Markovljevi lanci s atomom

Protrka, Ivan

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivan Protrka

MARKOVLJEVI LANCI S ATOMOM

Diplomski rad

Voditelj rada:
Izv. prof. dr. sc. Nikola Sandrić

Zagreb, rujan, 2021

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Markovljevi lanci posebna su vrsta stohastičkih procesa u kojima rezultat eksperimenta ovisi o rezultatu prethodnog eksperimenta i samo o njemu. Naziv su dobili po ruskom matematičaru Andreju Andrejeviču Markovu koji je 30-ih godina 20. stoljeća počeo istraživati dinamičko programiranje. U ovom stoljeću naglo je porastao interes za primjenom Markovljevih lanaca u medicini, bioinformatici, statistici, fizici, inženjerstvu itd. Markovljevi lanci ne koriste se samo za simulacije, nego i kao modeli za dinamičke procese. Tako je naprimjer modeliranje pomoću Markovljevih lanaca našlo svoju primjenu u donošnju odluka u medicini [4].

Kada je tek uvedem pojam Markovljevog lanca, prostor stanja bio je diskretan. Tijekom prethodnog stoljeća teorija Markovljevih lanaca proširena je na općeniti skup stanja. Kod poopćavanja teorije s diskretnog na općeniti skup stanja, kao svojevrsna prijelazna etapa uveden je pojam Markovljevih lanaca s atomom. Naime, ako je skup stanja općenit te nas zanima ponašanje lanca za koji znamo da kreće iz nekog proizvoljnog stanja, za razliku od diskretnog slučaja, sada za svaku početnu točku lanca moramo raspolagati s neprebrojivo mnogo prijelaznih informacija. Intuitivno, atomi će nam predstavljati podskupove skupa stanja s karakteristikom da su prijelazne informacije jednake, neovisno o tome koji ćemo element atoma uzeti kao početno stanje lanca. Cilj ovog rada je formalno definirati Markovljeve lance na općenitom skupu stanja i pokazati kako se na njih, u slučaju kada oni sadrže atom, relativno jednostavno i elegantno proširuju svojstva i teoremi koji vrijede kada je skup stanja diskretan.

Poglavlje 1

Markovljevi lanci na diskretnom skupu stanja

U prvom poglavlju prisjetit ćemo se nekih najosnovnijih definicija i svojstava koja vrijede kada je skup stanja diskretan te će rezultati biti navedeni bez dokazivanja. Budući da je ovo poglavlje napisano prema [5], bit će korištene iste oznake. Ako nije naglašeno drugačije, sa $X = (X_n : n \geq 0)$ označavat ćemo vremenski indeksiran slučajni proces na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i s prostorom stanja S.

Definicija 1.0.1. *Neka je S skup.* Slučajni proces *s diskretnim vremenom i prostorom stanja S je familija $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajnih varijabli (ili elemenata) definiranih na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u S. Dakle, za svaki $n \geq 0$, je $X_n : \Omega \to S$ slučajna varijabla.*

Definicija 1.0.2. *Neka je S diskretan skup. Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u skupu S nazivamo* Markovljev lanac *ako vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \tag{1.1}$$

Svojstvo navedeno u prethodnoj definiciji zapravo znači da je vjerojatnost prelaska Markovljevog lanca u neko stanje u neposrednoj budućnosti (trenutak $n + 1$) uvjetovana samo sadašnjim stanjem (trenutak n) i to svojstvo nazivamo *Markovljevo svojstvo*. Dodatno, ako desna strana jednakosti (1.1) ne ovisi o n, tada ćemo za X reći da je *vremenski homogen Markovljev lanac* i odsada ćemo podrazumijevati da radimo s takvim lancima. Nadalje, ako znamo početno stanje lanca, uvjetnu vjerojatnost $\mathbb{P}(\,\cdot \mid X_0 = i)$ uobičajeno ćemo skraćeno označavati sa $\mathbb{P}_i(\,\cdot\,)$.

Definicija 1.0.3. *Matrica* $P = (p_{ij} : i, j \in S)$ *naziva se* stohastičkom matricom *ako je* $p_{ij} \geq 0$ *za sve* $i, j \in S$, *te*

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \qquad \text{za sve } i \in S \tag{1.2}$$

Neka je X Markovljev lanac na skupu stanja S. Ako stavimo $p_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j \,|\, X_{n-1} = i)$ za $i, j \in S$. Primijetimo da je za sve $i, j \in S$ zbog Markovljevog svojstva p_{ij} jednoznačno definiran. Budući da za sve $n \in \mathbb{N}$ i za sve $i \in S$ vrijedi $\sum_{j \in S} \mathbb{P}(X_n = j \,|\, X_{n-1} = i) = 1$ slijedi da svaki Markovljev lanac definira jednu stohastičku matricu $P = (p_{ij} : i, j \in S)$.

Definicija 1.0.4. *Neka je* $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ *vjerojatnosna distribucija na* S, *te neka je* $P = (p_{ij} : i, j \in S)$ *stohastička matrica. Slučajni proces* $X = (X_n : n \geq 0)$ *definiran na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *s prostorom stanja* S *je* homogen Markovljev lanac s početnom distribucijom λ i prijelaznom matricom P *ako za sve* $n \in \mathbb{N}$ *i sva stanja* $i, i_{n-1}, ..., i_0, j \in S$ *vrijedi:*

(i) $\mathbb{P}(X_0 = i) = \lambda_i$ *za sve* $i \in S$, *te*

(ii) $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots , X_0 = i_0) = p_{ij}$

U nastavku ovoga poglavlja, ako nije drugačije naglašeno, Markovljeve lance iz Definicije 1.0.4 skraćeno ćemo nazivati (λ, P) - Markovljevi lanci. Specijalno, sa $p_{ij}^{(n)}$ označavat ćemo poziciju $P^n(i, j)$ n-te potencije matrice prijelaza P te ako označimo $\mathbb{P}_i(X_n = j) := \mathbb{P}(X_n = j \,|\, X_0 = i)$ lako se može provjeriti da vrijedi $\mathbb{P}_i(X_n = j) = p_{ij}^{(n)}$.

Sada donosimo jedan od klasičnih i nezaobilaznih primjera u teoriji markovljevih lanaca - primjer slučajne šetnje.

Primjer 1.0.5. *Neka je* $(Y_n : n \geq 1)$ *niz nezavisnih, jednakodistribuiranih slučajnih varijabli s vrijednostima u* $\mathbb{Z}$ *s distribucijom* $\mathbb{P}(Y_1 = k) = p_k$, $k \in \mathbb{Z}$. *Definiramo slučajnu šetnju* $X = (X_n : n \geq 0)$ *sa:*

$$X_0 = 0, \qquad X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \;\; n \in \mathbb{N} \tag{1.3}$$

Uočimo da za $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi:* $X_{n+1} = X_n + Y_{n+1}$. *Nadalje imamo:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n, ..., X_1 = i_1, X_0 = 0) &= \mathbb{P}(Y_{n+1} + i_n = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n, ..., X_1 = i_1, X_0 = 0) \\
&= \mathbb{P}(Y_{n+1} = i_{n+1} - i_n) = p_{i_{n+1} - i_n} \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n)
\end{aligned}$$

gdje treći redak slijedi zbog nezavisnosti slučajne varijable Y_{n+1} *sa* $X_0, X_1, ..., X_n$. *Dakle, slučajna šetnja* X *je Markovljev lanac.*

Još jedan primjer Markovljevog lanca na diskretnom sustavu je diskretni model čekanja. U ovom primjeru promatramo situaciju u kojoj *korisnici* dolaze u neki servis (šalter, prodavaonicu, restoran...) i čekaju u redu da budu usluženi. Pretpostavljamo da dolaze u slučajnim trenucima, da se uslužuju po redoslijedu dolazaka te da je i trajanje svakog usluživanja slučajno. Formalnije, ako vrijede sljedeće pretpostavke:

(Q1) Korisnici dolaze u vremenskim trenucima $T_0 = 0, T_0 + T_1, T_0 + T_1 + T_2, ...$ pri čemu su vremena između dolazaka $T_i, i \geq 1$ n.j.d slučajne varijable s distribucijom slučajne varijable T:

$$G\langle -\infty, t] = P(T \leq t).$$

(Q2) Vremena usluživanja V_n za n-tog korisnika međusobno su nezavisna te nazavisna od vremena između dolazaka te su distribuirani jednako kao varijabla V sa:

$$H\langle -\infty, t] = P(V \leq t).$$

(Q3) Postoji točno jedan davatelj usluga, a korisnici su usluženi prema redoslijedu dolaska.

Sustav za koji vrijede navedene pretpostavke nazivat ćemo **GI/G/1** model čekanja.

Označimo sa $N(t)$ broj korisnika koji čekaju u redu u trenutku t, uključujući i one koji se tada uslužuju. Ovo je očito proces u kontinuiranom vremenu. Tipičan uzorak putanje za $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ pod pretpostavkom da prvi korisnik dolazi u trenutku $t = 0$ je prikazan na slici 1.1 gdje sa T_i' označavamo vremena dolazaka

$$T_i' = T_1 + ... + T_i, \qquad i \geq 1 \tag{1.4}$$

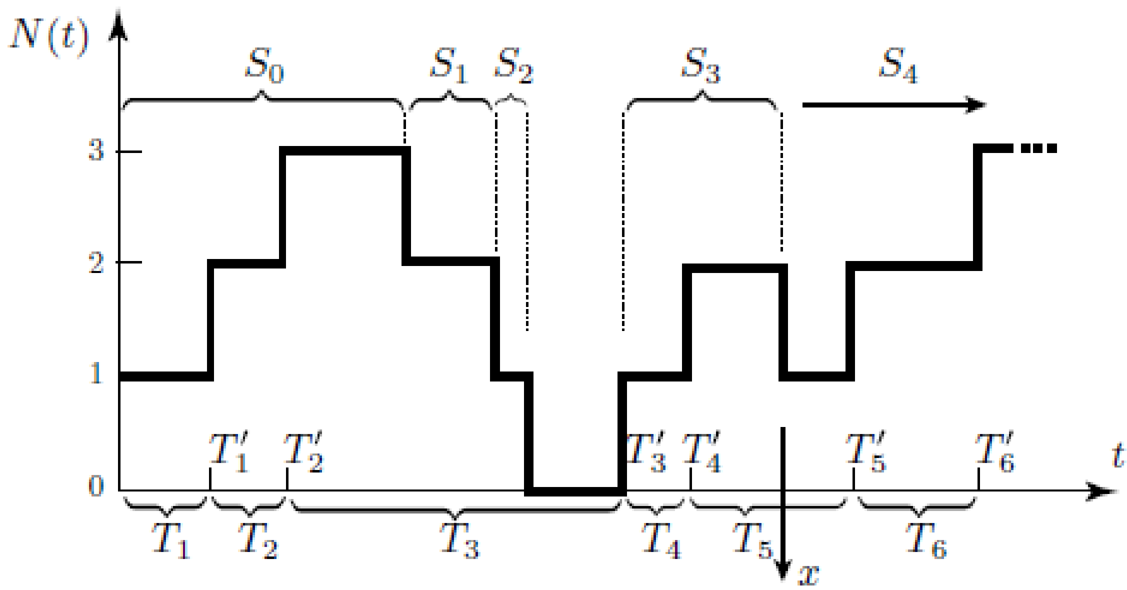
te sa V_i' sume vremena usluživanja

$$V_i' = V_1 + ... + V_i, \qquad i \geq 1 \tag{1.5}$$

Premda se $\{N(t)\}$ pojavljuje na kontinuiranom vremenskom prostoru, jedan od načina za analizirati ga preko Markovljevog lanca je konstrukcijom tzv. *ugrađenog Markovljevog lanca*.

Promotrimo slučajnu varijablu $N_n = N(T_n'-)$ koja prebrojava korisnike koji su u redu neposredno prije trenutka dolaska u red n-tog korisnika. Ako nije drugačije rečeno, smatrat ćemo da je $N_0 = 0$.

Nadalje, ako pretpostavimo da su vremena trajanja usluga V_n eksponencijalno distribuirana, tj. $H\langle -\infty, t] = 1 - e^{\mu t}$, za $t \geq 0$, tada ćemo tako dobiveni sustav nazvati (GI,M,1)



Slika 1.1: Primjer GI/G/1 modela

model čekanja. Primijetimo da kod ove inačice modela zbog svojstva zaboravljivosti eksponencijalne distribucije imamo:

$$P(N_{n+1} = j + 1 \mid N_n = j) = P(S > T + z \mid S > z) = \int_0^\infty e^{-\mu t} G(dt), \tag{1.6}$$

tj. $N = (N_n, n \geq 0)$ je sada Markovljev lanac.

