Bourgainov teorem o simpleksu

Predojević, Bruno

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Bruno Predojević

BOURGAINOV TEOREM O SIMPLEKSU

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, rujan 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

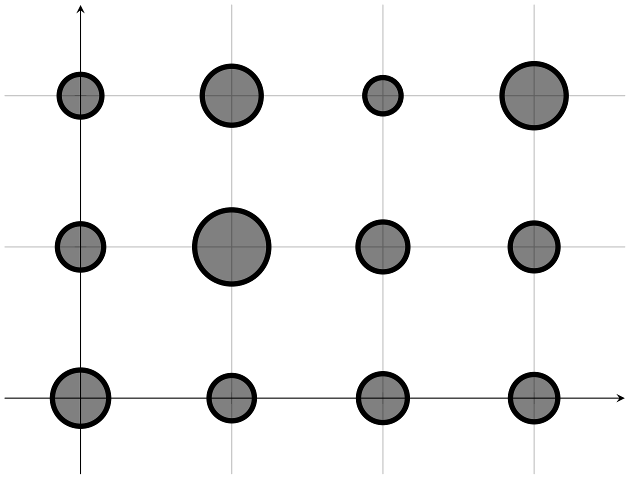
U ovoj radnji bavimo se razvijanjem tehnika potrebnih za dokaz Bourgainovog teorema o simpleksu. Moglo bi se reći da ovaj rezultat pripada takozvanoj „kombinatorici euklidskih prostora”. Naime, riječ je o klasi rezultata koji, za danu konfiguraciju točaka, traže odgovor na pitanje kada se dilatati te konfiguracije nalaze u nekom dovoljno velikom izmjerivom podskupu promatranog euklidskog prostora.

U Bourgainovom teoremu konfiguracije točaka koje se promatraju su takozvani n-dimenzionalni simpleksi u prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, dok za „dovoljno velike” izmjerive skupove promatramo izmjerive skupove strogo pozitivne gornje Banachove gustoće. Pokazat ćemo da za proizvoljan n-simpleks Δ u $\mathbb{R}^{n+1}$ i proizvoljan $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ pozitivne gornje Banachove gustoće, postoji skalar $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ takav da za sve skalare $\lambda \geq \lambda_0$, skup A sadrži skup vrhova neke izometrične kopije skaliranog simpleksa $\lambda\Delta$. Tokom dokaza bit će jasno zašto moramo n-simplekse uložiti u prostor za jedan veće dimenzije, međutim za $n \geq 2$ još uvijek je otvoreno pitanje je li to zaista i nužno.

Čak za $n = 1$, ova tvrdnja nije nimalo trivijalna, jer 1-simpleksi u $\mathbb{R}^2$ su dužine, a skupovi A mogu biti poprilično „neregularni”. Na primjer skup A možemo intuitivno zamišljati kao uniju „malenih kuglica” oko točaka s cjelobrojnim koordinatama na $\mathbb{R}^2$; pogledajte sliku 0.1. Međutim, ne moramo nužno promatrati „malene kuglice”, već oko svake cjelobrojne točke možemo promatrati i „puno nepravilnije malene skupove”. Teorem u ovom slučaju tvrdi da postoji realan broj λ_0 takav da za svaki realan broj λ veći od njega postoje dvije točke skupa A udaljene točno za λ.

Spomenuti poseban slučaj su neovisno dokazali Furstenberg, Katznelson i Weiss [5] te Falconer i Marstrand [3]. Njihovi dokazi su poprilično kompleksni i zahtijevaju dobro poznavanje ergodske teorije, odnosno geometrijske teorije mjere. Bourgain 1986. godine, na svega 3 stranice u članku [1], daje vrlo sažeti dokaz općenitijeg teorema služeći se tehnikama iz elementarne Fourierove analize. Bourgainov pristup pokazao se izuzetno pogodnim za proučavanje problema ovog tipa te je vodio brojnim poopćenjima.

Dokaz koji predstavljamo u ovom radu, modifikacija je dokaza iz članka [6] koji se nastavlja na rad iz članka [2]. Prije samog dokaza ponavljamo neke poznate rezultate. Krećemo s ponavljanjem osnova funkcionalne analize i teorije mjere, budući da te grane čine temelj suvremene matematičke analize te su nužne za razvoj tehnika koje koristimo.



Slika 0.1: Jedan mogući izgled skupa A.

Nakon toga dajemo pregled osnovnih ideja i činjenica iz Fourierove analize te potom uvodimo standardne n-dimenzionalne gaussovske funkcije te dokazujemo neka njihova osnovna svojstva.

U drugom poglavlju krećemo s preciznom formulacijom teorema te iskazujemo takozvanu kompaktnu verziju teorema te pokazujemo da, ako nju uspijemo dokazati, automatski smo dokazali željeni teorem. Prijelaz na kompaktnu verziju je izvanredan Bourgainov uvid koji mu je omogućio uporabu tehnika Fourierove analize. Potom uvodimo sferične mjere i brojeće forme. Pokazat ćemo da, ukoliko pokažemo da je brojeća forma određenog izmjerivog skupa strogo pozitivna, onda vrijedi tvrdnja kompaktne verzije teorema.

Treće poglavlje posvećujemo dokazu kompaktne verzije. Započinjemo još jednim iznimno važnim Bourgainovim uvidom: o dekompoziciji ocjene brojeće forme na 3 dijela: strukturirani dio, dio-grešku i uniformni dio. Svakom od tih dijelova posvećujemo posebni odjeljak te, na kraju, kombiniramo sve tri ocijene i dovršavamo dokaz.

Poglavlje 1

Preliminarni rezultati

1.1 Osnove funkcionalne analize

U ovom odjeljku definiramo osnovne pojmove te se bavimo osnovnim rezultatima funkcionalne analize. Kroz čitav odjeljak fiksiramo vektorski prostor V nad poljem skalara $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, koji je tipično beskonačnodimenzionalan, budući da su zanimljivi rezultati u konačnodimenzionalnom slučaju često trivijalni. Izostavljene dokaze je moguće naći u [7].

Definicija 1.1.1. *Preslikavanje* $\|\cdot\| \colon V \to [0, +\infty\rangle$ *zovemo norma, ukoliko je zadovoljeno sljedeće.*

(N1) *Za proizvoljan* $x \in V$ *vrijedi ekvivalencija* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(N2) *Za proizvoljan* $x \in V$ *i proizvoljan* $\lambda \in \mathbb{F}$ *vrijedi* $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$.

(N3) *Za proizvoljne* $x, y \in V$ *vrijedi „nejednakost trokuta", odnosno*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

Uređeni par $(V, \|\cdot\|)$ *nazivamo normiranim prostorom.*

Postojanje norme na vektorskom prostoru omogućava da preko nje vrlo lako dođemo do topologije na V u kojoj su operacije zbrajanja i množenja skalarom na V neprekidne. Za naše potrebe, postojanje norme nam omogućava da govorimo o konvergentnim i Cauchyjevim nizovima te o neprekidnim funkcijama. Štoviše, normom uvijek možemo inducirati i metriku pa možemo govoriti i o uniformno neprekidnim funkcijama. Lako je provjeriti da je funkcija apsolutna vrijednost $|\cdot| \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ norma na $\mathbb{R}$ pa sljedeće definicije direktno poopćuju definicije iz teorije realnih funkcija jedne realne varijable.

Definicija 1.1.2. *Neka su $(V, \|\cdot\|_V)$ i $(W, \|\cdot\|_W)$ proizvoljni normirani prostori. Za funkciju $f\colon V \to W$ kažemo da je neprekidna u točki $x \in X$ ukoliko vrijedi*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\,,\ \forall y \in V\,,\ \ \|x - y\|_V < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_W < \varepsilon\,.$$

Ukoliko je f neprekidna u svakoj točki $x \in V$, kažemo da je f neprekidna.

Definicija 1.1.3. *Neka su $(V, \|\cdot\|_V)$ i $(W, \|\cdot\|_W)$ proizvoljni normirani prostori. Za funkciju $f\colon V \to W$ kažemo da je uniformno neprekidna ukoliko vrijedi*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\,,\ \forall x, y \in V\,,\ \ \|x - y\|_V < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_W < \varepsilon\,.$$

Propozicija 1.1.4. *Neka su $(V, \|\cdot\|_V)$ i $(W, \|\cdot\|_W)$ proizvoljni normirani prostori te neka je $A\colon V \to W$ linearan operator. Tada je ekvivalentno:*

(1.) *A je neprekidan,*

(2.) *A je neprekidan u $0 \in V$,*

(3.) *A je ograničen, odnosno, postoji $C > 0$ takav da za svaki $x \in V$ vrijedi*

$$\|A(x)\|_W \leq C\|x\|_V\,.$$

Ispostavlja se da skup svih neprekidnih linearnih operatora sa V u W uz operacije zadane po točkama čini vektorski prostor. Nadalje, ako je $\|\cdot\|_V$ norma na V, a $\|\cdot\|_W$ norma na W, na tom operatorskom prostoru možemo zadati normu kao

$$\|A\|_{op} := \sup\{\|A(x)\|_W \mid x \in V, \|x\| \leq 1\} = \inf\{C > 0 \mid \|A(x)\|_W \leq C\|x\|_V, \forall x \in V\}\,.$$

Definicija 1.1.5. *Preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{F}$ koje je linearno u prvom argumentu i antilinearno u drugom argumentu zovemo skalarnim produktom ako je zadovoljeno sljedeće.*

(S1) *Za proizvoljan $x \in V$ vrijedi da je $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$ i $\langle x, x\rangle \geq 0$.*

(S2) *Za proizvoljan $x \in V$ vrijedi ekvivalencija*

$$\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0\,.$$

(S3) *Za proizvoljne $x, y \in V$ vrijedi $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.*

Uređeni par $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazivamo unitarnim prostorom.

Propozicija 1.1.6 (Cauchy-Schwarzova nejednakost)**.** *Neka je V unitaran prostor sa skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Tada za proizvoljne $x, y \in V$ vrijedi*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle\,.$$

Pritom jednakost vrijedi ako i samo ako su x i y linearno zavisni

Na unitarnom prostoru $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ definiramo preslikavanje $\|\cdot\| \colon V \to [0, +\infty\rangle$ zadano sa $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Koristeći definiciju skalarnog produkta i Cauchy-Schwarzovu nejednakost, jednostavno se pokazuje da je $\|\cdot\|$ norma na V, za koju kažemo da je inducirana skalarnim produktom.

Osnovni primjer unitarnog prostora je vektorski prostor uređenih n-torki realnih brojeva $\mathbb{R}^n$ na kojem je skalarni produkt zadan kao

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,.$$

Pritom su $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ proizvoljni elementi iz $\mathbb{R}^n$. Ovaj skalarni produkt kraće označavamo kao $x \cdot y$, a pripadnu induciranu normu sa $|\cdot|$.

Definicija 1.1.7. *Za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na normiranom prostoru V kažemo da je konvergentan ako postoji $x \in V$ takav da vrijedi*

$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists n \in \mathbb{N}\,,\ \forall m \in \mathbb{N}\,,\ \ m \geq n \Rightarrow \|x - x_m\| < \varepsilon\,.$$

Kažemo da je x limes niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, odnosno da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k x te pišemo $x_n \to x$ ili $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Definicija 1.1.8. *Za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na normiranom prostoru V kažemo da je Cauchyjev ako vrijedi*

$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists n \in \mathbb{N}\,,\ \forall m_1, m_2 \in \mathbb{N}\,,\ \ m_1, m_2 \geq n \Rightarrow \|x_{m_1} - x_{m_2}\| < \varepsilon\,.$$

U normiranim prostorima vrijedi da je svaki konvergentan niz Cauchyjev, dok obrat ne vrijedi općenito. Ukoliko u normiranom prostoru V vrijedi da je svaki Cauchyjev niz konvergentan, kažemo da je V Banachov prostor. Ako je V još i unitaran, onda kažemo da je V Hilbertov prostor.

Definicija 1.1.9. *Neka V ima strukturu normiranog prostora. Za proizvoljan $x \in V$ i $r > 0$ definiramo otvorenu kuglu radijusa r sa središtem u x kao skup*

$$\mathrm{K}(x, r) := \{y \in V \mid \|x - y\| < r\}\,.$$

Definicija 1.1.10. *Neka V ima strukturu normiranog prostora. Za proizvoljan $x \in V$ i $r > 0$ definiramo zatvorenu kuglu radijusa r sa središtem u x kao skup*

$$\overline{\mathrm{K}}(x, r) := \{y \in V \mid \|x - y\| \leq r\} .$$

Definicija 1.1.11. *Neka V ima strukturu normiranog prostora. Za podskup $U \subseteq V$ kažemo da je otvoren, ako za svaki $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je*

$$\mathrm{K}(x, r) \subseteq U .$$

1.2 Neki rezultati teorije mjere

U ovom odjeljku definiramo osnovne pojmove iz elementarne teorije mjere koje koristimo u daljnjem tekstu. Mnoge rezultate navodimo bez dokaza, budući da se zasnivaju na dokazima i konstrukcijama koji nam neće biti od direktne koristi u dokazu Bourgainovog teorema, no moguće ih je potražiti u [4].

Polazni zadatak teorije mjere je formalizirati intuitivne pojmove duljine, volumena i površine te njihovih višedimenzionalnih analogona za podskupove nekog zadanog skupa X. Prvi veliki problem takve konstrukcije je odrediti kojim skupovima uopće možemo „mjeriti" volumen, jer ispostavlja se da općenito ne postoji konzistentan način da se to napravi za sve podskupove od X. Dapače, to sigurno nije moguće za $X = \mathbb{R}^n$. Stoga je potrebno definirati familiju podskupova od X koje ćemo moći „mjeriti".

Definicija 1.2.1. *Neka je X proizvoljan neprazan skup. Familiju $\mathcal{F}$ podskupova od X, nazivamo σ-algebrom na X ako vrijedi sljedeće.*

(A1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$.

(A2) *Za proizvoljan $A \in \mathcal{F}$ vrijedi $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*

(A3) *Ako je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz skupova iz $\mathcal{F}$, onda je $\bigcup_{n\in N} A_n \in \mathcal{F}$. Uređeni par $(X, \mathcal{F})$ nazivamo izmjerivim prostorom.*

Iz definicije je jednostavno vidjeti da je presjek proizvoljnog broja σ-algebri na skupu X ponovno σ-algebra na X. Stoga za proizvoljnu familiju S podskupova od X presjek svih σ-algebri na X koje sadrže S zovemo σ-algebra generirana sa S i označavamo ju sa $\sigma(S)$.

Definicija 1.2.2. *Neka je $\mathcal{U}$ familija svih otvorenih skupova u $\mathbb{R}^n$. Tada σ-algebru $\sigma(\mathcal{U})$ zovemo Borelovom σ-algebrom na $\mathbb{R}^n$ i označavamo ju $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Definicija 1.2.3. *Neka su $(X_1, \mathcal{F}_1)$ i $(X_2, \mathcal{F}_2)$ proizvoljni izmjerivi prostori. Za funkciju $f : X_1 \to X_2$ kažemo da je izmjeriva u paru σ-algebri $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ ako za proizvoljan $A \in \mathcal{F}_2$ vrijedi*

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1 .$$

Ukoliko je iz konteksta jasno koje σ-algebre promatramo, reći ćemo samo da je f izmjeriva.

Napomena 1.2.4. *Ukoliko za $n, m \in \mathbb{N}$ proizvoljne promatramo funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ koja je neprekidna, jednostavno se pokaže da je f izmjeriva u paru odgovarajućih Borelovih σ-algebri.*

Definicija 1.2.5. *Neka je $(X, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Kažemo da je funkcija $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ mjera na $(X, \mathcal{F})$ ukoliko vrijedi sljedeće.*

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(M2) *Ako je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz skupova iz $\mathcal{F}$ takav da za sve $n, m \in \mathbb{N}$ međusobno različite imamo $A_n \cap A_m = \emptyset$, tada vrijedi*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) .$$

Uređenu trojku $(X, \mathcal{F}, \mu)$ zovemo prostor s mjerom.

Napomena 1.2.6. *Ako je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor s mjerom te je $\mathcal{S}(x)$ neko svojstvo koje za dani $x \in X$ ili vrijedi ili ne vrijedi, ali ne i oboje, tada kažemo da svojstvo X vrijedi gotovo svuda, odnosno kraće g.s., ako postoji skup $A \in \mathcal{F}$ takav da $\mathcal{S}(x)$ vrijedi za svaki $x \in A$ te je $\mu(X \setminus A) = 0$.*

Definicija 1.2.7. *Neka je μ proizvoljna mjera na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Promotrimo familiju skupova $\mathcal{S}$ definiranu sa*

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \mid \forall U \subseteq \mathbb{R}^n \text{otvoren}, U \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \mu(U \cap A) > 0\} .$$

Za skup $\cup\mathcal{S}$ kažemo da je nosač mjere μ i označavamo ga $\operatorname{supp}(\mu)$.

Napomena 1.2.8. *Primjetimo da nosač mjere možemo promatrati kao komplement najvećeg (u smislu inkluzije) otvorenog skupa mjere 0.*

Napomena 1.2.9. *U praksi, Borelova σ-algebra sadrži skupove koji su najčešće od interesa te sadrži sve skupove koje ćemo u nastavku teksta promatrati. Ona je pak sadržana u još široj σ-algebri koju nazivamo Lebesgueova σ-algebra, no njezina konstrukcija je tehnički značajno zahtjevnija. Međutim konstrukcija Lebesgueove σ-algebre na $\mathbb{R}^n$ ujedno* *je i konstrukcija jedne posebne mjere na* $\mathbb{R}^n$ *koju zovemo standardnom n-dimenzionalnom Lebesguevom mjerom na* $\mathbb{R}^n$ *te ju označavamo sa* λ*. Ističemo da za proizvoljan skup oblika* $\underbrace{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]}_{n}$*, gdje su* $a_i, b_i \in \mathbb{R}$*,* $a_i \leq b_i$*, za sve* $n \in \{1, 2, \ldots, n\}$*, vrijedi*

$$\lambda\Big(\underbrace{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]}_{n}\Big) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \,.$$

U daljenjem tekstu, kad god govorimo o $\mathbb{R}^n$ *u kontekstu teorije mjere, govorimo o prostoru mjere* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$*.*

Jednom kad smo formalizirali ideju mjere, vrlo je prirodno definirati integral izmjerive funkcije. Ispostavlja se da je ovaj pristup mnogo pogodniji od standardne definicije Riemannovog integrala preko gornjih i donjih Darbouxovih suma. Naime, tehnika koju ćemo sada opisati rezultira širom klasom integrabilnih funkcija te omogućava razmjerno jednostavne dokaze nekolicine važnih teorema o konvergenciji integrala.

