

# Strukturalna optimizacija metodom nivo skupa

---

Lalić, Goran

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:117501>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-22**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Goran Lalić

**STRUKTURALNA OPTIMIZACIJA**  
**METODOM NIVO SKUPA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Josip Tambača

Zagreb, rujan 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Obitelji koja mi je pružila sve, curi i prijateljima koji su me trpili i mentoru koji je pomogao kad je bilo najpotrebnije*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Opis problema i algoritma</b>	<b>3</b>
1.1 Postavljanje problema . . . . .	3
1.2 Derivacija oblika . . . . .	6
1.3 Reprezentacija oblika pomoću metode nivo skupa . . . . .	12
1.4 Algoritam optimizacije . . . . .	15
<b>2 Rezultati i primjeri</b>	<b>19</b>
2.1 Numerika i parametri . . . . .	19
2.2 2D nosač . . . . .	20
2.3 2D most . . . . .	27
<b>Bibliografija</b>	<b>31</b>

# Uvod

Optimizacija oblika elastičnih struktura je značajno područje kod dizajniranja mehaničkih sustava u raznim industrijama (građevinarstvo, autoindustrija, aeronautika, zrakoplovstvo). Inženjeri se ne zadovoljavaju samo poboljšanjem nekoliko mehaničkih svojstava, već teže globalnoj optimizaciji težine, krutosti, otpornosti i cijene. U prošlosti su inženjeri pristupali problemu metodom pokušaja i promašaja, a optimizacija zapravo ovisi o intuiciji i znanju. Naravno, takav pristup optimizaciji je zastario, previše je skup i neprecizan. Zadnjih godina razvijeno je nekoliko metoda koje rješavaju problem optimizacije oblika. Klasična metoda osjetljivosti oblika [18] je vrlo općenita metoda koja može raditi s bilo kojim tipom funkcije cilja i bilo kojom strukturom modela, ali dva glavna nedostatka su joj tendencija da upadne u lokalni minimum koji se može nalaziti daleko od globalnog minimuma i da je računski zahtjevna zbog ponovnog strukturiranja mreže. Homogenizacijska metoda, kao i njene varijante poput SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) metode [5], su adekvatno rješenje za te nedostatke, ali uglavnom su ograničene na lineariziranu elastičnost i neke specifične funkcije cilja. Metoda nivo skupa je rješenje za te nedostatke jer je svestrana i računski vrlo efikasna. Do sada je postala klasičan alat u područjima kao što su mehanika fluida, obrađivanje slika i brojnim drugim područjima.

U ovom radu ćemo sustavno implementirati metodu nivo skupa, prateći [3] i [4]. Pro-matrat ćemo različite funkcije cilja za probleme u dvije dimenzije. Fokusirat ćemo se na optimizaciju oblika i koristit ćemo takozvani pristup *ersatz* materijala, odnosno rupe ćemo popuniti koristeći slabu fazu, odnosno imitiramo prazninu materijalom s jako malim numeričkim vrijednostima. Ovo je dobro poznati pristup, vidi [2], u topološkoj optimizaciji koji se teorijski može strogo opravdati u nekim slučajevima, vidi [6], [7]. Zato uvodimo pojam derivacije oblika koja postaje normalna komponenta brzine, a novi oblik dobivamo rješavajući Hamilton–Jacobijevu jednadžbu za funkciju koja će odrediti nivo skupove pomoću kojih pratimo kretanje granice oblika. Proučavamo efekt diskretizacije prvog reda i ponovne inicijalizacije u konvergenciji prema optimalnom obliku. Također istražujemo i jaku ovisnost optimalnog oblika o početnom obliku.



# Poglavlje 1

## Opis problema i algoritma

### 1.1 Postavljanje problema

Cilj nam je temeljito proučiti optimizaciju oblika u dvije dimenzije, tako da u ovom radu uzimamo da je  $d = 2$ . Prvi korak je modeliranje problema linearizirane elastičnosti. Konceptualno nema razlike u odnosu na nelineariziranu elastičnost, ali radi jednostavnosti proučavamo problem linearizirane elastičnosti. Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  otvoren i ograničen skup koji je elastično tijelo modelirano linearnom izotropnom elastičnošću s Hookeovim zakonom zadanim tenzorom  $A$ , gdje je za svaku simetričnu matricu  $\xi$ ,  $A$  definiran kao

$$A\xi = 2\mu\xi + \lambda(\text{Tr}\xi)\mathbf{I},$$

gdje su  $\lambda$  i  $\mu$  Laméove konstante,  $\text{Tr}\xi$  trag matrice  $\xi$  te  $\mathbf{I}$  jedinična matrica. Rub od  $\Omega$  dekomponiramo na dva disjunktna dijela  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , pri čemu je  $\Gamma_D$  Dirichletova i  $\Gamma_N$  Neumannova granica koje mogu varirati tijekom optimizacijskog procesa, s tim da se jedan dio granice može fiksirati. S vektorskom funkcijom  $f$  označavamo površinsku gustoću sile, a s  $g$  linijsku gustoću sile na  $\Gamma_N$ . Polje pomaka  $u$  na  $\Omega$  je rješenje zadaje

$$\begin{cases} -\text{div}(Ae(u)) = f, & \text{na } \Omega, \\ u = 0, & \text{na } \Gamma_D, \\ (Ae(u))n = g, & \text{na } \Gamma_N, \end{cases} \quad (1.1)$$

pri čemu je  $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$  simetrizirani gradijent.

Pomnožimo li prvu jednadžbu sustava (1.1) test funkcijom  $v$  i integriramo po  $\Omega$ , uz formulu za divergenciju produkta, lako slijedi slaba formulacija za  $v$  tako da je  $v|_{\Gamma_D} = 0$ .



$$\begin{aligned}
& -\operatorname{div}(Ae(u)) = f \quad \Big| \cdot v \quad \Big| \int_{\Omega} dx, \\
& - \int_{\Omega} \operatorname{div}(Ae(u) \cdot v) dx + \int_{\Omega} Ae(u) \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx, \\
& - \int_{\partial\Omega=\Gamma_D \cup \Gamma_N} Ae(u) \cdot vn ds + \int_{\Omega} Ae(u) \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx, \\
& \int_{\Omega} Ae(u) \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot v ds.
\end{aligned}$$

Slijede dvije tehničke leme.

**Lema 1.1.1.** *Svaki tenzor drugog reda može se rastaviti na sumu simetričnog i antisimetričnog tenzora.*

**Lema 1.1.2.** *Skalarni produkt simetričnog i antisimetričnog tenzora je 0.*

Slijedi da se  $\nabla u$  može dekomponirati na sljedeći način

$$\nabla u = \underbrace{\frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)}_{\text{simetrični dio}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\nabla u - (\nabla u)^T)}_{\text{antisimetrični dio}}. \quad (1.2)$$

Uz korištenje jednadžbe (1.2) i Leme 1.1.2 imamo

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} Ae(u) \cdot \nabla v dx &= \int_{\Omega} Ae(u) \cdot \left( \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T) + \frac{1}{2}(\nabla v - (\nabla v)^T) \right) dx \\
&\stackrel{\text{Lema 1.1.2}}{=} \int_{\Omega} Ae(u) \cdot e(v) dx.
\end{aligned}$$

Sada slaba formulacija zadatke linearizirane elastičnosti glasi naći  $u \in H^1(\Omega)^2$  tako da je  $u|_{\Gamma_D} = 0$  takav da vrijedi

$$\int_{\Omega} Ae(u) \cdot e(v) dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot v ds \quad (1.3)$$

za sve  $v \in H^1(\Omega)^2$  tako da je  $v|_{\Gamma_D} = 0$  na  $\Gamma_D$ .

Kako  $\Omega$  varira tijekom optimizacijskog procesa, funkcije  $f$  i  $g$  moraju biti poznate za sve moguće konfiguracije  $\Omega$ . Stoga se ograničavamo na ograničen skup  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  i zahtjevamo da u svakoj iteraciji algoritma vrijedi  $\Omega \subseteq D$ . Strogo gledano, to znači da u sustavu (1.1) uzimamo  $f \in L^2(D)^2$  i  $g \in H^1(D)^2$ . Ako pretpostavimo da je  $\Gamma_D \neq \emptyset$  iz Lax–Milgramove leme tada imamo egzistenciju jedinstvenog rješenja  $u \in H^1(\Omega)^2$ .

Globalna mjera pomaka je energija naprezanja (koja se naziva i podatljivost) konstrukcije pod propisanim rubnim uvjetima.

Funkciju cilja označavamo s  $J(\Omega)$ . Kao što smo već istaknuli, postoje mnoge funkcije cilja od kojih se fokusiramo na dvije. Klasični izbor za funkciju cilja je energija naprezanja strukture pod propisanim rubnim uvjetima

$$J_1(\Omega) = \int_{\Omega} f \cdot u \, dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot u \, ds = \int_{\Omega} Ae(u) \cdot e(u) \, dx, \quad (1.4)$$

koja je jako česta prilikom maksimizacije krutosti. Što je manja energija naprezanja veća je i krutost strukture. Dakle, cilj problema je minimizirati energiju naprezanja pri zadanim opterećenjima  $f$  i  $g$ . Općenitije, može se zamisliti da što je više materijala, to je manji otklon jer će biti više materijala koji će odolijevati opterećenjima. Dakle, optimizacija zahtijeva suprotno ograničenje, ograničenje volumena. To je u stvari faktor troškova jer ne bismo htjeli potrošiti mnogo novca na materijal.

Primjetimo da druga jednakost u (1.4) proizlazi iz slabe formulacije (1.3) u kojoj za test funkciju  $v$  uzmemo  $u \in H^1(\Omega)^d$ .

Druga funkcija cilja je greška  $L^\alpha$  norme u usporedbi s pomakom  $u_0$

$$J_2(\Omega) = \left( \int_{\Omega} k(x)|u - u_0|^\alpha \, dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (1.5)$$

koja je koristan kriterij za dizajn savitljivog mehanizma (mehanizam u kojem se deformacijom elastičnog tijela proizvede sila i gibanje, na primjer, luk i strijela). Pretpostavljamo da je  $\alpha \geq 2$ ,  $u_0 \in L^\alpha(D)$  nenegativni težinski faktor  $k \in L^\infty(D)$  te  $u = u(\Omega)$  rješenje sustava (1.1).

Definiramo skup dopustivih oblika koji su otvoreni podskupovi skupa  $D$  i fiksno su volumena  $V$

$$\mathcal{U} = \{\Omega \subseteq D, \text{ td. } |\Omega| = V, \Omega \text{ otvoren}\}. \quad (1.6)$$

Naš problem optimizacije postaje

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}} J(\Omega). \quad (1.7)$$

Dobro je poznato da minimizacijska zadaća (1.7) nije dobro postavljena za skup dopustivih skupova  $\mathcal{U}$  jer minimizirajući niz domena teži homogeniziranju i konvergira prema nekoj mješavini krutine i praznine, vidi [9, 10, 19]. Kako bismo dobili egzistenciju optimalnog oblika moramo uvesti pretpostavke glatkoće ili neka geometrijska, odnosno topološka ograničenja. Na primjer, ako u minimizacijskoj zadaći (1.7) ograničimo dopustive skupove tako da im je oplošje konstanta, onda zadaća postaje dobro postavljena. Oplošje  $P(\Omega)$  otvorenog skupa  $\Omega$  definirano je kao  $(d - 1)$ -dimenzionalna Hausdorffova mjera ruba  $\partial\Omega$ ,

tj.  $P(\Omega) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)$ , koja se za glatke domene reducira na  $P(\Omega) = \int_{\partial\Omega} ds$ . Ako je  $l > 0$  Lagrangeov multiplikator, onda minimizacijska zadaća

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}} J(\Omega) + lP(\Omega) \quad (1.8)$$

ima barem jedno optimalno rješenje, vidi [8]. Postoje i mnoge druge varijante zadaće (1.7) koje daju dobro postavljenu minimizacijsku zadaću.