Propozicija 1.0.6. *Za GI/M/1 model čekanja reda, proces $N = (N_n, n \geq 0)$ može biti konstruiran kao Markovljev lanac s prostorom stanja $\mathbb{Z}^+$ i matricom prijelaza*

$$P = \begin{bmatrix} q_0 & p_0 & & & \\ q_1 & p_1 & p_0 & & 0 \\ q_2 & p_2 & p_1 & p_0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

gdje je $q_j = \sum_{i=j+1}^{\infty} p_i$ i

$$p_0 = P(S > T) = \int_0^\infty e^{-\mu t} G(dt) \tag{1.7}$$

$$p_j = P(S'_j > T > S'_{j-1}) = \int_0^\infty [e^{-\mu t}(\mu t)^j / j!]G(dt), \qquad j \geq 1 \tag{1.8}$$

Dokaz. Već smo pokazali da je $\mathbf{N} = \{N_n, n \geq 0\}$ Markovljev lanac. Pokažimo da je P zaista njegova prijelazna matrica.
Primijetimo da tvrdnja za p_0 ide direktno iz (1.6).
Nadalje, ako je $N_n = j$, tada za $0 < i \leq j$, imamo da je $N_{n+1} = i$ pod uvjetom da je točno $(j - i + 1)$ usluga završeno u vremenu između dolazaka. Iz osnovnog svojstva eksponencijalne distribucije lako se pokaže da je za bilo koji t broj završenih usluga u intervalu $[0, t]$ Poissonova slučajna varijabla s parametrom μt pa je zbog toga

$$P(S_0 + ... + S_{j+1} > t > S_0 + ... + S_j) = e^{-\mu t}(\mu t)j/j! \tag{1.9}$$

što daje tvrdnju propozicije za p_j, $j > 0$. Ostaje pokazati da vrijedi $P(j, 0) = q_j = \sum_{i=1}^{\infty} p_i$ ali to se analogno pokazuje iz definicije od p_j s obzirom da se red isprazni ako se dovrši više od $(j + 1)$ usluga u vremenu između dolazaka. □

Kako bismo uopće mogli analizirati ponašanje Markovljeog lanca kroz vrijeme, važno je znati za koja stanja uopće postoji mogućnost da ih lanac "pogodi", tj. da se nađe u njima.

Definicija 1.0.7. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac s prostorom stanja S i prijelaznom matricom P. Za $B \subset S$ definiramo* prvo vrijeme pogađanja *tog skupa kao*

$$T_B := \inf\{n \geq 0 : X_n \in B\} \tag{1.10}$$

uz konvekciju $\inf \emptyset := +\infty$. *Za jednočlan skup $\{i\} \subset S$ kraće pišemo T_i umjesto $T_{\{i\}}$.*

Definicija 1.0.8. *Za stanja $i, j \in S$ kažemo da je j* dostižno *iz i, u oznaci $i \to j$, ako vrijedi*

$$\mathbb{P}_i(T_j < \infty) > 0$$

Za stanja $i, j \in S$ reći ćemo da komuniciraju, *u oznaci $i \leftrightarrow j$ ako $i \to j$ i $j \to i$. Nadalje, za podskup $C \subset S$ skupa stanja kažemo da je zatvoren ako za svako stanje $i \in C$ vrijedi $P_i(T_{S \setminus C} = \infty) = 1$, tj, neformalno, za skup C reći ćemo da je zatvoren ako lanac nikada ne može izaći iz njega.*

Primijetimo da je realcija komuniciranja $\leftrightarrow$ relacija ekvivalencije na $S \times S$ pa stoga inducira particiju prostora S na klase komuniciranja.

Definicija 1.0.9. *Za Markovljev lanac X kažemo da je* ireducibilan *ako se prostor stanja S sastoji samo od jedne klasa komuniciranja, tj. ako za sve $i, j \in S$ vrijedi $j \leftrightarrow i$.*

Primjer 1.0.10. *Promotrimo Markovljev lanac na skupu stanja $S = \{1, 2, 3, 4\}$ i matricom prijelaza*

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Može se primijetiti da postoje dvije klase komuniciranja: $\{1, 3\}$ *i* $\{2, 4\}$. *Dakle, lanac nije ireduciblan. Također je očito da su skupovi* $\{1, 3\}$ *te* $\{2, 4\}$ *zatvoreni.*

Postavlja se pitanje vrijedi li Markovljevo svojstvo i za neka slučajna vremena T. Može se pokazati da vrijedi za tzv. *vremena zaustavljanja*.

Definicija 1.0.11. *Slučajna varijabla* $T : \Omega \to \{0, 1, 2, ...\} \cup \{\infty\}$ *zove se* vrijeme zaustavljanja *ako za sve* $n \geq 0$ *vrijedi:*

$$\{T \geq n\} \in \sigma(X_0, X_1, ..., X_n)$$

Teorem 1.0.12. *Neka je* X (λ, P)*-Markovljev lanac s prostorom stanja* S *te neka je* T *vrijeme zaustavljanja. Tada je, uvjetno na* $X_T = i$*, slučajni proces* $(X_{T+n} : n \geq 0)$ (δ^i, P)*-Markovljev lanac nezavisan od slučajnih varijabli* $X_0, X_1, ..., X_T$.

Također, možemo se pitati postoji li mogućnost da se nakon nekog konačnog broja posjeta nekom stanju lanac više nikad ne vrati u to stanje. Formaliziranje takvog razmišljanja počinjemo sa sljedećom definicijom.

Definicija 1.0.13. *Za stanje* $i \in S$ *kažemo da je* povratno *ako je* $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$*, a reći ćemo da je* prolazno *ako je* $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$ *pri čemu za neki* $B \subset S$ *skup* $\sigma_B := min\{n \geq 0 : X_n \in B\}$ *(uz konvenciju* $min\, \emptyset := 0$*) nazivamo* vrijeme prvog pogađanja *skupa B.*

Napomena 1.0.14. *Za lanac koji kreće iz nekog skupa* $B \subset S$ *možemo definirati i* vrijeme prvog povratka *u skup B sa* $\tau_B := min\{n > 0 : X_n \in B\}$ *te se može pokazati da su* σ_B *i* τ_B *vremena zaustavljanja.*

Sljedeća propozicija nam govori da su povratnost i prolaznost svojstva klase.

Propozicija 1.0.15. *Neka je* $i \in S$ *povratno stanje te* $i \leftrightarrow j$ *za neko* $j \in S$. *Tada je* j *povratno.*

Napomena 1.0.16. *Primijetimo da iz Propozicije 1.0.15 neposredno slijedi da ista tvrdnja vrijedi i za prolazna stanja.*

Teorem 1.0.17. *Neka je X ireducibilan Markovljev lanac na skupu stanja S. Tada je X ili povratan ili prolazan.*

Dokaz. Neka je $i \in S$ proizvoljno stanje. Ono može biti ili povratno ili prolazno. Ako je i povratno (prolazno) stanje, po Propoziciji 1.0.15 i po definiciji ireducibilnosti slijedi da su sva stanja iz skupa S povratna (prolazna) pa je X povratan (prolazan). □

Korisna će nam biti i sljedeća karakterizacija prolaznosti:

Propozicija 1.0.18. *Stanje $i \in S$ je prolazno ako i samo vrijedi $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{n} = +\infty$*

Uočimo da iz gornje propozicije neposredno slijedi da je stanje $i \in S$ prolazno ako i samo ako je $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{n} < +\infty$

Primjer 1.0.19. *Vraćamo na primjer slučajne šetnje u $\mathbb{Z}$. Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih, jednakodistribuiranih slučajnih varijabli s distribucijom $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(Y_1 = -1) = q = 1 - p$, $0 < p < 1$ te X jednostavna slučajna šetnja definirana sa $X_0 = 0$, $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_n$. Izračunajmo m-koračne prijelazne vjerojatnosti $p_{00}^{(m)}$. Jasno je da se u početnu točku možemo vratiti samo u parnom broju koraka, tj. da je $p_{00}^{(2n-1)} = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Za $m = 2n$ imamo:*

$$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}(pq)^n \sim \frac{\sqrt{2\pi 2n}\, e^{-2n}(2n)^{2n}}{(\sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n)^2}(pq)^n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4pq)^n \tag{1.11}$$

Iz gornje asimptotske jednakosti slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4pq)^n \leq p_{00}^{(2n)} \leq 2\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4pq)^n \tag{1.12}$$

Pomoću gornje ograde lako se pokaže da je suma $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ beskonačna ako i samo i ako odaberemo $p = q = 1/2$. Stoga po propoziciji 1.0.18 slijedi da je X povratan za $p = 1/2$, a prolazan za $p \neq 1/2$.

Prisjetimo se sada pojmova *invarijantne mjere* i *pozitivne povratnosti.*

Definicija 1.0.20. *Niz $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ naziva se* mjera *ako je $\lambda_i \in [0, +\infty]$ za sve $i \in S$. Mjera λ je netrivijalna ako postoji $i \in S$ takav da je $\lambda_i > 0$. Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac s prijelaznom matricom P. Netrivijalna mjera λ na S naziva se* invarijantna mjera *Markovljevog lanca X (odnosno prijelazne matrice P) ako vrijedi*

$$\lambda = \lambda P, \tag{1.13}$$

odnosno po komponentama

$$\lambda_j = \sum_{k \in S} \lambda_k p_{kj}, \qquad za sve j \in S. \tag{1.14}$$

Ako dodatno vrijedi da je λ vjerojatnosna distribucija ($\sum_{i \in S} \lambda_i = 1$), tada ćemo reći da je λ stacionarna distribucija *ili* invarijantna vjerojatnosna mjera *Markovljevog lanca X.*

Intuitivno, stacionarost slučajnih procesa znači da se vjerojatnosna svojstva ne mijenjaju kroz vrijeme. Iz toga je odmah jasno zašto je stacionarnost vrlo željeno svojstvo u primjeni.

Definicija 1.0.21. *Za stanje $i \in S$ kažemo da je pozitivno povratno ako je $\mathbb{E}_i(T_i) < \infty$.*

Sljedeća nam propozicija daje dovoljne uvjete za egzistenciju invarijantne mjere i stacionarne distribucije.

Propozicija 1.0.22. *Neka je $i \in S$ povratno stanje. Za $j \in S$ definiramo*

$$\nu_j := \mathbb{E} \sum_{n=0}^{T_i - 1} \mathbb{I}_{\{X_n = j\}}. \tag{1.15}$$

Tada je ν invarijantna mjera. Ako je stanje i pozitivno-povratno, tada je

$$\pi_j = \frac{\nu_j}{\mathbb{E}_i[T_i]}, \qquad j \in S \tag{1.16}$$

stacionarna distribucija.

Sljedeći nam teorem daje i obrnutu tvrdnju za stacionarnu distribuciju:

Teorem 1.0.23. *Neka je X ireducibilan Markovljev lanac s prijelaznom matricom P. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(a) *svako stanje je pozitivno povratno*
(b) *postoji pozitivno-povratno stanje $i \in S$*
(c) *X ima stacionarnu distribuciju π.*

Nadalje, ako vrijedi (c), tada je $\mathbb{E}_j[T_j] = 1/\pi_j$ za sve $j \in S$.

Primjer 1.0.24. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac na dvočlanom skupu stanja $S = \{1, 2\}$, s prijelaznom matricom*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Budući da je lanac ireducibilan i povratan, prema Teoremu 1.0.23 postoji (jedinstvena) stacionarna distribucija. Lako se vidi da je to $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Primjer 1.0.25. *Kako bismo dali primjer lanca za koji postoji invarijantna mjera, ali ne i stacionarna, ponovno promatramo slučajnu šetnju na* $\mathbb{Z}$ *s prijelaznim vjerojatnostima* $p_{i,i-1} = q$, $p_{i,i+1} = p$ *za sve* $i \in \mathbb{Z}$, *gdje su* $p, q \geq 0$, $p + q = 1$. *Pretpostavimo da šetnja nije simetrična tj.* $p \neq q$. *U primjeru 1.0.19 pokazali smo da je u tom slučaju X ireducibilan i prolazan pa stacionarna mjera ne postoji. Tražimo invarijantnu mjeru* $\lambda = (\lambda_i : i \in \mathbb{Z})$ *za X. Ako definiramo* $\lambda_i = 1$ *za sve* $i \in \mathbb{Z}$, *imamo* $\lambda_{i-1}p_{i-1,i} + \lambda_{i+1}p_{i+1,i} = p + q = 1 = \lambda_i$ *tj.* λ *je invarijantna mjera za X.*

Međutim, uz λ *postoji još jedna invarijantna mjera. Zaista, definiramo* $\overline{\lambda}_i = (p/q)^i$, $i \in \mathbb{Z}$. *Računamo:*

$$\overline{\lambda}_{i-1}p_{i-1,i} + \overline{\lambda}_{i+1}p_{i+1,i} = p\left(\frac{p}{q}\right)^{i-1} + q\left(\frac{p}{q}\right)^{i+1} = \left(\frac{p}{q}\right)^{i}(q+p) = \overline{\lambda}_i \tag{1.17}$$

Sada ćemo definirati graničnu distribuciju te pokazati da je to "jači" pojam od stacionarne distribucije.

Definicija 1.0.26. *Neka je* $X = (X_n : n \geq 0)$ *Markovljev lanac na skupu stanja S s prijelaznom matricom P. Vjerojatnosna distribucija* $\pi = (\pi_i : i \in S)$ *naziva se* graničnom distribucijom *Markovljevog lanca X (odnosno prijelazne matrice P) ako za sve* $i, j \in S$, *vrijedi*

$$\lim_n p_{ij}^{(n)} = \pi_j \tag{1.18}$$

Propozicija 1.0.27. *Neka je* π *granična distribucija Markovljevog lanca X. Tada je* π *i stacionarna distribucija.*

Pokažimo sada na primjeru da obrat općenito ne vrijedi.

