Osnovne ideje i didaktički potencijal u logičko-kombinatornim problemima

Šćepanović, Ivana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Šćepanović

OSNOVNE IDEJE I DIDAKTIČKI POTENCIJAL U LOGIČKO–KOMBINATORNIM PROBLEMIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Matija Bašić

Zagreb, rujan, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj diplomski rad posvećujem svojoj obitelji koja me je pratila, bezuvjetno podržavala i bila uz mene sve ove godine.

Hvala mojem Ivanu koji mi je uvijek davao vjetar u leđa, sa mnom se smijao i plakao i bodrio me u trenucima slabosti.

Hvala svim prijateljima na potpori tijekom studija, a posebno mojim dragim kolegicama koje su mi bile veliki oslonac i podrška.

Hvala svim profesorima, asistentima i mentorima koji su bili dio mog obrazovanja posljednje dvije godine i od kojih sam naučila jako puno.

Posebna zahvala mentoru doc. dr. sc. Matiji Bašiću na trudu, strpljenju i podršci tijekom izrade rada i cijelog diplomskog studija tijekom kojeg je nesebično dijelio svoje veliko znanje sa svojim studentima.

Sadržaj

Uvod

Društvo u 21. stoljeću od pojedinca zahtijeva razvoj bitno drugačijih kompetencija od onih u prošlim vremenima. Matematička kompetencija jedna je od osnovnih koje učenik mora steći tijekom svog obrazovanja. Sposobnost analize i rješavanja problema, snalaženje u problemskim situacijama i logičko rasuđivanje danas su neke od temeljnih osobina uspješnog pojedinca. Bez logičko-kombinatornog razmišljanja više ne možemo zamisliti svakodnevni život, ali problemi ovog tipa nisu česti u redovnoj nastavi matematike. Ovim radom želimo potaknuti na njihovo korištenje kroz aktivnosti usmjerene na istraživanje, ali istovremeno opisujemo ideje koje se nalaze u pozadini logičko-kombinatornih problema, a koje su osnovne u matematici.

U prvom poglavlju opisan je pojam osnovnih ideja koji svoje korijene vuče iz njemačkog matematičkog obrazovanja. Dan je niz primjera koji najbolje ilustriraju što osnovne ideje predstavljaju u izgradnji matematičkih koncepata. Osim toga, osnovne ideje uspoređene su s drugim temeljnim pojmovima u matematičkom obrazovanju, a opisan je i sam proces formiranja osnovnih ideja.

U drugom poglavlju dan je pregled razvoja i osnovnih pojmova Teorije didaktičkih situacija, jedne od najpoznatijih teorija koja ostvaruje ideje istraživački usmjerene nastave. Prema tim idejama, učenik se treba ponašati kao znanstvenik i istraživati problem, a uloga nastavnika je kreirati situaciju koja će mu to dozvoliti. Ključan pojam je didaktički potencijal. Pri tome mislimo na mogućnost koju određeni problem daje kako bi se izgradila situacija dovoljno bogata da bi se ostvarilo učenje.

U trećem poglavlju naglasak je na logičko-kombinatornim problemima. Dan je kratak pregled logike i kombinatorike kao dviju ključnih sastavnica ovih problema, a posebno su istaknute i opisane osnovne ideje kombinatorike koje povezujemo s temeljnim kombinatornim principima. Na kraju, za princip invarijantnosti i Dirichletov princip ilustrirano je kako se te osnovne ideje mogu razraditi u okviru aktivnosti i tipičnih primjera.

Poglavlje 1

Pojam osnovnih ideja

O prirodi raznih matematičkih koncepata raspravlja se dugi niz godina i mnogima od tih rasprava ne nazire se kraj. Kao rezultat rasprava razvijaju se različite definicije, aspekti, ali i prikazi tih koncepata, posebno u školskoj matematici. U ovom poglavlju koncepte u školskoj matematici analiziramo na pomalo drugačiji način, kroz osnovne ideje u matematičkom obrazovanju koje želimo da učenici usvoje te kroz poveznice među tim osnovnim idejama. U nastavku detaljno analiziramo pojam osnovnih ideja u matematici, kako kroz primjere, tako i teoretski pritom se referirajući većinom na rad Rudolfa vom Hofea[1], koji se smatra ključnom osobom u razvoju tog pojma. Nakon davanja teoretskog okvira za pojam osnovnih ideja, suprotstavljamo ga drugim sličnim pojmovima u matematičkom obrazovanju, kao što su fundamentalne ideje, slika i definicija pojma. Svaki od ovih pojmova odnosi se na izgradnju matematičkog koncepta ili cijelog matematičkog područja, no svaki na svoj način doprinosi toj izgradnji. No, kako bismo razumjeli što podrazumijeva pojam osnovnih ideja, potrebno je naglasiti kada i zašto je takav pojam razvijen.