## 1.2 Derivacija oblika

Cilj nam je primijeniti gradijentnu metodu na minimizacijsku zadaću (1.7). Kako bismo to napravili, moramo definirati derivaciju oblika. Zbog toga, dalje radimo s podskupovima od  $\mathcal{U}$  s glatkim rubom. Takve skupove zovemo glatkima. Neka je  $\Omega$  glatki otvoren skup. U obzir uzimamo domene oblika

$$\Omega_\theta = (\text{Id} + \theta)(\Omega),$$

gdje je  $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ . Dobro je poznato da za dovoljno mali  $\theta$ ,  $(\text{Id} + \theta)$  je difeomorfizam u  $\mathbb{R}^d$ .

**Definicija 1.2.1.** Derivacija oblika od  $J(\Omega)$  definira se kao Frechetova derivacija u  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  u 0 preslikavanja  $\theta \rightarrow J(\Omega_\theta)$ , tj.

$$J(\Omega_\theta) = J(\Omega) + J'(\Omega)(\theta) + o(\theta),$$

pri čemu je funkcija  $o$  bilo koja funkcija sa  $\mathbb{R}$  u  $\mathbb{R}$  takva da vrijedi  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{|o(\theta)|}{\|\theta\|} = 0$  i  $J'(\Omega)$  neprekidna linearna forma na  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ .

Sljedeći rezultat kaže da derivacija  $J'(\Omega)(\theta)$  u smjeru  $\theta$  ovisi samo o  $\theta \cdot n$  na  $\partial\Omega$ .

**Lema 1.2.2.** Neka je  $\Omega$  glatki, ograničen i otvoren skup i neka je  $J(\Omega)$  diferencijabilna funkcija na  $\Omega$ . Njezina derivacija zadovoljava

$$J'(\Omega)(\theta_1) = J'(\Omega)(\theta_2)$$

ako su  $\theta_1, \theta_2 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  takvi da  $\theta_2 - \theta_1 \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  i vrijedi  $\theta_1 \cdot n = \theta_2 \cdot n$  na  $\partial\Omega$ .

Sada dajemo dva primjera derivacije oblika koje će biti korisne u nastavku.

**Lema 1.2.3.** Neka je  $\Omega$  glatki, ograničen i otvoren skup i neka je  $\phi(x) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ . Definiramo

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} \phi(x) dx.$$

Tada je  $J$  diferencijabilna na  $\Omega$  i vrijedi

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\theta(x)\phi(x)) \, dx = \int_{\partial\Omega} \theta(x) \cdot n(x)\phi(x) \, ds, \quad \forall \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d).$$

**Lema 1.2.4.** Neka je  $\Omega$  glatki, ograničen i otvoren skup i neka je  $\phi(x) \in W^{2,1}(\mathbb{R}^d)$ . Definiramo

$$J(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \phi(x) \, ds.$$

Tada je  $J$  diferencijabilna na  $\Omega$  i vrijedi

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} \theta \cdot n \left( \frac{\partial\phi}{\partial n} + H\phi \right) \, ds, \quad \forall \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d),$$

pri čemu je  $H = \operatorname{div} n$  srednja zakrivljenost od  $\partial\Omega$ . Nadalje, ovaj rezultat vrijedi i ako se  $\partial\Omega$  zamijeni s  $\Gamma$ , glatkim podskupom od  $\partial\Omega$ , i pretpostavi da je  $\phi = 0$  na  $\Gamma$ .

**Napomena 1.2.5.** Iz Leme 1.2.3 možemo izračunati derivaciju oblika za volumen od  $\Omega$ . Doista, uz  $\phi \equiv 1$ , imamo

$$\begin{aligned} J(\Omega) &= \int_{\Omega} \phi \, dx = \int_{\Omega} 1 \, dx = V(\Omega), \\ V'(\Omega)(\theta) &= \int_{\partial\Omega} \theta(x) \cdot n(x) \, ds. \end{aligned}$$

Slično, iz Leme 1.2.4 možemo izračunati derivaciju oblika za oplošje od  $\Omega$ . Imamo

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \int_{\partial\Omega} 1 \, ds, \\ P'(\Omega)(\theta) &= \int_{\partial\Omega} \theta(x) \cdot n(x) H \, ds. \end{aligned}$$

**Teorem 1.2.6.** Neka je  $\Omega$  glatki, ograničen i otvoren skup i neka je  $\phi(x) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ . Neka su  $f$  i  $g$ , kao i rješenje  $u$  sustava (1.1) glatke, na primjer  $f \in H^1(\Omega)^d$ ,  $g \in H^2(\Omega)^d$ ,  $u \in H^2(\Omega)^d$ . Derivacija oblika od (1.4) je

$$\begin{aligned} J'_1(\Omega)(\theta) &= \int_{\Gamma_N} \left( 2 \left[ \frac{\partial(g \cdot u)}{\partial n} + Hg \cdot u + f \cdot u \right] - Ae(u) \cdot e(u) \right) \theta \cdot n \, ds \\ &\quad + \int_{\Gamma_D} Ae(u) \cdot e(u) \theta \cdot n \, ds. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Derivacija oblika od (1.5) je

$$\begin{aligned} J'_2(\Omega)(\theta) &= \int_{\Gamma_N} \left( \frac{C_0}{\alpha} k |u - u_0|^\alpha + Ae(p) \cdot e(u) - f \cdot p - \frac{\partial(g \cdot p)}{\partial n} - Hg \cdot p \right) \theta \cdot n \, ds \\ &+ \int_{\Gamma_D} \left( \frac{C_0}{\alpha} k |u - u_0|^\alpha - Ae(u) \cdot e(p) \right) \theta \cdot n \, ds, \end{aligned} \quad (1.10)$$

gdje je  $p \in H^2(\Omega)^d$  rješenje dualne zadaće

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(Ae(p)) &= -C_0 k(x) |u - u_0|^{\alpha-2} (u - u_0), \quad \text{na } \Omega, \\ p &= 0, \quad \text{na } \Gamma_D, \\ (Ae(p))n &= 0, \quad \text{na } \Gamma_N, \end{aligned} \quad (1.11)$$

gdje je  $C_0$  konstanta dana s

$$C_0 = \left( \int_{\Omega} k(x) |u(x) - u_0(x)|^\alpha \, dx \right)^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

Teorem 1.2.6 je od iznimne važnosti jer iz njegovih rezultata proizlazi derivacija oblika za funkcije cilja (1.4) i (1.5), odnosno možemo izvući brzinu kretanja granice  $\partial\Omega$ . Kako bismo znali izvesti derivaciju oblika za neke druge funkcije cilja, korisno je pogledati dokaz Teorema 1.2.6 prema [4].

*Dokaz.* Uzmimo općenitu funkciju cilja

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} j(x, u(x)) \, dx + \int_{\partial\Omega} l(x, u(x)) \, ds,$$

za koju definiramo Lagrangeovu funkciju

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Omega, v, q) &= \int_{\Omega} j(v) \, dx + \int_{\partial\Omega} l(v) \, ds + \int_{\Omega} Ae(v) \cdot e(q) \, dx \\ &- \int_{\Omega} q \cdot f \, dx - \int_{\Gamma_N} q \cdot g \, ds - \int_{\Gamma_D} (q \cdot Ae(v)n + v \cdot Ae(q)n) \, ds, \end{aligned}$$

gdje je  $(v, q) \in (H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d))^2$ , pri čemu je  $q$  Lagrangeov multiplikator. Stacionarnost Lagrangiana će nam dati optimalne uvjete minimizacijske zadaće. Za dani  $\Omega$ , s  $(u, p)$  označavamo stacionarnu točku. Parcijalna derivacija od  $\mathcal{L}$  po  $q$  u smjeru  $\phi \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$  nakon integracije po dijelovima daje

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(\Omega, u, p), \phi \right\rangle = - \int_{\Omega} \phi \cdot (\operatorname{div}(Ae(u)) + f) \, dx \\ &+ \int_{\Gamma_N} \phi \cdot ((Ae(u))n - g) \, ds - \int_{\Gamma_D} u \cdot Ae(\phi)n \, ds. \end{aligned}$$

Ako uzmemo  $\phi$  s kompaktnim nosačem u  $\Omega$  dobivamo jednadžbu stanja. Varijacijom funkcije traga  $\phi$  na  $\Gamma_N$  dobivamo Neumannov rubni uvjet za  $u$ , a varijacijom naprezanja u smjeru normale  $(Ae(\phi))n$  na  $\Gamma_D$  Dirichletov rubni uvjet za  $u$ . Kako bismo odredili dualnu zadaću deriviramo  $\mathcal{L}$  po  $v$  u smjeru  $\phi \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ . Dobivamo

$$0 = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega, u, p), \phi \right\rangle = \int_{\Omega} j'(u) \cdot \phi \, dx + \int_{\partial\Omega} l'(u) \cdot \phi \, ds + \int_{\Omega} Ae(\phi) \cdot e(p) \, dx - \int_{\Gamma_D} (p \cdot Ae(\phi))n + \phi \cdot Ae(p)n \, ds,$$

što nakon parcijalne integracije postaje

$$0 = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega, u, p), \phi \right\rangle = \int_{\Omega} (j'(u) - \operatorname{div}(Ae(p))) \cdot \phi \, dx + \int_{\Gamma_N} \phi \cdot (Ae(p)n + l'(u)) \, ds + \int_{\Gamma_D} (\phi \cdot l'(u) - p \cdot Ae(\phi)n) \, ds.$$

Uzimanjem  $\phi$  sa kompaktnim nosačem u  $\Omega$  dobivamo dualnu jednadžbu stanja

$$-\operatorname{div}(Ae(p)) = -j'(u), \quad \text{na } \Omega.$$

Variranjem traga od  $\phi$  na  $\Gamma_N$  dobivamo Neumannov rubni uvjet

$$(Ae(p))n = -l'(u), \quad \text{na } \Gamma_N,$$

te jer je  $\phi|_{\Gamma_D} = 0$  variranje naprezanja u smjeru normale  $(Ae(\phi))$  po  $\Gamma_D$  daje

$$p = 0, \quad \text{na } \Gamma_D,$$

te konačno imamo dobro definiranu dualnu zadaću za  $p$ .

Derivacija oblika funkcije cilja dobiva se deriviranjem

$$J(\Omega) = \mathcal{L}(\Omega, u(\Omega), p(\Omega)),$$

po  $\Omega$  u smjeru  $\theta$  jer se ostale derivacije ponište, odnosno

$$J'(\Omega)(\theta) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega, u, p)(\theta).$$

Korištenjem Leme 1.2.3 i Leme 1.2.4 imamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega, u, p)(\theta) &= \int_{\partial\Omega} \theta \cdot n(j(u) + Ae(u) \cdot e(p) - p \cdot f) \, ds + \int_{\partial\Omega} \theta \cdot n \left( \frac{\partial l(u)}{\partial n} + Hl(u) \right) \, ds \\ &\quad - \int_{\Gamma_N} \theta \cdot n \left( \frac{\partial(g \cdot p)}{\partial n} + Hg \cdot p \right) \, ds - \int_{\Gamma_D} \theta \cdot n \left( \frac{\partial h}{\partial n} + Hh \right) \, ds, \end{aligned}$$

gdje je  $h = u \cdot Ae(p)n + p \cdot Ae(u)n$ . Uzimanjem u obzir homogene Dirichletove uvjete za  $u$  i  $p$  slijedi

$$Ae(u) \cdot e(p) = \mu \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} + (\mu + \lambda) \left( \frac{\partial u}{\partial n} \cdot n \right) \left( \frac{\partial p}{\partial n} \cdot n \right), \quad \text{na } \Gamma_D.$$

Konačno, imamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega, u, p)(\theta) &= \int_{\partial \Omega} \theta \cdot n \left( \frac{\partial l(u)}{\partial n} + Hl(u) \right) ds \\ &+ \int_{\Gamma_N} \theta \cdot n \left( j(u) + Ae(u) \cdot e(p) - p \cdot f - \frac{\partial(g \cdot p)}{\partial n} - Hg \cdot p \right) ds \\ &- \int_{\Gamma_D} \theta \cdot n (j(u) - Ae(u) \cdot e(p)) ds. \end{aligned}$$

□

**Napomena 1.2.7.** Ako u dokazu Teorema 1.2.6 za funkciju cilja uzmemo (1.4), odnosno  $j(u) = f \cdot u$ ,  $l(u) = g \cdot u$  na  $\Gamma_N$  i  $l(u) = 0$  na  $\Gamma_D$ , lako se vidi da je  $p = -u$  i primarna zadaća je jednaka dualnoj.