Osnovna ideja je krenuti od indikatorskih funkcija. Za proizvoljan skup X te za neki njegov podskup A, definiramo indikatorsku funkciju od A kao $\mathbb{1}_A \colon X \to \{0, 1\}$ danu formulom

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Ako je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere, vrijedi da je $\mathbb{1}_A$ izmjeriva ako i samo ako je $A \in \mathcal{F}$. Integral najprije definiramo za izmjerive indikatorske funkcije kao

$$\int_X \mathbb{1}_A(x) \mathrm{d}\lambda(x) := \mu(A) \,.$$

Konačne linearne kombinacije indikatorskih funkcija nazivamo jednostavnim funkcijama. Za nenegativne izmjerive jednostavne funkcije proširimo definiciju integrala po linearnosti. Idući korak je definirati integral nenegativnih izmjerivih funkcija, što je moguće jer se svaka takva funkcija može aproksimirati rastućim nizom nenegativnih jednostavnih izmjerivih funkcija koji po točkama konvergira polaznoj funkciji. Konačno, proizvoljnu izmjerivu funkciju prikažemo kao razliku dvije nenegativne izmjerive funkcije te integral proširimo po linearnosti. Ovdje nismo naveli neke ključne suptilnosti u definicije integrala, no, za naše potrebe, dovoljno je znati da integral postoji, da ne ovisi o spomenutim prikazima funkcija, da je linearan i monoton, to jest da za proizvoljne izmjerive funkcije $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\forall x \in X \,,\ f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_X f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int_X g(x) \,\mathrm{d}\mu(x) \,,$$

te da zadovoljava nejednakost trokuta, odnosno za svaku izmjerivu funkciju $f\colon X \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\left|\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right| \leq \int_X |f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

Napomenimo još da nije svaka izmjeriva funkcija integrabilna te da je integrabilnost od f ekvivalentna integrabilnosti od $|f|$. Ukoliko promatramo $\mathbb{R}^n$ sa Borelovom ili Lebesgueovom σ-algebrom te standardnom n-dimenzionalnom Lebesgueovom mjerom, upravo definiran integral nazivamo Lebesgueovim integralom.

Teorem 1.2.10 (Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji)**.** *Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor s mjerom te neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz izmjerivih funkcija $X \to \mathbb{R}$ te je $g\colon X \to \mathbb{R}$ integrabilna izmjeriva funkcija takva da za svaki $n \in \mathbb{N}$ gotovo svuda vrijedi $|f_n| \leq g$. Ako je $f\colon X \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija za koju je gotovo svuda $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, tada je f integrabilna te je za svaki $n \in \mathbb{N}$ f_n integrabilna i vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

Teorem 1.2.11 (Fubinijev teorem)**.** *Promatramo prostor mjere $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ sa standardnom n-dimenzionalnom Lebesgueovom mjerom λ_n. Neka su m_1, m_2 proizvoljni prirodni brojevi za koje je $m_1 + m_2 = n$ te neka su $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m_1})$ i $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m_2})$ proizvoljni skupovi. Sa λ_{m_1} i λ_{m_2} označimo redom standardnu m_1-dimenzionalnu Lebesgueovu mjeru i standardnu m_2-dimenzionalnu Lebesgueovu mjeru. Ako je $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ izmjeriva ili je $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ integrabilna na $A \times B$ obzirom na mjeru λ_n, tada vrijedi*

$$\int_{A\times B} f(x)\mathrm{d}\lambda_n(x) = \int_A \left(\int_B f(x,y)\mathrm{d}\lambda_{m_2}(y) \right) \mathrm{d}\lambda_{m_1}(x) = \int_B \left(\int_A f(x,y)\mathrm{d}\lambda_{m_1}(x) \right) \mathrm{d}\lambda_{m_2}(y)\,.$$

Napomena 1.2.12. *Fubinijev teorem se obično iskazuje u puno većoj općenitosti, na proizvoljnim σ-konačnim prostorima s mjerom. Međutim, tada je potrebno uvesti pojmove produktne σ-algebre i produktne mjere.*

Propozicija 1.2.13. *Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere te neka je $f\colon X \to \mathbb{R}$ izmjeriva i nenegativna funkcija. Ako je $\int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x) > 0$, onda je $\mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) > 0$.*

Teorem 1.2.14. *Neka su $(X, \mathcal{F})$ i $(Y, \mathcal{G})$ izmjerivi prostori te neka je μ mjera na $(X, \mathcal{F})$. Neka je $f\colon X \to Y$ izmjeriva funkcija. Promatramo preslikavanje $\tilde{\mu}\colon \mathcal{G} \to [0, +\infty]$, $\tilde{\mu}(A) = \mu\left(f^{-1}(A)\right)$. Tada je $\tilde{\mu}$ mjera na $(Y, \mathcal{G})$ te za proizvoljnu izmjerivu funkciju $g\colon Y \to \mathbb{R}$ vrijedi da je integrabilna obzirom na mjeru $\tilde{\mu}$ ako i samo ako je funkcija $g \circ f$ integrabilna u odnosu na mjeru μ. U tom slučaju je*

$$\int_Y g(x)\mathrm{d}\tilde{\mu}(x) = \int_X (g \circ f)(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

Napomena 1.2.15. *Ukoliko je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ te je $\alpha \in \mathbb{R}$, onda sa αA označavamo skup*

$$\{\alpha a \mid a \in A\}.$$

Analogno za $h \in \mathbb{R}^n$ sa $h + A$ ili sa $A + h$ označavamo skup

$$\{a + h \mid a \in A\}.$$

Ako je još $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, onda vrijedi $\alpha A\,, h + A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Spomenimo još da je standardna n-dimenzionalna Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^n$ translacijski invarijantna, odnosno

$$\lambda(h + A) = \lambda(A).$$

Još vrijedi i

$$\lambda(\alpha A) = |\alpha|^n\, \lambda(A).$$

Definicija 1.2.16. *Neka je μ konačna mjera na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Za proizvoljni $h \in \mathbb{R}^n$ definiramo preslikavanje $\tau_h\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ sa*

$$\tau_h\mu(A) = \mu(A - h).$$

Preslikavanje $\tau_h\mu$ zovemo translacijom mjere μ za vektor h.

Propozicija 1.2.17. *Neka je μ konačna mjera na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Za proizvoljni $h \in \mathbb{R}^n$ vrijedi:*

(1.) *$\tau_h\mu$ je mjera na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$,*

(2.) *za svaku $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ izmjerivu vrijedi*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}\tau_h\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x + h)\mathrm{d}\mu(x),$$

(3.) $\operatorname{supp}(\tau_h\mu) = \operatorname{supp}(\mu) + h$.

Dokaz. (1.) Vrijedi

$$\tau_h\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset - h) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Ako je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u parovima disjunktnih skupova iz $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, onda vrijedi da je proizvoljan $x \in \mathbb{R}^n$ element skupa $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n - h$ ako i samo ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x = a_n - h$ za neki $a_n \in A_n$. Dakle,

$$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n - h \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\,,\ x \in A_n - h.$$

Zbog proizvoljnosti od x je onda pokazano

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Big(A_n - h\Big) = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) - h\,.$$

Pritom su obje strane gornje jednakosti dobro definirane jer je Borelova σ-algebra zatvorena na translacije. Konačno, imamo

$$\tau_h\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mu\Big(\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) - h\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n - h)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n - h) = \sum_{n=1}^{\infty}\tau_h\mu(A_n)\,.$$

Dakle, po definiciji je pokazano da je $\tau_h\mu$ mjera.

(2.) Promotrimo funkciju $\tau_h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tau_h(x) = x + h$. Elementarnim metodama se provjeri da je τ_h neprekidna funkcija pa je onda prema napomeni 1.2.4 i izmjeriva. Primjetimo da su sada zadovoljeni uvjeti teorema 1.2.14 te je za proizvoljan skup $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\tilde{\mu}(A) = \mu\left(\tau_h^{-1}(A)\right) = \mu(A - h) = \tau_h\mu(A)$$

pa onda imamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}\tau_h\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x + h)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

(3.) Za proizvoljan $x \in \operatorname{supp}(\tau_h\mu)$ postoji otvoren skup $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ takav da za sve otvorene $U \subseteq \mathbb{R}^n$ takve da $U \cap A \neq \emptyset$, vrijedi $\tau_h\mu(U \cap A) > 0 \iff \mu((U - h) \cap (A - h)) > 0$. Budući da se svaki otvoren skup može dobiti kao translacija otvorenog skupa, te je translacija Borelovog skupa ponovno Borelov skup, pokazali smo

$$x \in \operatorname{supp}(\tau_h\mu) \Leftrightarrow x - h \in \operatorname{supp}(\mu) \Leftrightarrow x \in \operatorname{supp}(\mu) + h\,.$$

Zbog proizvoljnosti od x vrijedi tvrdnja.

□

Definicija 1.2.18. *Sa* $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ *označavamo specijalnu ortogonalnu grupu koja je kao skup jednaka*

$$\left\{\mathcal{U} \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathcal{U}\mathcal{U}^T = \mathrm{I}, \det\mathcal{U} = 1\right\}.$$

Pritom $M_n(\mathbb{R})$ *označava skup svih realnih kvadratnih matrica reda n.*

Napomena 1.2.19. *Intuitivno,* $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ *predstavlja grupu svih linearnih rotacija prostora* $\mathbb{R}^n$*.*

Definicija 1.2.20. *Neka je μ konačna mjera na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Za proizvoljni $\mathcal{U} \in \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ definiramo preslikavanje $R_{\mathcal{U}}\mu \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ sa*

$$R_{\mathcal{U}}\mu(A) = \mu(\mathcal{U}^{-1}(A)) .$$

Preslikavanje $R_{\mathcal{U}}\mu$ zovemo rotacijom mjere μ za $\mathcal{U}$.

Propozicija 1.2.21. *Neka je μ konačna mjera na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Za proizvoljni $\mathcal{U} \in \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ vrijedi:*

(1.) *$R_{\mathcal{U}}\mu$ je mjera na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$,*

(2.) *za svaku $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ izmjerivu vrijedi*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathrm{d}R_{\mathcal{U}}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \mathcal{U})(x) \, \mathrm{d}\mu(x) ,$$

(3.) $\mathrm{supp}(R_{\mathcal{U}}\mu) = \{\mathcal{U}(A) \mid A \in \mathrm{supp}(\mu)\}$.

Napomena 1.2.22. *Dokaz propozicije 1.2.21 analogan je dokazu propozicije 1.2.17 te ga stoga izostavljamo.*

Definicija 1.2.23. *Neka je μ konačna mjera na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Za proizvoljan $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ definiramo preslikavanje $\mu_\alpha \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ sa*

$$\mu_\alpha(A) = \mu(\alpha^{-1} A) .$$

Preslikavanje μ_α zovemo dilatacija mjere μ s koeficijentom α ili mjera μ skalirana s faktorom α.

Propozicija 1.2.24. *Neka je μ konačna mjera na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Za proizvoljni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ vrijedi:*

(1.) *μ_α je mjera na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$,*

(2.) *za svaku $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ izmjerivu vrijedi*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathrm{d}\mu_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\alpha x) \, \mathrm{d}\mu(x) ,$$

(3.) $\mathrm{supp}(\mu_\alpha) = \alpha \, \mathrm{supp}(\mu)$.

Napomena 1.2.25. *Dokaz propozicije 1.2.24 analogan je dokazu propozicije 1.2.17 te ga stoga izostavljamo.*

Definicija 1.2.26. *Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ proizvoljan prostor s mjerom. Na skupu svih izmjerivih funkcija $X \to \mathbb{R}$ definiramo relaciju $\sim$ kao*

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ g.s.}$$

Napomena 1.2.27. *Relacija $\sim$ iz definicije 1.2.26 je relacija ekvivalencije.*

Definicija 1.2.28. *Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ proizvoljan prostor s mjerom. Za $p \in [1, \infty\rangle$ definiramo skup $L^p(X)$ koji se sastoji od svih klasa ekvivalencije $[f]$ po relaciji $\sim$ iz definicije 1.2.26 takvih da je za njihove reprezentante*

$$\|f\|_{L^p(X)} := \left(\int_X |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}\mu(x) < +\infty \, .$$

Definicija 1.2.29. *Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ proizvoljan prostor s mjerom. Definiramo skup $L^\infty(X)$ koji se sastoji od svih klasa ekvivalencije $[f]$ po relaciji $\sim$ iz definicije 1.2.26 takvih da je za njihove reprezentante*

$$\|f\|_{L^\infty(X)} := \inf\{c \in [0, +\infty] \mid |f| \leq c \ g.s.\} < +\infty \, .$$

Napomena 1.2.30. *Za proizvoljan $p \in [1, \infty]$ vrijedi da su prostori $L^p(X)$ iz definicija 1.2.28 i 1.2.29 vektorski prostori, gdje su zbrajanja i množenja skalarom definirana po reprezentantima, a zbrajanje i množenje skalarom reprezentanata je definirano po točkama. Nadalje, u obje definicije je preslikavanje $\|\cdot\|_{L^p(X)}$ norma na $L^p(X)$. Štoviše, prostor $L^p(X)$ je uz tu normu Banachov, a za $p = 2$ čak i Hilbertov, sa skalarnim produktom zadanim sa*

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \, .$$

U daljnjem tekstu ćemo, kao što je uobičajeno, pomalo neprecizno koristiti oznaku

$$f \in L^p(X) \, ,$$

a da pritom mislimo da je f reprezentant neke klase ekvivalencije po relaciji $\sim$ iz definicije 1.2.26 i da je ta klasa sadržana u $L^p(X)$.

1.3 Osnove Fourierove analize

Definicija 1.3.1. *Neka su f i g izmjerive funkcije na $\mathbb{R}^n$. Konvoluciju od f i g, u oznaci $f * g$, definiramo kao*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)\mathrm{d}y \, .$$

Pritom se domena od $f * g$ sastoji od svih točaka $x \in \mathbb{R}^n$ za koje gornji integral konvergira.

Propozicija 1.3.2. *Neka su f, g i h izmjerive funkcije na $\mathbb{R}^n$ za koje je konvolucija svake dvije dobro definirana. Tada vrijedi*

(1.) $f * g = g * f$,

(2.) $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Propozicija 1.3.3 (Youngova nejednakost)**.** *Neka je $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ proizvoljna te je za proizvoljan $p \in [1, +\infty]$ dana funkcija $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Tada $(f * g)(x)$ postoji za gotovo svaki $x \in \mathbb{R}^n$ te je $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ i vrijedi*

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Teorem 1.3.4. *Neka je $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ proizvoljna funkcija te je $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,\mathrm{d}x = a \in \mathbb{R}$. Za $p \in [1, \infty\rangle$, neka je $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ proizvoljna. Tada vrijedi*

$$\lim_{t \to 0^+} \|f * \phi_t - af\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0 .$$

Pritom je $\phi_t(x) = \frac{1}{t^n}\phi(\frac{x}{t})$.

Dokaz. Vidjeti [4] □

Definicija 1.3.5. *Neka je f izmjeriva funkcija na $\mathbb{R}^n$, a μ konačna mjera na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Konvoluciju od f i μ, u oznaci $f * \mu$, definiramo kao*

$$(f * \mu)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\mathrm{d}\mu(y) .$$

Definicija 1.3.6. *Neka je $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ proizvoljna. Definiramo Fourierovu pretvorbu od u kao funkciju $\widehat{u} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ zadanu sa*

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, x \cdot \xi} u(x)\mathrm{d}x .$$

Uočimo da je definicija dobra, naime za proizvoljan $\xi \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\left|\widehat{u}(\xi)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-2\pi i\, x \cdot \xi} u(x)\right| \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|\, \mathrm{d}x = \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < +\infty . \tag{1.1}$$

Propozicija 1.3.7. *Neka je $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ proizvoljna. Tada vrijedi da je $\widehat{u}$ uniformno neprekidna funkcija na $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan te neka su $x, h \in \mathbb{R}^n$ proizvoljni. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}\left|\widehat{u}(x+h) - \widehat{u}(x)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} (e^{-2\pi i(x+h)\cdot z} - e^{-2\pi i x\cdot z}) u(z) \mathrm{d}z\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-2\pi i x\cdot z}\right| \left|e^{-2\pi i h\cdot z} - 1\right| |u(z)| \, \mathrm{d}z \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-2\pi i h\cdot z} - 1\right| |u(z)| \, \mathrm{d}z \,.\end{aligned}$$

Zbog neprekidnosti kompleksne eksponencijalne funkcije imamo da vrijedi

$$\lim_{h\to 0} \left|e^{-2\pi i h\cdot z} - 1\right| = 0 \,.$$

Nadalje, vrijedi ocjena

$$\left|e^{-2\pi i h\cdot z} - 1\right| \leq 2 \, |u(z)| \;.$$

Budući da je $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, za proizvoljan niz $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathbb{R}^n$, koji konvergira u 0, po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\widehat{u}(x+h_n) - \widehat{u}(x)\right| = 0$$

pa, budući da je $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bio proizvoljan, vrijedi

$$\lim_{h\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\widehat{u}(x+h) - \widehat{u}(x)\right| = 0 \,.$$

Stoga za promatrani ε postoji $\delta > 0$ takav da za sve $h \in \mathbb{R}^n$ za koje je $|h| < \delta$ i za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\left|\widehat{u}(x+h_n) - \widehat{u}(x)\right| < \varepsilon \,.$$

Dakle, ukoliko su $x, y \in \mathbb{R}^n$ proizvoljni te je $|y - x| < \delta$, uz $h := y - x$ imamo, po upravo dokazanom, da vrijedi

$$\left|\widehat{u}(y) - \widehat{u}(x)\right| < \varepsilon \,.$$

Zato je po definiciji pokazano da je $\widehat{u}$ uniformno neprekidna funkcija. □

Propozicija 1.3.8. *Preslikavanje* $\mathcal{F} \colon L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *zadano sa* $\mathcal{F}(u) = \widehat{u}$ *je ograničen linearan operator čija operatorska norma je jednaka* 1.

Dokaz. Neka je $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ proizvoljna. Uzimanjem supremuma po svim $\xi \in \mathbb{R}^n$ u nejednakosti (1.1) dobivamo

$$\left\|\widehat{u}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \tag{1.2}$$

pa je $\mathcal{F}$ zaista dobro definirano preslikavanje. Linearnost od $\mathcal{F}$ je direktna posljedica linearnosti integrala, dok iz (1.2) slijedi da je $\mathcal{F}$ ograničen operator te da vrijedi $\|\mathcal{F}\| \leq 1$.

Promotrimo skup $K = \underbrace{[0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{n}$ te funkciju $u \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u = \mathbb{1}_K$. Vrijedi

$$1 = \int_K \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_K(x)\mathrm{d}\lambda(x) = \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

te

$$\widehat{u}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot 0} \mathbb{1}_K(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_K(x)\mathrm{d}x = 1\,.$$

Stoga je, zbog ograničenosti od $\mathcal{F}$,

$$1 = \left|\widehat{u}(0)\right| \leq \left\|\widehat{u}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\mathcal{F}\| \, \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}\|\,.$$

Time je pokazano da vrijedi $\|\mathcal{F}\| = 1$. □

Definicija 1.3.9. *Neka je V proizvoljan vektorski prostor te neka je $f \colon \mathbb{R}^n \to V$ proizvoljna funkcija. Za proizvoljni $h \in \mathbb{R}^n$ definiramo translaciju funkcije f za vektor h kao funkciju*

$$\tau_h f \colon \mathbb{R}^n \to V, \;\; \tau_h f(x) := f(x-h)\,.$$

Lema 1.3.10. *Neka je $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ proizvoljna. Tada vrijedi*

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0\,.$$

Dokaz. Vidjeti [4] □

Definicija 1.3.11. *Definiramo skup funkcija koje „trnu" u beskonačnosti, u oznaci $C_0(\mathbb{R}^n)$, kao podskup od $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ koji se sastoji od svih neprekidnih funkcija f koje zadovoljavaju*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists R > 0)(\forall \xi \in \mathbb{R}^n) \quad |\xi| > R \Rightarrow |f(\xi)| < \varepsilon\,.$$

Propozicija 1.3.12 (Riemann-Lebesgueova lema)**.** *Neka je $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ proizvoljna. Tada je $\widehat{u} \in C_0(\mathbb{R}^n)$.*

Dokaz. Za proizvoljan $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ označimo

$$h = \frac{\xi}{2\,|\xi|^2}\,.$$

Koristeći invarijantnost Lebesguevog integrala na translacije dobivamo

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x-h)\cdot \xi} u(x-h)\mathrm{d}x = e^{-\pi i} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(x-h)\mathrm{d}x\,.$$

Zbrajanjem dva integrala u gornjoj jednakosti dobivamo

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}(u(x) - u(x-h))\mathrm{d}x\,.$$

Odavde slijedi

$$\left|\widehat{u}(\xi)\right| \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x) - u(x-h)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\|\tau_h u - u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\ .$$

Sada iz leme 1.3.10 i teorema o sendviču sljedi

$$\lim_{h\to 0}\left|\widehat{u}(\xi)\right| = 0$$

pa za proizvoljan $\varepsilon > 0$ postoji $r > 0$ takav da za svaki $h \in \mathbb{R}^n$ koji zadovoljava $|h| < r$, vrijedi $\left|\widehat{u}(\xi)\right| < \varepsilon$.