Različiti su pristupi učenju i poučavanju, ali ovdje posebno ističemo *konstruktivistički pristup*. On se temelji na pretpostavci da se učenje odvija učenikovom konstrukcijom i rekonstrukcijom znanja koje je rezultat interakcije s okolinom uz utjecaj prethodno stečenog znanja [16]. Dakle, *konstruktivizam* podrazumijeva da su učenici aktivni u nastavnom procesu i konstruiraju svoja osobna znanja uz pomoć već postojećih. Kao takav, vuče korijene iz Sokratskih dijaloga[2], Deweyevog[3] rada i Piagetovih[4] istraživanja o kognitivnom razvoju kod djece. Konstruktivizam potiče i stvaranje koncepata i razvoj konceptualnog razumijevanja. Međutim, nije se na odgovarajući način osvrnuo na karakter i utjecaj prethodnih

[1]Rudolf vom Hofe (1955. -) - njemački matematičar i metodičar matematike

[2]Sokratski dijalog je argument (ili niz argumenata) dobiven pomoću metode pitanja i odgovora koju je koristio grčki filozof Sokrat (Atena 469. - Atena 399. pr. Kr.).

[3]John Dewey (Burlington 1859. - New York 1952.) - američki filozof, psiholog i obrazovni reformator

[4]Jean Piaget (Neuchâtel 1896. - Geneva 1984.) - švicarski psiholog

miskoncepcija učenika u procesu izgradnje znanja i koncepata. Svijest o ovoj manjkavosti dovela je do nove teorije koja se temelji na Kuhnovoj[5] sociologiji znanosti i Piagetovoj razvojnoj psihologiji [7].

Često se analiziraju i uz određene koncepte vezuju različite učeničke miskoncepcije, koje najčešće proizlaze iz njihovih osobnih iskustava i predodžbi. Iz tog se razloga javlja potreba za radikalnijom izmjenom postojeće strukture određenog koncepta. Time teorija konceptualne promjene postaje sve istaknutija u istraživanjima matematičkog obrazovanja, pokušavajući objasniti razne učeničke poteškoće u razumijevanju i prihvaćanju matematičkih koncepata. Konceptualna promjena se odnosi na ono što se događa s učenikom koji se našao u okruženju za učenje sa preznanjem koje je moguće miskoncepcija i zahtijeva da se promijeni ili izbriše s ciljem izgradnje boljeg znanja. U skladu s ovom teorijom, učenje se može dogoditi na dva načina: (1) novo znanje dodano je na staro znanje (asimilacija) i (2) staro znanje je rekonstruirano kao rezultat sukoba sa novim znanjem (akomodacija) prije nego se sukob može riješiti ili odbaciti (odbacivanje) od strane učenika [7]. Nakon tog procesa, učenici su podvrgnuti postupku prihvaćanja, integracije i korištenja novih koncepata. Uočimo, osnovni principi po kojima se odvija učenje sadrže osnovne pojmove Piagetove teorije kognitivnog razvoja kao što su asimilacija i akomodacija.

Iako je pristup konceptualne promjene pogodan za analiziranje učeničkih poteškoća, on ne reflektira kompleksnost procesa učenja, učeničko razumijevanje određenog koncepta kao ni učeničke poteškoće s učenjem. Osnovni razlozi za ovakve probleme proizlaze iz činjenice da učenici često razumiju matematičke koncepte, pojmove i simbole korištene u nastavi matematike na drugačiji način te im daju potpuno različita značenja od onih koje je nastavnik predvidio [7]. Kako bi se otklonili takvi problemi, razvijen je pojam osnovnih ideja, odnosno mentalnih modela. U Njemačkoj se ovi mentalni modeli, koji nose značenje matematičkih koncepata ili postupaka nazivaju *Grundvorstellungen*, a mi ih prevodimo kao osnovne ideje, što je razjašnjeno u nastavku.