Sada dajemo varijantu Teorema 1.2.6 kada je površinska sila zapravo tlak koji je orijentiran u smjeru normalnog vektora. Drugim riječima zamijenimo sustav (1.1) s

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(u)) = f, & \text{na } \Omega, \\ u = 0, & \text{na } \Gamma_D, \\ (Ae(u))n = p_0 n, & \text{na } \Gamma_N, \end{cases} \quad (1.12)$$

gdje je  $n$  jedinična vanjska normala i  $p_0(x)$  skalarna funkcija u  $H^2(D)$ .

**Korolar 1.2.8.** Neka je  $\Omega$  glatki, ograničen i otvoren skup i neka je  $\phi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ . Neka je  $u$  rješenje sustava (1.12),  $u \in H^2(\Omega)^d$ . Derivacija oblika za funkciju cilja

$$J_3(\Omega) = \int_{\Omega} f \cdot u \, dx + \int_{\Gamma_N} p_0 n \cdot u \, ds$$

glasi

$$\begin{aligned} J'_3(\Omega)(\theta) &= \int_{\Gamma_N} \theta \cdot n (2f \cdot u + 2\operatorname{div}(p_0 u) - Ae(u) \cdot e(u)) \, ds \\ &+ \int_{\Gamma_D} Ae(u) \cdot e(u) \theta \cdot n \, ds. \end{aligned} \quad (1.13)$$

**Napomena 1.2.9.** *Teorem 1.2.6 se može generalizirati na općenitije funkcije cilja koje mogu uključivati naprezanje ili deformaciju nakon naprezanja. Također je moguće promatrati nehomogeni Dirichletov rubni uvjet u jednadžbi stanja.*

**Napomena 1.2.10.** *Moguće je još više ograničiti domenu postavljanjem dijela ruba  $\Gamma_{fixed}$  nepomičnim. U takvom slučaju, vektorsko polje  $\theta$  mora zadovoljavati uvjet  $\theta \cdot n = 0$  na  $\Gamma_{fixed}$ .*

Sada imamo sav potreban teorijski alat za opisati gradijentnu metodu za minimizaciju funkcije cilja  $J(\Omega)$ . Kao što smo vidjeli, općenita forma derivacije oblika glasi

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} v\theta \cdot n \, ds,$$

gdje je  $v$  funkcija dana nekim rezultatom poput Teorema 1.2.6. Općenito, gradijentna metoda za funkciju cilja  $J(\Omega)$  glasi

$$J(\Omega_t) = J(\Omega) + J'(\Omega)(\theta) = J(\Omega) + \int_{\partial\Omega} v\theta \cdot n \, ds,$$

pri čemu je  $\theta$  smjer spusta gradijentne metode. Smjer spusta definiramo kao vektorsko polje

$$\theta = -vn. \quad (1.14)$$

Oblik  $\Omega$  se transformira u

$$\Omega_t = (\text{Id} + t\theta)\Omega,$$

gdje je  $t > 0$  mali korak spusta. Konačno, funkcija cilja za transformirani oblik glasi

$$J(\Omega_t) = J(\Omega) - t \int_{\partial\Omega} v^2 \, ds + O(t^2),$$

što garantira spust funkcije cilja.

Postoje i drugi izbori za definiciju smjera spusta. Napomenimo da, s matematičkog gledišta, formula (1.14) ima smisla samo ako je  $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ . Uzimajući u obzir standardne definicije za  $v$  i derivacije oblika funkcija cilja dane u (1.9) ili (1.10),  $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  samo ako su  $u$  i rješenje dualne zadaće (1.11)  $p$ , te  $\partial\Omega$  dovoljno glatki. Ipak, nije jasno jesu li optimalni oblici, ako postoje, glatki. Ako ili  $v$  ili normala  $n$  nisu dovoljno glatki, onda je poželjno izgladiti vektorsko polje  $vn$  (klasični problem u optimizaciji oblika). Glavna ideja je promijeniti skalarni produkt s obzirom na koji procjenjujemo smjer spusta. Na primjer, ako radimo sa  $H_0^1$  skalarnim produktom umjesto sa  $L^2$  skalarnim produktom, moramo riješiti sustav

$$\begin{aligned} -\Delta\theta &= 0, & \text{na } \Omega \\ \frac{\partial\theta}{\partial n} &= -vn, & \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$



Integracijom po dijelovima dobijamo

$$\int_{\Omega} |\nabla\theta|^2 dx = - \int_{\partial\Omega} v\theta \cdot n ds,$$

što očitno pokazuje da je  $\theta$  smjer spusta koji garantira smanjivanje funkcije cilja.

### 1.3 Reprezentacija oblika pomoću metode nivo skupa

U prošlom poglavlju smo opisali kako se mijenja oblik preko Lagrangeove formulacije, tj. formulacije deformiranja realnog tijela temeljene na materijalnim koordinatama referentne konfiguracije  $\Omega_0$ . Dovoljno je bilo napraviti mrežu na  $\Omega$  i adaptirati ju ovisno o smjeru spusta  $\theta$ . Ova implementacija ima barem dva nedostatka. Prvi je taj da ako je oblik previše deformiran, onda je potrebno napraviti novu mrežu, što može biti jako skupo. Drugi nedostatak je što različiti dijelovi granice mogu imati tendenciju spajanja ili razdvajanja, što je problem jer je jako teško raditi s topološkim promjenama koristeći ovakvu metodu. Zbog toga preferiramo Eulerovu formulaciju koja se temelji na prostornim koordinatama trenutne deformirane konfiguracije i koristimo metodu nivo skupa za dobivanje oblika  $\Omega$  na fiksnoj mreži.

Neka je  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  ograničena radna domena koja sadrži sve dopustive skupove  $\Omega$ . U praksi, domena  $D$  će biti uniformna mreža od početka do kraja algoritma. Parametriziramo granicu od  $\Omega$  sa nivo skupom funkcije  $\psi$  u  $D$

$$\psi(x) = 0 \iff x \in \partial\Omega \cap D,$$

$$\psi(x) < 0 \iff x \in \Omega,$$

$$\psi(x) > 0 \iff x \in (D \setminus \bar{\Omega}).$$

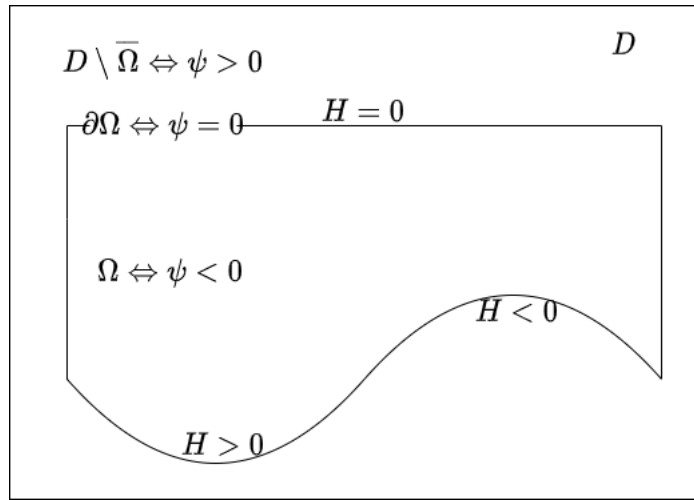
**Definicija 1.3.1.** Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ . Srednja zakrivljenost  $H$  od  $\partial\Omega$  definira se kao divergencija normale  $n$  na  $\Omega$ , odnosno

$$H = \operatorname{div} n,$$

pri čemu je  $H > 0$  za konveksno područje,  $H < 0$  za konkavno područje i  $H = 0$  za ravninu.

Jer je  $\nabla\psi$  okomito na nivo skupove funkcije  $\psi$ , okomito je i na  $\partial\Omega$  (nivo skup 0) pa se vanjska normala  $n$  na oblik  $\Omega$  može dobiti kao  $n = \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}$ , srednja zakrivljenost  $H$  se dobije kao  $H = \operatorname{div} n$ . Napomenimo da, iako su  $n$  i  $H$  u teoriji definirani samo na  $\partial\Omega$ , metoda nivo skupa dopušta njihovo proširenje na cijelu domenu  $D$ .

Sustav linearizirane elastičnosti (1.1) (kao i sustav (1.11)) se također proširuje na cijelu domenu  $D$  pristupom takozvanog *ersatz* materijala. Popunjavamo prazninu  $D \setminus \Omega$  „slabom fazom” oponašajući prazninu, ali pri tom izbjegavajući singularnost matrice krutosti.

Slika 1.1: Vizualni prikaz funkcije  $\psi$  i srednje zakrivljenosti  $H$  u domeni  $D$ 

Definiramo tenzor elastičnosti  $A^*(x)$  na  $D$  koji je proširenje tenzora  $A$  definiranog na  $\Omega$

$$A^*(x) = \rho(x)A, \quad (1.15)$$

pri čemu je

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 10^{-3}, & x \in D \setminus \Omega. \end{cases}$$

Funkciju  $\rho$  nazivamo materijalnom gustoćom.

Pogledajmo sada jednostavan primjer. Neka je  $f = 0$  i  $\partial D = \partial D_D \cup \partial D_N \cup \partial D_0$ , dekomponirana granica na 3 dijela. Na  $\partial D_D$  je Dirichletov rubni uvjet, na  $\partial D_N$  nehomogeni Neumannov rubni uvjet i na  $\partial D_0$  homogeni Neumannov rubni uvjet. Na dopustivi oblik  $\Omega \subseteq \mathcal{U}$  postavljamo još jedan uvjet

$$\begin{aligned} \Gamma_D &\subseteq \partial D_D, \\ \Gamma_N &= \partial D_N \cup \Gamma_0, \end{aligned} \quad (1.16)$$

gdje je  $\Gamma_0$  granica oblika  $\Omega$  na kojoj zadajemo homogen Neumannov rubni uvjet. Drugim riječima,  $g$  djeluje samo na dio granice  $\Gamma_N$ , dok granica  $\Gamma_D$  mora biti podskup fiksirane granice  $\partial D_D$ . Zbog toga jedini dio granice oblika  $\Omega$  koji je slobodan je  $\Gamma_0$ . Iz prethodne rasprave slijedi da pomak  $u$  dobivamo kao rješenje sustava

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^*e(u)) = 0, & \text{na } D, \\ u = 0, & \text{na } \partial D_D, \\ (A^*e(u))n = g, & \text{na } \partial D_N, \\ (A^*e(u))n = 0, & \text{na } \partial D_0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Analogno se dobije sličan sustav i za (1.11)

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^*e(p)) = -C_0k(x)|u - u_0|^{\alpha-2}(u - u_0), & \text{na } D, \\ p = 0, & \text{na } \partial D_D, \\ (A^*e(p))n = 0, & \text{na } \partial D_N, \\ (A^*e(p))n = 0, & \text{na } \partial D_0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Kroz optimizacijski algoritam oblik evoluiru u svakom vremenskom koraku koji odgovara jednom koraku spusta. Ako se oblik mijenja tijekom vremena, onda je evolucija funkcije koja određuje nivo skupove određena Hamilton–Jacobijevom jednadžbom. Preciznije, pretpostavimo da se oblik  $\Omega(t)$  mijenja tokom vremena  $t \in \mathbb{R}^+$  i neka je  $V(t, x)$  brzina u smjeru normale na granicu  $\partial\Omega(t)$ . Tada vrijedi

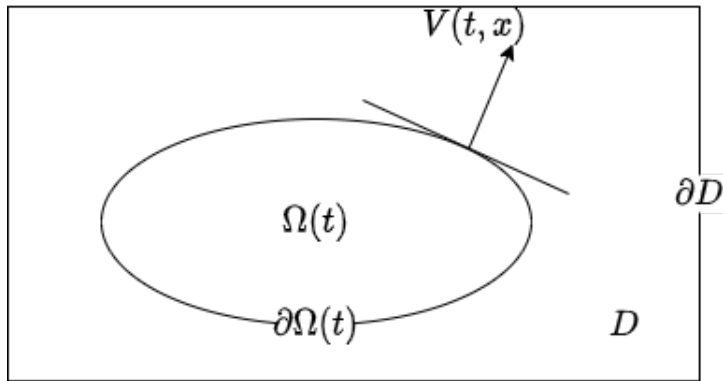
$$\psi(t, x(t)) = 0, \quad \forall x(t) \in \partial\Omega(t).$$

Vremenska derivacija daje

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \dot{x}(t) \cdot \nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t} + Vn \cdot \nabla\psi = 0.$$

Jer je  $n = \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}$  imamo

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + V|\nabla\psi| = 0. \quad (1.19)$$



Slika 1.2: Skica brzine  $V$  u odnosu na radnu domenu  $D$

Ako je brzina  $V$  poznata svugdje (što će biti slučaj), Hamilton–Jacobijeva jednadžba (1.19) vrijedi na cijeloj domeni  $D$ , ne samo na  $\partial\Omega$ . Dobro je poznato, vidi [16], da Hamilton–Jacobijevе jednadžbe obično ne daju glatko rješenje. Egzistencija i jedinstvenost se mogu dobiti u okviru viskozniх rješenja koja dopuštaju prikladnu definiciju generaliziranog gibanja oblika. U praksi, računamo takva viskozna rješenja koristeći Galerkinovu metodu karakteristika i *upwind* shemu, vidi [17] i [14, 15].