Primjer 1.0.28. *Neka je* $X = (X_n : n \geq 0)$ *Markovljev lanac na dvočlanom skupu stanja* $S = \{1, 2\}$, *s prijelaznom matricom*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

U Primjeru 1.0.24 pokazali smo da je $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *stacionarna distribucija lanca. S druge strane, budući da je* $P^{2n} = I$ *i* $P^{2n+1} = P$, *očito je da* $\lim_{n\to+\infty} p_{ij}^{(n)}$ *ne postoji niti za jedan par* $i, j \in S$. *Dakle, granična distribucija ne postoji. U ovom primjeru ključnu ulogu ima činjenica da je* $p_{ii}^{(n)} > 0$ *samo za parne n, odnosno da svako stanje ima period 2.*

Motivirani prethodnim primjerom, uvodimo definiciju *(a)periodičnosti*.

Definicija 1.0.29. *Neka je X Markovljev lanac s prijelaznom matricom P. Za stanje* $i \in S$, *označimo sa* $d(i)$ *najveći zajednički djelitelj (nzd) skupa* $\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$, *gdje je* $d(i) = 1$ *ako je taj skup prazan. Kažemo da je stanje i* aperiodično, *ako je* $d(i) = 1$. *U suprotnom reći ćemo da je i* periodično *stanje, a* $d(i)$ *ćemo nazvati* periodom *od i.*

Primjer 1.0.30. *Neka je X Markovljev lanac s matricom prijelaza*

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Očito je $p_{ii} > 0$ *za sve* $i \in \{1, 2, 3\}$ *pa aperiodičnost lanca trivijalno slijedi iz definicije.*

Sljedeći teorem nam potvrđuje kako je u Primjeru 1.0.28 upravo periodičnost bila razlog zašto smo imali stacionarnu, ali ne i graničnu distribuciju. Kako bismo ga naveli, za matricu prijalaza P i neku stacionarnu distribuciju π te bilo koje stanje $i \in S$ uvodimo totalnu varijacijsku normu (poslije ćemo vidjeti da je ovo specijalan slučaj totalne varijacijske norme na općenitom skupu stanja) sa $\| P(x, \cdot\,) - \pi \| := |\sum_j P(i, j) - \pi(j)|$.

Teorem 1.0.31. *Neka je* λ *proizvoljna vjerojatnosna distribucija na skupu stanja* S. *Pretpostavimo da je* $X = (X_n : n \geq 0)$ (λ, P)*-Markovljev lanac koji je ireducibilan i aperiodičan te ima stacionarnu distribuciju* π. *Tada za sve* $i \in S$ *vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \| P^n(x, \cdot\,) - \pi \| = 0, \tag{1.19}$$

tj. stacionarna distribucija ujedno je i granična.

Na kraju ovog poglavlja iskazat ćemo najvažniji rezultat o graničnom ponašanju srednjih vrijednosti kod Markovljevih lanaca, tzv *ergodski teorem*.

Teorem 1.0.32 (Ergodski teorem)**.** *Pretpostavimo da je Markovljev lanac* $X = (X_n : n \geq 0)$ *ireducibilan i pozitivno povratan, te neka je* π *njegova jedinstvena stacionarna distribucija. Pretpostavimo da je* f *nenegativna ili ograničena realna funkcija definirana na* S. *Tada vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{j\in S} f(j)\pi(j) \right) = 1 \tag{1.20}$$

Primjer 1.0.33. *Promatramo kolumnista koji honorarno piše kolumne. Postoje dani kada kolumnist uopće ne piše, dani kada napiše jednu kolumnu i dani kada napiše 2 kolumne. Ako u nekom danu nije napisao ništa, s vjerojatnošću od 1/4 sljedeći dan također neće napisati ništa, s vjerojatnošću od 1/2 će napisati jednu kolumnu te s vjerojatnošću od 1/4 napisat će 2 kolumne. Ako je napisao 1 kolumnu, jednake su šanse da sljedeći dan ne piše ništa, kao i da napiše 1, odnosno 2 kolumne. Ako je pak napisao 2 kolumne, sljedeći dan će sigurno odmarati. Ako znamo da mu poslodavac stimulira trud time što mu isplaćuje dnevnicu od 80 kuna ako napiše jednu kolumnu u danu te 200 kuna za 2 kolumne u danu, zanima nas možemo li izračunati njegov prosječni mjesečni honorar (uzimamo da mjesec u prosjeku ima 30 dana).*

Modeliramo pomoću markovljevog lanca. Neka je skup stanja $S = \{A, B, C\}$ *gdje stanje A predstavlja one dane kada pisac ne piše, stanje B kada napiše 1 članak te stanje C one dane kada napiše 2 članka. Sa* X_i *označimo broj članaka koje je pisac napisao u i-tom danu. Tada je X Markovljev lanac na skupu stanja* S *i prijelaznom matricom*

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

X je očito ireducibilan i povratan. Lako se pokaže da je njegova stacionarna distribucija $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$*. pa je X i pozitivno-povratan. Aperiodičnost se jednostavnim računom može pokazati po definiciji pa imamo sve pretpostavke Ergodskog teorema. Ako sada definiramo funkciju* $f : S \to \mathbb{R}$ *sa* $f(0) = 0$*,* $f(1) = 80$*,* $f(2) = 200$*, tada prosječnu dnevnu zaradu dobivamo kao*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \pi(f) = \frac{1}{2} * 0 + \frac{1}{4} * 80 + \frac{1}{4} * 200 = 70 \tag{1.21}$$

gdje prva jednakost (1.21) slijedi po Ergodskom teoremu. Dakle, prosječan mjesečni honorar je $30 * 70 = 2100$ *kuna.*

Poglavlje 2

Markovljevi lanci s atomom

U ovom poglavlju proširit ćemo definicije i svojstva iz prethodnog poglavlja na Markovljeve lance na općenitom skupu stanja, ali koncentrirat ćemo se na specijalan slučaj kada lanac X sadrži tzv *atom* te ćemo pokazati da se u tom slučaju definicije i svojstva iz prvog poglavlja podosta analaogno primjenjuju. Uobičajeno ćemo sa $\mathcal{B}(S)$ označavati σ-algebru podskupova od S, a sa μ početnu distribiciju lanca. Također, važno je napomenuti da, kada budemo koristili pojmove *općeniti / diskretni* Markovljevi lanci, to će se odnositi na prostor stanja (a ne prostor vremena koji ostaje diskretan!).

2.1 Uvodni pojmovi i definicije

Poglavlje započinjemo definicijom tzv. *prijelazne jezgre* koja je analogon prijelazne matrice u diskretnom slučaju:

Definicija 2.1.1. *Ako je $P = \{P(x, A),\ x \in S,\ A \in \mathcal{B}(S)\}$ familija koja zadovoljava:*

(i) za svaki $A \in \mathcal{B}(S)$, $P(\,\cdot\,, A)$ je nenegativna izmjeriva funkcija na S
(ii) za svaki $x \in S$, $P(x\,, \cdot)$ je vjerojatnosna mjera na $\mathcal{B}(S)$

tada P nazivamo jezgra prijelaznih vjerojatnosti *ili* Markovljeva funkcija prijelaza.

Kao i kod prijelazne matrice u diskretnom slučaju, ovdje također možemo iterativno definirati n-koračnu jezgru. Kao početnu mjeru uzmememo npr Diracovu, odnosno definiramo:

$$P^0(x, A) = \delta_x(A) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \tag{2.1}$$

te za $n \in \mathbb{N}$

$$P^n(x, A) = \int_S P(x, dy)P^{n-1}(y, A), \qquad x \in S,\ A \in \mathcal{B}(S) \tag{2.2}$$

Sada možemo dati definiciju Markovljevog lanca na općenitom skupu stanja.

Definicija 2.1.2. *Neka je S općeniti skup stanja i $\mathcal{B}(S)$ σ-algebra podskupova od S. Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u skupu S nazivamo* vremenski homogen Markovljev lanac *ako vrijedi:*

$$\mathbb{P}(X_n \in B \mid \sigma(X_0, ..., X_m)) = P^{n-m}(X_m, B) \qquad \text{za sve } m \leq n,\ B \in \mathcal{B}(S) \tag{2.3}$$

Sada navodimo teorem koji nam intiuitivno govori da neka početna distribucija i prijelazna jezgra generiraju jedan Markovljev lanac.

Teorem 2.1.3. *Za svaku početnu mjeru μ na $\mathcal{B}(S)$ i prijelaznu jezgru $P = \{P(x, A), x \in S, A \in \mathcal{B}(S)\}$ postoji vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\mu)$ te stohastički proces $X = (X_n : n \geq 0)$ na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\mu)$ takav da za bilo koje izmjerive $A_i \subseteq S_i$, $i = 0, 1, ...n$ i za bilo koji $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$\mathbb{P}_\mu(X_0 \in A_0, ..., X_n \in A_n) = \int_{y_0 \in A_0} \cdots \int_{y_{n-1} \in A_{n-1}} \mu(dy_0)P(y_{n-1}, A_n) \cdots P(y_{n-1}, A_n), \tag{2.4}$$

. Posebno, X je Markovljev lanac.

Napomenumo kako je u gornjem slučaju $\Omega := \prod_{i=0}^{\infty} S_i$ produktni prostor gdje je svaki S_i kopija od prostora stanja S, odnosno $\Omega = \{x_0, x_1, ... : x_i \in S\}$ gdje su x_n projekcije u vremenu n. Dakle, svaka realizacija procesa X poprima vrijednost u Ω. Nadalje, sa $\mathcal{F}$ smo označili pripadajuću produktnu σ-algebru, dok je $\mathbb{P}_\mu$ odabrana tako da vrijedi (2.4).

Pokažimo sada da vrijede tzv. *Chapman-Kolmogorovljeve* nejednakosti:

Teorem 2.1.4. *Za sve $0 \leq m \leq n$ vrijedi:*

$$P^n(x, A) = \int_S P^m(x, dy)P^{n-m}(y, A), \qquad x \in S,\ A \in \mathcal{B}(S) \tag{2.5}$$

Dokaz. Jednakost iz teorema dobijemo ukoliko kod jednakosti (2.4) stavimo μ=δ_X (Diracova mjera), integriramo po skupovima A_i=X, za i=1,...,n-1 te uzmemo definiciju od P^m i P^{n-m} za prvih m i zadnjih n-m integranada. □

Kao i u prvom poglavlju, ovdje će nam glavni primjer obiti *slučajna šetnja*, ali sada kada nemamo restrikciju da skup stanja mora biti diskretan možemo promatrati slučajnu šetnju na $\mathbb{R}$.

Primjer 2.1.5. *Pretpostavimo da je $Y = \{Y_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ niz slučajnih varijabli definiranih uzimanjem proizvoljne distribucije za X_0 te za $k \in \mathbb{N}$ sa*

$$Y_k := Y_{k-1} + W_k \tag{2.6}$$

gdje su W_k n.j.d. slučajne varijable s vrijednostima u $\mathbb{R}$ i distribucijom

$$\Gamma(-\infty, y) := \mathbb{P}(W_k \in \langle -\infty, y\rangle) = \mathbb{P}(W_k \leq y). \tag{2.7}$$

Tada Y nazivamo slučajnom šetnjom *na $\mathbb{R}$.*
Ako sada slučajni proces $X = \{X_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ definiramo sa:

$$X_k := [X_{k-1} + W_k]^+ = max\,\{0\ ,\ X_{k-1} + W_k\} \tag{2.8}$$

tada X nazivamo slučajnom šetnjom na polupravcu*, tj.* slučajnom šetnjom na $\mathbb{R}^+$

Pogledajmo sada kako izgleda prijelazna jezgra $P(x, A)$ za slučajnu šetnju na polupravcu, za $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$. Ako je $A \subset (0, +\infty)$, imamo:

$$\begin{aligned} P(x, A) &= \mathbb{P}_x(X_0 + W_1 \in A) \\ &= \mathbb{P}_x(W_1 \in A - x) \\ &= \Gamma(A - x) \end{aligned}$$

dok za $A = \{0\}$ imamo:

$$\begin{aligned} P(x, A) &= \mathbb{P}_x(X_0 + W_1 \leq 0) \\ &= \mathbb{P}_x(W_1 \leq -x) \\ &= \Gamma(-\infty, -x] \end{aligned}$$

gdje je A-x uobičajena oznaka za skup $\{y \in \mathbb{R} : y = a - x,\ a \in A\}$. Primijetimo da je slučajna šetnja zaista Markovljev lanac jer se jednakost u (2.4) dobije kao jednostavna posljedica toga što su W_i nezavisne i jednakodistribuirane.

Sljedeća nam propozicija daje karakterizaciju Markovljevog svojstva koja će nam koristiti kada u nastavku budemo govorili o *vremenima zaustavljanja*.

Propozicija 2.1.6. *Ako je X Markovljev lanac s početnom mjerom μ i h: $\Omega \mapsto \mathbb{R}$ ograničena, izmjeriva funkcija, onda:*

$$E_\mu[h(X_{n+1}, X_{n+2}, ...) \mid \mathcal{F}_n^X] = E_x[h(X_1, X_2, ...)]. \tag{2.9}$$

gdje je $\mathcal{F}_n^X := \sigma(X_0, ..., X_n)$ najmanja σ-algebra za koju je slučajni vektor $(X_0, ..., X_n)$ izmjeriv.