1.1 Razvoj i obilježja pojma osnovnih ideja

Pojam osnovnih ideja razvijen je tijekom procvata pokreta *New Math*[6], kojim se zagovarala ideja da matematičko obrazovanje treba biti usmjereno na znanost od samog početka, što je dovelo do visoke razine formalizma unutar školske matematike, a kao sadržaji za poučavanje odabrani su skupovi, strukture, preslikavanja, funkcije i logički koncepti [12]. Time

[5]Thomas Kuhn (Cincinnati 1922. - Cambridge 1996.) - američki znanstveni filozof

[6]New Math - pokret u SAD-u tijekom razdoblja 1950. - 1970. kojim se zagovarala drastična promjena u načinu poučavanja matematike.

su posebno strogi akademski kurikulumi postali uobičajeni u nastavnim planovima i udžbenicima u osnovnoškolskom i srednjoškolskom obrazovanju. Iako se smatra američkim pokretom, *New Math* je zaživio i u drugim zemljama, a Njemačka je bila jedna od njih. Tamo su se sve promjene smatrale dijelom šireg procesa zvanog *Bildungsreform*, koji u prijevodu označava obrazovnu reformu. Upravo u to vrijeme kreće razvoj didaktike matematike u Njemačkoj. Cilj ovog pristupa školskoj matematici nije bio samo daljnje uvođenje akademske matematike u škole. Umjesto toga, cilj je bio razviti koncepte pomoću kojih će se matematičko znanje prikazati na način koji odgovara kognitivnim sposobnostima i osobnom iskustvu učenika, a istodobno pojednostaviti matematički materijal bez iskrivljavanja njegova izvornog oblika [12]. Drugim riječima, didaktika matematike u Njemačkoj opirala se tendenciji formaliziranja koncepata i postupaka koje je zagovarao *New Math* te je umjesto toga veću važnost pridavala konstruiranju održivih i čvrstih mentalnih reprezentacija (predodžbi) – *Grundvorstellungen* – kojima bi obuhvatili matematičke koncepte i postupke.

Dakle, pojam osnovnih ideja (njem. *Grundvorstellungen*) potječe iz tradicionalnog njemačkog pristupa didaktici matematike te ima dugu tradiciju u njemačkom matematičkom obrazovanju. Kao takav, važan je teorijski pojam njemačke didaktike matematike, koju u hrvatskom obrazovanju nazivamo metodikom nastave matematike. Sam naziv pojma prijevod je njemačke složenice *Grundvorstellungen* sastavljene od riječi "Grund" što znači "temeljno" ili "osnovno" i "Vorstellung" koja označava "ideju" ili "predodžbu". Upravo se zbog toga riječ Grundvorstellungen, ili kraće GV, može prevesti kao "osnovne ideje" ili "osnovne predodžbe".

Važnost povezivanja matematičkih pojmova i postupaka s odgovarajućim realnim kontekstom uočili su veliki njemački didaktičari matematike, na čelu sa spomenutim Rudolfom vom Hofeom. Pokušavajući poboljšati matematičko obrazovanje u Njemačkoj tijekom razvoja didaktike matematike, proveli su niz istraživanja čiji su rezultati pokazali da su prilikom postavljanja strategija za rješavanje matematičkog problema uvijek prisutne učenikove osobne pretpostavke i predodžbe koje se temelje na realnim iskustvima [14]. Upravo u tome leži važnost razvijanja osnovnih ideja.

Osnovne ideje opisuju odnose između matematičkog sadržaja i individualnog oblikovanja koncepta, pozivajući se posebno na tri glavna obilježja [14]:

- Konstitucija značenja matematičkog koncepta povezivanjem s već poznatim znanjem ili iskustvima ili s (mentalnim) predočenjem postupaka;
- Stvaranje odgovarajuće mentalne predodžbe tog koncepta, tj. "internalizacija" koja (prema Piagetu) omogućuje operativne akcije na misaonoj razini;

- Sposobnost primjene koncepta u stvarnim životnim situacijama prepoznavanjem odgovarajuće strukture u srodnim kontekstima ili modeliranjem srodnih problema uz pomoć matematičkih struktura.