## 1.4 Algoritam optimizacije

Za minimizacijsku zadaću

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}} J(\Omega). \quad (1.20)$$

derivacije oblika su oblika

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} v\theta \cdot n \, ds,$$

gdje se funkcija  $v(u, p, n, H)$  dobije iz rezultata kao što je Teorem 1.2.6. Kako su  $n, H, u$  i  $p$  definirani svugdje na  $D$ , slijedi da se funkcija  $v$  u derivaciji oblika definira na cijelom  $D$ , ne samo na slobodnom dijelu granice  $\partial\Omega$ . Najjednostavniji odabir za smjer spusta je

$$\theta = -vn,$$

te je on definiran na cijeloj domeni  $D$ . Iz takvog odabira proizlazi da je brzina  $V = -v$ .

Normalna komponenta  $\theta \cdot n = -v$  je adveksijska brzina (brzina prijenosa topline ili materije tečenjem fluida) u Hamilton–Jacobijevoj jednažbi

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - v|\nabla\psi| = 0. \quad (1.21)$$

Transportiranje  $\psi$  preko (1.21) ekvivalentno je pomicanju  $\partial\Omega$  (nivo skup 0 funkcije  $\psi$ ) duž gradijenta smjera spusta  $-J'(\Omega)$ .

Prije nego pojasnimo detalje algoritma, uvodimo dvije definicije.

**Definicija 1.4.1.** *Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ . Funkcija udaljenosti  $d$  s  $\mathbb{R}^d$  u  $\mathbb{R}$  definira se kao*

$$d(x) = \min_{x_I \in \partial\Omega} (|x - x_I|).$$

**Definicija 1.4.2.** *Kažemo da je implicitna funkcija  $\psi$  funkcija udaljenosti s predznakom ako vrijedi*

$$\psi(x) = \begin{cases} d(x), & x \in \Omega, \\ -d(x), & x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega, \end{cases}$$

gdje je  $d$  neka funkcija udaljenosti.

Predloženi algoritam je iterativna metoda strukturirana na sljedeći način:

1. Inicijalni oblik  $\Omega_0$  se definira eksplicitno nakon što definiramo granice. Svaka granica je označena s oznakom koja označava je li to Dirichletova ili Neumannova granica. Svaka granica je parametrizirana i orijentirana pomoću nekog realnog parametra. Na orijentaciju granica se mora paziti zbog toga što generatori mreže bez

odgovarajuće orijentacije granica javljaju greške. Mreža se dobije triangulacijom inicijalnog oblika. Inicijaliziramo funkciju  $\psi_0$  koja predstavlja inicijalni izbor domene  $\Omega_0$ , na način da na cijeloj domeni postavimo  $\psi < 0$  te na određenim područjima, koja će predstavljati praznine, postavimo  $\psi > 0$ .

2. Iteriramo do konvergencije. Najčešći kriterij konvergencije za zaustavljanje optimizacijske petlje jest provjeriti je li derivacija oblika dovoljno mala u nekoj odgovarajućoj normi. Ako želimo, za zaustavljanje petlje možemo uzeti fiksni broj koraka zbog jednostavnijeg testiranja i otklanjanja pogrešaka. Za korak algoritma  $k \geq 0$  radimo sljedeće:

- a) Riješimo sustave linearizirane elastičnosti (1.1) i (1.11) postavljenih u  $\Omega_k$ , aproksimiranih preko sustava (1.17) i (1.18) postavljenih u radnoj domeni  $D$  te kao rješenja tih sustava dobivamo  $u_k$  i  $p_k$ . Sustave rješavamo pomoću metode konačnih elemenata. Brzinu  $v_k$  dobivamo iz derivacije oblika funkcije cilja koja će ovisiti o upravo dobivenim  $u_k$  i  $p_k$ , što se lako vidi iz Teorema 1.2.6.
- b) Ažurirani oblik  $\Omega_{k+1}$  dobiva se preko funkcije  $\psi_{k+1}$  koja se dobije kao rješenje transportne Hamilton–Jacobijeve jednadžbe (1.21) vremenskog koraka  $\Delta t_k$  s inicijalnim uvjetom  $\psi_k(x)$  i brzinom  $V = -v_k$ , odnosno

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_{k+1}}{\partial t} - v_k |\nabla \psi_{k+1}| = 0, \\ \psi_{k+1}(t = 0, x) = \psi_k(x). \end{cases}$$

Vremenski korak  $\Delta t_k$  se odabire tako da vrijedi  $J(\Omega_{k+1}) \leq J(\Omega_k) + \varepsilon$ , gdje je  $0 < \varepsilon \ll 1$  parametar koji dozvoljava mali rast funkcije cilja. Iako težimo minimizaciji funkcija cilja, dopuštanje blagog rasta može izvući funkciju cilja iz lokalnog minimuma i usmjeriti je prema optimalnijem minimumu. Ako se za vremenski korak  $\Delta t_k$  ispunjava uvjet  $J(\Omega_{k+1}) \leq J(\Omega_k) + \varepsilon$ , onda prihvaćamo  $\psi_{k+1}$  za novu funkciju koja određuje nivo skupove i povećavamo  $\Delta t_k$ , a ako ne ispunjava uvjet, onda ju odbijamo i smanjujemo vremenski korak  $\Delta t_k$ .

3. Zbog stabilnosti i glatkoće moramo regularizirati funkciju  $\psi$  koja može postati prestrma ili preravna. To radimo tako da povremeno ponovo inicijaliziramo  $\psi$ . Ponovna inicijalizacija je vrlo važna u praksi jer prestrma funkcija  $\psi$  kojom definiramo nivo skupove povlači lošu aproksimaciju normale  $n$  i zakrivljenosti  $H$  granice  $\partial\Omega$ , odnosno nivo skupa  $\emptyset$ . Pogledajmo sada sustav

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \text{sign}(\psi_0)(|\nabla \psi| - 1) = 0, & \text{na } D \times \mathbb{R}^+, \\ \psi(t = 0, x) = \psi_0(x), & \text{na } D. \end{cases} \quad (1.22)$$

Za bilo koji početni uvjet  $\psi_0$ , rješavanje ovog sustava u stacionarnom stanju daje novu vrijednost za  $\psi$  sa svojstvom da je  $|\nabla \psi| = 1$ , budući da se konvergencija

dogada kada je desna strana nula. Signum funkcija kontrolira tok informacija u sustavu (1.22), tj. ukoliko je  $\psi < 0$  informacija teče u jednom smjeru, a ako je  $\psi > 0$  u drugom smjeru. Ponovnom inicijalizacijom postizemo izgladivanje nivo skupova funkcije  $\psi$  koja tada postiže svojstvo  $|\nabla\psi| = 1$  koje zadovoljava svaka funkcija udaljenosti.

4. U algoritmu postavljamo ograničenje volumena koje je implicitno dano Lagrangeovim multiplikatorom  $l$  koji se koristi u funkciji cilja  $J(\Omega) + lV(\Omega)$ , pri čemu je  $V(\Omega)$  volumen oblika  $\Omega$ . Lagrangeov multiplikator  $l$  se ažurira pri svakoj iteraciji algoritma tako da se volumen kreće prema željenom volumenu  $V_0$ . To se radi na način da se  $l$  povećava ukoliko je trenutni volumen  $V(\Omega)$  veći od željenog volumena  $V_0$ , a ukoliko je  $l$  manji od željenog volumena, onda ga smanjujemo.

Hamilton–Jacobijeva jednadžba (1.21) rješava se Galerkinovom metodom karakteristika, vidi [12, 13] koristeći funkciju *convect* u programskom alatu *FreeFem++* [11]. Vremenski koraci moraju zadovoljavati Courant–Friedrichs–Lewyjev (CFL) uvjet

$$\max(V) \frac{\Delta t}{h} \leq 1,$$

gdje je  $h$  duljina najduže stranice konačnog elementa (u našem slučaju trokuta). Prisjetimo se da je vremenski korak iz CFL uvjeta uobičajeno znatno manji od vremenskog koraka  $\Delta t_k$  u koraku spusta u minimizaciji  $J(\Omega)$ . U praksi, algoritam nikada ne stvara nove rupe ili nove granice u 2D ako se Hamilton–Jacobijeva jednadžba (1.21) riješi uz strogi CFL uvjet. Postoje samo dvije mogućnosti kada se može napraviti nova rupa u 2D. Prva je da se inicijalna rupa razdvoji na 2 dijela (vrlo malo vjerojatno), dok je druga mogućnost da nova rupa nastane unutar materijala. Posljednje je nemoguće jer Hamilton–Jacobijeva jednadžba (1.21) zadovoljava princip maksimuma. Drugim riječima, ne postoji način za dobivanje novih rupa pomoću opisanog algoritma. Unatoč tome, metoda nivo skupa je poznata da lako podnosi topološke promjene, kao što su spajanje rupa ili nestajanje rupa. Zbog toga se algoritam može koristiti u izvođenju topoloških optimizacija. U 2D, najbolji rezultati se dobiju ako je broj rupa inicijalnog dizajna dovoljno velik. Situacija je drugačija u 3D gdje se nove rupe lako stvore kad se stisnu uz tanki zid, te je onda inicijalni oblik manje bitan.

**Napomena 1.4.3.** *Jedna od glavnih prednosti metode nivo skupa je da se nikad ne moramo brinuti gdje se točno nalazi granica  $\partial\Omega$ . Preciznije, ista numerička shema za rješavanje Hamilton–Jacobijeve jednadžbe (1.21) primijenjuje se svugdje unutar domene  $D$ . Još jedna prednost metode nivo skupa dolazi od jednostavne formule za računanje normale  $n$  i srednje zakrivljenosti  $H = \text{div } n$ .*



## Poglavlje 2

# Rezultati i primjeri

### 2.1 Numerika i parametri

U svim računima za domenu uzimamo pravokutnik na kojem triangulacijom napravimo mrežu. Gustoća mreže se može proizvoljno odabrati. Treba napomenuti da što je mreža finija, to je optimizacija bolja, ali je i algoritam sporiji te treba prilagoditi vremenski korak u Hamilton–Jacobijevoj jednadžbi (1.21) tako da zadovoljava CFL uvjet. Koristimo  $P_2$  konačne elemente za aproksimaciju zadaće linearizirane elastičnosti. Youngov modul elastičnosti  $E$  materijala  $A$  je normaliziran na 1 i Poissonov omjer  $\nu$  je fiksiran na 0.3. Praznine se imitiraju *ersatz* materijalom pri čemu su Poissonov omjer i Youngov modul elastičnosti jednaki  $10^{-3}$ . Vremenski korak za rješavanje Hamilton–Jacobijeve jednadžbe postavljamo na  $10^{-3}$ . Ponovna inicijalizacija funkcije  $\psi$  se radi tako što 5 puta riješimo zadaću (1.22) s vremenskim korakom  $10^{-2}$ . Radimo 100 iteracija kako bismo prikazali rješenja s dovoljno detalja i stabilnost algoritma, ali već nakon nekoliko iteracija postane jasno da algoritam konvergira.