Stavimo $R = \frac{2}{r}$ pa onda za proizvoljan $\xi \in \mathbb{R}^n$ za koji je $|\xi| > R$, za h kao s početka dokaza vrijedi

$$|h| = \frac{1}{2\,|\xi|} < r$$

pa onda i $\left|\widehat{u}(\xi)\right| < \varepsilon$. Time je po definiciji pokazano da vrijedi $\widehat{u} \in C_0(\mathbb{R}^n)$. □

Propozicija 1.3.13. *Neka su $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ proizvoljne. Tada vrijedi*

$$\widehat{u * v}(\xi) = \widehat{u}(\xi)\widehat{v}(\xi)\,.$$

Dokaz. Primjenjujući Fubinijev teorem, računamo

$$\begin{aligned}
\widehat{u * v}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, x\cdot\xi}(u * v)(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, x\cdot\xi}\int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, x\cdot\xi}u(x-y)v(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\,(x-y)\cdot\xi}u(x-y)\mathrm{d}x e^{-2\pi i\, y\cdot\xi}v(y)\mathrm{d}y\,.
\end{aligned}$$

Koristeći invarijantnost Lebesgueovog integrala na translacije, dobivamo

$$\begin{aligned}
\widehat{u * v}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, x\cdot\xi}u(x)\mathrm{d}x e^{-2\pi i\, y\cdot\xi}v(y)\mathrm{d}y \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, x\cdot\xi}u(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, y\cdot\xi}v(y)\mathrm{d}y\right) = \widehat{u}(\xi)\widehat{v}(\xi)\,.
\end{aligned}$$

Napomenimo da smo mogli primjenjivati Fubinijev teorem zato što je

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|\,|v(y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,\|v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty\,.$$

□

Propozicija 1.3.14. *Neka je $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ proizvoljna te neka je $h \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan. Definirajmo $v(x) = e^{2\pi i\, h\cdot x}u(x)$. Tada vrijedi:*

(1.) $\widehat{\tau_h u}(\xi) = e^{-2\pi i\, h\cdot\xi}\,\widehat{u}(\xi)$,

(2.) $\widehat{v}(\xi) = \tau_h\widehat{u}(\xi)$.

Dokaz. (1.) Računamo, koristeći definicije i invarijantnost Lebesgueovog integrala na translacije:

$$\begin{aligned}\widehat{\tau_h u}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, x\cdot\xi}u(x-h)\mathrm{d}x = e^{-2\pi i\, h\cdot\xi}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\,(x-h)\cdot\xi}u(x-h)\mathrm{d}x\\ &= e^{-2\pi i\, h\cdot\xi}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, x\cdot\xi}u(x)\mathrm{d}x = e^{-2\pi i\, h\cdot\xi}\,\widehat{u}(\xi)\,.\end{aligned}$$

(2.) Računamo, po definiciji,

$$\widehat{v}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, x\cdot(\xi-h)}u(x)\mathrm{d}x = \tau_h\widehat{u}(\xi)\,. \qquad \square$$

Definicija 1.3.15. *Za proizvoljnu funkciju $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ te za proizvoljan $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ definiramo funkciju f „skaliranu" za α kao $f_\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) := \frac{1}{|\alpha|^n} f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.*

Propozicija 1.3.16. *Za proizvoljnu $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ te proizvoljan $\alpha > 0$ vrijedi*

$$\widehat{u}(\alpha\xi) = \widehat{u_\alpha}(\xi)\,.$$

Dokaz. Po definiciji je

$$\widehat{u}(\alpha\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, x\cdot\alpha\xi}u(x)\mathrm{d}x\,.$$

Uvodimo zamjenu varijabli $y = \alpha x$ pa je $x = \frac{y}{\alpha}$ te $\mathrm{d}y = |\alpha|^n\,\mathrm{d}x$. Stoga zbog linearnosti integrala vrijedi

$$\widehat{u}(\alpha\xi) = \frac{1}{|\alpha|^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, x\cdot\xi}u\left(\frac{y}{\alpha}\right)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, y\cdot\alpha\xi}u_\alpha(y)\mathrm{d}y = \widehat{u_\alpha}(\xi)\,. \qquad \square$$

Naredne rezultate iskazujemo bez dokaza koji se mogu pronaći u [4].

Propozicija 1.3.17. *Neka je $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ proizvoljna. Tada vrijedi*

(1.) *Ako je za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ funkcija $v_j(x) := -2\pi i x_j u(x)$ u prostoru $L^1(\mathbb{R}^n)$, onda je $\widehat{u}$ klase C^1 te vrijedi*

$$\partial_j\widehat{u} = \widehat{v_j}\,.$$

(2.) *Ako je u klase* C^1 *te za proizvoljan* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *vrijedi* $\partial_j u \in L^1(\mathbb{R}^n)$*, onda je*

$$\widehat{\partial_j u}(\xi) = (2\pi i \xi_j)\widehat{u}(\xi)\,.$$

Definicija 1.3.18. *Neka je* $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *proizvoljna. Definiramo inverznu Fourierovu pretvorbu od u kao funkciju* $\check{u}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *zadanu sa*

$$\check{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\, x\cdot\xi} u(x)\mathrm{d}x\,.$$

Teorem 1.3.19. *Neka je* $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *proizvoljna funkcija za koju je* $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$*. Tada postoji neprekidna funkcija* $u_0\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *koja je gotovo svuda jednaka u te vrijedi*

$$u_0 = \check{\widehat{u}} = \widehat{\check{u}}\,.$$

Teorem 1.3.20 (Plancherelova formula)**.** *Neka su* $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$*. Tada vrijedi* $\widehat{u}, \widehat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *i vrijedi*

$$\langle u, v\rangle = \langle \widehat{u}, \widehat{v}\rangle\,.$$

Za kraj napominjemo da se pojam Fourierove pretvorbe može proširiti na širu klasu objekata od L^1 funkcija te takva proširanja vode do bogate teorije. Za naše potrebe bit će ključno proširenje na konačne mjere na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

Definicija 1.3.21. *Ako je* μ *proizvoljna konačna mjera na* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$*, definiramo njezinu Fourierovu pretvorbu kao funkciju* $\widehat{\mu}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$*,*

$$\widehat{\mu}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, \xi\cdot x}\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

Propozicija 1.3.22. *Neka je* μ *proizvoljna konačna mjera na* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ *te su* $h \in \mathbb{R}^n$*,* $\mathcal{U} \in \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ *i* $\alpha \in \mathbb{R}$*,* $\alpha \neq 0$ *također proizvoljni. Tada vrijedi, za proizvoljan* $\xi \in \mathbb{R}^n$*,*

(1.) $(\widehat{\tau_h \mu})(\xi) = e^{-2\pi i\, h\cdot\xi}\, \widehat{\mu}(\xi)$,

(2.) $(\widehat{R_{\mathcal{U}}\mu})(\xi) = \widehat{\mu}\left(\mathcal{U}^{-1}\xi\right)$,

(3.) $\widehat{\mu_\alpha}(\xi) = \widehat{\mu}(\alpha\xi)$.

Dokaz. (1.) Koristeći propoziciju 1.2.17 dio (2.) dobivamo:

$$(\widehat{\tau_h \mu})(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, x\cdot\xi}\, \mathrm{d}\tau_h\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\,(x+h)\cdot\xi}\, \mathrm{d}\mu(x) = e^{-2\pi i\, h\cdot\xi}\, \widehat{\mu}(\xi)\,.$$

(2.) Koristeći propoziciju 1.2.17 dio (2.) te činjenicu da je inverz ortogonalne matrice njoj transponirana matrica dobivamo:

$$\begin{aligned}(\widehat{R_{\mathcal{U}}\mu})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, x\cdot\xi}\, \mathrm{d}R_{\mathcal{U}}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, \mathcal{U}x\cdot\xi}\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, x\cdot\mathcal{U}^{-1}\xi}\, \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \widehat{\mu}\left(\mathcal{U}^{-1}\xi\right).\end{aligned}$$

(3.) Koristeći propoziciju 1.2.24 dio (2.) dobivamo:

$$\begin{aligned}\widehat{\mu_\alpha}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, x\cdot\xi}\, \mathrm{d}\mu_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, \alpha x\cdot\xi}\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, x\cdot\alpha\xi}\, \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \widehat{\mu}(\alpha\xi).\end{aligned}$$

□

Napomena 1.3.23. *Lako se vidi da i za konvoluciju funkcije i mjere vrijedi analogon propozicije 1.3.13.*

Napomena 1.3.24. *Dilataciju mjere μ s faktorom -1 ponekad pišemo $\widetilde{\mu}$. Dakle, $\widetilde{\mu} = \mu_{-1}$ te onda i za $\alpha > 0$ vrijedi $\widetilde{\mu}_\alpha = \mu_{-\alpha}$. Naime, ponekad u indeksu želimo pisati samo pozitivne faktore skaliranja.*

1.4 Gaussovske funkcije

Definicija 1.4.1. *Za prirodan broj n funkciju $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$ nazivamo standardnom n-dimenzionalnom gaussovskom funkcijom.*

Uvodimo posebne oznake za parcijalnu derivaciju gaussovske funkcije te za Laplaceov operator primjenjen na gaussovsku funkciju:

$$h^{(l)} := \partial_l g\,, \quad \forall l \in \{1, 2, \ldots, n\}\,,$$

$$k := \Delta g = \sum_{l=1}^{n} \partial_l^2 g\,.$$

Propozicija 1.4.2. *Za standardnu n-dimenzionalnu gaussovsku funkciju g vrijedi*

$$g \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right) \text{ i } \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathrm{d}x = 1\,.$$

Dokaz. Najprije pokazujemo da tvrdnja vrijedi u dimenziji $n = 1$. Zbog parnosti funkcije g vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} e^{-\pi x^2}\mathrm{d}x\,.$$

Označimo $I = \int_0^{+\infty} e^{-\pi x^2}\mathrm{d}x$. Budući da promatramo integral nenegativne funkcije, primjenom Fubinijeva teorema dobivamo

$$I^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-\pi x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-\pi y^2}\mathrm{d}y\right) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Integral na desnoj strani gornje jednakosti je integral po prvom kvadrantu u $\mathbb{R}^2$ pa prelaskom na polarne koordinate dobivamo da vrijedi

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} re^{-\pi(r^2)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\,.$$

Dakle, $I = \frac{1}{2}$ pa onda i

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\mathrm{d}x = 1\,.$$

Za proizvoljnu n-dimenzionalnu standardnu gaussovsku funkciju g, zbog nenegativnosti možemo primjeniti Fubinijev teorem i svojstva eksponencijalne funkcije da zaključimo

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2}\mathrm{d}x = \prod_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_i^2}\mathrm{d}x_i = 1\,. \qquad \square$$

Propozicija 1.4.3. *Za Fourierove pretvorbe gaussovskih funkcija vrijedi:*

(1.) $\widehat{g}(\xi) = g(\xi)$,

(2.) $\widehat{h^{(l)}}(\xi) = 2\pi i\xi_l e^{-\pi|\xi|^2}$, *pri čemu smo označili* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$,

(3.) $\widehat{k}(\xi) = -4\pi^2\,|\xi|^2\,e^{-\pi|\xi|^2}$.

Dokaz. (1.) Najprije pokazujemo da tvrdnja vrijedi u slučaju $n = 1$. Primjetimo da je $g'(x) = -2\pi xe^{-\pi x^2}$. Koristeći propoziciju 1.3.17 dobivamo

$$(\widehat{g})'(\xi) = ((-2\pi ix)g)^\wedge = i(\widehat{g})'(\xi) = -2\pi\xi\,\widehat{g}(\xi)\,.$$

Promotrimo funkciju $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $G(\xi) = e^{\pi\xi^2}\widehat{g}(\xi)$. Uočimo da je G neprekidno derivabilna te da za njezinu derivaciju vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}G(\xi) = 2\pi\xi e^{\pi\xi^2}\widehat{g}(\xi) - 2\pi\xi e^{\pi\xi^2}\widehat{g}(\xi) = 0\,.$$

Dakle, G je konstantna funkcija te iz propozicije 1.4.2 vrijedi

$$G(0) = \widehat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} \mathrm{d}x = 1\,.$$

Stoga za proizvoljan $\xi \in \mathbb{R}$ vrijedi $e^{\pi\xi^2}\widehat{g}(\xi) = 1$, a odavde pak slijedi

$$\widehat{g}(\xi) = e^{-\pi\xi^2} = g(\xi)\,.$$

Neka je sada g proizvoljna standardna n-dimenzionalna gaussovska funkcija. Zbog nenegativnosti od g možemo primjeniti Fubinijev teorem pa dobivamo, uvažavajući upravo dokazano,

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\xi\cdot x} e^{-\pi|x|^2} \mathrm{d}x = \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x_i\xi_i} e^{-\pi x_i^2} \mathrm{d}x_i = \prod_{i=1}^{n} e^{-\pi\xi_i^2} = e^{-\pi|\xi|^2} = g(\xi)\,.$$

(2.) Tvrdnja sljedi primjenom propozicije 1.3.17 na standardnu n-dimenzionalnu gaussovsku funkciju g.

(3.) Koristimo propoziciju 1.3.17, definiciju Laplaceovog operatora te tvrdnju (1.) ove propozicije da zaključimo

$$\begin{aligned}\widehat{k}(\xi) &= \left(\widehat{\sum_{l=1}^{n} \partial_l^2 g}\right)(\xi) = \sum_{l=1}^{n} \widehat{\partial_l^2 g}(\xi) = \sum_{l=1}^{n} (-4\pi^2)\xi_j^2\, \widehat{g}(\xi) = -4\pi^2\, |\xi|^2\, \widehat{g}(\xi) \\ &= -4\pi^2\, |\xi|^2\, e^{-\pi|\xi|^2}\,.\end{aligned}$$

□

Propozicija 1.4.4. *Neka su $\alpha, \beta > 0$ proizvoljni. Tada za standardnu n-dimenzionalnu gaussovsku funkciju vrijede sljedeći konvolucijski identiteti:*

(1.) $g_\alpha * g_\beta = g_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$,

(2.) $\sum_{l=1}^{n} h_\alpha^{(l)} * h_\beta^{(l)} = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} k_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$,

(3.) $k_\alpha * g_\beta = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} k_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

Dokaz. (1.) Prema propoziciji 1.3.13 te propoziciji 1.4.3 dio (1.) imamo da vrijedi, za proizvoljan $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\widehat{g_\alpha * g_\beta}(\xi) &= \widehat{g_\alpha}(\xi)\widehat{g_\beta}(\xi) = \widehat{g}(\alpha\xi)\,\widehat{g}(\beta\xi) = g(\alpha\xi)g(\beta\xi) = e^{-\pi(\alpha^2+\beta^2)|\xi|^2} \\ &= e^{-\pi\left|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\xi\right|^2} = g\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\xi\right) = \widehat{g}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\xi\right) = \widehat{g_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}(\xi)\,.\end{aligned}$$

Primjenom inverzne Fourierove transformacije dobivamo da vrijedi

$$g_\alpha * g_\beta = g_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,.$$

(2.) Koristimo propoziciju 1.3.13 i propoziciju 1.3.16 te linearnost Fourierove transformacije kako bismo zaključili da za proizvoljan $\xi \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
\left(\widehat{\sum_{l=1}^{n} h_\alpha^{(l)} * h_\beta^{(l)}}\right)(\xi) &= \sum_{l=1}^{n} \widehat{h_\alpha^{(l)}}(\xi)\widehat{h_\beta^{(l)}}(\xi) = \sum_{l=1}^{n} \widehat{h^{(l)}}(\alpha\xi)\widehat{h^{(l)}}(\beta\xi) \\
&= \sum_{l=1}^{n} (\alpha 2\pi i \xi_l) e^{-\pi\alpha^2|\xi|^2} (\beta 2\pi i \xi_l) e^{-\pi\beta^2|\xi|^2} \\
&= \frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} \sum_{l=1}^{n} \left(2\pi i \xi_l \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^2 \widehat{g}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\xi\right) \\
&= \frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} \sum_{l=1}^{n} \left(2\pi i \xi_l \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right) \widehat{\partial_l g}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\xi\right) \\
&= \frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} \sum_{l=1}^{n} \widehat{\partial_l^2 g}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\xi\right) \\
&= \frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} \left(\widehat{\sum_{l=1}^{n} \partial_l^2 g}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\xi\right)\right) = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} \widehat{k}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\xi\right) \\
&= \frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} \widehat{k_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}(\xi) .
\end{aligned}
$$

Primjenom inverzne Fourierove transformacije dobivamo da vrijedi

$$
\sum_{l=1}^{n} h_\alpha^{(l)} * h_\beta^{(l)} = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} k_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} .
$$

(3.) Analogno kao i ranije, koristimo propoziciju 1.3.13 i propoziciju 1.3.16 te linearnost Fourierove transformacije kako bismo zaključili da za proizvoljan $\xi \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
\widehat{k_\alpha * g_\beta}(\xi) &= \widehat{k_\alpha}(\xi)\widehat{g_\beta}(\xi) = \widehat{k}(\alpha\xi)\,\widehat{g}(\beta\xi) = \sum_{l=1}^{n} \widehat{\partial_l^2 g}(\alpha\xi)\widehat{g}(\beta\xi) \\
&= \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} \sum_{l=1}^{n} \left(2\pi i \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\xi_l\right)^2 \widehat{g}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\xi\right) \\
&= \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} \sum_{l=1}^{n} \widehat{\partial_l^2 g}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\xi\right) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} \widehat{k}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\xi\right) \\
&= \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} \widehat{k}_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(\xi) .
\end{aligned}
$$

□

Propozicija 1.4.5. *Neka je g standardna n-dimenzionalna gaussovska funkcija. Funkcija g rješava jednadžbu provođenja topline, odnosno*

$$\partial_t g_t(x) = \frac{1}{2\pi t} k_t(x), \quad \forall t > 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^d\,.$$

Dokaz. Računamo, koristeći propoziciju 1.4.3 i Leibnitzovo pravilo za derivaciju produkta:

$$\partial_t g_t(x) = \partial_t \left(\frac{1}{t^n} g\left(\frac{x}{t}\right)\right) = \frac{-n}{t^{n+1}} e^{-\frac{\pi}{t^2}|x|^2} + \frac{1}{t^n}\frac{2\pi\,|x|^2}{t^3} e^{-\frac{\pi}{t^2}|x|^2} = \frac{1}{t^{n+1}} e^{-\frac{\pi}{t^2}|x|^2}\left(-n + \frac{2\pi\,|x|^2}{t^2}\right).$$

Također vrijedi

$$\begin{aligned} k(x) &= \sum_{l=1}^{n} \partial_l^2 g = \sum_{l=1}^{n} \partial_l \left((-2\pi x_l) e^{-\pi|x|^2}\right) = \sum_{l=1}^{n} e^{-\pi|x|^2}\left(-2\pi + 4\pi^2 x_l^2\right) \\ &= e^{-\pi|x|^2}\left(-2\pi n + 4\pi^2\,|x|^2\right) \end{aligned}$$

pa onda i

$$\frac{1}{2\pi t} k_t(x) = \frac{1}{t^{n+1}} e^{-\frac{\pi}{t^2}|x|^2}\left(-n + \frac{2\pi\,|x|^2}{t^2}\right).$$

Uspoređivanjem pokazanih jednakosti dobivamo da funkcija g zaista zadovoljava jednadžbu provođenja topline. □

Definicija 1.4.6. *Neka su $A, B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ proizvoljne funkcije. Kažemo da B dominira A, u oznaci $A \lesssim B$, ukoliko postoji konstanta C takva da za sve $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$A(x) \le CB(x)\,.$$

Ukoliko želimo istaknuti da C ovisi o nekim parametrima P, pišemo $A \lesssim_P B$. Ako pak vrijedi $A \lesssim B$ i $B \lesssim A$, pišemo $A \sim B$.