2.2 Vremena zaustavljanja

Dosad smo se uglavnom koncentrirali na distribuciju Markovljevog lanca u trenutku n. No zanimljivo je i korisno proučavati distribuciju u nekim slučajnim vremenima koje definiramo u nastavku:

Definicija 2.2.1. *Za skup $A \in \mathcal{B}(S)$* broj posjeta Markovljevog lanca *X* skupu *A definiramo sa:*

$$\eta_A := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{X_n \in A\}} \tag{2.10}$$

Definicija 2.2.2. *Za skup $A \in \mathcal{B}(S)$ varijable:*

$$\tau_A := \inf\{n \geq 1 : X_n \in A\} \tag{2.11}$$

$$\sigma_A := \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\} \tag{2.12}$$

nazivamo, redom, vrijeme prvog povratka*, odnosno* vrijeme prvog posjeta *Markovljevog lanca X skupu A.*

Također, induktivno možemo definirati vrijeme k-tog povratka u skup A:

$$\begin{aligned} \tau_A(1) &:= \tau_A \\ \tau_A(k) &:= min\{n > \tau_A(k-1) : X_n \in A\} \end{aligned}$$

Za daljnju analizu uvodimo i sljedeće definicije:

$$U(x, A) := \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) = E_x[\eta_A] \tag{2.13}$$

$$L(x, A) := P_x(\tau_A < \infty) = P_x(X\ pogodio\ A) \tag{2.14}$$

Nadalje, definicija vremena zaustavljanja kao i dokaz da su τ_A i σ_A vremena zaustavljanja sasvim su analogni kao i kod Markovljevog lanca na diskretnom skupu stanja:

Definicija 2.2.3. *Funkciju $\zeta : \Omega \mapsto \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ nazivamo* vrijeme zaustavljanja za *X ako za svaku početnu distribuciju μ događaj $\{\zeta = n\} \in \mathcal{F}_n^X$, za sve $n \in \mathbb{Z}_+$*

Propozicija 2.2.4. *Za bilo koji skup $A \in \mathcal{B}(S)$ varijable τ_A i σ_A su vremena zaustavljanja za X.*

Dokaz. Budući da imamo

$$\{\tau_A = n\} = \bigcap_{m=1}^{n-1}\{X_m \in A^C\} \bigcap \{X_n \in A\} \in \mathcal{F}_n^X, \quad n \geq 1 \tag{2.15}$$

$$\{\sigma_A = n\} = \bigcap_{m=0}^{n-1}\{X_m \in A^C\} \bigcap \{X_n \in A\} \in \mathcal{F}_n^X, \quad n \geq 0 \tag{2.16}$$

tvrdnja slijedi iz definicije vremena zaustavljanja. □

Ako je ζ proizvoljno vrijeme zaustavljanja, onda možemo definirati slučajnu varijablu X_ζ tako da stavimo $X_\zeta = X_n$ na događaju $\{\zeta = n\}$. Za vrijeme zaustavljanja ζ svojstvo koje nam govori da buduće kretanje procesa X ovisi samo o vrijednosti X_ζ, a ne i o prošlim vrijednostima nazivamo *jako Markovljevo svojstvo*.
Kako bismo ga formalno opisali, definiramo σ-algebru $\mathcal{F}_\zeta^X := \{A \in \mathcal{F} : \{\zeta = n\} \bigcap A \in \mathcal{F}_n^X, n \in \mathbb{Z}_+\}$ koja opisuje događaje koji se dogode do vremena ζ.

Sada jednakost (2.9) možemo proširiti sa:

Definicija 2.2.5. *Kažemo da X ima* jako Markovljevo svojstvo *ako za svaku početnu distribuciju μ, svaku realnu, ograničenu i izmjerivu funkciju h na Ω te za svako vrijeme zaustavljanja $\zeta < \infty$ vrijedi:*

$$E_\mu[h(X_{\zeta+1}, X_{\zeta+2}, ...) \mid \mathcal{F}_\zeta^X] = E_{X_\zeta}[h(X_1, X_2, ...)] \quad (\mathbb{P}_\mu - g.s). \tag{2.17}$$

Propozicija 2.2.6. *Ako je X Markovljev lanac, tada vrijedi jako Markovljevo svojstvo.*

Dokaz. Tvrdnja se dobije kao jednostavna posljedica dekompozicije očekivanja na obje strane jednakosti (2.17) preko događaja $\{\zeta = n\}$ i upotrebe Markovljenog svojstav napisanog u formi (2.9).

□

Ponekad će nam biti od interesa promatrati vjerojatnosti da Markovljev lanac u određenom broju koraka posjeti neki skup, a da prije toga ne pogodi neki drugi određeni skup. Takvu vjerojatnost sada ćemo i formalno definirati.

Definicija 2.2.7. *Za Markovljev lanac X n-*koračna vjerojatnost izbjegavanja *definirana je sa:*

$${}_AP^n(x, B) := P_x(X_n \in B, \tau_A \geq n), \qquad x \in S,\ A, B \in \mathcal{B}(S) \tag{2.18}$$

Dodatno, koristimo notaciju

$$U_A(x, B) := \sum_{n=1}^{\infty} {}_A P^n(x, B) \qquad x \in S,\ A, B \in \mathcal{B}(S) \tag{2.19}$$

koja porširuje definiciju od L u (2.14) sa:

$$U_A(x, A) = L(x, A) \qquad x \in S$$

2.3 Ireducibilnost

Kako bismo mogli proučavati dugoročno ponašanje Markovljevog lanca potrebno nam je npr. dati odgovor na pitanje koje će skupovi lanca biti posjećeni s pozitivnom vjerojatnošću ako krećemo iz nekog početnog stanja $x \in S$. Dakle, od interesa nam je proučavati koji skupovi i stanja komuniciraju, a u tu svrhu trebamo formalizirati koncept ireducibilnosti. Osnovni problem koji se javlja kod proširenja koncepta ireducibilnosti na općeniti skup stanja je taj što, ako pogledamo kako smo definirali $L(x, A)$, ne možemo definirati ekvivalentnu relaciju komuniciranja $\leftrightarrow$. Iako možemo proučavati vjerojatnost pogađanja skupa A ako krenemo iz stanja x, ne možemo općenito definirati obrnuti smjer. Zato ćemo proširenje koncepta ireducubulnosti napraviti započeti uvođenjem definicije tzv. *φ-ireducibilnosti* i vidjet ćemo da je taj pojam, što se već moglo naslutiti iz prethodnih razmatranja, slabiji od ireducibilnosti na prebrojivom skupu stanja.

Definicija 2.3.1. *Za mjeru φ na $\mathcal{B}(S)$ kažemo da je* ireducibilna *ako vrijedi*

$$\varphi(A) > 0 \;\Rightarrow\; L(x, A) > 0 \tag{2.20}$$

*Za Markovljev lanac X kažemo da je φ-*ireducibilan *ako postoji φ-*ireducibilna mjera na $\mathcal{B}(S)$.

Kako bismo pokazali neke karakterizacije φ-ireducibilnosti, definirajmo sljedeću prijelaznu jezgru:

$$K_{a_{\frac{1}{2}}}(x, A) := \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A) 2^{-(n+1)}, \qquad x \in S\ ,\ A \in \mathcal{B}(S) \tag{2.21}$$

Jezgrom $K_{a_{\frac{1}{2}}}$ smo definirali vjerojatnu smjeru ekvivalentu sa $P^0(x, A) + U(x, A) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A)$ pri čemu je, podsjetimo se, $I(x, A) = P^0(x, A)$ za neku početnu mjeru.

Propozicija 2.3.2. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
(i) za sve $x \in S$, $\varphi(A) > 0 \Rightarrow U(x, A) > 0$
(ii) za sve $x \in S$, *ako je* $\varphi(A) > 0$*, onda postoji* $n \in \mathbb{N}$ *(koji ovisi o* x *i* A*) takav da* $P^n(A) > 0$
(iii) za sve $x \in S$, $\varphi(A) > 0 \Rightarrow K_{a_{\frac{1}{2}}}(x, A) > 0$

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi (i). Tada zbog $I(x, A) \geq 0$ i $P^0(x, A)+U(x, A) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A)$ imamo (ii).
Ako pretpostavimo da vrijedi (ii), tada vrijedi i (iii) po definiciji jezgre $K_{a_{\frac{1}{2}}}$.
Pretpostavimo sada da vrijedi (iii). Ako je $x \in A$, tada se zbog (iii) X opet mora vratiti u skup A pa zbog toga imamo (i). Ako x $\notin A$, tada je po definiciji $U(x, A) \geq K_{a_{\frac{1}{2}}}(x, A) > 0$ čime je dokaz gotov. □

Primjer 2.3.3. *Neka je X slučajni proces na* $\mathbb{R}$ *gdje je* $X_0 = x_0$ *za neki* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Za* $n \geq 1$ *definiramo* $X_n = 2X_{n-1} + U$ *gdje je* U_n*, pri čemu je* $U = (U_n, n \geq 1)$ *niz nezavisnih uniformno distribuiranih slučajnih varijabli na* $[-1, 1]$*. Kao i u primjeru slučajne šetnje, X je Markovljev lanac jer su* U_n *n.j.d. Neka je* λ *Lebesgueova mjera na* $\mathbb{R}$*. Neka je npr.* $A = [-2, 1]$*. Ako je* $x = 1$ *tada je očito* $P^n(x, A) = 0$ *za sve* $n \in \mathbb{N}$ *pa slijedi da X nije* λ*-ireducibilan.*

Kao što smo već naslutili na početku ovog poglavlja, φ-ireducibilnost je slabije svojstvo od ireducibilnosti na prebrojivom prostoru stanja jer nam φ-ireducibilnost garantira da će Markovljev proces, krenuvši iz nekog stanja, s pozitivnom vjerojatnošću pogoditi neki "dovoljno velik" podskup skupa stanja, ali ne i pojedinačno stanje, tj. na općenitom prostoru stanja nemamo "dvosmjernu komunikaciju" između pojedinačnih stanja. Iz navedenoga se može naslutiti da ćemo, ako želimo preciznije i formalnije opisati doseg Markovljevog lanca, kao mjeru morati uzeti nekakvo proširenje, a ne restrikciju "ireducibilne mjere".

Propozicija 2.3.4. *Ako je X* φ *ireducibilan za neku mjeru* φ*, tada postoji vjerojatnosna mjera* ψ *na* $\mathcal{B}(S)$ *takva da:*
(i) *X je* ψ*-ireducibilan*
(ii) *Za bilo koju drugu mjeru* φ*', lanac X je* φ*'-ireducibilan ako i samo ako je varphi apsolutno neprekidna u odnosu na* ψ*' (u oznaci* $\varphi' \succ \psi$*).*
(iii) *Ako je* $\psi(A) = 0$*, onda je* $\psi\{y : L(y, A) > 0\} = 0$*.*
(iv) *Vjerojatnosna mjera* ψ *ekvivalentna je s mjerom*

$$\psi'(A) := \int_S \varphi'(dy) K_{a_{\frac{1}{2}}}(y, A) \tag{2.22}$$

za bilo koju konačnu ireducibilnu mjeru φ*'.*

Sada možemo uvesti još neke pojmove vezane uz koncept maksimalne ireducibilne mjere:

Definicija 2.3.5.
(i) *Za Markovljev lanac kažemo da je* ψ-ireducibilan *ako je* φ*-ireducibilan za neku mjeru* φ *i mjera* ψ *je "maksimalna ireducibilna mjera", tj. mjera koja zadovoljava uvjete Propozicije* 2.3.4.
(ii) *Skupove koji su* ψ*-pozitivne mjere definiramo sa:*

$$\mathcal{B}^{+}(S) := \{\mathcal{B}(S) : \psi(A) > 0\}$$

(iii) *Skup* $A \in \mathcal{B}(S)$ *nazivamo* potpunim *ako je* $\psi(A^C) = 0$
(iv) *Za skup* $A \in \mathcal{B}(S)$ *kažemo da je* apsorbirajući *ako je* $P(x, A) = 1$ *za* $x \in A$

Sljedeći rezultat daje poveznicu između poptunih i apsorbirajućih skupova.

Propozicija 2.3.6. *Pretpostavimo da je* X ψ*-ireducibilan. Tada vrijedi:*
(i) svaki apsorbirajući skup je poptun
(ii) svaki poptuni skup sandrži neprazan apsorbirajući podskup

Dokaz. (i) Preptostavimo da je $A \in \mathcal{B}(S)$ apsorbirajući te da je $\psi(A^C) > 0$. Po definiciji ireducibilne mjere to povlači da je $L(x, A^C) > 0$ za $x \in A$ što je kontradikcija s pretpostavkom da je A apsorbirajući.

(ii) Neka je $A \in \mathcal{B}(S)$ potpun. Neka je

$$B := \{y \in S : \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} P^n(y, A^C) = 0\}.$$

Očito je $B \subseteq A$ te zbog $\psi(A^C) = 0$ po Propoziciji 2.3.4 slijedi da je $\psi(B) > 0$ pa je B neprazan. Preptostavimo sada suprotno, tj. da B nije apsorbirajući. To znači da je $P(y, B^C) > 0$ za neki $y \in B$ pa po Chapman-Kolmogorovljevoj nejednakosti imamo

$$\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} P^{n+1}(y, A^C) \geq \int_{B^C} P(y, dz)\{\sum_{n=0}^{\infty} P^n(z, A^C)\} > 0$$

što je kontradikcija s definicijom skupa B. Dakle, B je neprazni apsorbirajući podskup od A.