Kako radimo u dvije dimenzije, funkcija  $u$  se može zapisati kao

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

a gradijent kao

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \partial_x u_1 & \partial_y u_1 \\ \partial_x u_2 & \partial_y u_2 \end{pmatrix}.$$

Simetrizirani gradijent je tada

$$e(u) = \begin{pmatrix} \partial_x u_1 & \frac{\partial_x u_2 + \partial_y u_1}{2} \\ \frac{\partial_x u_2 + \partial_y u_1}{2} & \partial_y u_2 \end{pmatrix}.$$



Primjenjujući (1.1) slijedi

$$\begin{aligned} Ae(u) \cdot \nabla v &= 2\mu e(u) \cdot \nabla v + \lambda(\text{Tr}(e(u)))\mathbf{I} \cdot \nabla v \\ &= 2\mu \left( \partial_x u_1 \cdot \partial_x v_1 + \partial_y u_2 \cdot \partial_y v_2 + \frac{1}{2}(\partial_x u_2 + \partial_y u_1)(\partial_x v_2 + \partial_y v_1) \right) \\ &\quad + \lambda(\partial_x u_1 + \partial_y u_2)(\partial_x v_1 + \partial_y v_2), \end{aligned}$$

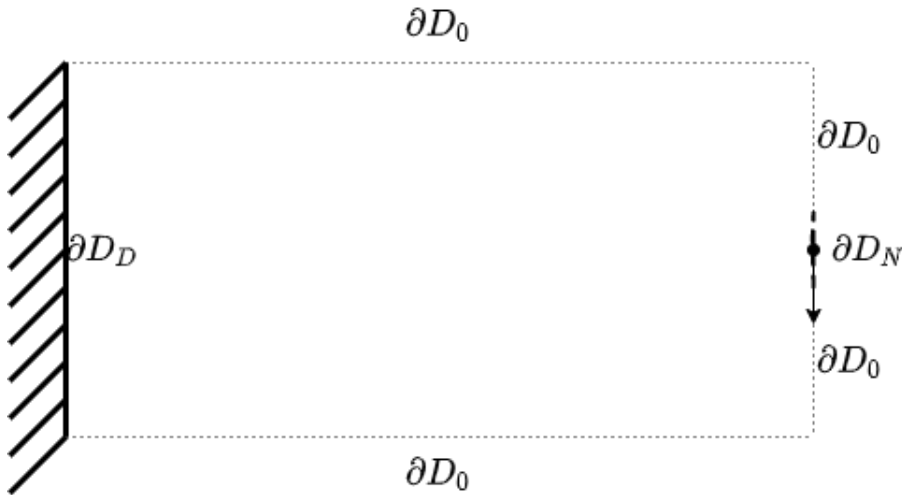
što se koristi u izračunavanju brzine, odnosno derivacije oblika, raznih funkcija cilja.

## 2.2 2D nosač

U prvom primjeru promatramo 2D nosač. Domena je veličine  $2 \times 1$  diskretizirana mrežom  $160 \times 80$ , s Dirichletovim rubnim uvjetom 0 na lijevoj stranici, na sredini desne stranice je primijenjena sila prema dolje, dok su na ostalim stranicama zadani homogeni Neumannovi rubni uvjeti, kao na slici 2.1. Dopustivi oblici moraju zadovoljavati (1.16), tj.

$$\partial\Omega = \Gamma_D \cup \partial D_N \cup \Gamma_0,$$

gdje je Dirichletova granica  $\Gamma_D$  podskup fiksirane granice  $\partial D_D$ , površinska gustoća sile  $g$  se primjenjuje samo na fiksiranoj granici  $\partial D_N$ . Homogena Neumannova granica  $\Gamma_0$  je jedina koja varira tijekom procesa optimizacije.



Slika 2.1: Rubni uvjeti za 2D nosač.

Nema površinske sile, tj.  $f = 0$ . Za funkciju cilja odabiremo funkciju cilja (1.4) uz koju u obzir uzimamo i površinu oblika  $\Omega$ . To znači da problem rješavamo uz funkciju

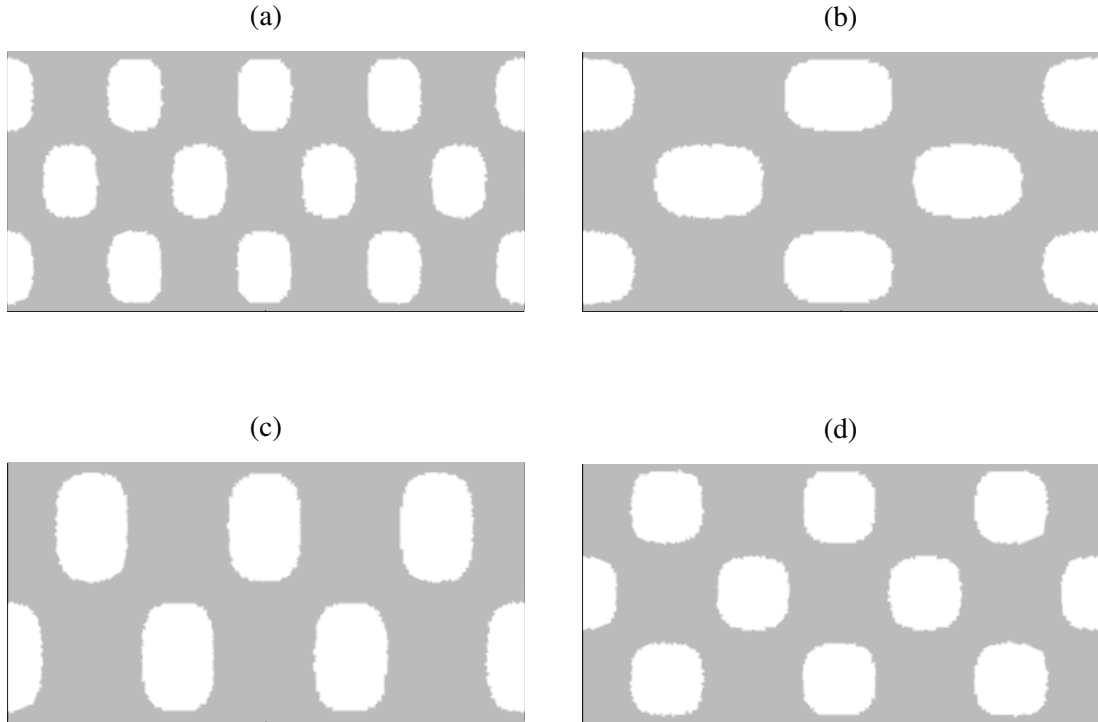
cilja

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} f \cdot u \, dx + \int_{\partial D_N} g \cdot u \, ds + l \int_{\Omega} dx, \quad (2.1)$$

gdje je  $l$  Lagrangeov multiplikator koji skalira utjecaj površine na funkciju cilja, inicijalno postavljen na  $l = 30$ . Možemo primjetiti da je u drugom članu gornje jednadžbe integral zadan samo po granici  $\partial D_N$ . To je zato što smo uzeli da je  $g = 0$  na  $\Gamma_0$ . Pod ovim uvjetima derivacija oblika funkcije cilja (2.1) dobije se kao specijalan slučaj Teorema 1.2.6 i glasi

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\Gamma_0} (l + 2f \cdot u - Ae(u) \cdot e(u))\theta \cdot n \, ds, \quad (2.2)$$

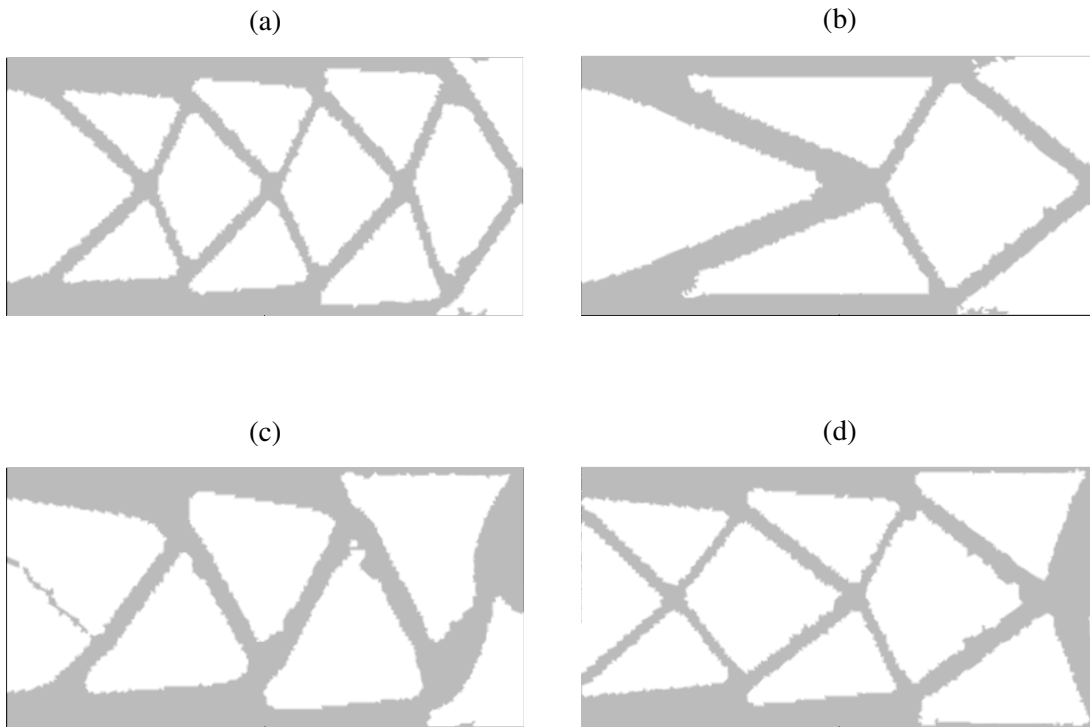
jer je  $\theta \cdot n = 0$  na  $\Gamma_D$  i na  $\partial D_N$ , tj. dijelu granice gdje nema homogenog Neumannovog rubnog uvjeta. Derivacija površine proizlazi iz Napomene 1.2.5.



Slika 2.2: Primjeri nekih početnih topologija.

## 2D nosač - bez ograničenja površine

Prvo prezentiramo rezultate za slučaj kada nemamo ograničenje površine, odnosno Lagrangeov multiplikator  $l$  se ne mijenja kroz iteracije. Algoritam konvergira glatko prema lokalnom minimumu koji jako ovisi o početnoj topologiji.



Slika 2.3: Optimalni oblici početnih topologija sa Slike 2.2 bez ograničenja površine.

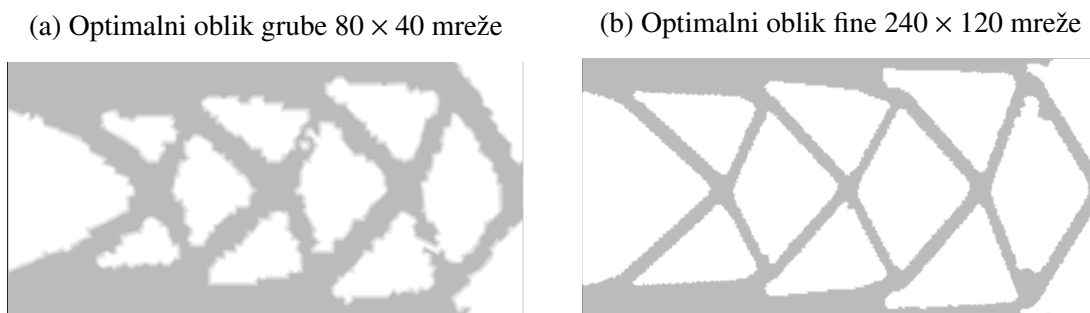
$\Omega_{opt}$	$J(\Omega_{opt})$	$P(\Omega_{opt})$
a)	43.2047	0.6845
b)	40.9591	0.6510
c)	48.7846	0.8045
d)	45.9929	0.7622

Tablica 2.1: Prikaz vrijednosti funkcija cilja  $J(\Omega_{opt})$  i površina  $P(\Omega_{opt})$  za optimalne oblike  $\Omega_{opt}$  sa Slike 2.3.

