovno-matematičke gimnazije, I. polugodište*, Školska knjiga, Zagreb, 2014.

[6] B. Antunović Piton, M. Kuliš, I. Matić, N. Zvelf, *Matematika 5: udžbenik matematike u petom razredu osnovne škole sa zadacima za rješavanje, 1. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2020.

[7] B. Antunović Piton, A. Bogner Boroš, P. Brkić, M. Kuliš, T. Rodiger, N. Zvelf, *Matematika 6: udžbenik matematike u šestom razredu osnovne škole sa zadacima za rješavanje, 2. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2020.

[8] B. Antunović Piton, A. Bogner Boroš, P. Brkić, M. Karlo, M. Kuliš, T. Rodiger, *Matematika 7: udžbenik matematike u sedmom razredu osnovne škole sa zadacima za rješavanje, 2. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2020.

[9] M. Cindrić, I. Mišurac, S. Špika, *Matematička mreža 1: udžbenik matematike u prvom razredu osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.

[10] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 1: udžbenik za prvi razred gimnazija i strukovnih škola, 1.dio*, Element, Zagreb, 2006.

[11] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2: udžbenik za drugi razred gimnazija i strukovnih škola, 2.dio*, Element, Zagreb, 2006.

[12] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4: udžbenik za drugi razred gimnazija i strukovnih škola, 1.dio*, Element, Zagreb, 2006.

[13] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2: udžbenik za drugi razred gimnazija i strukovnih škola, 1.dio*, Element, Zagreb, 2020.

[14] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2: udžbenik za drugi razred gimnazija i strukovnih škola, 2.dio*, Element, Zagreb, 2020.

[15] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 3: udžbenik za treći razred gimnazija i strukovnih škola, 1.dio*, Element, Zagreb, 2020.

[16] S. Jakovljević Rogić, D. Miklec, G. Prtajin, *Moj sretni broj* 3*: udžbenik matematike u trećem razredu osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2020.

[17] I. Matić, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, M. Šujansky, T. Vukas, Ž. Dijanić, *Matematika 4: udžbenik matematike u četvrtom razredu srednje škole sa zadacima za rješavanje, 3 ili 4 sata nastave tjedno, 1.dio*, Školska Knjiga, Zagreb, 2021.

[18] I. Matić, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, M. Šujansky, T. Vukas, Ž. Dijanić, *Matematika 4: udžbenik matematike u četvrtom razredu srednje škole sa zadacima za rješavanje, 3 ili 4 sata nastave tjedno, 2.dio*, Školska Knjiga, Zagreb, 2021.

[19] A. Pletikosić, I. Matić, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, M. Njerš, R. Gortan, T. Srnec, Ž. Dijanić, *Matematika 3: udžbenik matematike u trećem razredu srednje škole sa zadacima za rješavanje, 3 ili 4 sata nastave tjedno, 1.dio*, Školska Knjiga, Zagreb, 2020.

[20] Z. Šikić, R. Kalazić, S. Lukač, K. J. Penzar, *Matematika 1: udžbenik za prvi razred gimnazije i srednje strukovne škole, 2. dio*, Profil Klett, Zagreb, 2019.

[21] S. Varošanec, *Matematika 1: udžbenik za prvi razred gimnazije i srednje strukovne škole, 3 ili 4 sata nastave tjedno*, Element, Zagreb, 2019.

[22] S. Varošanec, *Matematika 2: udžbenik za drugi razred gimnazije i srednje strukovne škole, 3 ili 4 sata nastave tjedno*, Element, Zagreb, 2020.

[23] S. Varošanec, *Matematika 4: udžbenik za četvrti razred gimnazije i srednje strukovne škole, 3 ili 4 sata nastave tjedno*, Element, Zagreb, 2021.

[24] M. Vuković, *Teorija skupova: skripta iz predavanja*, Zagreb, 2015.
Dostupno na: `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ts/materijali/ts-skripta-2015.pdf`

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavamo relacije i funkcije u srednjoškolskom obrazovanju. U prvom poglavlju navode se definicije vezane uz pojmove relacije i funkcije. Te definicije se ne poučavaju u školi, ali bi ih nastavnik trebao znati. U drugom poglavlju proučavaju se i uspoređuju stari i aktualni kurikulumi. U sljedećem poglavlju analiziraju se funkcije u srednjoškolskim udžbenicima. Uspoređuje se i komentira način uvođenja novih pojmova, motivacijski zadaci, preciznost definicija i iskaza teorema. U zadnjem poglavlju opisane su dvije aktivnosti povezane s uvođenjem funkcija i s uvođenjem inverznih funkcija u srednjoškolskoj nastavi.

Summary

The thesis studies the relations and functions in secondary education. The first chapter provides definitions related to the terms of relations and functions. These definitions are not taught in school, but the teacher should know them. In the second chapter, old and current curricula are studied and compared. The next chapter analyzes the functions in high school textbooks. The way of introducing new concepts, motivational tasks, the precision of definitions and statements of theorems are compared and commented on. The last chapter describes two activities related to the introduction of functions and the introduction of inverse functions in high school teaching.

Životopis

Rođena sam 29. kolovoza 1991. godine u Zagrebu. Pohađala sam Osnovnu školu Marina Držića u Zagrebu. Potom upisujem VII. gimnaziju (opća gimnazija) u Zagrebu, koju završavam 2010. godine. Te godine upisujem Fakultet elektrotehnike i računarstva u Zagrebu, ali s vremenom shvaćam kako više volim matematiku i rad s djecom. Iz tog razloga 2013. godine upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematika - smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završetka preddiplomskog studija 2018. godine upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika - smjer: nastavnički na istom fakultetu.
Tijekom svog školovanja bavim se plesom i glazbom te završavam osnovnu glazbenu školu, smjer instrumentalist - oboa, i dva razreda srednje glazbene škole. Od početka fakultetskog obrazovanja radim različite studentske poslove.