$\square$

Primjer 2.3.7. *Neka je* X *slučajna šetnja šetnja na* $\mathbb{R}$ *gdje je* $X_0 = x_0$ *za neki* $x_0 \in \mathbb{R}$ *te* $X_k = X_{k-1} + W_k$ *za* $k \in \mathbb{N}$ *pri čemu je* $W = (W_k : k \in \mathbb{N})$ *niz nezaviznih i jednakodistribuiranih slučajnih varijabli koje poprimaju vrijednosti u* $\mathbb{Q}$*, odnosno distribucija skokova od* X *je diskretna. Tvrdimo da je* X φ*-ireducibilan Markovljev lanac za bilo koju ireducibilnu mjeru* φ*. Zaista, ako lanac kreće iz neke racionalne točke* $x \in \mathbb{Q}$*, tada je zbog diskretnih skokova* $L(x, A) = 0$ *za sve* $A \subset \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ *pa bi za bilo koju ireducibilnu mjeru* φ *moralo vrijediti* $\varphi(A) = 0$.

Istom argumentacijom dobijemo da mora biti $\varphi(A) = 0$ *za sve* $A \subset \mathbb{Q}$ *ako lanac krene iz stanja* $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. *Dakle, ne postoji ireducibilna mjera osim trivijalne pa zaključujemo da X nije ireducibilan.*

Budući da relaciju komuniciranja između stanja $\longleftrightarrow$ ne možemo definirati na općenitom skupu stanja, kao svojevrsnu "zamjenu" uvodimo pojmove *dostižnosti* i *uniformne dostižnosti*.

Definicija 2.3.8. *Za skup* $B \in \mathcal{B}(S)$ *kažemo da je* dostižan *iz skupa* $A \in \mathcal{B}(S)$ *ako je* $L(x, B) > 0$, *za svaki* $x \in A$.
Za skup $B \in \mathcal{B}(S)$ *kažemo da je* uniformno dostižan *iz skupa* $A \in \mathcal{B}(S)$ *ako postoji* $\delta > 0$ *t.d.*

$$\inf_{x \in A} L(x, B) \geq \delta \tag{2.23}$$

i ako vrijedi (2.23) *pišemo* $A \rightsquigarrow B$.

Nedostatak relacije $\rightsquigarrow$ je ta što ne zadovoljava svojstvo refleksivnosti, no sljedećom lemom pokazat ćemo da je tranzitivna.

Lema 2.3.9. *Ako* $A \rightsquigarrow B$ *i* $B \rightsquigarrow C$, *onda i* $A \rightsquigarrow C$.

Dokaz. Zbog $A \rightsquigarrow B$ i $B \rightsquigarrow C$ postoje $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 > 0$ t.d. $\inf_{x \in A} L(x, B) \geq \delta_1$ i $\inf_{x \in B} L(x, C) \geq \delta_2$. Pokažimo da je $A \rightsquigarrow C$ za $\delta := \delta_1 + \delta_2$.
Budući da je vjerojatnost da lanac pogodi skup C veća ili jednaka vjerojatnosti da lanac pogodi skup C nakon što je najprije posjetio skup B, imamo:

$$\inf_{x \in A} U_C(x, C) \geq \inf_{x \in A} \int_B U_B(x, dy) U_C(y, C) \geq \inf_{x \in A} U_B(y, B) \inf_{x \in B} U_C(y, C) = \delta_1 + \delta_2$$

□

Uvodomo još i sljedeću notaciju radi lakšeg opisa strukture komuniciranja:

Skup $\bar{A} := \{x \in S : L(x, A) > 0\}$ svih stanja iz kojih je A dostižan.
Skup $\bar{A}(m) := \{x \in S : \sum_{n=1}^{n=m} P^n(x, A) \geq m^{-1}\}$
Skup $A^0 := \{x \in S : L(x, A) = 0\} = \bar{A}^C$

Primjer 2.3.10. *Promatramo ponovno slučajnu šetnju na polupravcu X s varijablom pomaka W iz Primjera 2.1.5. Neka je* φ *mjera na* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ *t.d.* $\varphi(A) = 0$ *za* $A \subset (0, +\infty)$ *te* $\varphi(\{0\}) = 1$. *Pokažimo da je tada X* φ*-ireducibilan proces ako i samo ako za distribuciju slučajnih varijabli* W_i *vrijedi*

$$\mathbb{P}(W_i < 0) = \Gamma(-\infty, 0) > 0. \tag{2.24}$$

Primijetimo kako je nužnost uvjeta (2.24) trivijalna posljedica definicije φ*-ireduciblnosti jer u suprotnom lanac, krenuvši iz nekog pozitivnog stanja, nikad ne bi pogodio skup 0.*

Obratno, pretpostavimo da vrijedi (2.24). Zbog toga možemo naći neki $\epsilon > 0$ *t.d. je* $\Gamma(-\infty, -\epsilon) > 0$ *i* $\delta > 0$ *t.d. za proizvoljan* $x \in \mathbb{R}^+$ *i sve* $n \in \mathbb{N}$ *t.d. je* $n > x/\epsilon$ *vrijedi:*

$$P^n(x, \{0\}) \geq \delta^n > 0 \tag{2.25}$$

pa je X zaista φ*-ireduciblan.*

Gornjom konstrukcijom mjere φ *dobili smo* φ*-ireducibilnost, no to nam ne pomaže da kažemo nešto više o kretanju lanca. Osim* $\{0\}$*, postoje još mnogi skupovi koje će X pogoditi iz bilo koje početne točke. Kako bismo ih opisali, jednostavno ćemo konstruirati maksimalnu ireducibilnu mjeru. Ako promatramo kretanje lanca nakon što je pogodio* $\{0\}$ *i mjeru* ψ *definiramo sa:*

$$\psi(A) := \sum_n P^n(0, A)2^{-n}, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \tag{2.26}$$

vidimo da je X ψ*-ireduciblan. Također, prema Propoziciji 2.3.4* ψ *je maksimalna ireducibilna mjera.*

2.4 Atom

Kao što smo već u uvodu rekli, dosta teorije koja vrijedi za Markovljeve lance na diskretnom skupu stanja može se analogno i elegantno proširiti na općeniti skup stanja kada taj skup stanja sadrži tzv. atom za Markovljev lanac X.

Definicija 2.4.1. *Skup* $\alpha \in \mathcal{B}(S)$ *nazivamo* atom *za Markovljev lanac X ako postoji mjera* ν *na* $\mathcal{B}(S)$ *takva da*

$$\mathbb{P}(x,A) = \nu(A),\ x \in \alpha.$$

Dodatno, ako je X $\psi-$*ireducibilanm i* $\psi(\alpha) > 0$*, onda* α *nazivamo* dostižnim atomom.

Kada budemo promatrali $P(x, \cdot), U(x, \cdot), L(x, \cdot)$... za proizvoljan $x \in \alpha$ odsada ćemo zbog definicijskog svojstva atoma koristiti neprecizne, ali elegantnije oznake $P(\alpha, \cdot), U(\alpha, \cdot), L(\alpha, \cdot)$.

Sljedeća nam propozicija daje dovoljan uvjet za dostižnost atoma.

Propozicija 2.4.2. *Pretpostavimo da X sadrži atom* α *takav da* $\sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, \alpha) > 0$ *za sve* $x \in S$*. Tada je* α *dostižni atom i X je* ν*-ireducibilan s mjerom* $\nu = P(\alpha, \cdot)$.

Dokaz. Prema Chapman-Kolmogorovljevim jednakostima imamo da za sve $n \geq 1$ vrijedi:

$$\begin{aligned} P^{n+1}(x, A) &\geq \int_\alpha P^n(x, dy)P(y, A) \\ &= P^n(x, \alpha)\nu(A) \end{aligned}$$

Sumiranjem po n dobivamo tvrdnju. $\square$

Primjer 2.4.3. *Za slučajnu šetnju na polupravcu X skup {0} je trivijalan atom (jednočlan skup je, dakako, uvijek atom). U Primjeru 2.3.10 pokazali smo da je* $L(x, \{0\}) > 0$ *za sve* $x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ *pa po Propoziciji 2.4.2 slijedi da je* $\{(0)\}$ *dostižan atom.*

Propozicija 2.4.4. *Ako je* $L(x, A) > 0$ *za neko stanje* $x \in \alpha$*, gdje je* α *atom, tada* $\alpha \rightsquigarrow A$*.*

Sada smo spremni poopćiti pojmove kao što su *prolaznost* i *povratnost* koji su nam važni za razmatranje stabilnosti lanca.

Definicija 2.4.5. *Skup* $A \in \mathcal{B}(S)$ *nazivamo* uniformno prolaznim *ako postoji* $M < \infty$ *takav da je* $\mathbb{E}_x(\eta_A) \leq M$*, za sve* $x \in A$*, a reći ćemo da je* povratan *ako je* $\mathbb{E}_x(\eta_A) = \infty$*, za sve* $x \in A$*.*

Nadalje, za skup $A \in \mathcal{B}(S)$ *kažemo da je* prolazan *ako za njega postoji prebrojiv pokrivač uniformno prolaznih skupova iz* $\mathcal{B}(X)$*.*

Definicija 2.4.6. *Za Markovljev lanac X reći ćemo da je* povratan *ako je* ψ*-ireducibilan i ako je* $U(x, A) \equiv \infty$ *za sve* $x \in S$ *i za sve* $A \in \mathcal{B}^+(S)$*, a reći ćemo da je* prolazan *ako je* ψ*-ireducibilan i prostor stanja X je prolazan.*

Prisjetimo se da je na diskretnom skupu stanja svaki ireducibilan Markovljev lanac ili povratan ili prolazan. Kako bismo mogli dokazati da isto vrijedi i za lance na općenitom skupu, trebat će nam sljedeća lema koju navodimo bez dokaza.

Lema 2.4.7. *Neka je X Markovljev lanac na S i* $A \in \mathcal{B}(S)$ *uniformno prolazan skup takav da je* $U(x, A) \leq M$ *za sve* $x \in A$*. Tada je* $U(x, A) \leq 1 + M$ *za sve* $x \in S$*.*

Teorem 2.4.8. *Ako je X* ψ*-ireducibilan Markovljev lanac, tada je on ili prolazan ili povratan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je X nije povratan. Tada postoje neki $A \in \mathcal{B}^+(S)$ i $x^* \in X$ takvi da je $U(x^*, A) < \infty$. Ako stavimo $A_* = \{y : U(y, A) = \infty\}$, tada je $\psi(A_*) = 0$ jer u suprotnom bi postojao neki $m \in \mathbb{N}$ za koji je $P^m(x^*, A_*) > 0$ pa bismo imali

$$\begin{aligned} U(x^*, A) &\geq \int_X P^m(x^*, dy) U(y, A) \\ &\geq \int_{A_*} P^m(x^*, dy) U(y, A) = \infty \end{aligned}$$

Sada označimo $A_r = \{y \in A : U(y, A) \leq r\}$. Budući da je $\psi(A) > 0$ i $A_r \uparrow A \cap A_*^C$, mora postojati neki r takav da $\psi(A_r) > 0$, a po prethodnoj lemi tada za svaki y vrijedi

$$U(y, A_r) \leq 1 + r. \tag{2.27}$$

Promatrajmo sada skupove oblika $\overline{A}_r(M) := \{y : \sum_{m=1}^{M} P^m(y, A_r) > M^{-1}\}$. Tada zbog (2.27) imamo:

$$\begin{aligned} M(1+r) &\geq MU(x, A_r) \geq \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=m}^{\infty} P^n(x, A_r) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_X P^n(x, dy) \sum_{m=1}^{M} P^m(y, A_r) \\ &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\overline{A}_r(M)} P^n(x, dy) \sum_{m=1}^{M} P^m(y, A_r) \\ &\geq M^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, \overline{A}_r(M)). \end{aligned}$$

Budući da je $\psi(A_r) > 0$ imamo $\bigcup_m \overline{A}_r(m) = X$ pa je $\{\overline{A}_r(m)\}$ familija uniformno prolaznih skupova koji pokrivaju X. □

Teorem 2.4.9. *Pretpostavimo da je X ψ-ireducibilan te da S sadrži atom $\alpha \in \mathcal{B}^+(S)$. Tada:*
(*i*) *Ako je α povratan, onda je i svaki skup iz $\mathcal{B}^+(S)$ povratan.*
(*ii*) *Ako je α prolazan, tada postoji prebrojivo mnogo uniformno prolaznih skupova koji pokrivaju prostor stanja X.*

Dokaz. Pokazat ćemo da vrijedi (i). Neka je $A \in \mathcal{B}^+(S)$ (podsjetimo se, $\mathcal{B}^+(S) = \{A \in \mathcal{B}(S) : \psi(A) > 0\}$). Tada za svako stanje x postoje $r,s \in \mathbb{N}$ t.d. $P^r(x, \alpha) > 0$ i $P^s(\alpha, A) > 0$ pa zbog toga imamo:

$$\sum_n P^{r+s+n}(x, A) \geq P^r(x, \alpha) \Big[\sum_n P^n(\alpha, \alpha) \Big] P^s(\alpha, A) \tag{2.28}$$

□

Sada ćemo pokazati da je, u slučaju kada X sadrži atom, definicija (a)periodičnosti sasvim analaogna definiciji kod lanaca s diskretnim prostorom stanja.