Za danu početnu topologiju rezultati će ovisiti o strukturi mreže. Primjeri takve ovisnosti mogu se vidjeti na slikama 2.2 i 2.3. Ovisnost je vrlo vjerojatno uzrokovana time što algoritam ne može stvarati nove rupe u 2D.

Finoća mreže ne utječe značajno na finalni oblik. Ako isti problem rješavamo na grubljoj  $80 \times 40$  i finijoj  $240 \times 120$  mreži dobivamo gotovo identičan finalni oblik kao i prije, vidi Sliku 2.4. Napomenimo da iako finoća mreže ne utječe pretjerano na finalni oblik, treba biti oprezan i ne uzimati pregrube mreže jer se oblik zna raspršiti zbog loše aproksimacije. Treba primijetiti da finoća mreže direktno utječe na veličinu stranica elemenata kojima generiramo mrežu (u našem slučaju su to trokuti). Također, jasno je da, ukoliko želimo

zadovoljiti CFL uvjet, vremenski i prostorni korak kod rješavanja Hamilton–Jacobijeve jednadžbe (1.21) trebaju biti proporcionalni. Na primjer, ako dvostruko profinimo mrežu, onda prepolovimo prostorni korak. Tada moramo isto tako prepoloviti i vremenski korak te izvršiti dvostruko više iteracija algoritma.



Slika 2.4: Usporedba optimalnih oblika grube 80 × 40 i fine 240 × 120 mreže.

U rezultatima se vidi da kod finijih mreža imamo bržu i bolju konvergenciju algoritma nego kod grubih mreža (slika 2.5).

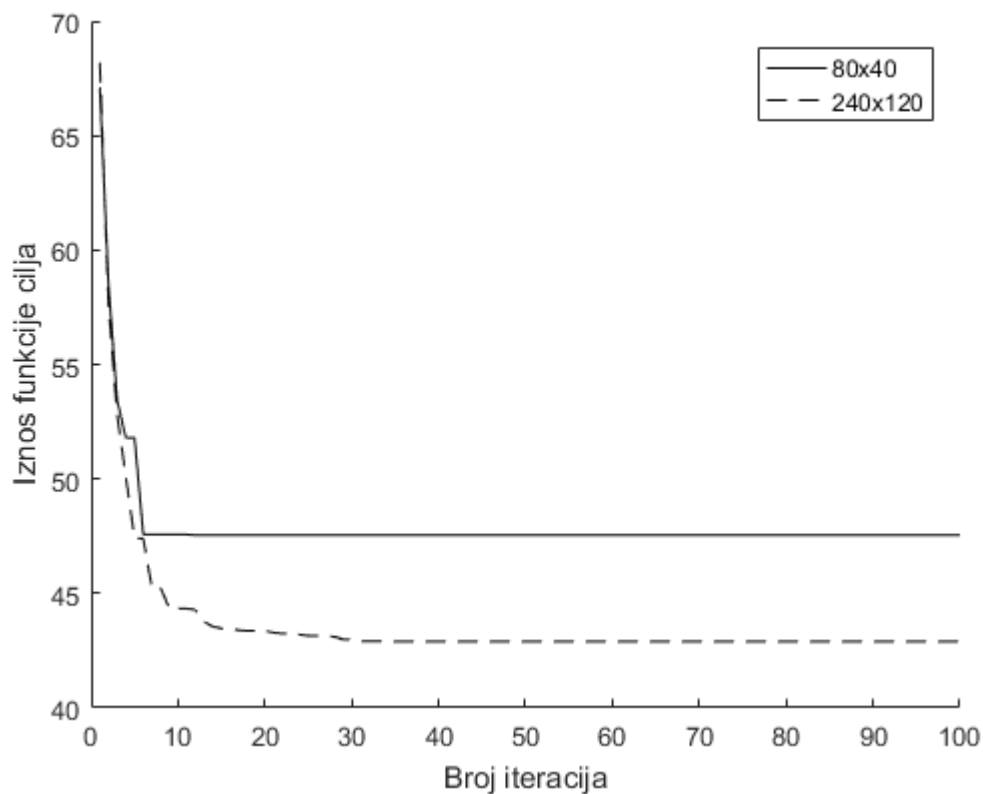
Napomenimo da je nužan uvjet za optimalnost smanjivanja funkcije cilja (2.1) da za brzinu vrijedi

$$v = l - Ae(u) \cdot e(u) = 0$$

na granici. Primjer implementacije algoritma može se pronaći u [1].

## 2D nosač - ograničenje površine

Kao što smo prije diskutirali, ograničenje površine je vrlo bitno u industriji zbog toga što ne možemo uvijek imati neograničenu količinu materijala koji nam je potreban iz brojnih razloga poput previsoke cijene ili nedostupnosti samog materijala. Zbog toga uvodimo ograničenje površine, tj. tražimo da površina konačnog optimalnog oblika bude blizu neke konstantne vrijednosti, u našem slučaju tu vrijednost postavljamo na 1. Ograničenje površine se implementira tako što mjerimo relativnu udaljenost  $d_{rel}$  trenutne od tražene površine i ažuriramo Lagrangeov multiplikator ovisno o tome je li trenutna površina veća ili manja od tražene. Ako je veća, onda  $l$  množimo faktorom  $1 + d_{rel}$ , a inače  $l$  dijelimo istim faktorom. Pri tome moramo paziti na to da se povećanjem Lagrangeovog multiplikatora  $l$  povećava i funkcija cilja. Ako se ne pazi, to može stvoriti problem jer ako ne ažuriramo funkciju cilja može se dogoditi da niti jedna sljedeća iteracija algoritma ne spusti funkciju cilja zbog utjecaja prevelikog multiplikatora  $l$ . Radimo s istim početnim domenama kao na Slici 2.2. Rezultati su prikazani na Slici 2.6. Možemo primijetiti da su rezultati slični kao i za primjere bez ograničenja površine, s tim da je u ovom slučaju konačni volumen

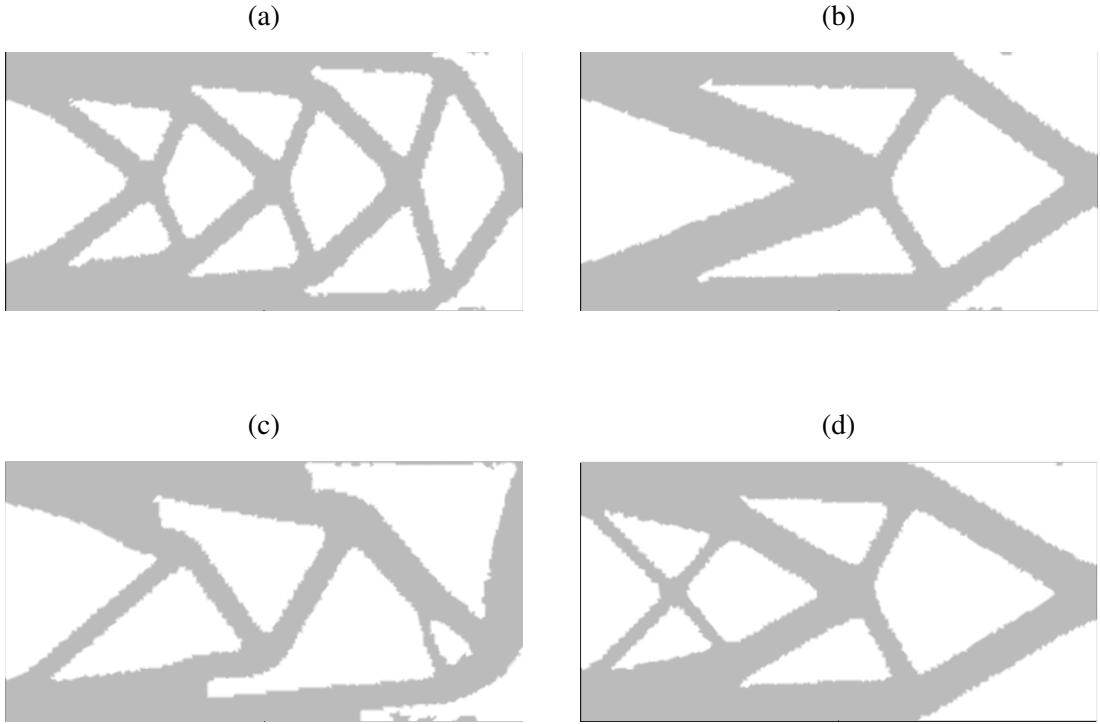


Slika 2.5: Usporedba konvergencije algoritma kod grube  $80 \times 40$  i fine  $240 \times 120$  mreže

uvijek 1, dok je za prošli slučaj znao nekad biti veći, a nekad manji, ovisno o početnom Lagrangeovom multiplikatoru  $l$ . Kada dodamo ograničenje površine, uz dovoljan broj iteracija algoritma, početni Lagrangeov multiplikator  $l$  nema utjecaja uz ograničenje površine zbog stalnog ažuriranja u svakoj iteraciji.

$\Omega_{opt}$	$J(\Omega_{opt})$	$l$	$P(\Omega_{opt})$
a)	25.8098	10.7605	0.9997
b)	24.4147	10.2223	0.9983
c)	28.9841	13.1088	0.9984
d)	23.4177	9.5081	1.0016

Tablica 2.2: Prikaz vrijednosti funkcija cilja  $J(\Omega_{opt})$ , konačnih Lagrangeovih multiplikatora  $l$  i površina  $P(\Omega_{opt})$  za optimalne oblike  $\Omega_{opt}$  sa Slike 2.6.



Slika 2.6: Optimalni oblici početnih topologija sa Slike 2.2 uz ograničenje površine.

## 2D nosač - druga funkcija cilja

Nastavljamo promatrati reprezentativni primjer 2D nosača, ali sada promatramo funkciju cilja (1.5) koja, ako u obzir uzmemo i površinu oblika, postaje

$$J(\Omega) = \left( \int_{\Omega} k(x)|u - u_0|^{\alpha} dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} + l \int_{\Omega} dx. \quad (2.3)$$

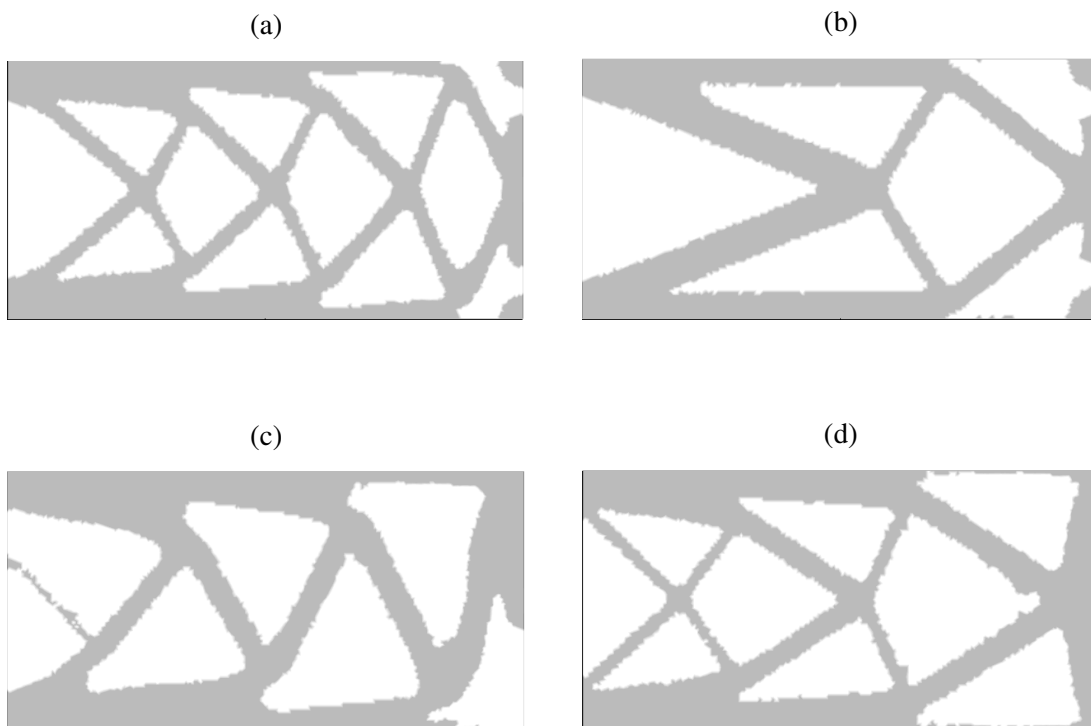
Ne koristimo implicitno ograničenje površine kroz Lagrangeov multiplikator  $l$  kojeg postavljamo na  $l = 30$ . Funkcije  $k$  i  $u_0$  se mogu odabrati proizvoljno, za naše potrebe uzimamo  $k = 1$  i  $u_0 = 0$ . Sada za funkciju cilja imamo  $L^{\alpha}$  normu, pri čemu  $\alpha$  također možemo odabrati proizvoljno tako da  $\alpha \geq 2$ .