Propozicija 1.4.7. *Za standardnu n-dimenzionalnu gaussovsku funkciju g vrijedi, za proizvoljan $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$g(x) \lesssim (1 + |x|)^{-n-1}\,.$$

Dokaz. Promotrimo funkciju $\Phi\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $\Phi(t) = \frac{(1+t)^{n+1}}{e^{\pi t^2}}$. Matematičkom indukcijom, koristeći L'Hopitalovo pravilo, lako se pokaže

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(1+t)^{n+1}}{e^{\pi t^2}} = 0\,.$$

Dakle, postoji $R > 0$ te $M > 0$ takvi da za sve $x \in \mathbb{R}^n$ za koje je $|x| > R$ vrijedi

$$\frac{(1+t)^{n+1}}{e^{\pi t^2}} \leq M\,.$$

Nadalje, zatvorena jedinična kugla $\overline{\mathrm{K}}(0, R)$ je kompaktan skup, a Φ je neprekidna funkcija pa je ograničena i odozdo i odozgo na kompaktima. Dakle, Φ je odozgo ograničena na $\mathbb{R}^n$, no budući da nam konkretna gornja ograda nije od interesa, imamo da vrijedi $\Phi(t) \lesssim 1$. Posebno, za proizvoljan $x \in \mathbb{R}^n$, vrijedi $\Phi(|x|) \lesssim 1$, odnosno

$$g(x) \lesssim (1+|x|)^{-n-1}\,. \qquad \square$$

Propozicija 1.4.8. *Za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ i standardnu n-dimenzionalnu gaussovsku funkciju g vrijedi sljedeća ocjena:*

$$(1+|x|)^{-n-1} \lesssim \int_1^\infty g_\gamma(x) \frac{\mathrm{d}\gamma}{\gamma^2}\,.$$

Dokaz. Promotrimo funkciju $\Phi\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) = \frac{\int_1^\infty e^{\frac{-\pi t^2}{\gamma^2}} \frac{\mathrm{d}\gamma}{\gamma^{2+n}}}{(1+t)^{-n-1}}\,.$$

Supstitucijom $x = \frac{1}{\gamma}$ u gornjem integralu dobivamo

$$\int_1^\infty e^{\frac{-\pi t^2}{\gamma^2}} \frac{\mathrm{d}\gamma}{\gamma^{2+n}} = \int_0^1 x^n e^{-\pi t^2 x^2} \mathrm{d}x < \infty$$

pa je Φ dobro definirana. Uočimo da je Φ neprekidna te da vrijedi

$$\Phi(0) = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\gamma}{\gamma^{n+2}} = \frac{1}{n+1} \in \langle 0, +\infty\rangle\,.$$

Nadalje, vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1+t}{t}\right)^{n+1} \int_1^\infty t^{n+1} e^{\frac{-\pi t^2}{\gamma^2}} \frac{\mathrm{d}\gamma}{\gamma^{n+2}}\,.$$

Uz supstituciju $s = \frac{\pi t^2}{\gamma^2}$ je $\gamma = t\pi^{\frac{1}{2}} s^{\frac{-1}{2}}$, $\mathrm{d}\gamma = \frac{-1}{2} t\pi^{\frac{1}{2}} s^{\frac{-3}{2}} \mathrm{d}s$ pa vrijedi

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \phi(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2} \int_0^{\pi t^2} t^{n+1} e^{-s} t^{-n-2} \pi^{-\frac{n+2}{2}} s^{\frac{n+2}{2}} t\pi^{\frac{1}{2}} s^{\frac{-3}{2}} \mathrm{d}s \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\pi^{-\frac{n+1}{2}} \int_0^{\pi t^2} s^{\frac{n-1}{2}} e^{-s} \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{n+1}{2}} \int_0^{\infty} s^{\frac{n-1}{2}} e^{-s} \mathrm{d}s\,.\end{aligned}$$

Primijetimo da je posljednji integral zapravo jednak $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$, što je pozitivna konstanta.

Dakle, Φ je odozdo omeđena nekom pozitivnom konstantom pa je posebno za proizvoljan $x \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(|x|) \gtrsim 1$, odnosno

$$(1 + |x|)^{-n-1} \lesssim \int_1^{\infty} g_\gamma(x) \frac{\mathrm{d}\gamma}{\gamma^2}\,. \qquad \square$$

Poglavlje 2

Formulacija problema, sferične mjere i brojeće forme

2.1 Formulacija problema

Najprije definiramo geometrijske pojmove koji će nam biti nužni za iskaz Bourgainovog teorema, a zatim se odlučujemo za konkretnu definiciju gustoće podskupa euklidskog prostora. Napominjemo da nam u cijelom radu $|\cdot|$ označava standardnu Lebesgueovu mjeru na $\mathbb{R}^n$.

Definicija 2.1.1. *Za točke $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ kažemo da su geometrijski nezavisne, ako su vektori $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_k - a_0$ linearno nezavisni u $\mathbb{R}^n$.*

Definicija 2.1.2. *Ako su $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ geometrijski nezavisne, onda skup*

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i a_i \,\middle|\, \alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_k \in [0,1], \ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1 \right\}$$

nazivamo nedegeneriranim, k-dimenzionalnim simpleksom u $\mathbb{R}^n$, a točke $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \sigma$ nazivamo vrhovima od σ.

Često simpleks zadan nekim vrhovima $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ označavamo kao $[a_0, a_1, ..., a_k]$. Primijetimo da u ovom zapisu poredak vrhova nije bitan. U daljnjem tekstu sami simpleksi nam neće biti od interesa, već njihovi skupovi vrhova.

Definicija 2.1.3. *Za izmjeriv skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definiramo gornju Banachovu gustoću od A kao*

$$\overline{\delta}(A) := \lim_{R\to\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|A \cap (x + [0,R]^n)|}{R^n}.$$

Uočimo da u gornjoj definiciji R^n predstavlja volumen „kocke" $[0,R]^n$ u $\mathbb{R}^n$. Limes superior nam tada govori da je potrebno promatrati sve veće kocke, dok nam supremum po $x \in \mathbb{R}^n$ govori da je potrebno promatrati sve moguće translate kocke dane duljine stranice, prilikom računanja gustoće.

Za preslikavanje $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kažemo da je izometrično ukoliko za svake $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$|u(x) - u(y)| = |x - y| \ .$$

Elementarnim linearno-algebarskim metodama moguće je pokazati da je svako izometrično preslikavanje kompozicija nekog ortogonalnog operatora i neke translacije. Za dva skupa $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ reći ćemo da su izometrični ili sukladni, u oznaci $A \cong B$, ako postoji $f\colon A \to B$ izometrija. Sada smo spremni iskazati rezultat koji nam je od glavnog interesa.

Teorem 2.1.4. *Neka je Δ skup vrhova nekog nedegeneriranog n-simpleksa u $\mathbb{R}^{n+1}$. Za svaki $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ izmjeriv i takav da je $\overline{\delta}(A) > 0$ postoji realan broj α_0 takav da za svaki realan broj α veći od α_0, skup A sadrži izometričnu kopiju skupa $\alpha\Delta$.*

Ovaj rezultat prvi su dokazali Falconer i Marstrand [3], u posebnom slučaju kada je $n = 1$. Bourgainov pristup svodi se na dokazivanje sljedeće „kompaktne verzije" gornjeg teorema.

Teorem 2.1.5. *Neka je Δ skup vrhova nekog nedegeneriranog n-simpleksa u $\mathbb{R}^{n+1}$. Neka je $\delta > 0$ proizvoljan. Tada postoji prirodan broj J koji ovisi o δ i Δ takav da za sve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j \in \langle 0, 1]$ za koje je $\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \le \frac{1}{2}$ za sve $j \in \{1, 2, \ldots, J\}$ te za proizvoljan izmjeriv $B \subseteq [0,1]^{n+1}$ koji zadovoljava $|B| > \delta$, postoji $i \in \{1, 2, \ldots J\}$ takav da je izometrična kopija od $\lambda_i\Delta$ sadržana u B.*

Pokažimo sada da Teorem 2.1.5 povlači Teorem 2.1.4. Dokaz provodimo pretpostavljajući suprotno. Neka je Δ skup vrhova nekog nedegeneriranog n-simpleksa u $\mathbb{R}^{n+1}$ te neka je $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ Borel-izmjeriv skup takav da je $\overline{\delta}(A) > 0$, ali takav da za svaki realan broj α_0 postoji realan broj α veći od α_0 takav da A ne sadrži niti jednu izometričnu kopiju od $\alpha\Delta$. Tada postoji strogo rastući niz strogo pozitivnih realnih brojeva $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takav da je

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = +\infty$$

i da A ne sadrži izometričnu kopiju od $\alpha_k\Delta$ niti za koji $k \in \mathbb{N}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \ge 2\,, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

jer u suprotnom početni niz zamjenimo nekim njegovim podnizom koji ima traženo svojstvo.

Neka je sada δ proizvoljan realan broj za koji vrijedi $0 < \delta < \min\left\{1, \overline{\delta}(A)\right\}$. Neka je J prirodni broj čije postojanje je tvrdnja teorema 2.1.5. Iz definicije gornje Banachove gustoće slijedi

$$\inf_{M\geq 0} \sup_{R\geq M} \sup_{x\in\mathbb{R}^{n+1}} \frac{|A \cap (x + [0,R]^{n+1})|}{R^{n+1}} > \delta\,.$$

Iz definicije infinuma slijedi da je, za svaki realan broj $M \geq 0$,

$$\sup_{R\geq M} \sup_{x\in\mathbb{R}^{n+1}} \frac{|A \cap (x + [0,R]^{n+1})|}{R^{n+1}} > \delta\,.$$

Posebno, uzmemo li $M = \alpha_J$, iz definicije supremuma dobivamo da postoji $R \geq \alpha_J$ takav da vrijedi

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^{n+1}} \frac{|A \cap (x + [0,R]^{n+1})|}{R^{n+1}} > \delta\,.$$

Konačno, ponovno iz definicije supremuma, dobivamo da postoji $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ takav da je

$$\frac{|A \cap (x + [0,R]^{n+1})|}{R^{n+1}} > \delta\,. \tag{2.2}$$

Budući da je translat Borel-izmjerivog skupa ponovno Borel-izmjeriv te budući da skaliranjem Borel-izmjerivog skupa pozitivnim realnim brojem ponovo dobivamo Borel-izmjeriv skup, zaključujemo da je $B := \frac{1}{R}((A - x) \cap [0,R]^{n+1})$ Borel-izmjeriv skup. Primjetimo da vrijedi

$$B = \frac{1}{R}(A - x) \cap [0,1]^{n+1} \subseteq [0,1]^{n+1}\,.$$

Nadalje, budući je Lebesgueova mjera invarijantna na translacije te je homogena obzirom na pozitivne realne brojeve, zahvaljujući (2.2)

$$|B| = \frac{|A \cap (x + [0,R]^{n+1})|}{R^{n+1}} > \delta\,.$$

Definirajmo još za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, J\}$ broj $\lambda_j := \frac{\alpha_{J+1-j}}{R}$. Iz činjenice da je $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_J \leq R$, slijedi da je $\lambda_J < \cdots < \lambda_2 < \lambda_1 \leq 1$. Nadalje, za proizvoljan $j \in \{1, 2, \ldots, J\}$ radi (2.1) vrijedi,

$$\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} = \frac{\alpha_{J-j}}{\alpha_{J-j+1}} \leq \frac{1}{2}.$$

Teorem 2.1.5 nam sada garantira da postoji $i \in \{1, 2, \ldots, J\}$ takav da B sadrži izometričnu kopiju $\lambda_i\Delta'$ od $\lambda_i\Delta$. Dakle,

$$\frac{\alpha_{J+1-i}}{R}\Delta' \subseteq B = \frac{1}{R}(A - x) \cap [0,1]^{n+1} \subseteq \frac{1}{R}(A - x)\,.$$

Translatiranjem za x i skaliranjem sa R, slijedi

$$\alpha_{J+1-j}\Delta' + x \subseteq A\,.$$

Budući da su translacije izometrije, vrijedi da A sadrži izometričnu kopiju od $\alpha_{J+1-j}\Delta' \cong \alpha_{J+1-j}\Delta$, no to je kontradikcija s izborom od α_{J+1-j}. Zaključujemo da Teorem 2.1.5 zaista povlači Teorem 2.1.4.

2.2 Sferične mjere

Definicija 2.2.1. *Za prirodni broj n definiramo $\mathbb{S}^{n-1}$, standardnu jediničnu sferu u $\mathbb{R}^n$, kao*

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}\,.$$

Definicija 2.2.2. *Preslikavanje $\sigma : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ definirano sa*

$$\sigma(E) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_0^\pi \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbb{1}_E(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1 \cos\varphi_2, \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3, \ldots, \sin\varphi_1 \cdots \\ \cdots \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1}, \sin\varphi_1 \cdots \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1}) \sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2} \\ \mathrm{d}\varphi_{n-1} \mathrm{d}\varphi_{n-2} \cdots \mathrm{d}\varphi_2 \mathrm{d}\varphi_1$$

nazivamo sferičnom, a u slučaju $n = 2$ kružnom, mjerom.

Napomena 2.2.3. *Na promatranoj domeni integracije u definiciji 2.2.2 funkcija sinus je nenegativna pa je čitava podintegralna funkcija također nenegativna, a izmjeriva je kao produkt izmjerivih funkcija. Iz teorije mjere je zato poznato da je preslikavanje σ uistinu mjera na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Budući da je $\sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2}$ zapravo apsolutna vrijednost jakobijana odgovarajuće parametrizacije od $\mathbb{S}^{n-1}$, mjera σ je zapravo plošna mjera te joj je nosač $\mathbb{S}^{n-1}$. Elementarnim računom se provjeri da je $\sigma(\mathbb{S}^{n-1}) = 1$, što je posljedica normalizacije konstantom $\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}}$.*

Napomena 2.2.4. *Definicija 2.2.2 će se pokazati operativnom u nadolazećim dokazima. Međutim, moguće je pokazati da se mjera σ može ekvivalentno definirati kao restrikcija $(n-1)$-dimenzionalne Hausdorffove mjere na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Za definiciju i svojstva vidjeti [4]. Iz svojstava Hausdorffove mjere (koja ovdje ne navodimo) između ostalog slijedi i intuitivno prihvatljivo svojstvo invarijantnosti sferične mjere na rotacije sfere:*

$$\sigma(\mathcal{U}^{-1}(E)) = \sigma(E)\,, \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\,, \quad \forall \mathcal{U} \in \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})\,.$$

Lema 2.2.5. *U slučaju $n = 2$, za Fourierovu transformaciju kružne, odnosno sferične mjere σ vrijedi*

$$|\hat{\sigma}(\xi)| \lesssim min\left\{1, |\xi|^{-\frac{1}{2}}\right\} .$$

Dokaz. Neka je $\xi \in \mathbb{R}^2$ proizvoljan. Zbog normalizacije $\sigma(\mathbb{S}^1) = 1$ vrijedi

$$\left|\widehat{\sigma}(\xi)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \mathrm{d}\sigma(x)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^2} \left|e^{-2\pi i x\cdot\xi}\right| \mathrm{d}\sigma(x) = \sigma(\mathbb{R}^2) = 1 .$$

Da dobijemo ostatak ocjene, poslužit ćemo se polarnim koordinatama. Zapišimo $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ kao $\xi = |\xi|(\cos\theta, \sin\theta)$, za neki $\theta \in [0, 2\pi\rangle$. Tada je

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-2\pi i(\cos\theta,\sin\theta)\cdot\xi}\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-2\pi i|\xi|(\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta)}\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-2\pi i|\xi|\cos(\varphi-\theta)}\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-2\pi i|\xi|\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi .\end{aligned}$$

Pri tom smo u posljednjoj jednakosti napravili zamjenu varijabli $\varphi-\theta \to \varphi$ te smo iskoristili 2π-periodičnost funkcije kosinus i činjenicu da je integral periodične funkcije jednak na svakom segmentu čija je duljina jednaka njezinom periodu. Nadalje, koristeći parnost funkcije kosinus te definiciju kompleksne eksponencijalne funkcije, dobivamo

$$\hat{\sigma}(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(2\pi\,|\xi|\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi - \frac{i}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2\pi\,|\xi|\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi .$$

Provedimo zamjenu varijabli $t = \cos\varphi$. Budući da integriramo po segmentu $[0, \pi]$, vrijedi $\varphi = \arccos(t)$ te $d\varphi = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$ pa dobivamo,

$$\hat{\sigma}(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\cos(2\pi|\xi|t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t - \frac{i}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{1} \frac{\cos(2\pi|\xi|t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t .$$

Pritom smo iskoristili parnost funkcije kosinus i neparnost funkcije sinus.

Ukoliko za dani ξ vrijedi $|\xi| < 1$, imamo $|\xi|^{\frac{-1}{2}} > 1$ pa vrijedi tražena ocjena. Stoga promatramo one ξ za koje je $|\xi| \geq 1$. Gornji integral tada rastavljamo na dva integrala i to na segmentima $\left[0, 1 - |\xi|^{-1}\right]$ te $\left[1 - |\xi|^{-1}, 1\right]$

Iz Newton-Leibnitzove formule lako slijedi

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \int_0^{t} \frac{u}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u.$$

Stoga imamo

$$
\begin{aligned}
\int_0^{1-|\xi|^{-1}} \frac{\cos(2\pi|\xi|t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t &= \int_0^{1-|\xi|^{-1}} \left(1 + \int_0^t \frac{u}{(1-u)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\right)\cos(2\pi|\xi|t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{1-|\xi|^{-1}} \cos(2\pi|\xi|t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{1-|\xi|^{-1}} \frac{u}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\int_u^{1-|\xi|^{-1}} \cos(2\pi|\xi|t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\Bigg|_{t=0}^{t=1-|\xi|^{-1}} + \int_0^{1-|\xi|^{-1}} \frac{u}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\Bigg|_{t=u}^{t=1-|\xi|^{-1}}\mathrm{d}u \\
&\lesssim \frac{1}{|\xi|} + \frac{1}{|\xi|}\int_0^{1-|\xi|^{-1}} \frac{u}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u = \frac{1}{|\xi|}\frac{1}{\sqrt{1-(1-|\xi|^{-1})^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2|\xi|-1}} \leq |\xi|^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Drugi integral jednostavnije ocijenimo kao

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{1-|\xi|^{-1}}^1 \frac{\cos(2\pi|\xi|t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\right| &\leq \int_{1-|\xi|^{-1}}^1 \frac{1}{\sqrt{(1+t)(1-t)}}\mathrm{d}t \leq \int_{1-|\xi|^{-1}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t \\
&= -\sqrt{1-t}\,\Big|_{t=1-|\xi|^{-1}}^{t=1} = 2|\xi|^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Konačno, dobivamo

$$
|\widehat{\sigma}(\xi)| \leq \left|\int_0^{1-|\xi|^{-1}} \frac{\cos(2\pi|\xi|t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{1-|\xi|^{-1}}^1 \frac{\cos(2\pi|\xi|t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\right| \lesssim |\xi|^{-\frac{1}{2}} + 2|\xi|^{-\frac{1}{2}} \lesssim |\xi|^{-\frac{1}{2}}. \qquad \square
$$

U daljnjem tekstu od interesa će nam biti kružne mjere, ali čiji nosači su proizvoljne kružnice u $\mathbb{R}^n$. Prisjetimo se još notacije iz linearne algebre. Ako je H proizvoljan potprostor unitarnog prostora V, onda za proizvoljan vektor $v \in V$ sa $\mathrm{P}_H v$ označavamo ortogonalnu projekciju vektora v na potprostor H.