Definicija 2.4.10. *Neka je X Markovljev lanac s atomom α.* Period atoma *α, u oznaci $d(\alpha)$, definiramo kao najveći zajednički djelitelj (n.z.d) skupa $\{n \in \mathbb{N} : P^n(\alpha, \alpha) > 0\}$ uz konvekciju n.z.d. $\emptyset = 0$. Ako je $d(\alpha) = 1$, za atom α kažemo da je* aperiodičan.

Propozicija 2.4.11. *Ako su α i β dva dostižna atoma, tada je $d(\alpha) = d(\beta)$.*

Dokaz. Preptostavimo da su α i β dva dostižna atoma. To povlači da postoje neki $l, m \in \mathbb{N}$ t.d. $P^l(\alpha,\beta) > 0$ i $P^m(\beta,\alpha) > 0$. Tada imamo da je $P^{l+m}(\alpha,\alpha) \geq P^l(\alpha,\beta)P^m(\beta,\alpha) > 0$, odnosno $d(\alpha)$ dijeli $l+m$. Nadalje, za bilo koji $n \in \{n \in \mathbb{N} : P^n(\beta,\beta) > 0\}$ imamo:

$$P^{l+m+n}(\alpha,\alpha) \geq P^l(\alpha,\beta)P^n(\beta,\beta)P^m(\beta,\alpha) > 0 \tag{2.29}$$

Dakle, $d(\alpha)$ dijeli i $l+m+n$ pa zbog toga dijeli i n. Zbog proizvoljnosti od n slijedi da $d(\alpha)$ dijeli $d(\beta)$. Jasno je da se na isti način pokazuje da $d(\beta)$ dijeli $d(\alpha)$. Dakle, $d(\alpha) = d(\beta)$. □

Nakon dokaza prethodne propozicije spremni smo definirati (a)periodičnost lanaca s atomom.

Definicija 2.4.12. *Neka je X Markovljev lanac koji sadrži barem jedan dostižan atom. Period Markovljevog lanca definiramo kao zajednički period svih dostižnih atoma. Za Markovljev lanac reći ćemo da je* aperiodičan *ako ima period* 1.

U nastavku donosimo jedan konkretan primjer Nummelinove dekompozicije Markovljevih lanaca metodom cijepanja (*splitting chains*) o čemu se više može pročitati u [2] i [1].

Primjer 2.4.13. *Neka su* $(Z_k : k \in \mathbb{N})$ *i* $(U_k : k \in \mathbb{N})$ *dva nezavisna niza nezavisnih i jednakodistribuiranih slučajnih varijabli na* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*. Neka su* U_i *uniformne na* $[0,1]$ *te neka je* $r : \mathbb{R} \to [0,1]$ *funkcija koja je neopadajuća i neprekidna zdesna. Neka je* $X_0 = x_0$ *te za* $k \in \mathbb{N}$ *definiramo:*

$$X_k = \begin{cases} X_{k-1} + Z_k & U_k \leq r(X_{k-1}) \\ Z_k & \textit{inače} \end{cases} \tag{2.30}$$

Pretpostavljamo da Z_k *ima neprekidnu funkciju gustoće koja je pozitivna s obzirom na Lebesgueovu mjeru, tj.* $\mathbb{P}(Z_k \in A) > 0$ *za sve* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *t.d.* $\lambda(A) > 0$ *pri čemu smo sa* λ *označili Lebesgueovu mjera. Kao i kod primjera slučajne šetnje, iz pretpostavke da su* Z_k *i* U_k *nezavisne i jednakodistribuirane slijedi da je X Markovljev lanac, a prijelaznu jezgru možemo izraziti na sljedeći način:*

$$P(x,A) := r(x)\,\mathbb{E}[\mathbb{I}_A(x+Z_0)] + (1-r(x))\,\mathbb{E}[\mathbb{I}_A(Z_0)], \qquad x \in \mathbb{R},\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \tag{2.31}$$

Može se pokazati da X ne sadrži atom, ali može biti "ugrađen" u Markovljev lanac s atomom. Stavimo $\mathcal{F}_0 = \sigma(X_0)$ *te za* $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_k = \sigma(X_0, U_l, Z_l;\ 1 \leq l \leq k)$*. Dakle, za sve* $k \geq 0$, X_k *je* $\mathcal{F}_k$*-izmjeriva. Nadalje, za* $k \geq 1$ *definiramo:*

$$V_k := \mathbb{I}_{\{U_k \leq r(X_{k-1})\}} \tag{2.32}$$

pa se (2.30) može zapisati kao:

$$X_k = X_{k-1}V_k + Z_k \tag{2.33}$$

Ako stavimo $W_k = (X_k, V_{k+1})$, *tada je* $W = (W_k : k \geq 0)$ *Markovljev lanac s prijelaznom jezgrom* $\bar{P}$ *definiranom za* $w = (x, v) \in \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ *i* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *sa:*

$$\begin{aligned}\bar{P}(w, A \times \{1\}) &= \mathbb{E}[\mathbb{I}_A(xv + Z_0)r(xv + Z_0)] \\ \bar{P}(w, A \times \{0\}) &= \mathbb{E}[\mathbb{I}_A(xv + Z_0)(1 - r(xv + Z_0))]\end{aligned}$$

Iz konstrukcije jezgre uočavamo da je $\alpha = \mathbb{R} \times \{0\}$ *atom te da za sve* $w = (x, v) \in \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ *vrijedi:*

$$\bar{P}(w, \alpha) = 1 - \mathbb{E}[r(xv + Z_0)]\ . \tag{2.34}$$

Iz $\lambda(\{r < 1\}) > 0$ *i pretpostavke da* Z_0 *ima pozitivnu funkciju gustoće s obzirom na Lebesgueovu mjeru* λ, *slijedi da je* $\mathbb{E}[r(xv + Z_0)] > 0$ *pa je* α *dostižan i aperiodičan.*

Iako Markovljevi lanci na topološkim prostorima nisu tema ovog rada, dat ćemo jednu definiciju iz tog područja koja će nam trebati u nastavku.

Prije toga formalno definirajmo na što točno mislimo kada kažemo da je lanac $X \in A$ "beskonačno mnogo puta" (kratica (b.m.p.)):

$$\{X \in A\ \} := \cap_{N=1}^{\infty} \cup_{k=N}^{\infty} \{X_k \in A\}$$

što je dobro definirano za $\mathcal{F}$-izmjeriv događaj na Ω. Za $x \in S$ i $A \in \mathcal{B}(S)$ definiramo:

$$Q(x, A) := P_x(X \in A\ (b.m.p.)) \tag{2.35}$$

Očito za sve x i A vrijedi $Q(x, A) \leq L(x, A)$ te zbog jakog Markovljevog svojstva:

$$Q(x, A) = \mathbb{E}_x[\mathbb{P}_{X_{\tau_A}}\{X \in A\ (g.s.)\}\mathbb{I}_{\{\tau_A < \infty\}}] = \int_A U_A(x, dy)Q(y, A). \tag{2.36}$$

Definicija 2.4.14. *Za skup A kažemo da je* povratan u Harrisovom smislu *ili* Harrisov *ako*

$$Q(x, A) = P_x(\eta_A = \infty) = 1. \qquad \textit{za sve } x \in A$$

Za Markovljev lanac X kažemo da je Harrisov *ako je* ψ*-ireducibilan i svaki skup* $A \in \mathcal{B}^+(S)$ *je Harrisov.*

2.5 Invarijantna mjera

Unatoč tome što posljednjih godina svjedočimo daljnjem razvoju teorije, ali i primjene vezane uz prolazne Markovljeve lance (kao što je npr. teorija potencijala), u nastavku ćemo se koncentrirati na povratne Markovljeve lance zbog njihovih stabilnih svojstava. Napravit ćemo daljnju podjelu povratnih Markovljevih lanaca na *pozitivno-povratne* i *nul-povratne*, a kao najbolji mogući koncept stabilnosti koji možemo imati, razmatrat ćemo postojanje tzv *invarijantne distribucije* - distribucije od X_n koja je invarijantna s obzirom na vremenske pomake lanca.

Definicija 2.5.1. *Ako je π σ-konačna mjera na $\mathcal{B}(S)$ sa svojstvom*

$$\pi(A) = \int_X \pi(dx)P(x, A), \qquad A \in \mathcal{B}(S) \tag{2.37}$$

tada mjeru π nazivamo invarijantnom.

Sada navodimo teorem kojim dobivamo da kod povratnih Markovljevih lanaca postoji jedinstvena (do na multiplikativnu konstantu) invarijantna mjera.

Teorem 2.5.2. *Ako je lanac X povratan, onda postoji jedinstvena (do na multiplikativnu konstantu) invarijantna mjera π koja za bilo koji $A \in \mathcal{B}^+(S)$ ima reprezantaciju:*

$$\pi(B) = \int_A \pi(dw)E_w\Big[\sum_{n=1}^{\tau_A} \mathbb{I}_{X_n \in B}\Big] \quad B \in \mathcal{B}(S) \tag{2.38}$$

Nama je posebno zanimljiv slučaj kada je invarijantna mjera konačna jer tada ju možemo normalizirati kako bi postala vjerojatnosna mjera.

Definicija 2.5.3. *Neka je Markovljev lanac X povratan s invarijantnom mjerom π. Za X reći da je* pozitivno-povratan *ako je π konačna, a u suprotnom ćemo reći da je X* nul-povratan. *Nadalje, ako X sadrži povratan atom α, za α ćemo reći da je pozitivno-povratan atom ako je $\mathbb{E}_\alpha[\tau_\alpha] < \infty$, a reći ćemo da je nul-povratan ako je $\mathbb{E}_\alpha[\tau_\alpha] = \infty$.*

Primjer 2.5.4. *Promatramo slučajnu šetnju $\mathbb{R}$ s razdiobom varijabli pomaka Γ kao i u Primjeru 2.1.5, a s λ ponovno označavamo Lebesgueovu mjeru na $\mathbb{R}$. Za bilo koji $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ imamo*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \lambda(dy)P(y, A) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda(dy)\Gamma(A - y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda(dy) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{A-y}(x)\Gamma(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Gamma(dx) \int_{\mathbb{R}} I_{A-x}(y)\lambda(dy) \\
&= \lambda(A)
\end{aligned}$$

pri čemu smo u trećoj jednakosti koristili Fubinijev teorem, a u zadnjoj jednakosti translacijsku invarijantnost Lebesgueove mjere. Time smo pokazali da je Lebesgueova mjera invarijantna za slučajnu šetnju. Budući da nismo uvodili pretpostavke na distribicuiju Γ, a Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}$ nije konačna, u ovom smo primjeru ujedno pokazali da slučajna šetnja na $\mathbb{R}$ nikada nije pozitivno povratna.

Za neke potrebe bit će nam dovoljan i slabiji zahtjev za neku mjeru nego što je to invarijantnost. U tu svrhu uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 2.5.5. *Ako je μ σ-konačna mjera na $\mathcal{B}(X)$ sa svojstvom*

$$\mu(A) \geq \int_X \mu(dx)P(x,A), \qquad A \in \mathcal{X} \tag{2.39}$$

tada mjeru μ nazivamo subvarijantnom.

Nakon pomoćne leme, iskazat ćemo i dokazati najbitniji teorem ovog potpoglavlja.

Lema 2.5.6. *Pretpostavimo da je X ψ-ireducibilan. Ako je μ subvarijantna i konačna, tada je μ invarijantna.*

Dokaz. Preptostavimo suprotno, tj. da postoji $A \in \mathcal{B}(S)$ t.d. $\mu(A) > \int \mu(dy)P(y,A)$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^C) &> \int \mu(dy)P(y,A) + \int \mu(dy)P(y,A^C) \\
&= \int \mu(dy)P(y,X) \\
&= \mu(X)
\end{aligned}$$

što je, očito, kontradikcija. Dakle, μ je invarijatna. □

Teorem 2.5.7. *Pretpostavimo da je X ψ-ireducibilan te da X sadrži atom α. Tada vrijedi:*
(i) Postoji subvarijantna mjera μ_α° za X dana sa:

$$\mu_\alpha^\circ(A) = U_\alpha(\alpha, A) = \sum_{n=1}^{\infty} {}_\alpha P^n(\alpha, A), \qquad A \in \mathcal{B}(S) \tag{2.40}$$

i μ_α° je invarijantna ako i samo ako je X povratan.

(ii) Mjera μ_α° je minimalna u smislu da ako je μ subvarijantna sa $\mu(\alpha) = 1$, onda

$$\mu(A) \geq \mu_\alpha^\circ(A), \qquad A \in \mathcal{B}(S)$$

Kada je X povratan, onda je μ_α° jedinstvena (sub)invarijantna mjera za koju je $\mu_\alpha^\circ(\alpha) = 1$.

(iii) Subvarijantna mjera μ_α° je konačna ako i samo ako

$$E_\alpha[\tau_\alpha] < \infty.$$

i u tom je slučaju μ_α° invarijantna.