Sljedeće što trebamo dobiti je brzina pomicanja granice  $\Gamma_0$  koju ćemo, baš kao i prije, izvući iz derivacije oblika funkcije cilja. Derivaciju oblika dobivamo direktno kao specijalan slučaj Teorema 1.2.6 i glasi

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\Gamma_0} \left( l + \frac{C_0}{\alpha} k |u - u_0|^{\alpha} - f \cdot p + Ae(p) \cdot e(u) \right) \theta \cdot n ds, \quad (2.4)$$

jer je  $\theta \cdot n = 0$  na  $\Gamma_D$  i na  $\partial D_N$ . Sada lako izvlačimo brzinu pomicanja granice  $\Gamma_0$

$$v = l + \frac{C_0}{\alpha} k |u - u_0|^\alpha - f \cdot p + Ae(p) \cdot e(u).$$



Slika 2.7: Optimalni oblici početnih topologija sa Slike 2.2 uz funkciju cilja (2.3).

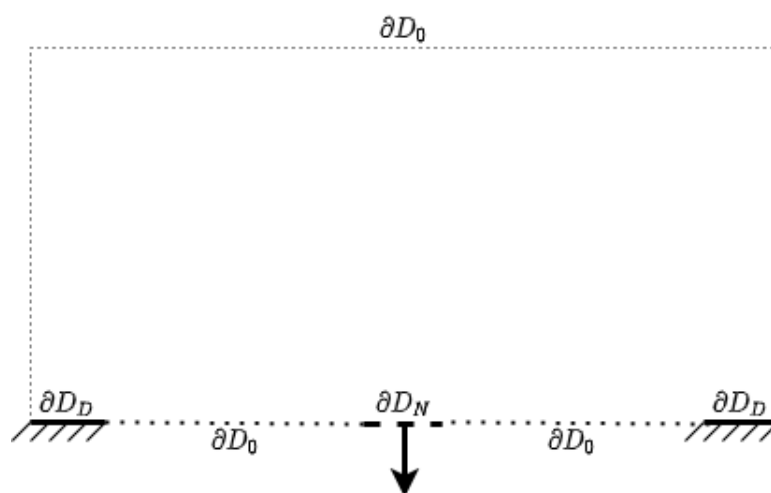
$\Omega_{opt}$	$J(\Omega_{opt})$	$P(\Omega_{opt})$
a)	53.2901	0.8663
b)	51.9836	0.8382
c)	57.6397	0.9581
d)	54.5004	0.9010

Tablica 2.3: Prikaz vrijednosti funkcija cilja  $J(\Omega_{opt})$  i površina  $P(\Omega_{opt})$  za optimalne oblike  $\Omega_{opt}$  sa Slike 2.7 .

Rezultate se može vidjeti na Slici 2.7. Ako usporedimo optimalne oblike sa Slike 2.7 s optimalnim oblicima sa Slike 2.3 vidimo da su rezultati jako slični, što je bilo i očekivano.

## 2.3 2D most

U sljedećem primjeru simuliramo 2D most. Radna domena  $D$  je jednaka kao i prije  $2 \times 1$  diskretizirana  $160 \times 80$  mrežom. Za razliku od prije, granice postavljamo tako da su na lijevoj, gornjoj i desnoj granici slobodan Neumannov uvjet, lijevi i desni donji kutevi su fiksirani s homogenim Dirichletovim rubnim uvjetom, na sredinu donje stranice djelujemo silom  $g$  prema dolje, dok je na preostalom dijelu donje granice zadan homogen Neumannov rubni uvjet, kao na Slici 2.8.



Slika 2.8: Rubni uvjeti za 2D most.

Površinska sila i dalje je  $f = 0$ . Slično kao što smo uz funkciju cilja (1.4) u obzir uzimali i površinu oblika, možemo u obzir uzeti i duljinu opsega oblika. U tom slučaju funkcija cilja glasi

$$J(\Omega) = \int_{\partial D_N} g \cdot u \, ds + l \int_{\Omega} dx + l' \int_{\partial \Omega} ds, \quad (2.5)$$

s Lagrangeovim multiplikatorima  $l = 30$  i  $l' = 1$ .

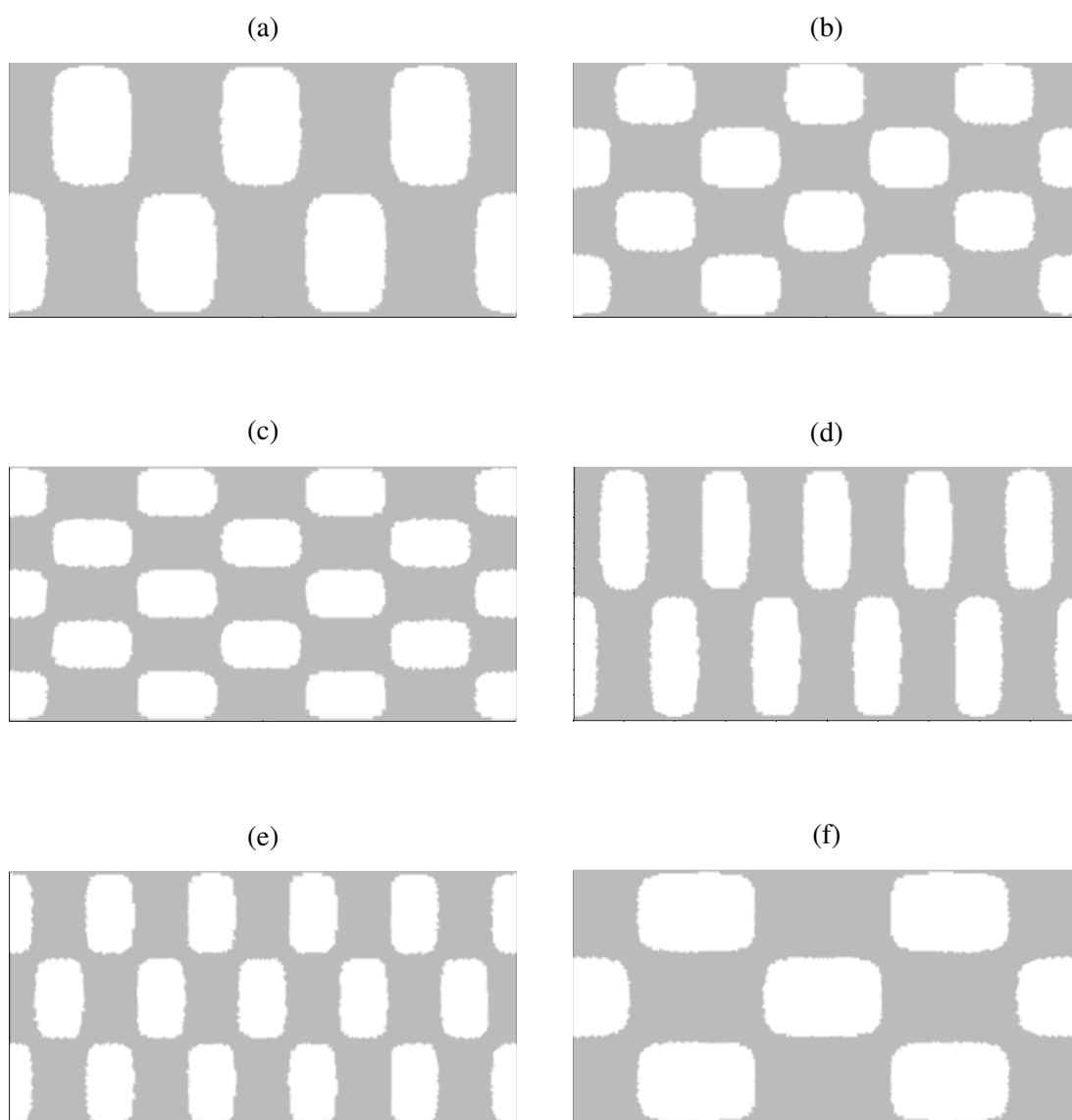
Prisjetimo se da je derivacija opsega dana u Napomeni 1.2.5. Slijedi da je derivacija oblika funkcije cilja (2.5)

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\Gamma_0} (l + l'H + 2f \cdot u - Ae(u) \cdot e(u))\theta \cdot n \, ds,$$

iz čega dobivamo izraz za brzinu

$$v = l + l'H + 2f \cdot u - Ae(u) \cdot e(u).$$

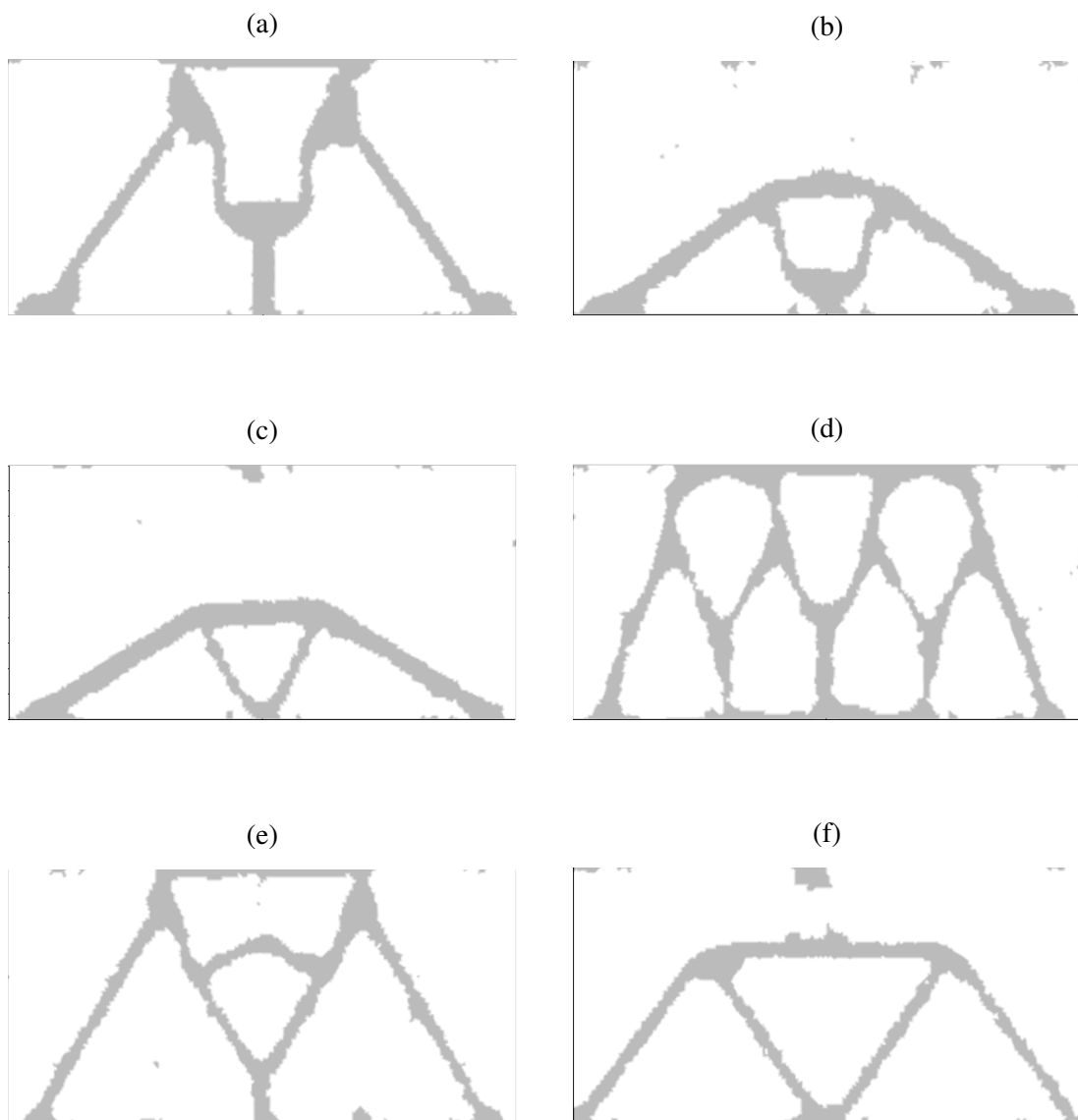




Slika 2.9: Primjeri nekih početnih topologija.