Napomena 2.2.6. *Primjetimo da je integral u definiciji 2.2.2 plošni integral po $\mathbb{S}^{n-1}$. Međutim, znamo da za $m \in \mathbb{N}$ koji je manji od n, a veći ili jednak od 1, sferu $\mathbb{S}^{m-1}$ možemo uložiti u $\mathbb{R}^n$. Modificiramo li definiciju tako da integriramo po $\mathbb{S}^{m-1}$ te stavimo* *da su prvih m koordinata argumenta funkcije $\mathbb{1}_E$ vrijednosti koje dobivamo koordinatizacijom $\mathbb{S}^{m-1}$ polarnim koordinatama, dok su preostalih $m-n$ jednake 0, onda možemo govoriti o „nižedimenzionalnim sferičnim mjerama" u $\mathbb{R}^n$.*

Lema 2.2.7. *Neka je H dvodimenzionalni potprostor od $\mathbb{R}^n$, a $x_0 \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan. Neka je σ kružna mjera čiji nosač je $\{x \in x_0 + H \mid |x - x_0| = 1\}$. Tada za svaki $\xi \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$\left|\widehat{\sigma}(\xi)\right| \lesssim \{1, |\mathrm{P}_H\xi|^{\frac{1}{2}}\},$$

pri čemu je P_H ortogonalna projekcija na H.

Dokaz. Primjetimo da je σ zapravo translacija za x_0, u smislu definicije 1.2.16, kružne mjere na $\mathbb{R}^n$ iz napomene 2.2.6. Stoga je nosač od σ jedinična kružnica u ravnini $x_0 + H$ sa središtem u x_0. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $H = \mathbb{R}^2 \times \{0\}^{n-2}$, jer u suprotnom djelovanjem rotacijama na σ možemo postići upravo to. Dakle, nosač od σ je skup

$$\{(\cos\varphi, \sin\varphi, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-2}) \mid \varphi \in [0, 2\pi\rangle\}.$$

Označimo sa $\sigma^{\mathbb{R}^2}$ kružnu mjeru na $\mathbb{R}^2$ kao u definiciji 2.2.2. Tada vrijedi

$$\widehat{\sigma}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-2\pi i\,(cos\varphi\xi_1 + \sin\varphi\xi_2)}\,\mathrm{d}\varphi = \widehat{\sigma^{\mathbb{R}^2}}(\xi_1, \xi_2).$$

Koristeći lemu 2.2.5, zaključujemo

$$\left|\widehat{\sigma}(\xi)\right| \leq \min\left\{1, |(\xi_1, \xi_2)|^{-\frac{1}{2}}\right\} = \min\left\{1, |\mathrm{P}_H\xi|^{-\frac{1}{2}}\right\}. \qquad \square$$

2.3 Brojeće forme

U ovom odjeljku, cilj nam je definirati ključne objekte za dokaz teorema 2.1.5, brojeće forme. One „broje" koliko puta se u skupu pojavljuje traženi „uzorak". Pritom „brojenje" ne treba shvatiti doslovno, u odnosu na brojeću mjeru, već obzirom na neku pogodnu geometrijski definiranu mjeru. Prije definicije u punoj općenitosti, koja je razmjerno složena, promatramo specijalne slučajeve u dimenzijama 1 i 2.

Uzmimo najprije da je $n = 1$ te neka je Δ skup koji se sastoji od dvije točke u $\mathbb{R}^2$ međusobno udaljene za $b > 0$. Za $\lambda > 0$ te $f_0, f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ izmjerive funkcije koje iščezavaju izvan $[0, 1]^2$, promatramo izraz

$$\mathcal{N}_\lambda^0(f_0, f_1) := \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} f_0(x) f_1(x + y)\,\mathrm{d}\sigma_{\lambda b}(y)\mathrm{d}x.$$

Pritom je σ kružna mjera na $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$.

Ukoliko za neki $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ vrijedi $\mathcal{N}_\lambda^0(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B) > 0$, onda iz propozicije 1.2.13 slijedi da je

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B(x)\mathbb{1}_B(x+y)\mathrm{d}\sigma_{\lambda b}(y) > 0 \right\} \right| > 0$$

pa onda i postoji $x \in \mathbb{R}^2$ za koji je $\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B(x)\mathbb{1}_B(x+y)\mathrm{d}\sigma_{\lambda b}(y) > 0$, štoviše, ima ih neprebrojivo mnogo. Ponovnom primjenom propozicije 1.2.13 zaključujemo

$$\sigma_{\lambda b}\Big(\Big\{y \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbb{1}_B(x)\mathbb{1}_B(x+y) > 0\Big\}\Big) > 0\,,$$

a budući da je nosač od $\sigma_{\lambda b}$ kružnica u $\mathbb{R}^2$ s centrom u 0 i radijusom λb, zaključujemo da postoji y iz spomenute kružnice takav da vrijedi $\mathbb{1}_B(x)\mathbb{1}_B(x+y) > 0$. Dakle postoje $x, y \in \mathbb{R}^2$ takvi da je $x, x+y \in B$ i $|y| = \lambda b$. Drugim riječima, B sadrži izometričnu kopiju od $\lambda\Delta$. Naime, oba su segmenti jednake duljine pa se eventualno razlikuju za translaciju i rotaciju.

Neka je sada $n = 2$ te neka je Δ skup koji se sastoji od tri nekolinearne točke u $\mathbb{R}^3$, to jest, Δ je skup vrhova nekog nedegeneriranog trokuta. Neka je H neki netrivijalni vektorski potprostor od $\mathbb{R}^3$ te neka je $x_0 \in \mathbb{R}^3$ proizvoljan. Sa $\sigma^{x_0,H}$ označimo plošnu mjeru na $(\dim H - 1)$-dimenzionalnoj sferi $\{x \in x_0 + H \mid |x - x_0| = 1\}$ sadržanoj u „ravnini" $x_0 + H \subseteq \mathbb{R}^3$. Napomenimo da je $\sigma^{x_0,H}$ definirana na $(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}(\mathbb{R}^3))$, ali joj je nosač spomenuta sfera, odnosno kružnica.

U daljnjem koristimo i sljedeću poznatu notaciju iz linearne algebre. Za S proizvoljan podskup nekog vektorskog prostora sa $\operatorname{span} S$ označavamo linearnu ljusku skupa S, a sa $S^\perp$ ortogonalni komplement skupa S. Jednostavno se pokaže i da vrijedi $S^\perp = (\operatorname{span} S)^\perp$.

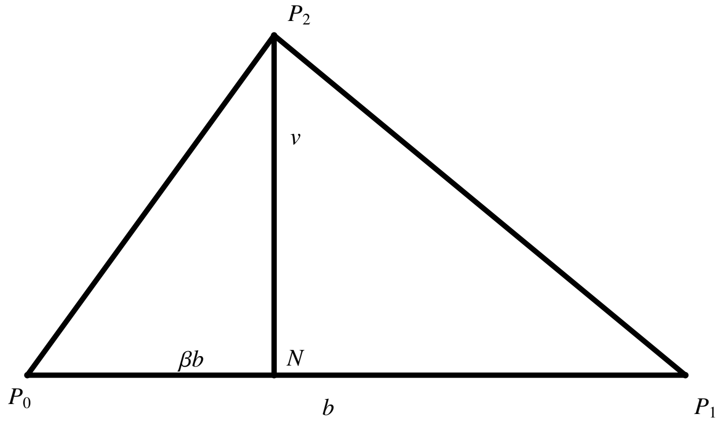
Označimo $\Delta = \{P_0, P_1, P_2\}$. Te tri točke u potpunosti određuju jedan trokut, a samim time i duljine svih njegovih stranica i visina te položaje nožišta svake visine. Označimo onda sa $b > 0$ duljinu stranice $\overline{P_0P_1}$, sa $v > 0$ duljinu visine na tu stranicu te sa N nožište te visine; vidjeti sliku 2.1. Kako se N nalazi na stranici $\overline{P_0P_1}$, možemo udaljenost od N do P_0 pisati kao βb, za neki $\beta \in \mathbb{R}$.

Za proizvoljan $\lambda > 0$ te $f_0, f_1, f_2\colon \mathbb{R}^3 \to [0,1]$ proizvoljne izmjerive funkcije koje iščezavaju izvan $[0,1]^3$, analogno kao u slučaju $n = 1$, definiramo

$$\mathcal{N}_\lambda^0(f_0, f_1, f_2) := \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f_0(x)f_1(x+y_1)f_2(x+y_2)\,\mathrm{d}\sigma_{\lambda v}^{y_1}(y_2)\mathrm{d}\sigma_{\lambda b}(y_1)\mathrm{d}x\,. \tag{2.3}$$

Pritom je

$$\sigma := \sigma^{0,\mathbb{R}^3}\,,$$
$$\sigma^{y_1} := \sigma^{\frac{\beta}{\lambda v}y_1,\{y_1\}^\perp}\,.$$



Slika 2.1: Izbor poretka integracije u (2.3).

Gornji izraz intuitivno shvaćamo kao integriranje „po svim trokutima" sukladnim trokutu $\lambda(\triangle P_0P_1P_2)$. Naime, promatrajući poredak integracije u gornjem izrazu, uočavamo da za proizvoljnu točku x „prolazimo po" točkama y_1 takvim da je segment $[x, x+y_1]$ sukladan segmentu $\lambda\overline{P_0P_1}$. Dalje, za točku $x + \beta y_1$, koja odgovara nožištu N, promatramo ravninu koja je sadrži te je okomita na pravac koji sadrži segment $[x, x + y_1]$. Sada „prolazimo po" točkama y_2 te ravnine koje su od $x + \beta y_1$ udaljene za λv.

Primijetimo da smo za dani simpleks fiksirali jedan poseban poredak njegovih vrhova te smo potom definirali izraz $\mathcal{N}^0_\lambda$. Označimo sa $b' > 0$ duljinu segmenta $\overline{P_0P_2}$, sa $v' > 0$ duljinu visine na tu stranicu te sa N' nožište te visine; pogledajte sliku 2.2. Kako se N' nalazi na stranici $\overline{P_0P_2}$, možemo udaljenost od N' do P_0 pisati kao $\beta' b'$.

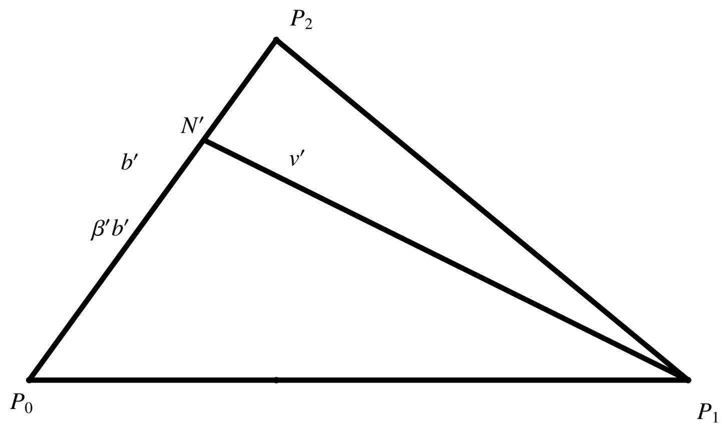
Alternativno, „zamjenom uloga" točaka P_1 i P_2 možemo definirati

$$\mathcal{N}^0_\lambda(f_0, f_1, f_2) := \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f_0(x)f_1(x + y_1)f_2(x + y_2)\,\mathrm{d}\sigma^{y_1}_{\lambda v'}(y_2)\mathrm{d}\sigma_{\lambda b'}(y_1)\mathrm{d}x\,. \tag{2.4}$$

Pritom je

$$\sigma := \sigma^{0,\mathbb{R}^3}\,,$$
$$\sigma^{y_1} := \sigma^{\frac{\beta'}{\lambda v'}y_1,\{y_1\}^\perp}\,.$$

Intuitivno je jasno da bi se dva različita integralna izraza (2.3) i (2.4) za $\mathcal{N}^0_\lambda(f_0, f_1, f_2)$ trebala podudarati, jer u oba slučaja se ista funkcija integrira „po svim trokutima" sukladnim trokutu $\lambda(\triangle P_0P_1P_2)$. Za formaliziranje ove intuitivne slutnje potrebno je uvesti pojam Haarove mjere na grupi rotacija $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$, no ta konstrukcija bi nas previše odvela u teoriju mjere, a ne bi nam pružila dodatne uvide u dokaz Bourgainovog teorema pa je ovdje izostavljamo.



Slika 2.2: Izbor poretka integracije u (2.4).

Analogno kao u slučaju $n = 1$, možemo pokazati da, ako za $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ proizvoljan, vrijedi $\mathcal{N}_\lambda^0(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B) > 0$, onda postoje $x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^3$ takvi da vrijedi $x, x + y_1, x + y_2 \in B$ te je

$$[x, x + y_1, x + y_2] \cong [0, y_1, y_2] \cong [\lambda P_1, \lambda P_2, \lambda P_3]\,,$$

odnosno B sadrži izometričnu kopiju od $\lambda\Delta$.

Motivirani specijalnim slučajevima $n = 1$ i $n = 2$, prelazimo na definiciju u općem slučaju. Neka je, za $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ linearno nezavisne, Δ skup vrhova simpleksa $[0, u_1, u_2, \ldots, u_n]$. Ovaj simpleks fiksiramo do kraja odjeljka. Budući da nam je u interesu naći izometričnu kopiju zadanog simpleksa u nekom skupu, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je jedan vrh promatranog simpleksa 0, jer u suprotnom promatramo odgovarajuću translaciju, koja je svakako sukladna polaznom simpleksu.

Fiksirajmo sljedeću notaciju. Za svaki $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ neka su $\beta_{k,1}, \beta_{k,2} \ldots \beta_{k,k-1} \in \mathbb{R}$ jedinstveni skalari takvi da se ortogonalna projekcija točke u_k na vektorski potprostor $\operatorname{span}\{u_1, u_2, \ldots u_{k-1}\}$ prikazuje kao

$$\beta_{k,1}u_1 + \beta_{k,2}u_2 + \cdots + \beta_{k,k-1}u_{k-1}\,.$$

Postojanje tih skalara je jednostavna posljedica linearne nezavisnosti skupa $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

Neka v_k označava udaljenost točke u_k od potprostora $\operatorname{span}\{u_1, u_2, \ldots u_{k-1}\}$.

Za vektorski potprostor H od $\mathbb{R}^n$ te za $x_0 \in \mathbb{R}^n$, neka $\sigma^{x_0,H}$ označava sferičnu mjeru na jediničnoj $(\dim H - 1)$-dimenzionalnoj sferi $\{x \in x_0 + H \mid |x - x_0| = 1\}$ u hiperravnini $x_0 + H \subseteq \mathbb{R}^n$. Primijetimo da je $\sigma^{x_0,H}$ dobivena odgovarajućom rotacijom i translacijom mjere iz napomene 2.2.6.

Definicija 2.3.1. *Uz ranije fiksirane oznake uzmimo još $n \in \mathbb{N}$ te $\lambda > 0$ proizvoljne. Nadalje, neka su $f_0, f_1, \dots f_n \colon \mathbb{R}^{n+1} \to [0,1]$ proizvoljne izmjerive funkcije koje iščezavaju izvan $[0,1]^n$. Definiramo brojeću formu $\mathcal{N}^0_\lambda(f_0, f_1, \dots, f_n)$ kao*

$$\mathcal{N}^0_\lambda(f_0, f_1, \dots, f_n) := \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n+1}}}_{n+1} f_0(x) f_1(x+y_1) \cdots f_n(x+y_n)\, \mathrm{d}\sigma^{y_1,y_2,\dots,y_{n-1}}_{\lambda v_n}(y_n) \dots$$
$$\dots \mathrm{d}\sigma^{y_1,y_2}_{\lambda v_3}(y_3) \mathrm{d}\sigma^{y_1}_{\lambda v_2}(y_2) \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_1}(y_1) \mathrm{d}x\,,$$

pri čemu su

$$\begin{aligned}
\sigma &:= \sigma^{0,\mathbb{R}^{n+1}}\,, \\
\sigma^{y_1} &:= \sigma^{\frac{1}{\lambda v_2}(\beta_{2,1} y_1),\, \{y_1\}^\perp}\,, \\
\sigma^{y_1,y_2} &:= \sigma^{\frac{1}{\lambda v_3}(\beta_{3,1} y_1 + \beta_{3,2} y_2),\, \{y_1,y_2\}^\perp}\,, \\
&\vdots \\
\sigma^{y_1,y_2,\dots,y_n} &:= \sigma^{\frac{1}{\lambda v_n}(\beta_{n,1} y_1 + \beta_{n,2} y_2 + \cdots \beta_{n,n-1} y_{n-1}),\, \{y_1,y_2,\dots,y_{n-1}\}^\perp}\,.
\end{aligned}$$

Napomena 2.3.2. *Analogno kao i u slučaju $n = 1$, možemo i za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ lako pokazati, koristeći se propozicijom 1.2.13, da ako za neki $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$ vrijedi da je forma $\mathcal{N}^0_\lambda(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \dots, \mathbb{1}_B)$ strogo pozitivna, onda B sadrži izometričnu kopiju simpleksa čiji su vrhovi iz skupa Δ, skaliranog za λ.*

Naime, zbog stroge pozitivnosti od $\mathcal{N}^0_\lambda(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \dots, \mathbb{1}_B)$, iz propozicije 1.2.13 slijedi da posotji $x \in B$ takav da je

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n+1}}}_{n} \mathbb{1}_B(x) \mathbb{1}_B(x+y_1) \cdots \mathbb{1}_B(x+y_n)\, \mathrm{d}\sigma^{y_1,y_2,\dots,y_{n-1}}_{\lambda v_n}(y_n) \dots$$
$$\dots \mathrm{d}\sigma^{y_1,y_2}_{\lambda v_3}(y_3) \mathrm{d}\sigma^{y_1}_{\lambda v_2}(y_2) \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_1}(y_1) > 0\,.$$

Neka je T translacija koja prevodi vrh 0 u x. Ponovnom primjenom propozicije 1.2.13, zaključujemo da postoji $y_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$ takav da je $x + y_1 \in B$ te je $|0 - y_1| = \lambda v_1 = |0 - \lambda u_1|$. Stoga $|x - (x + y_1)| = |x - (x + \lambda u_1)|$ pa postoji izometrija R_1 takva da je $R_1(x) = x$ te je $R_1(x+\lambda u_1) = x+y_1$. Dakle, $[0, \lambda u_1]$ i $[x, x+y_1]$ su sukladni, jer je preslikavanje $\Phi := R_1 \circ T$ izometrija između njih. Također vrijedi

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n+1}}}_{n-1} \mathbb{1}_B(x) \mathbb{1}_B(x+y_1) \cdots \mathbb{1}_B(x+y_n)\, \mathrm{d}\sigma^{y_1,y_2,\dots,y_{n-1}}_{\lambda v_n}(y_n) \dots$$
$$\dots \mathrm{d}\sigma^{y_1,y_2}_{\lambda v_3}(y_3) \mathrm{d}\sigma^{y_1}_{\lambda v_2}(y_2) > 0\,.$$

Ponovnom primjenom propozicije 1.2.13 dobivamo da postoji $y_2 \in \mathbb{R}^{n+1}$ *takav da je* $x+y_2 \in B$ *i* $\left|y_2 - \beta_{2,1}y_1\right| = \lambda v_2$ *te vrijedi*

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\cdots\int_{\mathbb{R}^{n+1}}}_{n-2} \mathbb{1}_B(x)\mathbb{1}_B(x+y_1)\cdots\mathbb{1}_B(x+y_n)\,\mathrm{d}\sigma_{\lambda v_n}^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}}(y_n)\mathrm{d}\sigma_{\lambda v_3}^{y_1,y_2}(y_3) > 0\,.$$

Primijetimo da vrijedi

$$\left|\Phi(\lambda u_2) - \Phi(\lambda\beta_{2,1}u_1)\right| = \left|\lambda u_2 - \lambda\beta_{2,1}u_1\right| = \lambda v_2 = \left|y_2 - \beta_{2,1}y_1\right|\left|x + y_2 - (x + \beta_{2,1}y_1)\right|\,.$$

Budući da je $\Phi(0) = x$ *i* $\Phi(\lambda u_1) = x+y_1$, *vrijedi da je* $\Phi(\lambda\beta_{2,1}u_1) = x+\beta_{2,1}y_1$. *To znači da se obje točke* $x+y_2$ *i* $\Phi(\lambda\beta_{2,1}y_1)$ *nalaze u sferi sa središtem* $x+\beta_{2,1}y_1$, *radijusa* λv_2 *u potprostoru* $\{y_1\}^\perp$. *Stoga postoji izometrija* R_2 *koja fiksira točke* $x + y_1$ *i* x *te zadovoljava* $R_2(\phi(\lambda u_2)) = x + y_2$. *Dakle,* $R_2 \circ \Phi$ *je izometrija između* $[0, \lambda u_1, \lambda u_2]$ *i* $[x, x + y_1, x + y_2]$. *Uzastopnom primjenom propozicije 1.2.13 i zaključivanja analognog gornjem, zaključujemo da postoje* $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^n$ *za koje je* $x+y_1, x+y_2, \ldots, x+y_n \in B$ *te je simpleks* $[x, x+y_1, \ldots, x+y_n]$ *sukladan simpleksu* $[0, \lambda u_1, \ldots, \lambda u_n]$.