Dokaz. (i) Za $A \in \mathcal{B}(S)$ imamo:

$$\begin{aligned}
\int_X \mu_\alpha^\circ(\alpha)(dy)P(y,A) &= \mu_\alpha^\circ(\alpha)P(\alpha,A) + \int_{\alpha^C} \sum_{n=1}^{\infty} {}_\alpha P^n(\alpha,dy)P(y,A) \\
&\leq {}_\alpha P(\alpha,A) + \sum_{n=2}^{\infty} {}_\alpha P^n(\alpha,A) \\
&= \mu_\alpha(A)
\end{aligned}$$

gdje nejednakost dolazi zbog $\mu_\alpha^\circ(\alpha) \leq 1$. Prema tome μ_α° je subvarijantna te invarijantna ako i samo ako je $\mu_\alpha^\circ(\alpha) = P_\alpha(\tau_\alpha < \infty) = 1$ što vrijedi[1] ako i samo ako je X povratan.

(ii) Neka je μ subvarijantna mjera t.d. $\mu(\alpha) = 1$. Zbog subvarijantnosti,

$$\begin{aligned}
\mu(A) &\geq \int_X \mu(dx)P(x,A) \\
&\geq \mu(\alpha)P(\alpha,A) = P(\alpha,A)
\end{aligned}$$

Nadalje, induktivno pretpostavimo da je $\mu(A) \geq \sum_{m=1}^{n} P^m(\alpha,A)$ za sve A. Tada zbog subvarijantnosti,

$$\begin{aligned}
\mu(A) &\geq \mu(\alpha)P(\alpha,A) + \int_{\alpha^C} \mu(dx)P(x,A) \\
&\geq P(\alpha,A) + \int_{\alpha^C} \Big[\sum_{m=1}^{n} {}_\alpha P^m(\alpha,dx)\Big] P(x,A) \\
&= \sum_{n=1}^{m} {}_\alpha P^m(\alpha,A)
\end{aligned}$$

Puštanjem $n \uparrow \infty$ dobivamo da je $\mu(A) \geq \mu_\alpha^\circ(A)$ za sve $A \in \mathcal{B}(S)$.

Pretpostavimo sada da je X povratan te da je $\mu(\alpha) = 1$ za neku drugu mjeru μ. Ako se

[1] za detaljan raspis pogledati [2, str. 183, Prop. 8.3.1.]

μ_α° razlikuje od μ, tada postoje A i n takvi da $\mu(A) > \mu_\alpha^\circ(A)$ i $P^n(x,\alpha) > 0$ za sve $x \in A$ (zbog $\psi(\alpha) > 0$). Zbog minimalnosti, subvarijantnosti od μ i invarijatnosti od $\mu_\alpha^\circ(A)$,

$$\begin{aligned} 1 &= \mu(\alpha) \geq \int_X \mu(dx)P^n(x,\alpha) \\ &> \int_X \mu_\alpha^\circ(dx)P^n(x,\alpha) \\ &= \mu_\alpha^\circ(\alpha) = 1 \end{aligned}$$

Iz toga proizlazi $\mu = \mu_\alpha^\circ$ i prema tome, kada je X povratan, tada je μ_α° jedinstvena (sub)invarijantna mjera.

(iii) Ako je μ_α° konačna, tada je i invarijatna (lema 2.5.6) . Konačno,

$$\mu_\alpha^\circ(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P_\alpha(\tau_\alpha \geq n) \tag{2.41}$$

pa prema tome invarijantna vjerojatnosna mjera postoji ako i samo ako je očekivano vrijeme povratka u atom α konačno. □

Odsada ćemo sa π uobičajeno označavati jedinstvenu invarijantnu mjeru te ćemo, ako nije istaknuto drugačije, smatrati da je normalizirana, tj. vjerojatnosna.

Za invarijantnu mjeru kod povratnih Markovljevih lanaca postoji i još jedna, ekvivalentna prezentacija dana sa:

$$\mu_\alpha^\circ(A) = E_\alpha\Big[\sum_{n=1}^{\tau_\alpha} \mathbb{I}_{\{X_n \in A\}}\Big], \qquad A \in \mathcal{B}(S) \tag{2.42}$$

pri čemu gornja jednakost slijedi iz definicije *izbjegavajućih vjerojatnosti* (2.18), a kao direktnu posljedicu dobivamo jedan vrlo elegantan kriterij pozitivne povratnosti.

Teorem 2.5.8 (Kacov teorem). *Ako je X ψ-ireducibilan i sadrži atom $\alpha \in \mathcal{B}^+(S)$, tada je X pozitivno povratan ako i samo ako $E_\alpha(\tau_\alpha) < \infty$ te ako je π invarijantna vjerojatnosna mjera za X, onda*

$$\pi(\alpha) = (E_\alpha[\tau_\alpha])^{-1} \tag{2.43}$$

Dokaz. Ako je $E_\alpha(\tau_\alpha) < \infty$, onda je $\mathrm{L}(\alpha,\alpha) = 1$ pa je X povratan. Iz strukture od π u (2.18) vidi se da je π konačna pa je onda X i pozitivno-povratan.

Obratno, ako pretpostavimo da je X pozitivno-povratan, iz strukture od π vidimo da je $E_\alpha(\tau_\alpha) < \infty$.

Konačno, zbog jedinstvenosti invarijatne mjere svedene na vjerojatnosnu imamo:

$$\pi(A) = \frac{\nu_\alpha^\circ(\alpha)}{\nu_\alpha^\circ(X)} = \frac{U_\alpha(\alpha,\alpha)}{U_\alpha(\alpha,X)} = \frac{1}{E_\alpha[\tau_\alpha]}$$

$\square$

Primjer 2.5.9. *Vratimo se na Markovljev lanac X iz Primjera 2.4.13.*
Za $k \in \mathbb{N}$ *definiramo* $S_k = Z_1 + ... + Z_k$ *te*

$$p_k = \mathbb{E}[\prod_{i=1}^{k} r(S_k)]. \tag{2.44}$$

Tada je $\mathbb{P}_\alpha(\tau_\alpha > k) = p_k$ *i* $\mathbb{E}_\alpha[f(X_1, ..., X_k)\mathbb{I}_{\{\tau_\alpha \geq k\}}] = \mathbb{E}[r(S_1)...r(S_{k-1})f(S_1, ..., S_k))]$.

Sada ćemo opisati tzv. *regularnost* - još jedan kocept pozitivne povratnosti.

Definicija 2.5.10. *Nek je X* ψ*-ireducibilan. Tada ćemo za skup* $C \in \mathcal{B}(S)$ *reći da je* regularan *ako*

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\tau_B] < \infty, \qquad B \in \mathcal{B}^+(S). \tag{2.45}$$

Za Markovljev lanac X kažemo da je regularan *ako se skup stanja X može pokriti s prebrojivo mnogo regularnih skupova.*

Primijetimo kako definicija nije operativna: za utvrditi regularnost trebali bismo prvo razmotriti vremena pogađanja za sve skupove iz $\mathcal{B}^+(S)$. Međutim, ako postoji atom, tada je dovoljno samo utvrditi vrijeme prvog pogađanja atoma:

Teorem 2.5.11. *Pretpostavimo da postoji dostižan atom* $\alpha \in \mathcal{B}^+(S)$.

(i) Ako je X pozitivno-povratan, tada postoji dekompozicija

$$X = M \cup N \tag{2.46}$$

gdje je skup M poptun i apsorbirajući, a lanac X restringiran na M je regularan.

(ii) X je regularan ako i samo ako

$$\mathbb{E}_x[\tau_\alpha] < \infty \tag{2.47}$$

za sve $x \in M$.

Dokaz. Neka je

$$M := \{x \in S : \mathbb{E}_x[\tau_\alpha] < \infty\};$$

Očito je M apsorbirajući. Budući da je po pretpostavci X pozitivno-povratan, slijedi[2] da je $\mathbb{E}_\alpha[\tau_\alpha] < \infty$ tj. $\alpha \subseteq M$. Stoga je po propoziciji 2.3.6 skup M poptun.

Neka je sada $B \in \mathcal{B}^+(S)$ t.d. $B \subseteq \alpha^C$. Tada za $\pi - g.s.\ y \in B$ imamo[3] $\mathbb{E}_y[\tau_B] < \infty$. Zbog ψ-ireducibilnosti postoje neki y i neki n t.d. ${}_BP^n(y, \alpha) > 0$. Tada iz

$$\mathbb{E}_y[\tau_B] \geq {}_BP^n(y, \alpha)\mathbb{E}_\alpha[\tau_B]$$

slijedi da je $\mathbb{E}_\alpha[\tau_B] < \infty$.

Sada za $n \in \mathbb{N}$ definiramo:

$$M_n := \{y : \mathbb{E}_y[\tau_\alpha] \leq n\}. \tag{2.48}$$

Budući da za sve x i za sve $B \in \mathcal{B}^+(S)$ vrijedi

$$\mathbb{E}_x[\tau_B] \leq \mathbb{E}_x[\tau_\alpha] + \mathbb{E}_\alpha[\tau_B] \tag{2.49}$$

slijedi da je M_n regularan, a kako je $M := \cup_n M_n$ pokrivač za M, dobivamo da je X restringiran na prostor stanja M regularan čime smo dokazali (i).

Pretpostavimo $\mathbb{E}_x[\tau_\alpha] < \infty$ za sve $x \in M$. Tada u dokazu dijela (i) je $X = M$ pa dobivamo da je X regularan. Obrnuta tvrdnja očito vrijedi. □

2.6 Ergodičnost

U ovom dijelu, nakon što smo uveli koncept pozitivne-povratnosti i invarijatne vjerojatnosne mjere π za Markovljeve lance s atomom, pokušat ćemo razmotriti kada i kako n-konačne prijelazne vjerojatnosti konvergiraju prema π, odnosno proučavat ćemo granično ponašanje bez ikakvih topoloških pretpostavki. Na početku napominjemo kako ćemo ovdje mnoge dokaze izostaviti ili dati skicu dokaza zbog tehničkih zahtjevnosti, a zaintersirane čitatelje upućejemo na [2, str. 313-530 str.].

Ako nas zanima vrijedi li neko svojstvo za Markovljev lanac s atomom na općenitom skupu stanja, već smo pokazali da je najčešće dovoljno to svojstvo provjeriti samo na atomu. Taj zaključak potvrdit ćemo i ovom potpoglavlju te stoga započinjemo s definicijom ergodičnosti atoma.

Definicija 2.6.1. *Neka je X pozitivno povratan i Harrisov. Za atom α reći ćemo da je* ergodičan *ako zadovoljava:*

$$\lim_{n\to\infty} | P^n(\alpha, \alpha) - \pi(\alpha) | = 0 \tag{2.50}$$

[2] pogledati u [2, str. 248-249, Teorem 10.4.10.(ii)]

[3] za detaljan raspis pogledati [2, str. 261]

Propozicija 2.6.2. *Neka je Φ pozitivno-povratan, aperiodičan Markovljev lanac. Tada je svaki atom $\alpha \in \mathcal{B}^+(S)$ ergodičan.*

Ideja je u nastavku pokazazti da, u slučaju kada lanac X ima ergodičan atom, tada na cijelom prostoru stanja imamo konvergenciju poput one u (2.50). U tu svrhu trebat će nam nekoliko pomoćnih definicija i tvrdnji.

Definicija 2.6.3. *Ako je μ mjera s predznakom na $\mathcal{B}(S)$ tada njezinu* totalnu varijaciju $||\mu||$ *definiramo sa:*

$$||\mu|| := \sup_{f\,:\,||f||\leq 1} |\mu(f)| = \sup_{A\in\mathcal{B}(S)} \mu(A) - \inf_{A\in\mathcal{B}(S)} \mu(A). \tag{2.51}$$

Također, radi lakše analize, za bilo koji skup $B \in \mathcal{B}$, atom α i stanje $x \in S$ možemo napraviti dekompoziciju događaja $\{X_n \in B\}$ preko vremena prvog i zadnjeg posjeta atomu α:

$$P^n(x, B) = {}_\alpha P^n(x, B) + \sum_{j=1}^{n-1} \Big[\sum_{k=1}^{j} {}_\alpha P^k(x, \alpha) P^{j-k}(\alpha, \alpha) \Big] {}_\alpha P^{n-j}(\alpha, B). \tag{2.52}$$

Nadalje, ako je λ neka početna distribucija, a f ograničena funkcija (u smislu Definicije 2.6.3) uvodimo sljedeće oznake:

$$a_\alpha(n) := P_\lambda(\tau_\alpha = n) \tag{2.53}$$

$$t_f(n) = \int {}_\alpha P^n(\alpha, dy) f(y) = \mathbb{E}_\alpha[f(X_n)\mathbb{I}_{\{\tau_\alpha \geq n\}}] \tag{2.54}$$

$$u(n) := P_\alpha(X_n = \alpha) \tag{2.55}$$

Prije nego što iskažemo sljedeći teorem, podsjetimo se da za općenite nizove $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ možemo definirati njihovu konvoluciju $a * b$ sa $(a * b)(n) = \sum_0^n a_j b_{n-j}$ te dokažimo jednu pomoću lemu:

Lema 2.6.4. *Neka su $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ dva nenegativna niza takva da* $\lim_n(b_n) = b < \infty$ *i* $\sum a_n < \infty$. *Tada postoji i konačan je* $\lim_n(a * b)(n)$.