Iz rezultata vidimo da optimalni oblik ima manje rupa nego inicijalni (Slike 2.9 i 2.10).

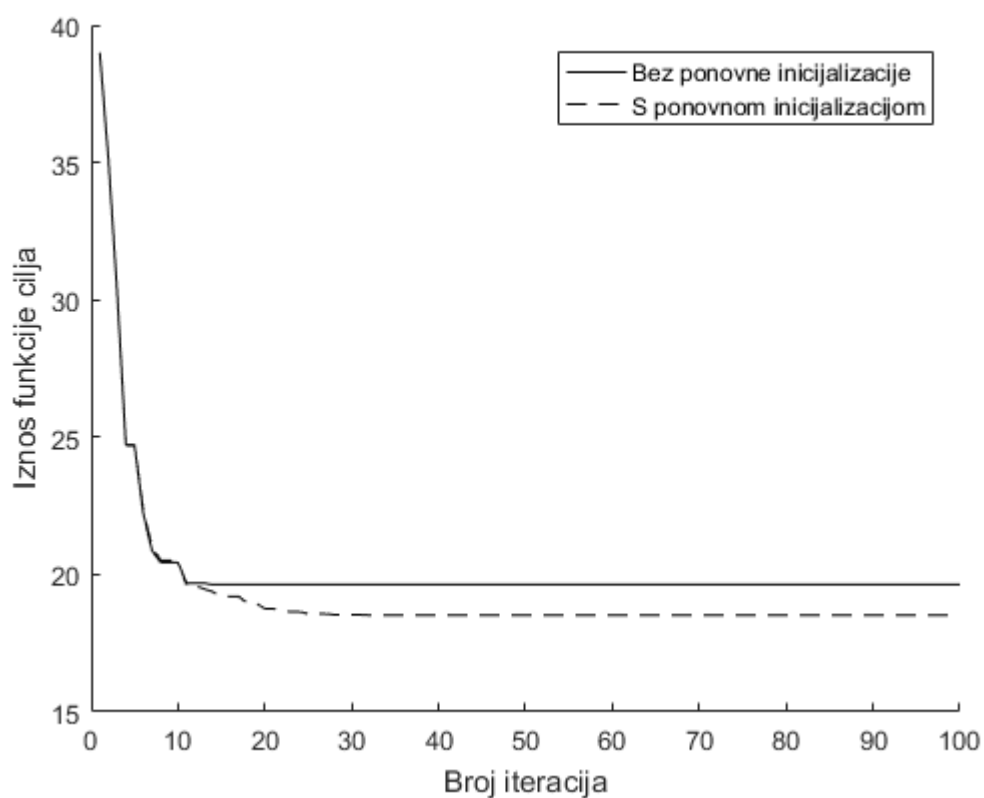
Također, treba napomenuti veliki utjecaj ponovne inicijalizacije na brzinu konvergencije. Kod grubih mreža utjecaj ponovne inicijalizacije nije naročito vidljiv, dok se kod finijih mreža vidi brža konvergencija s ponovnom inicijalizacijom nego bez nje, vidi Sliku 2.11.



Slika 2.10: Optimalni oblici početnih topologija sa Slike 2.9.

$\Omega_{opt}$	$J(\Omega_{opt})$	$P(\Omega_{opt})$
a)	20.0801	0.3386
b)	14.6307	0.2542
c)	14.2839	0.2331
d)	26.3083	0.4269
e)	17.4066	0.2942
f)	15.3233	0.2519

Tablica 2.4: Prikaz vrijednosti funkcija cilja  $J(\Omega_{opt})$  i površina  $P(\Omega_{opt})$  za optimalne oblike  $\Omega_{opt}$  sa Slike 2.10 .



Slika 2.11: Usporedba brzine konvergencije funkcije cilja sa i bez ponovne inicijalizacije.

# Bibliografija

- [1] Grégoire Allaire, *A FreeFem++ Toolbox for shape optimization (geometry and topology)*, [http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/freefem\\_en.html](http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/freefem_en.html), January 2008, CMAP, Ecole Polytechnique.
- [2] ———, *Shape optimization by the homogenization method*, sv. 146, Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] Grégoire Allaire, François Jouve i Anca Maria Toader, *A level-set method for shape optimization*, *Comptes Rendus Mathématique* **334** (2002), br. 12, 1125–1130.
- [4] ———, *Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method*, *Journal of computational physics* **194** (2004), br. 1, 363–393.
- [5] Martin Philip Bendsøe i Noboru Kikuchi, *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*, *Computer methods in applied mechanics and engineering* **71** (1988), br. 2, 197–224.
- [6] Pierre Cardaliaguet i Olivier Ley, *Some flows in shape optimization*, *Archive for rational mechanics and analysis* **183** (2007), br. 1, 21–58.
- [7] ———, *On the energy of a flow arising in shape optimization*, *Interfaces and Free Boundaries* **10** (2008), br. 2, 223–243.
- [8] Antonin Chambolle, *A density result in two-dimensional linearized elasticity, and applications*, *Archive for rational mechanics and analysis* **167** (2003), br. 3, 211–233.
- [9] Andrej Cherkaev, *Variational methods for structural optimization*, sv. 140, Springer Science & Business Media, 2012.
- [10] Andrej Cherkaev i Robert Kohn, *Topics in the mathematical modelling of composite materials*, Springer, 1997.
- [11] F. Hecht, *New development in FreeFem++*, *J. Numer. Math.* **20** (2012), br. 3-4, 251–265, ISSN 1570-2820, <https://freefem.org/>. MR 3043640

- [12] Joseph Hun Wei Lee, Jaime Peraire i Olgierd C Zienkiewicz, *The characteristic-Galerkin method for advection-dominated problems—An assessment*, Computer methods in applied mechanics and engineering **61** (1987), br. 3, 359–369.
- [13] Taehun Lee i Ching Long Lin, *A characteristic Galerkin method for discrete Boltzmann equation*, Journal of Computational Physics **171** (2001), br. 1, 336–356.
- [14] Randall J LeVeque i Randall J Leveque, *Numerical methods for conservation laws*, sv. 132, Springer, 1992.
- [15] Randall J LeVeque et al., *Finite volume methods for hyperbolic problems*, sv. 31, Cambridge university press, 2002.
- [16] Stanley Osher i James A Sethian, *Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations*, Journal of computational physics **79** (1988), br. 1, 12–49.
- [17] Olivier Pironneau, J Liou i T Tezduyar, *Characteristic-Galerkin and Galerkin/least-squares space-time formulations for the advection-diffusion equation with time-dependent domains*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **100** (1992), br. 1, 117–141.
- [18] Jan Sokolowski i Jean Paul Zolésio, *Introduction to shape optimization*, Introduction to shape optimization, Springer, 1992, str. 5–12.
- [19] Gilbert Strang i Robert V Kohn, *Optimal design in elasticity and plasticity*, International journal for numerical methods in engineering **22** (1986), br. 1, 183–188.

# Sažetak

Optimizacija oblika elastičnih struktura je suvremeno područje koje se koristi u raznim industrijama i područjima. Razvijeno je nekoliko metoda koje bave tim problemom. U ovom radu proučava se metoda nivo skupa.

Promatramo optimizaciju oblika u 2D i modeliramo problem u lineariziranoj elastičnosti. Postavljamo sustav linearizirane elastičnosti za elastično tijelo na kojeg djeluju vanjske sile te pomoću njega mjerimo pomak elastičnog tijela. Maksimiziramo krutost tijela što se provodi minimizacijom funkcije cilja nad dopustivim domenama. Problem minimizacije rješavamo gradijentnom metodom koja zahtijeva uvođenje definicije derivacije oblika. Navodimo razne rezultate koji nam omogućuju dobivanje izraza za derivaciju oblika nekih funkcija cilja. Iz derivacije oblika lako dobivamo brzinu pomicanja granice oblika, odabiremo smjer spusta u gradijentnoj metodi i time imamo generalni postupak algoritma. Granica oblika se može reprezentirati na razne načine od kojih mi odabiremo nivo skupove pomoću kojih imamo jednostavnije izraze za normalu i srednju zakrivljenost na granicu oblika. Proširujemo sustav linearizirane elastičnosti na cijelu radnu domenu pritupom *ersatz* materijala. Funkciju koja određuje nivo skupove dobivamo rješavanjem transportne Hamilton–Jacobijeve jednadžbe.

Zatim prezentiramo iterativni algoritam u kojem detaljnije opisujemo postupke inicijaliziranja i iteriranja kroz algoritam. Uvodimo i opisujemo postupak ponovne inicijalizacije funkcije koja određuje nivo skupove i postupak ograničavanja volumena.

U drugom poglavlju predstavljamo rezultate dobivene u programskom alatu *FreeFem++*. Navodimo korištene parametre i neke korisne izvode potrebne za implementaciju. Promatramo različite primjere i funkcije cilja. Rezultate prezentiramo na primjerima 2D nosača i 2D mosta, pri čemu ih detaljnije analiziramo.



# Summary

Shape optimization of elastic structures is a popular area used in various industries and fields. Several methods have been developed to address this problem. In this paper, the level set method is studied.

We observe shape optimization in 2D and model the problem in linearized elasticity. We set up a linearized elasticity system for an elastic body on which external forces act. The solution of such a system gives us the displacement of the elastic body. We maximize body stiffness which is represented by minimizing the target functions over the allowable domains. We solve the minimization problem with a gradient descent method that requires the introduction of a definition of shape derivative. We list various results that allow us to obtain expressions for shape derivatives of some objective functions. From the shape derivative we easily obtain the velocity of the moving part of shape boundary, we choose the direction of the descent in the gradient descent method and thus we have the general procedure of the algorithm. The shape boundary can be represented in a variety of ways from which we select level sets by which we have simpler expressions for normal and mean curvature. We extend the system of linearized elasticity to the entire working domain by the simple *ersatz* material approach. The level set function is obtained by solving the transport Hamilton–Jacobi equation.

We propose an iterative algorithm in which we describe in more detail the procedures of initialization and iteration through the algorithm. We introduce and describe the procedure of re-initialization of the level set function and the procedure of volume restriction.

In the second chapter we present the results obtained in the software tool *FreeFem++*. We list used parameters and some useful derivations required for implementation. We observe different examples and objective functions. The results are presented on the examples of 2D cantilever and 2D bridge, where we analyze them in more detail.





# Životopis

Goran Lalić rođen je 27. rujna 1997. godine u Splitu. Školovanje je započeo 2004. godine u Osnovnoj školi Mertojak i nastavio 2012. upisom III. gimnazije, Split (prirodoslovno-matematička gimnazija, popularno MIOC).

Godine 2016. odlučuje otići u Zagreb i upisuje preddiplomski studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2019. završava preddiplomski studij, stječe titulu univ.bacc.math. i upisuje diplomski studij Primijenjena matematika. Uz diplomski studij samostalno proučava područje izrade računalnih igara. Na zadnjoj godini studija počinje paralelno raditi u kompaniji Gideon Brothers kao *Simulation Software Engineer* gdje se bavi simuliranjem kinematike autonomnih robota u virtualnom okruženju.

Neka od područja interesa su obrada slika, računalni vid i *software development*. U do-glednoj budućnosti planira se specijalizirati u nekom području interesa i nastaviti karijeru u inozemstvu.