Napomena 2.3.3. *Analogno kao i u slučaju* $n = 2$, *možemo vidjeti da smo za definiciju od* $\mathcal{N}_\lambda^0(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ *imali* $n!$ *izbora. Kao što smo ranije komentirali, koristeći Haarovu mjeru na* $\mathrm{SO}(n + 1, \mathbb{R})$, *može se pokazati da svi ti izbori dovode do iste vrijednosti pa je definicija 2.3.1 zaista neovisna o poretku vrhova.*

Definicija 2.3.4. *Uz ranije fiksirane oznake uzmimo još* $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$ *te* $\varepsilon > 0$ *proizvoljne. Nadalje, neka su* $f_0, f_1, \ldots f_n\colon \mathbb{R}^{n+1} \to [0, 1]$ *proizvoljne izmjerive funkcije koje iščezavaju izvan* $[0, 1]^n$. *Definiramo zaglađenu brojeću formu* $\mathcal{N}_\lambda^\varepsilon(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ *kao*

$$\mathcal{N}_\lambda^\varepsilon(f_0, f_1, \ldots, f_n) := \mathcal{N}_\lambda^0(f_0, f_1 * g_{\varepsilon\lambda}, \ldots, f_n * g_{\varepsilon\lambda})\,,$$

gdje je g standardna $(n + 1)$*-dimenzionalna gaussovska funkcija.*

Lema 2.3.5. *Neka su* $\lambda, \varepsilon \in \langle 0, 1]$ *proizvoljni. Nadalje, neka su* $f_0, f_1, \ldots f_n\colon \mathbb{R}^{n+1} \to [0, 1]$ *proizvoljne izmjerive funkcije koje iščezavaju izvan* $[0, 1]^n$. *Tada vrijedi*

$$\lim_{\theta\to 0^+} \mathcal{N}_\lambda^\theta(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \mathcal{N}_\lambda^0(f_0, f_1, \ldots, f_n)\,.$$

Dokaz. Označimo za proizvoljne $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$F^{(0)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) := \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f_0(x)f_1(x + y_1)\cdots f_n(x + y_n)\,\mathrm{d}x$$

te

$$F^{(\theta)}(y_1, y_2, \dots, y_n) := \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f_0(x)(f_1 * g_{\theta\lambda})(x+y_1)\cdots(f_n * g_{\theta\lambda})(x+y_n)\,\mathrm{d}x\,.$$

Primijetimo da su oba gornja izraza dobro definirani budući da $f_1, f_2, \dots, f_n$ iščezavaju izvan $[0,1]^{n+1}$.

Uvažavajući da za sve $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ te za sve $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ vrijedi $|f_i(z)|, |f_i * g_{\theta\lambda}(z)| \leq 1$, dobivamo ocjenu

$$\begin{aligned}
&\left|F^{(\theta)}(y_1, y_2, \dots, y_n) - F^{(0)}(y_1, y_2, \dots, y_n)\right| \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |f_0(x)|\,|(f_1 * g_{\theta\lambda})(x+y_1)\cdots(f_n * g_{\theta\lambda})(x+y_n) - f_1(x+y_1)\cdots f_n(x+y_n)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Big(|(f_1 * g_{\theta\lambda})(x+y_1)(f_2 * g_{\theta\lambda})(x+y_2)\cdots(f_n * g_{\theta\lambda})(x+y_n) \\
&\qquad - f_1(x+y_1)(f_2 * g_{\theta\lambda})(x+y_2)\cdots(f_n * g_{\theta\lambda})(x+y_n)| \\
&\qquad + |f_1(x+y_1)(f_2 * g_{\theta\lambda})(x+y_2)\cdots(f_n * g_{\theta\lambda})(x+y_n) \\
&\qquad - f_1(x+y_1)f_2(x+y_2)\cdots f_n(x+y_n)|\Big)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Big(|(f_1 * g_{\theta\lambda})(x+y_1) - f_1(x+y_1)| \\
&\qquad + |(f_2 * g_{\theta\lambda})(x+y_2)\cdots f_n * g_{\theta\lambda}(x+y_n) - f_2(x+y_2)\cdots f_n(x+y_n)|\Big)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Analogan postupak nastavimo na drugom sumandu posljednjeg integrala. Tada dobivamo

$$\begin{aligned}
\left|F^{(\theta)}(y_1, y_2, \dots, y_n) - F^{(0)}(y_1, y_2, \dots, y_n)\right| &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |(f_k * g_{\theta\lambda})(x+y_k) - f_k(x+y_k)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \|f_k * g_{\theta\lambda} - f_k\|_{L^1(\mathbb{R}^{n+1})}\,.
\end{aligned}$$

Budući da funkcije $f_1, f_2, \dots, f_n$ iščezavaju izvan $[0,1]^n$, svakako vrijedi da su sadržane u $L^1(\mathbb{R}^{n+1})$. Iz teorema 1.3.4 sada lako slijedi

$$\lim_{\theta\to 0^+} \|f_k * g_{\theta\lambda} - f_k\|_{L^1(\mathbb{R}^{n+1})} = 0\,, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}\,.$$

Iz teorema o sendviču sada odmah slijedi

$$\lim_{\theta\to 0^+} F^{(\theta)}(y_1, y_2, \dots, y_n) = F^{(0)}(y_1, y_2, \dots, y_n)\,.$$

Uočimo da su $F^{(\theta)}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ i $F^{(0)}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ po apsolutnoj vrijednosti odozgo ograničeni konstantom 1. Budući da su mjere $\sigma_{\lambda v_n}^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}}, \ldots, \sigma_{\lambda v_2}^{y_1}, \sigma_{\lambda v_1}$ konačne za zadane $y_1, y_2, \ldots, y_n$, uzastopnom primjenom Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji, zaključujemo da vrijedi

$$\lim_{\theta\to 0^+} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n+1}}}_{n} F^{(\theta)}(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_n}^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}}(y_n) \ldots \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_2}^{y_1}(y_2) \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_1}(y_1)$$
$$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n+1}}}_{n} F^{(0)}(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_n}^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}}(y_n) \ldots \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_2}^{y_1}(y_2) \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_1}(y_1)\,.$$

Drugim riječima, vrijedi

$$\lim_{\theta\to 0^+} \mathcal{N}_\lambda^\theta(f_0, f_1, \ldots, f_n)) = \mathcal{N}_\lambda^0(f_0, f_1, \ldots, f_n)\,. \qquad \square$$

Lema 2.3.6. *Neka su* $0 < \alpha < \beta < 1$. *Tada za* $\lambda > 0$ *proizvoljan te za* $f_0, f_1, \ldots, f_n \colon \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ *proizvoljne izmjerive funkcije koje iščezavaju izvan* $[0, 1]^{n+1}$, *vrijedi*

$$\mathcal{N}_\lambda^\alpha(f_0, f_1, \ldots, f_n) - \mathcal{N}_\lambda^\beta(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \sum_{m=1}^{n} \mathcal{L}_\lambda^{\alpha,\beta,m}(f_0, f_1, \ldots, f_n)\,,$$

gdje je, za svaki $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\mathcal{L}_\lambda^{\alpha,\beta,m}(f_0, f_1, \ldots, f_n) := \frac{-1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n+1}}}_{n+1} f_0(x)(f_m * k_{t\lambda})(x + y_m) \prod_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n} (f_k * g_{t\lambda})(x + y_k)$$
$$\mathrm{d}\sigma_{\lambda v_n}^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}}(y_n) \ldots \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_2}^{y_1}(y_2) \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_1}(y_1) \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}t}{t}\,.$$

Dokaz. Koristeći formule za derivacije produkta te konvolucije te koristeći bilinearnost konvolucije i propoziciju 1.4.5, dobivamo, za $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ proizvoljne:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \prod_{k=1}^{n} (f_k * g_{t\lambda})(x_k) &= \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}(f_m * g_{t\lambda})(x_m) \prod_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n} (f_k * g_k)(x_k)\\ &= \sum_{m=1}^{n} (f_m * \frac{\partial}{\partial t} g_{t\lambda})(x_m) \prod_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n} (f_k * g_k)(x_k)\\ &= \sum_{m=1}^{n} (f_m * \frac{1}{2\pi t} k_{t\lambda})(x_m) \prod_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n} (f_k * g_k)(x_k)\,.\end{aligned}$$

Iz Leibnitz-Newtonove formule i upravo pokazanog slijedi

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{N}_\lambda^\alpha(f_0, f_1, \ldots, f_n) - \mathcal{N}_\lambda^\beta(f_0, f_1, \ldots, f_n) = -\int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{N}_\lambda^t(f_0, f_1, \ldots, f_n)\, \mathrm{d}t \\
&= -\int_\alpha^\beta \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n+1}}}_{n+1} \frac{\partial}{\partial t}\left(f_0(x) \prod_{k=1}^n (f_k * g_{t\lambda})(x_k)\right) \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_n}^{y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}}(y_n) \ldots \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_1}(y_1)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= -\int_\alpha^\beta \int_{(\mathbb{R}^{n+1})^{n+1}} \sum_{m=1}^n (f_m * \frac{1}{2\pi t}k_{t\lambda})(x_m) \prod_{\substack{k=1\\k\neq m}}^n (f_k * g_k)(x_k)\mathrm{d}\sigma_{\lambda v_n}^{y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}}(y_n) \ldots \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_1}(y_1)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \sum_{m=1}^n \mathcal{L}_\lambda^{\alpha,\beta,m}(f_0, f_1, \ldots, f_m)\,. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Napomena 2.3.7. *U dokazu leme 2.3.6 uveli smo pokratu za k uzastopnih integrala po* $\mathbb{R}^n$ $\int_{(\mathbb{R}^n)^k}$ *koju ćemo u daljnjem također koristiti.*

Poglavlje 3

Dokaz Bourgainovog teorema

Sada prelazimo na dokaz teorema 2.1.5. Najprije uvodimo oznake koje ćemo koristiti kroz čitavo poglavlje. Fiskirajmo $n \in \mathbb{N}$, n-simpleks $\tau = [0, u_1, u_2, \ldots, u_n]$ u $\mathbb{R}^{n+1}$ te, kao u odjeljku 2.3, brojeve $v_1, v_2, ..., v_n > 0$ te $\beta_{k,1}, \beta_{k,2}, \ldots, \beta_{k,k-1} \in \mathbb{R}$ za sve $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Također fiksiramo neki $\delta > 0$ te $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$, $B \subseteq [0,1]^{n+1}$ i $|\,B\,| > \delta$.

Cilj nam je pronaći $J \in \mathbb{N}$ takav da za J skalara $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_J \in \langle 0, 1]$ koji zadovoljavaju $\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \leq \frac{1}{2}$ za sve $j \in \{1, 2, \ldots, J\}$ skup B sadrži vrhove simpleksa koji je izometričan $\lambda_i \tau$ za barem jedan $i \in \{1, 2, \ldots, J\}$. Vidjeli smo u odjeljku 2.3 da je dovoljno pokazati $\mathcal{N}^0_{\lambda_i}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B) > 0$ za bar jedan $i \in \{1, 2, \ldots, J\}$. Ključ Bourgainovog pristupa je sljedeća dekompozicija za neki $\varepsilon \in \langle 0, 1]$:

$$\mathcal{N}^0_{\lambda_i} = \mathcal{N}^1_{\lambda_i} + (\mathcal{N}^\varepsilon_{\lambda_i} - \mathcal{N}^1_{\lambda_i}) + (\mathcal{N}^0_{\lambda_i} - \mathcal{N}^\varepsilon_{\lambda_i})\,. \tag{3.1}$$

Primjenjujući obrnutu nejednakost trokuta, dobivamo

$$\mathcal{N}^0_{\lambda_i} \geq \mathcal{N}^1_{\lambda_i} - \left|\mathcal{N}^\varepsilon_{\lambda_i} - \mathcal{N}^1_{\lambda_i}\right| - \left|\mathcal{N}^0_{\lambda_i} - \mathcal{N}^\varepsilon_{\lambda_i}\right|\,.$$

Idući cilj nam je ocijeniti svaki od ovih članova posebno.

- $\mathcal{N}^1_{\lambda_i}$ zovemo **strukturirani dio** i njega ćemo ocijeniti odozdo.
- $\mathcal{N}^\varepsilon_{\lambda_i} - \mathcal{N}^1_{\lambda_i}$ zovemo **dio-greška** i njega ćemo ocjenjivati odozgo, ali tek nakon sumiranja po i.
- $\mathcal{N}^0_{\lambda_i} - \mathcal{N}^\varepsilon_{\lambda_i}$ zovemo **uniformni dio** i ocjenjujemo ga odozgo.

3.1 Strukturirani dio

Označimo sa R dijametar simpleksa τ. Dakle,

$$R = \sup\{\,|x - y| \mid x, y \in \tau\,\}\,.$$

Neka je $\lambda \in \langle 0,1]$ proizvoljan. Prije nego krenemo ocjenjivati $\mathcal{N}_\lambda^1(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \dots, \mathbb{1}_B)$ dokazujemo neke pomoćne rezultate.

Lema 3.1.1. *Neka je ν vjerojatnosna mjera na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}))$ čiji nosač je zatvorena kugla $\overline{\mathrm{K}}(0,R)$. Tada po točkama vrijedi ocijena*

$$g * \nu \gtrsim \varphi\,,$$

gdje je $\varphi := \frac{1}{|\overline{\mathrm{K}}(0,1)|}\mathbb{1}_{\overline{\mathrm{K}}(0,1)}$.

Dokaz. Neka je $x \in \overline{\mathrm{K}}(0,1)$ proizvoljan. Po definiciji je

$$(g * \nu)(x) = \int_{\overline{\mathrm{K}}(0,R)} g(x-y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,.$$

Budući da je $y \in \overline{\mathrm{K}}(0,R)$, slijedi da je $x - y \in \overline{\mathrm{K}}(0,R+1)$. Vrijedi

$$(g * \nu)(x) \gtrsim \int_{\overline{\mathrm{K}}(0,R)} e^{-\pi(R+1)^2}\,\mathrm{d}\nu(y) = e^{-\pi(R+1)^2}\nu\Big(\overline{\mathrm{K}}(0,R)\Big) = R^2\pi e^{-\pi(R+1)^2} \gtrsim_R 1 \gtrsim \frac{1}{\big|\overline{\mathrm{K}}(0,1)\big|}\,.$$

Kako je $g * \nu$ nenegativna funkcija te jer je x bio proizvoljan, dobili smo

$$g * \nu \gtrsim \varphi\,. \qquad \square$$

Skaliranjem dobivamo da vrijedi i sljedeća posljedica.

Korolar 3.1.2. *Neka je ν vjerojatnosna mjera na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}))$ čiji nosač je zatvorena kugla $\overline{\mathrm{K}}(0,\lambda R)$ te je za $\lambda > 0$. Tada po točkama vrijedi ocjena*

$$g_\lambda * \nu \gtrsim \varphi_\lambda\,,$$

gdje je $\varphi := \frac{1}{|\overline{\mathrm{K}}(0,1)|}\mathbb{1}_{\overline{\mathrm{K}}(0,1)}$.

Prisjetimo se da je

$$\mathcal{N}_\lambda^1(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \dots, \mathbb{1}_B) = \int_{(\mathbb{R}^{n+1})^{n+1}} \mathbb{1}_B(x)(\mathbb{1}_B * g_\lambda)(x+y_1)\cdots(\mathbb{1}_B * g_\lambda)(x+y_n)$$
$$\mathrm{d}\sigma_{\lambda\nu_n}^{y_1,y_2,\dots,y_{n-1}}(y_n)\mathrm{d}\sigma_{\lambda\nu_2}^{y_1}(y_2)\mathrm{d}\sigma_{\lambda\nu_1}(y_1)\mathrm{d}x\,.$$

Uočimo da „unutrašnji" integral po mjeri $\sigma_{\lambda v_n}^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}}$ možemo shvatiti i kao konvoluciju $\left(\mathbb{1}_B * g_\lambda * \tilde{\sigma}_{\lambda v_n}^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}}\right)(x)$. Koristeći korolar 3.1.2 dobivamo

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{1}_B * g_\lambda * \tilde{\sigma}_{\lambda v_n}^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}}\right)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_B(x-z)(g_\lambda * \tilde{\sigma}_{\lambda v_n}^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}})(z)\,\mathrm{d}z \\ &\gtrsim \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_B(x-z)\varphi_\lambda(z)\,\mathrm{d}z = (\mathbb{1}_B * \varphi_\lambda)(x)\,.\end{aligned}$$

Odavde slijedi da je

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\lambda^1(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B) \gtrsim \int_{(\mathbb{R}^{n+1})^n} & \mathbb{1}_B(x)(\mathbb{1}_B * g_\lambda(x+y_1)) \cdots (\mathbb{1}_B * g_\lambda)(x+y_{n-1})(\mathbb{1}_B * \varphi_\lambda)(x) \\ & \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_{n-1}}^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-2}}(y_{n-1}) \ldots \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_2}^{y_1}(y_2)\mathrm{d}\sigma_{\lambda v_1}(y_1)\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Sada pak možemo „unutrašnji" integral shvatiti kao $\left(\mathbb{1}_B * g_\lambda * \tilde{\sigma}_{\lambda v_{n-1}}^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-2}}\right)(x)$, za što kao i ranije možemo pokazati da je odozdo dominirano sa $(\mathbb{1}_B * \varphi_\lambda)(x)$. Ponavljanjem ovakvih ocjena, u n koraka dolazimo, uvažavajući da je $B \subseteq [0,1]^{n+1}$, do

$$\mathcal{N}_\lambda^1(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B) \gtrsim \int_{[0,1]^{n+1}} \mathbb{1}_B(x)((\mathbb{1}_B * \varphi_\lambda)(x))^n\,\mathrm{d}x\,.$$

Budući da je $\frac{\lambda}{\sqrt{n+1}} \in \langle 0,1\rangle$ te budući da je funkcija $\mathbb{R} \to \langle 0,\infty\rangle$, $z \to 2^z$ bijekcija, možemo pronaći $m \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$2^{-m} < \frac{\lambda}{\sqrt{n+1}} < 2^{-m+1}\,.$$

Segment $[0,1]$ možemo particionirati na 2^m segmenata duljine 2^{-m}. Stoga skup $[0,1]^{n+1}$ možemo particionirati na $2^{m(n+1)}$ „kockica" čiji bridovi su duljine 2^{-m}. Označimo sa C tu particiju. Budući da se radi o konačnoj particiji, zbog disjunktnosti imamo

$$\mathcal{N}_\lambda^1(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B) \gtrsim \sum_{Q\in C} \int_Q \mathbb{1}_B(x)((\mathbb{1}_B * \varphi_\lambda)(x))^n\,\mathrm{d}x\,.$$

Za $Q \in C$ proizvoljnu te za $x \in Q$ proizvoljan, vrijedi da je $Q \subseteq \overline{\mathrm{K}}(x,\lambda)$. Naime, matematičkom indukcijom se jednostavno dokaže da je $\operatorname{diam}(Q) = 2^{-m}\sqrt{n+1}$. Stoga je prema izboru od m, $\operatorname{diam}(Q) < \lambda$ pa tvrdnja vrijedi.