Dokaz. Dodefinirajmo $(b_n)_n$ sa $b_n := 0$ za $n < 0$. Po teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi:

$$\lim_n (a * b)(n) = \sum_{j=0}^{\infty} a(j) b(n - j) = b \sum_n a_n < \infty \tag{2.56}$$

□

Teorem 2.6.5. *Pretpostavimo da X sadrži dostižan atom α te da je pozitivno-povratan Harrisov s invarijantnom vjerojatnosnom mjerom π. Tada za svaku vjerojatnosnu mjeru λ i $f \geq 0$ vrijedi:*

$$| \mathbb{E}_\lambda[f(X_n)] - \mathbb{E}_\alpha[f(X_n)]| \leq \mathbb{E}_\lambda[f(X_n)\mathbb{I}_{\{\tau_A \geq n\}}] + |a_\lambda * u - u| * t_f(n) \tag{2.57}$$

$$| \mathbb{E}_\lambda[f(X_n)] - \mathbb{E}_\pi[f(X_n)]| \leq \mathbb{E}_\lambda[f(X_n)\mathbb{I}_{\{\tau_A \geq n\}}] + |a_\lambda * u - u| * t_f(n) + \pi(\alpha) \sum_{j=n+1}^{\infty} t_f(j) \tag{2.58}$$

Prethodni je teorem vrlo koristan u tehničkom smislu jer nam dekompozicija u (2.58) točno govori što je potrebno za dokazivanje graničnih rezultata u slučaju kada postoji atom.

Teorem 2.6.6. *Ako je X pozitivno povratan Harrisov s ergodičnim atomom α, tada za bilo koju početnu mjeru λ vrijedi*

$$\| \int \lambda(dx)P^n(x, \cdot) - \pi \| \to 0, \qquad n \to \infty \tag{2.59}$$

Dokaz. Po definiciji mjere totalne varijacije (2.51) imamo:

$$\| \int \lambda(dx)P^n(x, \cdot) - \pi \| = \sup_{|f| \leq 1} \left| \int \lambda(dx) \int P^n(x, dy)f(y) - \int \pi(dy)f(y) \right| \tag{2.60}$$

Sada neovisno o izboru funkcije f, tvrdnju dokazujemo pomoću prethodnoga teorema tako što ćemo pokazati da sva tri člana s desne strane jednakosti (2.58) konvergiraju prema nuli.

Budući da je $|f| \leq 1$, treći član iz (2.58) je ograničen sa:

$$\pi(\alpha) = \sum_{n+1}^{\infty} t_1(j) \to 0 \qquad n \to \infty \tag{2.61}$$

što je rep konačne sume $\pi(X) = \pi(\alpha) = \sum_1^\infty t_1(j)$. Za drugi član imamo

$$|a_\lambda * u - \pi(\alpha)| * t_1(n) \to 0 \qquad n \to \infty \tag{2.62}$$

gdje smo iskoristili ergodičnost od α, konačnost sume $\sum_1^\infty t_1(j)$ te na poslijetku primijenili Lemu 2.6.4 Konačno, zbog $|f| \leq 1$ za treći član imamo

$$\mathbb{E}_\lambda[f(X_n)\mathbb{I}_{\{\tau_\alpha \geq n\}}] \leq \mathbb{P}_\lambda(\tau_\alpha \geq n) \tag{2.63}$$

što također teži prema nuli kada $n \to \infty$ prema teoremu o monotonoj konvergenciji zbog toga što je X Harrisov i $P_x(\tau_\alpha < \infty) = 1$ za svaki x. Primijetimo da smo konvergenciju za sve članove pokazali neovisno o odabiru funkcije f pa je time dokaz gotov. □

Sada želimo proširiti svojstvo iz Tereoma 2.6.6 na način da maknemo ograničenje $|f| \leq 1$ i promatramo pod kojim uvjetima postoji limes

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}_x[f(X_k)] = \int f d(\pi) \tag{2.64}$$

za bilo koju $f : S \to [1, \infty)$ i početno stanje lanca x.

Za početak definirajmo *regularnu mjeru* kao bilo koju mjeru μ na $\mathcal{B}(S)$ koja zadovoljava da je $\mathbb{E}_\mu[\tau_B] < \infty$ za sve $B \in \mathcal{B}^+(S)$.

Nadalje, za bilo koju mjeru s predznakom ν definiramo njenu f -normu:

$$\|\nu\|_f := \sup_{g:|g|\leq f} |\nu(g)| \tag{2.65}$$

Sada možemo definirati *f-ergodičnost* i *f-regularne skupove*.

Definicija 2.6.7. *Neka je $f : S \to [1, \infty)$. Za Markovljev lanac X kažemo da je f-ergodičan ako vrijedi:*

(*a*) *X je pozitivno-povratan Harrisov s invarijantnom vjerojatnosnom mjerom π.*
(*b*) *Očekivanje $\pi(f) := \int \pi(dx)f(x)$ je konačno.*
(*c*) *Za bilo koju početnu točku lanca vrijedi:*

$$\lim_{k\to\infty} \|P^k(x, \cdot) - \pi\|_f = 0 \tag{2.66}$$

Definicija 2.6.8. *Neka je $f : S \to [1, \infty)$ izmjeriva funkcija. Za skup $C \in \mathcal{B}(S)$ kažemo da je f-*regularan *ako za sve $B \in \mathcal{B}^+(S)$ vrijedi*

$$\sup_{x\in C} \mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=0}^{\tau_B-1} f(X_k)\Big] < \infty. \tag{2.67}$$

*Za mjeru λ kažemo da je f-*regularna *ako za sve $B \in \mathcal{B}^+(S)$ vrijedi:*

$$\mathbb{E}_\lambda\Big[\sum_{k=0}^{\tau_B-1} f(X_k)\Big] < \infty. \tag{2.68}$$

*Za Markovljev lanac X kažemo da je f-*regularan *ako za njega postoji prebrojiv pokrivač f-regularnih skupova.*

Kako bi smo pokazali najvažniji rezultat o f-ergodičnosti Markovljevih lanaca s atomom, najprije navodimo sljedeću propoziciju.

Propozicija 2.6.9. *Pretpostavimo da je X pozitivno povratan te da postoji atom $\alpha \in \mathcal{B}^+(S)$. Tada postoji rastući niz $D_f(n)$ f-regularnih skupova, a skup $D_f := \bigcup_n D_f(n)$ je poptun i apsorbirajući.*

Teorem 2.6.10. *Pretostavimo da je X pozitivno-povratan Harrisov s atomom $\alpha \in \mathcal{B}^+(S)$. Tada vrijedi:*

(i) Ako je $\pi(f) < \infty$, tada je skup D_f svih f-regularnih stanja aposrbirajuć i potpun te za sve $x \in D_f$ vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} \|P^k(x,\cdot) - \pi\|_f = 0 \tag{2.69}$$

(ii) Ako je X f-regularan, tada je i f-ergodičan.

Dokaz. Uočimo da je zbog Propozicije 2.6.9 dovoljno dokazati da $\lim_{k\to\infty} \|P^k(x,\cdot) - \pi\| = 0$ za sve $x \in S_f$. Sada za bilo koju funkciju g takvu da je $|g| \leq f$ iz Teorema 2.6.5 sijedi:

$$\begin{aligned} |\,\mathbb{E}_\lambda[g(X_n)] - \mathbb{E}_\pi[g(X_n)]| \leq & \int \lambda(dx) \int {}_\alpha P^n(x,dy) f(y) \\ & + |a_\lambda * u - \pi(\alpha)| * t_f(n) + \pi(\alpha) \sum_{j=n+1}^{\infty} t_f(j) \end{aligned}$$

Prvi član teži u nulu jer zbog f-regularnosti od x slijedi da je $\mathbb{E}_\alpha[\sum_{n=1}^{\tau_\alpha} f(X_n)] < \infty$. Treći član teži u nulu zbog $\sum_{j=1}^{\infty} t_f(j) = \mathbb{E}_\alpha[\sum_{n=1}^{\tau_\alpha} f(X_n)] = \pi(f)/\pi(\alpha) < \infty$, a budući da je α ergodičan drugi član također teži u nulu po Lemi 2.6.4.

□

Primjer 2.6.11. *Promatramo slučajnu šetnju X na $\mathbb{R}^+$ gdje je Γ ponovno distribucija nezavisnih i jednakodistribuiranih varijabli pomaka W_i. Ako pretpostavimo da W_i s pozitivnom vjerojatnošću poprima negativne vrijednosti, u Primjeru 2.4.3 pokazali smo da je u tom slučaju $\{0\}$ dostižan atom pa je lanac X povratan. Nadalje ako pretpostavimo da W_i ima očekivanje $\beta < 0$ te konačan $(k+1)$-ti moment, može se pokazati da je tada X pozitivno-povratan i f-regularan za funkciju $f(x) := |x|^k$ te da u tom slučaju X sadrži stacionarnu mjeru π s konačnim momentima reda k. Nadalje, za $f_k(x) = x + 1$ i svaku početnu mjeru λ koja zadovoljava $\int \lambda(dx) x^{k+1} < \infty$ tada vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(dx)\, \|P^n(x,\cdot) - \pi\|_{f_k} = 0 \tag{2.70}$$

Za kraj donosimo svojevrstan analogon Teorema 1.0.32 za Markovljeve lance na općenitom skupu stanja.

Teorem 2.6.12. *Pretpostavimo da Markovljev lanac X ima invarjantnu vjerojatnosnu mjeru. Tada je X pozitivno povratan i Harrisov ako i samo ako za sve $f \in L_1(S, \mathcal{B}(S), \pi)$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k) = \pi(f), \qquad (g.s.) \tag{2.71}$$

Bibliografija

[1] Randal Douc, Eric Moulines, Pierre Priouret i Philippe Soulier, *Markov chains*, Springer, 2018.

[2] Sean P Meyn i Richard L Tweedie, *Markov chains and stochastic stability*, Springer Science & Business Media, 2012.

[3] Gareth O Roberts i Jeffrey S Rosenthal, *General state space Markov chains and MCMC algorithms*, Probability surveys **1** (2004), 20–71.

[4] B. Sambolec, *Programiranje temeljeno na Markovljevim lancima*, 2014.

[5] Z. Vondraček, *Markovljevi lanci, predavanja*, 2008.

Sažetak

U prvom poglavlju promatramo Markovljeve lance s diskretnim vremenom i diskretnim skupom stanja. Prisjećamo se pojmova kao što su *vremena zaustavljanja*, *povratnost*, *prolaznost*, *aperiodičnost* itd. U drugome poglavlju i dalje promatramo vremenski diskretne Markovljeve lance, ali na općenitom skupu stanja s naglaskom na Markovljeve lance s atomom. Započinjemo s definicijom Markovljevog lanca na općenitom skupu stanja te uvodimo pojam prijelazne jezgre. Zatim definiramo vremena zaustavljanja te pokazujemo da mnogi važni rezultati, poput npr. jakog Markovljevog svojstva, vrijede i na općenitom skupu stanja. Zatim uvodimo pojam tzv. ψ-ireducibilnosti nakon čega definiramo središnji pojam ovog rada - *atom*. Nadalje uvodimo pojmove prolaznosti, povratnosti i aperiodičnosti, pokazujemo da se kod lanaca s atomom ta svojstva definiraju i provjeravaju slično kao u diskretnom slučaju te navedeno pokazujemo na nekim jednostavnijim primjerima kao što je slučajna šetnja na polupravcu. Zatim uvodimo pojmove invarijantne mjere i pozitivne povratnosti te u Kacovom teoremu pokazujemo da su kod lanaca s atomom nužni i dovoljni uvjeti za postojanje invarijantne vjerojatnosne mjere isti kao i u diskretnom slučaju. U zadnjem dijelu definiramo ergodične atome i ergodične Markovljeve lance te pokazujemo pod kojim uvjetima vrijede navedena svojstva.

Summary

In the first chapter we consider discrete-time Markov chains on countable state space. We ldiscuss several properties like recurrence, transience, periodicity etc. In the second chapter we consider discrete-time Markov chains, but state space is now general. We start from definitions of Markov chains on general state space and transition probability kernel. After that we define stopping times and show that many important results, such as strong Markov property, are also valid on a general state space. Then we introduce the notion of ψ-irreducibility and define the central notion of this work - the atom. Furthermore, we introduce the concepts of transience, recurrence and aperiodicity. We show that, if we have an atomic chain, these properties are defined and checked similarly as on discrete state space. We give a few simple examples like the random walk on a half line. Then we introduce the concepts of invariant measure and positive recurrence for atomic chains and in Kac's Theorem we show that the necessary and sufficient conditions for the existence of an invariant probability measure are the same as in the discrete state space. In the last part we define ergodicity and f-ergodicity and consider the conditions needed for chain with atom to have those properties.

Životopis

Rođen sam 16.05.1996. godine u Zagrebu. Odrastao sam u Kutjevu gdje sam 2011. završio osnovnu školu te sam iste godine upisao opći smjer Gimnazije u Požegi. Gimnaziju završam 2015. godine nakon čega se upisujem na Preddiplomski studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija 2018.godine upisujem diplomski studij Financijske i poslovne matematike. Uz studij sam obavljao razne studentske poslove, najduže u Konzumu (2018.-2021.), a od ožujka 2021. godine kao student radim u Erste banci u Službi za integrirano upravljanje rizicima.