Nadalje, ocjenjujemo za proizvoljan $Q \in C$ i $x \in Q$

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{1}_B * \varphi_\lambda)(x) &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{1}{\lambda^{n+1}\left|\overline{\mathrm{K}}\,(0,1)\right|} \mathbb{1}_{\overline{\mathrm{K}}(0,\lambda)}(x-y)\mathbb{1}_B(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{1}{\lambda^{n+1}\left|\overline{\mathrm{K}}\,(0,1)\right|} \mathbb{1}_{\overline{\mathrm{K}}(x,\lambda)}(y)\mathbb{1}_B(y)\,\mathrm{d}y \geq \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{1}{\lambda^{n+1}\left|\overline{\mathrm{K}}\,(0,1)\right|} \mathbb{1}_Q(y)\mathbb{1}_B(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{1}{\lambda^{n+1}\left|\overline{\mathrm{K}}\,(0,1)\right|} \mathbb{1}_{Q\cap B}(y)\,\mathrm{d}y = \frac{|\,Q \cap B\,|}{\lambda^{n+1}\left|\overline{\mathrm{K}}\,(0,1)\right|} \gtrsim_n \frac{|\,Q\cap B\,|}{(2^{-m})^{n+1}} = \frac{|\,Q\cap B\,|}{|\,Q\,|}\,.
\end{aligned}
$$

Uočimo da za proizvoljan $Q \in C$ vrijedi $|\,Q\,| = \frac{1}{\mathrm{card}(C)}$. Stoga vrijedi

$$
\mathcal{N}^1_\lambda(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B) \gtrsim \sum_{Q\in C} \left(\frac{|\,Q\cap B\,|}{|\,Q\,|}\right)^{n+1} \int_Q \mathbb{1}_B(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{card}\,(C)} \sum_{Q\in C} \left(\frac{|\,Q\cap B\,|}{|\,Q\,|}\right)^{n+1}\,.
$$

Budući da je funkcija $[0,\infty\rangle \to \mathbb{R}$ $t \mapsto t^{n+1}$ konveksna, zbog Jensenove nejednakosti vrijedi

$$
\mathcal{N}^1_\lambda(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B) \gtrsim \left(\frac{1}{\mathrm{card}\,(C)} \sum_{Q\in C} \frac{|\,Q\cap B\,|}{|\,Q\,|}\right)^{n+1} = |\,B\,|^{n+1} > \delta^{n+1}\,.
$$

Dakle, postoji konstanta $c_{\mathrm{str}} > 0$ koja ovisi o n i τ, takva da vrijedi

$$
\mathcal{N}^1_\lambda(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B) \geq c_{\mathrm{str}}\delta^{n+1}\,. \tag{3.2}
$$

3.2 Dio-greška

U ovom odjeljku nam je za proizvoljan $\varepsilon \in \langle 0,1\rangle$, uz ranije uvedene oznake u ovom poglavlju, cilj ocijeniti izraz

$$
\sum_{j=1}^{J} \left(\mathcal{N}^\varepsilon_{\lambda_j}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B) - \mathcal{N}^1_{\lambda_j}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B)\right)\,.
$$

Iz nejednakosti trokuta i leme 2.3.6 slijedi

$$
\sum_{j=1}^{J} \left|\mathcal{N}^\varepsilon_{\lambda_j}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B) - \mathcal{N}^1_{\lambda_j}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B)\right| \leq \sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{J} \left|\mathcal{L}^{\varepsilon,1,m}_j(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B)\right|\,.
$$

Zbog simetrije u definiciji izraza $\mathcal{L}^{\varepsilon,1,m}_j(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B)$, dovoljno je provesti ocjenu za vrijednost $m = n$, dok će za ostale m vrijediti potpuno analogna ograda.

Označimo $\theta := \frac{1}{10e}$. Vrijedi

$$1 = \log e = \log x \Big|_{\theta t\lambda_j}^{e\theta t\lambda_j} = \int\limits_{\theta t\lambda_j}^{e\theta t\lambda_j} \frac{\mathrm{d}s}{s}\,.$$

Ovim izrazom pomnožimo $\mathcal{L}_{\lambda_j}^{\varepsilon,1,n}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B)$ te dobivamo

$$\mathcal{L}_{\lambda_j}^{\varepsilon,1,n}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B) = \frac{-1}{2\pi} \int\limits_{\varepsilon}^{1} \int\limits_{\theta t\lambda_j}^{e\theta t\lambda_j} \int\limits_{(R^{n+1})^n} \mathbb{1}_B(x) \prod_{k=1}^{n-1} (\mathbb{1}_B * g_{t\lambda_j})(x + y_k)$$

$$(\mathbb{1}_B * \tilde{\sigma}_{\lambda_j v_n}^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}} * k_{t\lambda_j})(x) \mathrm{d}\sigma_{\lambda_j v_{n-1}}^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-2}}(y_{n-1}) \ldots \mathrm{d}\sigma_{\lambda_j v_2}^{y_1}(y_2) \mathrm{d}\sigma_{\lambda_j v_1}(y_1) \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}s}{s} \frac{\mathrm{d}t}{t}\,.$$

Označimo $r = r(j, s, t) := \sqrt{(t\lambda_j)^2 - s^2}$ te primijetimo da vrijedi $s \sim t\lambda_j \sim r$. Nadalje, koristeći poznati identitet za konvoluciju gaussovske funkcije, propoziciju 1.4.4 dio (2.), dobivamo

$$\tilde{\sigma}_{\lambda_j v_n}^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}} * k_{t\lambda_j} = \frac{(t\lambda_j)^2}{rs} \sum_{l=1}^{n+1} \tilde{\sigma}_{\lambda_j v_n}^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}} * h_r^{(l)} * h_s^{(l)}$$

pa, uvažavajući da je konvolucija komutativna operacija, ocjenjujemo

$$\left|\mathcal{L}_{\lambda_j}^{\varepsilon,1,n}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B)\right| \lesssim \sum_{l=1}^{n+1} \int\limits_{\varepsilon}^{1} \int\limits_{\theta t\lambda_j}^{e\theta t\lambda_j} \int\limits_{(R^{n+1})^n} \mathbb{1}_B(x) \prod_{k=1}^{n-1} \left|(\mathbb{1}_B * g_{t\lambda_j})(x + y_k)\right|$$

$$\left|\mathbb{1}_B * h_s^{(l)} * \tilde{\sigma}_{\lambda_j v_n}^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}} * h_r^{(l)}(x)\right| \mathrm{d}\sigma_{\lambda_j v_{n-1}}^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-2}}(y_{n-1}) \ldots \mathrm{d}\sigma_{\lambda_j v_2}^{y_1}(y_2) \mathrm{d}\sigma_{\lambda_j v_1}(y_1) \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}s}{s} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$\leq \sum_{l=1}^{n+1} \int\limits_{\varepsilon}^{1} \int\limits_{\theta t\lambda_j}^{e\theta t\lambda_j} \int\limits_{(R^{n+1})^{n+1}} \mathbb{1}_B(x) \left| \left(\mathbb{1}_B * h_s^{(l)}\right)(x + y) \right| \left| \left(\tilde{\sigma}_{\lambda_j v_n}^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}} * h_r^{(l)}\right)(y) \right|$$

$$\mathrm{d}\sigma_{\lambda_j v_{n-1}}^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-2}}(y_{n-1}) \ldots \mathrm{d}\sigma_{\lambda_j v_2}^{y_1}(y_2) \mathrm{d}\sigma_{\lambda_j v_1}(y_1) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \frac{\mathrm{d}s}{s} \frac{\mathrm{d}t}{t}\,.$$

U daljenjem ocjenjivanju trebamo sljedeći rezultat o realnim brojevima

Lema 3.2.1. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ proizvoljni te neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Tada vrijedi*

$$(1 + |a - b|)^{-n} \leq (1 + |a|)^{-n}(1 + |b|)^n\,.$$

Dokaz. Iz obrnute nejednakosti trokuta slijedi $1+|a-b| \geq 1+|a|-|b|$. Odavde zaključujemo

$$1+|a| \leq 1+|a-b|+|b| \leq (1+|a-b|)(1+|b|)\,.$$

Dakle vrijedi $(1+|a-b|)^{-1} \leq (1+|a|)^{-1}(1+|b|)$ pa potenciranjem sljedi

$$(1+|a-b|)^{-n} \leq (1+|a|)^{-n}(1+|b|)^{n}\,. \qquad \square$$

Nadalje, za proizvoljan $s>0$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
\left|\sigma^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}}_{\frac{\lambda_j v_n}{s}} * h^{(l)}_{\frac{r}{s}}(x)\right| &\lesssim \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left|h^{(l)}_{\frac{r}{s}}(x-y)\right| \,\mathrm{d}\sigma^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}}_{\frac{\lambda_j v_n}{s}}(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left|h^{(l)}_{\frac{r}{s}}\left(x-\frac{\lambda_j}{s}y\right)\right| \,\mathrm{d}\sigma^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}}_{v_n}(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(\frac{s}{r}\right)^{n+1} \left|h^{(l)}\left(\frac{s}{r}x-\frac{\lambda_j}{r}y\right)\right| \,\mathrm{d}\sigma^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}}_{v_n}(y) \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(\frac{s}{r}\right)^{n+1} \left(1+\left|\frac{s}{r}x-\frac{\lambda_j}{r}y\right|\right)^{-n-2} \,\mathrm{d}\sigma^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}}_{v_n}(y) \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(\frac{s}{r}\right)^{n+1} \left(1+\frac{s}{r}|x|\right)^{-n-2} \left(1+\frac{\lambda_j}{r}|y|\right)^{n+2} \,\mathrm{d}\sigma^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}}_{v_n}(y) \\
&\lesssim_R (1+|x|)^{-n-2} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+2} \sigma^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}}_{v_n}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) \\
&\lesssim \varepsilon^{-n-2}\,(1+|x|)^{-n-2} \lesssim \varepsilon^{-n-2} \int_1^\infty g_\gamma(x)\frac{\mathrm{d}\gamma}{\gamma^2}\,.
\end{aligned}$$

Pritom smo koristili definicije skaliranih mjera i skaliranih funkcija te propoziciju 1.4.8 i lemu 3.2.1. Skaliranjem upravo pokazane nejednakosti za faktor s, lako dobivamo

$$\left|\left(\sigma^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}}_{\lambda_j v_n} * h^{(l)}_r\right)(x)\right| \lesssim \varepsilon^{-n-2} \int_1^\infty g_{s\gamma}(x)\frac{\mathrm{d}\gamma}{\gamma^2}\,.$$

Sada, budući da promatramo nenegativne funkcije, primjenom Fubinijevog teorema te koristeći Cauchy-Schwarzovu nejednakost, dobivamo

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{L}^{\varepsilon,1,n}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B)\right| &\lesssim \varepsilon^{-n-2} \sum_{l=1}^{n+1} \int_1^\infty \int_\varepsilon^1 \int_{\theta t\lambda_j}^{e\theta t\lambda_j} \int_{(\mathbb{R}^{n+1})^{n+1}} \mathbb{1}_B(x) \left|\left(\mathbb{1}_B * h_s^{(l)}\right)(x+y)\right| g_{s\gamma}(y) \\
&\qquad \mathrm{d}\sigma_{\lambda_j v_{n-1}}^{y_1,y_2,\ldots,y_{n-2}}(y_{n-1}) \ldots \mathrm{d}\sigma_{\lambda_j v_2}^{y_1}(y_2) \mathrm{d}\sigma_{\lambda_j v_1}(y_1) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \frac{\mathrm{d}s}{s}\frac{\mathrm{d}t}{t}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\gamma^2} \\
&= \varepsilon^{-n-2} \sum_{l=1}^{n+1} \int_1^\infty \int_\varepsilon^1 \int_{\theta t\lambda_j}^{e\theta t\lambda_j} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left|\mathbb{1}_B(x)\right| \left|\left(\mathbb{1}_B * h_s^{(l)}\right)(x+y)\right| g_{s\gamma}(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \frac{\mathrm{d}s}{s}\frac{\mathrm{d}t}{t}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\gamma^2} \\
&\lesssim \varepsilon^{-n-2} \sum_{l=1}^{n+1} \int_1^\infty \int_\varepsilon^1 \int_{\theta t\lambda_j}^{e\theta t\lambda_j} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \|\mathbb{1}_B\|_{L^2} \left\|\mathbb{1}_B * h_s^{(l)}\right\|_{L^2} g_{s\gamma}(y) \mathrm{d}y \frac{\mathrm{d}s}{s}\frac{\mathrm{d}t}{t}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\gamma^2} \\
&\lesssim \varepsilon^{-n-2} \sum_{l=1}^{n+1} \int_\varepsilon^1 \int_{\theta t\lambda_j}^{e\theta t\lambda_j} \left\|\mathbb{1}_B * h_s^{(l)}\right\|_{L^2} \frac{\mathrm{d}s}{s}\frac{\mathrm{d}t}{t}.
\end{aligned}$$

Još jednom primjenom Cauchy-Schwarzove nejednakosti dobivamo

$$\left|\mathcal{L}_{\lambda_j}^{\varepsilon,1,n}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B)\right|^2 \lesssim \varepsilon^{-2n-4} \left(\sum_{l=1}^{n+1} \int_\varepsilon^1 \int_{\theta t\lambda_j}^{e\theta t\lambda_j} \left\|\mathbb{1}_B * h_s^{(l)}\right\|_{L^2}^2 \frac{\mathrm{d}s}{s}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)\left(\sum_{l=1}^{n+1} \int_\varepsilon^1 \int_{\theta t\lambda_j}^{e\theta t\lambda_j} 1^2 \frac{\mathrm{d}s}{s}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right).$$

Drugi faktor na desnoj strani ocijenimo kao

$$\sum_{l=1}^{n+1} \int_\varepsilon^1 \int_{\theta t\lambda_j}^{e\theta t\lambda_j} 1^2 \frac{\mathrm{d}s}{s}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{l=1}^{n+1} \log t\Big|_\varepsilon^1 = (n+1)\log\frac{1}{\varepsilon}.$$

Primjenom Cauchy-Schwarzove nejednakosti u $\mathbb{R}^J$, dobivamo ocjenu

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{J} \left|\mathcal{L}_{\lambda_j}^{\varepsilon,1,n}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B)\right| &\le J^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{J} \left|\mathcal{L}_{\lambda_j}^{\varepsilon,1,n}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \varepsilon^{-n-2} \left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} J^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{l=1}^{n+1} \int_\varepsilon^1 \int_{\theta t\lambda_j}^{e\theta t\lambda_j} \left\|\mathbb{1}_B * h_s^{(l)}\right\|_{L^2}^2 \frac{\mathrm{d}s}{s}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Primijetimo da za fiksni $t \in [\varepsilon, 1]$, zbog činjenice da za sve $j \in \{1, 2, \dots, J\}$ imamo $\lambda_{j+1} \leq \frac{\lambda_j}{2}$, vrijedi da segmenti $[\theta t \lambda_j, e\theta t \lambda_j]$, $j = 1, 2, \dots, J$, svaki broj $s \in \langle 0, \infty \rangle$ pokrivaju najviše dva puta. Stoga vrijedi sljedeća gruba ocjena

$$\sum_{j=1}^{J} \int_{\theta t \lambda_j}^{e\theta t \lambda_j} \left\| \mathbb{1}_B * h_s^{(l)} \right\|_{L_2}^2 \frac{\mathrm{d}s}{s} \leq 2 \int_0^\infty \left\| \mathbb{1}_B * h_s^{(l)} \right\|_{L^2}^2 \frac{\mathrm{d}s}{s} .$$

Primjenom Fubinijevog teorema dobivamo

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{J} \left| \mathcal{L}_{\lambda_j}^{\varepsilon,1,n}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \dots, \mathbb{1}_B) \right| &\lesssim \varepsilon^{-n-2} \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} J^{\frac{1}{2}} \left(\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \sum_{l=1}^{n+1} \left\| \mathbb{1}_B * h_s^{(l)} \right\|_{L^2}^2 \frac{\mathrm{d}s}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \varepsilon^{-n-2} \log \frac{1}{\varepsilon} J^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \sum_{l=1}^{n+1} \left\| \mathbb{1}_B * h_s^{(l)} \right\|_{L^2}^2 \frac{\mathrm{d}s}{s} \right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

Iz Plancherelove formule slijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n+1} \left\| \mathbb{1}_B * h_s^{(l)} \right\|_{L^2}^2 = \sum_{l=1}^{n+1} \left\| \widehat{\mathbb{1}_B} \hat{h}_s^{(l)} \right\|_{L^2}^2 &= \sum_{l=1}^{n+1} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left| \widehat{\mathbb{1}_B}(\xi) \right|^2 \left| \hat{h}^{(l)}(s\xi) \right|^2 \mathrm{d}\xi = \\
&= \sum_{l=1}^{n+1} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left| \widehat{\mathbb{1}_B}(\xi) \right|^2 4\pi^2 s^2 |\xi_l|^2 e^{-2\pi s^2 |\xi|^2} \mathrm{d}\xi \\
&= 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left| \widehat{\mathbb{1}_B}(\xi) \right|^2 s^2 |\xi|^2 e^{-2\pi s^2 |\xi|^2} \mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

pa je onda

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{J} \left| \mathcal{L}_{\lambda_j}^{\varepsilon,1,n}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \dots, \mathbb{1}_B) \right| &\lesssim \varepsilon^{-n-2} \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right) J^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left| \widehat{\mathbb{1}_B}(\xi) \right|^2 s^2 |\xi|^2 e^{-2\pi s^2 |\xi|^2} \mathrm{d}\xi \frac{\mathrm{d}s}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \varepsilon^{-n-2} \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right) J^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left| \widehat{\mathbb{1}_B}(\xi) \right|^2 \int_0^\infty s |\xi|^2 e^{-2\pi s^2 |\xi|^2} \mathrm{d}s \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

Supstitucijom $u = 2\pi s^2 |\xi|^2$ za integral „po s”, dobivamo

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{J} \left|\mathcal{L}_{\lambda_j}^{\varepsilon,1,n}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \dots, \mathbb{1}_B)\right| &\lesssim \varepsilon^{-n-2} \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) J^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left|\widehat{\mathbb{1}_B(\xi)}\right| \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\infty} e^{-u} \mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \varepsilon^{-n-2} \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) J^{\frac{1}{2}} \left\|\widehat{\mathbb{1}_B}\right\|_{L^2} = \varepsilon^{-n-2} \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) J^{\frac{1}{2}} \left\|\mathbb{1}_B\right\|_{L^2} \\ &\leq \varepsilon^{-n-2} \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) J^{\frac{1}{2}} .\end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo da postoji konstanta $c_{\text{gre}} > 0$ takva da vrijedi

$$\sum_{j=1}^{J} \left|\mathcal{N}_{\lambda_j}^{\varepsilon}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \dots, \mathbb{1}_B) - \mathcal{N}_{\lambda_j}^{1}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \dots, \mathbb{1}_B)\right| \leq c_{\text{gre}} \varepsilon^{-n-2} \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) J^{\frac{1}{2}} . \tag{3.3}$$

3.3 Uniformni dio

U ovom odjeljku nam je cilj za proizvoljne $\lambda, \varepsilon \in \langle 0, 1]$ ocijeniti izraz

$$\left|\mathcal{N}_{\lambda}^{0}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \dots, \mathbb{1}_B) - \mathcal{N}_{\lambda}^{\varepsilon}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \dots, \mathbb{1}_B)\right| .$$

Primjenom leme 2.3.5 dobivamo da je

$$\left|\mathcal{N}_{\lambda}^{0}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \dots, \mathbb{1}_B) - \mathcal{N}_{\lambda}^{\varepsilon}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \dots, \mathbb{1}_B)\right| = \lim_{\theta \to 0^+} \left|\mathcal{N}_{\lambda}^{\theta}(\mathbb{1}_B, \dots, \mathbb{1}_B) - \mathcal{N}_{\lambda}^{\varepsilon}(\mathbb{1}_B, \dots, \mathbb{1}_B)\right| .$$

Za dovoljno malene θ, primjenom leme 2.3.6 dobivamo

$$\mathcal{N}_{\lambda}^{0}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \dots, \mathbb{1}_B) - \mathcal{N}_{\lambda}^{\varepsilon}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \dots, \mathbb{1}_B) = \sum_{m=1}^{n} \mathcal{L}_{\lambda}^{\theta,\varepsilon,m}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \dots, \mathbb{1}_B) .$$

Kao i u odjeljku 3.2, dovoljno je zbog simetrije u definiciji ocijeniti samo $\mathcal{L}_{\lambda}^{\theta,\varepsilon,m}$ za $m = n$, dok će za preostale m vrijediti potpuno analogna ocjena.

Iz definicije od $\mathcal{L}_\lambda^{\theta,\varepsilon,n}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \dots, \mathbb{1}_B)$ te Cauchy-Schwarzove nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{L}_\lambda^{\theta,\varepsilon,n}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \dots, \mathbb{1}_B)\right| \lesssim & \int_\theta^\varepsilon \int_{(\mathbb{R}^{n+1})^n} |\mathbb{1}_B(x)| \left|\left(\mathbb{1}_B * \tilde{\sigma}_{\lambda v_n}^{y_1,y_2,\dots,y_{n-1}} * k_{t\lambda}\right)(x+y_n)\right| \left|\prod_{k=1}^{n-1} (f_k * g_{t\lambda})(x+y_k)\right| \\
& \qquad \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_{n-1}}^{y_1,y_2,\dots,y_{n-2}}(y_{n-1}) \dots \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_2}^{y_1}(y_2) \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_1}(y_1) \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
\lesssim & \int_\theta^\varepsilon \left(\int_{(\mathbb{R}^{n+1})^{n-1}} \|\mathbb{1}_B\|_{L^2}^2 \, \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_{n-1}}^{y_1,y_2,\dots,y_{n-2}}(y_{n-1}) \dots \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_1}(y_1) \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \left(\int_{(\mathbb{R}^{n+1})^{n-1}} \left\|\mathbb{1}_B * \tilde{\sigma}_{\lambda v_n}^{y_1,y_2,\dots,y_{n-1}} * k_{t\lambda}\right\|_{L^2}^2 \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_{n-1}}^{y_1,y_2,\dots,y_{n-2}}(y_{n-1}) \dots \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_1}(y_1) \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t}.
\end{aligned}$$

Prvi faktor ocijenimo sa 1, a na drugi primjenimo Plancherelov teorem pa dobivamo da vrijedi

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{L}_\lambda^{\theta,\varepsilon,n}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \dots, \mathbb{1}_B)\right| \lesssim & \int_\theta^\varepsilon \Bigg(\int_{(\mathbb{R}^{n+1})^n} \left|\widehat{\mathbb{1}_B}(\xi)\right|^2 |\hat{\sigma}^{y_1,y_2,\dots,y_{n-1}}(\lambda v_n \xi)|^2 \left|\hat{k}(t\lambda\xi)\right|^2 \\
& \qquad \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_{n-1}}^{y_1,y_2,\dots,y_{n-2}}(y_{n-1}) \dots \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_2}^{y_1}(y_2) \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_1}(y_1) \Bigg)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
= & \int_\theta^\varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left|\widehat{\mathbb{1}_B}(\xi)\right|^2 \left|\hat{k}(t\lambda\xi)\right|^2 \mathcal{J}(\lambda v_n \xi) \, \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t},
\end{aligned}$$

gdje smo označili

$$\mathcal{J}(\xi) := \int_{(\mathbb{R}^{n+1})^{n-1}} \left|\hat{\tilde{\sigma}}^{y_1,y_2,\dots,y_{n-1}}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_{n-1}}^{y_1,y_2,\dots,y_{n-2}}(y_{n-1}) \dots \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_2}^{y_1}(y_2) \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_1}(y_1).$$

Lema 3.3.1. *Uz ranije uvedene oznake vrijedi*

$$\int_{(\mathbb{R}^{n+1})^{n-1}} \left|\mathrm{P}_{\{y_1,y_2,\dots,y_{n-1}\}^\perp}\xi\right|^{-1} \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_{n-1}}^{y_1,y_2,\dots,y_{n-2}}(y_{n-1}) \dots \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_2}^{y_1}(y_2) \mathrm{d}\sigma_{\lambda v_1}(y_1) \lesssim |\xi|^{-1} \, .$$

Dokaz. Tvrdimo da je promatrani integral zapravo jednak integralu

$$\begin{aligned}
\int_{(\mathbb{R}^{n+1})^{n-1}} & \left|\mathrm{P}_{\{y_1,y_2,\dots,y_{n-1}\}^\perp}\xi\right|^{-1} \mathrm{d}\sigma_{v_{n-1}}^{\frac{1}{v_{n-1}}(\beta_{n-1,1}y_1+\beta_{n-1,2}y_2+\dots+\beta_{n-1,n-2}y_{n-2}),\{y_1,y_2,\dots,y_{n-2}\}^\perp}(y_{n-1}) \dots \\
& \dots \mathrm{d}\sigma_{v_2}^{\frac{1}{v_2}\beta_{2,1}y_1,\{y_1\}^\perp}(y_2) \, \mathrm{d}\sigma_{v_1}^{0,\mathbb{R}^{n+1}}(y_1) \, .
\end{aligned}$$

Naime, kada integriramo po mjeri $\sigma_{\lambda v_1}$ zapravo integriramo po mjeri σ_{v_1}, ali je varijabla integracije skalirana za faktor λ, no potprostor $\{y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\}^{\perp}$ ostaje nepromijenjen ako je vektor y_1 skaliran za faktor λ. Analognim argumentiranjem za mjere $\sigma_{\lambda v_2}, \ldots, \sigma_{\lambda v_3}$ slijedi tvrdnja.

Intuitivno se ovaj integral može shvatiti kao prosjek veličine $|\mathrm{P}_H \xi|^{-1}$ po svim $(n-1)$-dimenzionalnim potprostorima H od $\mathbb{R}^{n+1}$. Zaista, prisjetimo se da su $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ vektori bridova simpleksa dobivenog proizvoljnom rotacijom simpleksa τ. Radi simetrije span$\{y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\}$ uniformno prolazi svim $(n-1)$-dimenzionalnim potprostorima od $\mathbb{R}^{n+1}$. Međutim, umjesto da fiksiramo ξ, a „rotiramo potprostore”, rotiramo ξ te ga uvijek projiciramo na fiksni dvodimenzionalni potprostor $\{(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1})\} \times \mathbb{R}^2$.

U $(n+1)$-dimenzionalnim sferičnim koordinatama:

$$\begin{aligned}\xi = |\xi|(&\cos\varphi_1, \sin\varphi_1 \cos\varphi_2, \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3, \ldots, \sin\varphi_1 \cdots \cdots \sin\varphi_{n-1} \cos\varphi_n, \\ &\sin\varphi_1 \cdots \sin\varphi_{n-1} \sin\varphi_n),\end{aligned}$$

pritom su $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1} \in [0, \pi]$ te je $\varphi_n \in [0, 2\pi\rangle$. Uočimo još da vrijedi

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{P}_{\{(0,0,\ldots,0)\}\times\mathbb{R}^2} \xi\right| &= |\xi| \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-1} \, |(\cos\varphi_n, \sin\varphi_n)| \\ &= |\xi| \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-1} \,.\end{aligned}$$

Gornji integral je stoga jednak

$$\int_{[0,\pi]^{n-1}\times[0,2\pi\rangle} \frac{1}{|\xi|} \frac{\sin^{n-1}\varphi_1 \sin^{n-2}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-1}}{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-1}} \, \mathrm{d}\varphi_1 \mathrm{d}\varphi_2 \ldots \mathrm{d}\varphi_n \lesssim |\xi|^{-1} \,. \qquad \square$$

Sada, koristeći lemu 2.2.7 možemo provesti ocjenu:

$$\begin{aligned}\left|\widehat{k}(t\lambda\xi)\right|^2 \mathcal{J}(\lambda v_n \xi) &\lesssim \left|\widehat{k}(t\lambda\xi)\right|^2 \lambda^{-1} v_n^{-1} \, |\xi|^{-1} \\ &\lesssim_\tau t^4 \lambda^4 \, |\xi|^4 \, e^{-2\pi t^2 \lambda^2 |\xi|^2} \lambda^{-1} \, |\xi|^{-1} \\ &\leq t \sup_{u\in[0,\infty\rangle} u^3 e^{-2\pi u^2} \\ &\lesssim t \,.\end{aligned}$$

Pritom smo u prvoj nejednakosti iskoristili lemu 3.3.1, u drugoj propoziciju 1.4.3, a u posljednjoj činjenicu da gaussovske funkcije u beskonačnosti trnu brže od svih polinoma.

Konačno, imamo da vrijedi

$$\left|\mathcal{L}_\lambda^{\theta,\varepsilon,n}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B)\right| \lesssim \int\limits_\theta^\varepsilon \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \left|\widehat{\mathbb{1}_B}(\xi)\right|^2 t\mathrm{d}\xi\Bigg)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int\limits_\theta^\varepsilon \left\|\widehat{\mathbb{1}_B}\right\|_{L^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$
$$= \int\limits_\theta^\varepsilon \|\mathbb{1}_B\|_{L^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \lesssim 2\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \theta^{\frac{1}{2}}\right) \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}}\,.$$

Dakle, postoji konstanta $c_{\mathrm{uni}} > 0$ takva da vrijedi

$$\left|\mathcal{N}_\lambda^0(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B) - \mathcal{N}_\lambda^\varepsilon(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B)\right| \le c_{\mathrm{uni}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\,. \tag{3.4}$$

3.4 Dokaz teorema 2.1.5

Neka je Δ skup vrhova nekog proizvoljnog nedegeneriranog n-simpleksa τ u $\mathbb{R}^{n+1}$. Nadalje, neka je $\delta \in \langle 0, 1\rangle$ proizvoljan te neka je B proizvoljan izmjeriv podskup od $[0, 1]^{n+1}$ koji zadovoljava $|\,B\,| > \delta$. Odaberimo neki $\varepsilon \in \langle 0, 1\rangle$ koji zadovoljava

$$c_{\mathrm{uni}}\varepsilon^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{3} c_{\mathrm{str}}\delta^{n+1}\,. \tag{3.5}$$

Za taj ε odaberemo dovoljno velik prirodan broj J koji zadovoljava

$$c_{\mathrm{gre}}\varepsilon^{-n-2}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right) J^{-\frac{1}{2}} \le \frac{1}{3} c_{\mathrm{str}}\delta^{n+1}\,. \tag{3.6}$$

Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_J \in \langle 0, 1]$ proizvoljni skalari za koje je $\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \le \frac{1}{2}$ za sve $j \in \{1, 2, \ldots, J\}$. Iz odjeljka 3.2 zaključujemo da postoji $j \in \{1, 2, \ldots, J\}$ takav da vrijedi

$$\left|\mathcal{N}_{\lambda_j}^\varepsilon(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B) - \mathcal{N}_{\lambda_j}^1(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B)\right| \le c_{\mathrm{gre}}\varepsilon^{-n-2}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right) J^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Naime, u suprotnom bi vrijedilo

$$\sum_{j=1}^J \left|\mathcal{N}_{\lambda_j}^\varepsilon(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B) - \mathcal{N}_{\lambda_j}^1(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B)\right| > c_{\mathrm{gre}}\varepsilon^{-n-2}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right) J^{\frac{1}{2}}\,,$$

što je u kontradikciji s ocjenom (3.3) iz odjeljka 3.2. Za ovaj j po ocjeni (3.4) iz odjeljka 3.3 vrijedi

$$\left|\mathcal{N}_{\lambda_j}^0(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B) - \mathcal{N}_{\lambda_j}^\varepsilon(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B)\right| \le c_{\mathrm{uni}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\,.$$

Također, po ocjeni (3.2) iz odjeljka 3.1 dobivamo da je

$$\mathcal{N}^1_{\lambda_j}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B) \geq c_{\mathrm{str}}\delta^{n+1}\,.$$

Konačno, iz ključnog rastava (3.1) brojeće forme na strukturirani dio, uniformni dio i diogrešku te odabira (3.5) i (3.6) dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}^0_{\lambda_j}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B) &\geq \mathcal{N}^1_{\lambda_j}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B) - \left|\mathcal{N}^\varepsilon_{\lambda_j}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B) - \mathcal{N}^1_{\lambda_j}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B)\right| \\
&\quad - \left|\mathcal{N}^0_{\lambda_j}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B) - \mathcal{N}^\varepsilon_{\lambda_j}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B)\right| \\
&\geq c_{\mathrm{str}}\delta^{n+1} - c_{\mathrm{gre}}\varepsilon^{-n-2}\log\frac{1}{\varepsilon}J^{-\frac{1}{2}} - c_{\mathrm{uni}}\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\
&\geq c_{\mathrm{str}}\delta^{n+1} - \frac{1}{3}c_{\mathrm{str}}\delta^{n+1} - \frac{1}{3}c_{\mathrm{str}}\delta^{n+1} = \frac{1}{3}c_{\mathrm{str}}\delta^{n+1} > 0\,.
\end{aligned}$$

Budući da je $\mathcal{N}^0_{\lambda_j}(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B, \ldots, \mathbb{1}_B) > 0$, prema razmatranjima iz odjeljka 2.3 slijedi da B sadrži vrhove simpleksa koji je izometričan sa $\lambda_j\tau$. Ovime je dovršen dokaz teorema 2.1.5.

Kao što smo već bili spomenuli u uvodnom poglavlju, navedeni dokaz je modifikacija dokaza iz članka [6]. Originalni Bourgainov pristup je sličan, ali ne koristi gaussovske funkcije. U tom članku dokazano je i svojevrsno poopćenje Bourgainovog rezultata na simplekse čiji bridovi iz istog vrha su rastegnuti za faktore $\lambda^{a_1}, \lambda^{a_2}, \ldots, \lambda^{a_n}$, za neke, moguće različite, eksponente $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$.

Bibliografija

[1] J. Bourgain, *A Szemerédi type theorem for sets of positive density in* $\mathbb{R}^k$, Israel J. Math. **54** (1986), br. 3, 307–316.

[2] P. Durcik i V. Kovač, *A Szemerédi-type theorem for subsets of the unit cube*, Anal. PDE (2020), accepted for publication, `https://arxiv.org/abs/2003.01189`.

[3] K. J. Falconer i J. M. Marstrand, *Plane sets with positive density at infinity contain all large distances*, Bull. London Math. Soc. **18** (1986), br. 5, 471–474.

[4] G. B. Folland, *Real Analysis*, A Wiley-Interscience Publication, 1999.

[5] H. Furstenberg, Y. Katznelson i B. Weiss, *Ergodic theory and configurations in sets of positive density. Mathematics of Ramsey theory*, Algorithms Combin. **5** (1990), Springer, Berlin.

[6] V. Kovač, *Density theorems for anisotropic point configurations*, Canad. J. Math. (2020), accepted for publication, `https://arxiv.org/abs/2008.01060`.

[7] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza*, Školska Knjiga, 1981.

Sažetak

U ovoj radnji dokazan je Bourgainov teorem o simpleksu. Teorem tvrdi da za proizvoljan n-simpleks Δ u $\mathbb{R}^{n+1}$ te za proizvoljan izmjeriv skup pozitivne gornje Banachove gustoće $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ postoji realan broj λ_0, koji ovisi o Δ i A, takav da za svaki $\lambda \geq \lambda_0$ skup A sadrži vrhove neke izometrične kopije od $\lambda\Delta$.

Dokaz počiva na elementarnim tehnikama Fourierove analize, stoga je prvo poglavlje posvećeno ponavljanju analitičkih tehnika koje se susreću na diplomskom studiju te osnovnim rezultatima o Fourierovoj pretvorbi i gaussovskim funkcijama. Potom, u drugom poglavlju, uz preciznu formulaciju problema, uvedeni su pojmovi sferičnih mjera i brojećih formi. Konačno, treće poglavlje kompletira dokaz rastavljajući brojeću formu na strukturirani dio, dio-grešku i uniformni dio.

Summary

This thesis contains the proof of the so-called Bourgain's simplex theorem. The theorem states that, for a given n-simplex Δ in $\mathbb{R}^{n+1}$ and for a given measurable set of positive upper Banach density $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, there exists a real number λ_0, which depends on Δ and A, such that for every real number $\lambda \geq \lambda_0$, the set A contains the vertices of an isometric copy of $\lambda\Delta$.

The proof used techniques from elementary Fourier analysis. Therefore the first chapter is dedicated to a recollection of basic tools from analysis encountered during the undergraduate studies and to basic results concerning the Fourier transform and Gaussian functions. The second chapter contains the precise formulation of the theorem, as well as introduction to spherical measures, and counting forms. Finally, in the third chapter, complete proof of Bourgain's theorem is given, by decomposing the counting form into a structured part, an error part, and a uniform part.

Životopis

Dana 11. veljače 1997. godine, rođen je Bruno Predojević. Osnovnu školu pohađa u Bjelovaru u Trećoj osnovnoj školi Bjelovar. Paralelno upisuje glazbenu školu Vatroslava Lisinskog u Bjelovaru, gdje pohađa pijanistički smjer. Srednjoškolsko obrazovanje nastavlja u Gimnaziji Bjelovar, gdje upisuje prirodoslovno-matematički program. Tokom osnovnog i srednjoškolskog obrazovanja pohađa razna natjecanja iz prirodoslovnih predmeta i matematike, na školskoj, županijskoj i državnoj razini. Akademske godine 2016./17. upisuje na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu preddiplomski sveučilišni studij Matematika. Na preddiplomskom studiju otkriva interes za analitičke kolegije te odlučuje nastaviti obrazovanje u tom smjeru pa akademske godine 2019./20. upisuje, na istom fakultetu, diplomski sveučilišni studij Teorijska matematika.