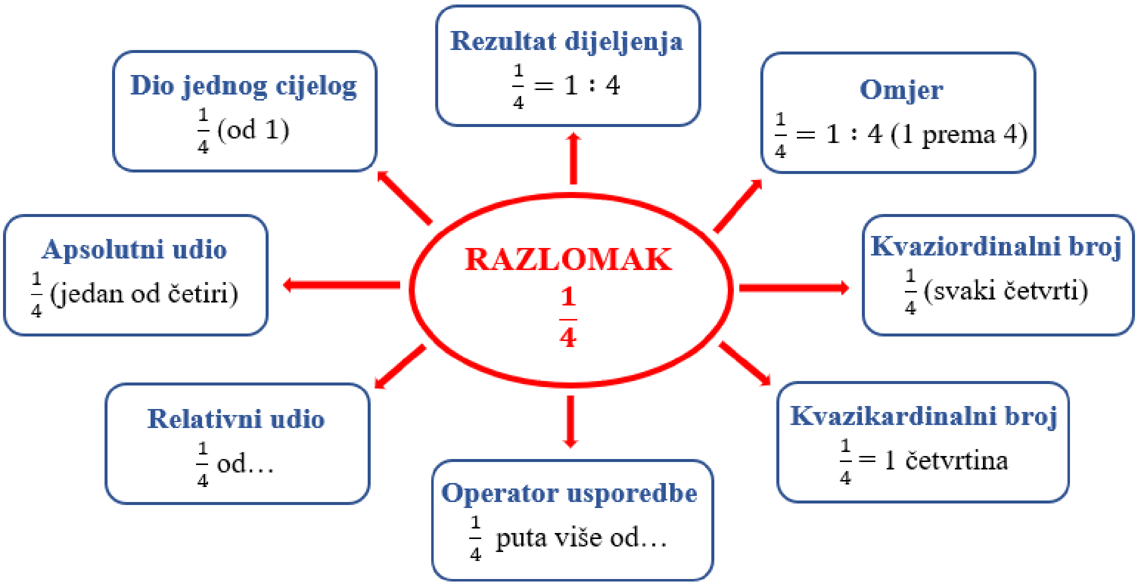
Prema prethodnom, osnovne bi se ideje trebale u potpunosti uklopiti u kognitivne sposobnosti učenika, a s druge strane obuhvatiti srž matematičkog sadržaja. Može se reći, pojam osnovnih ideja opisuje odnose između matematičkih struktura, individualno–psiholoških procesa i realnih situacija. Ukratko: odnos između matematike, pojedinca i stvarnosti. Pojam osnovnih ideja tako istovremeno ima intersubjektivni i individualni karakter. U ovoj očitoj kontradikciji leži osnovna pretpostavka pojma, koja se ukratko može opisati na sljedeći način: formiranje pojedinačnog matematičkog koncepta može se poduprijeti didaktičkim mjerama na takav način da pojedinačno konceptualno razumijevanje sadrži srž odgovarajućeg matematičkog sadržaja - u mjeri koja odgovara odgovarajućim uvjetima i u tom je smislu intersubjektivna. Sve spomenuto dovodi do zaključka da osnovne ideje možemo tumačiti kao "elemente povezanosti" ili "predmet prijelaza" između svijeta matematike i individualnog svijeta razmišljanja, koji pokazuju strukturne i funkcionalne aspekte određenog matematičkog sadržaja. Kao takve, nisu statične, već je njihovo generiranje dinamičan proces promjena, ovisno o uključivanju novih matematičkih sadržaja. U nastavku, osnovne ideje treba razumjeti u sveobuhvatnom smislu koji uključuje navedena tri glavna obilježja i to kroz konkretne primjere.

1.2 Osnovne ideje kroz primjer

Kako je prethodno naglašeno, svrha osnovnih ideja je ilustracija srži matematičkog koncepta ili postupka kroz pridruživanje realnog konteksta. Primjerice, osnovna ideja dijeljenja prirodnih brojeva je podijeliti cjelinu na dijelove. Još neki primjeri osnovnih ideja relevantni za osnovnu školu uključuju zbrajanje prirodnih brojeva ("sastavljanje", "pridruživanje", "promjena", detaljnije opisano u *Primjer 2. Zbrajanje*) ili pojam razlomka ("dio cjeline, udio", "operator", "omjer", detaljnije opisano u *Primjer 1. Razlomak*). Klasični primjeri za srednju školu uključuju osnovne ideje pojma kuta ("par polupravaca", "polje", "rotacija"), pojma funkcije ("pridruživanje", "promjena", "objekt") ili trigonometrije pravokutnog trokuta (detaljnije opisano u *Primjer 3. Trigonometrija pravokutnog trokuta*). Za lakše razumijevanje osnovnih ideja i njihovih obilježja, razmatramo samo neke od karakterističnih primjera upotrebe osnovnih ideja.

Primjer 1. Razlomak

U prvom primjeru, pojam kojeg proučavamo su razlomci. O razlomcima možemo razmišljati te ih interpretirati na različite načine, no uglavnom se sve interpretacije svode na to da razlomak opisuje dio cjeline kao usporedbu količine cjeline s brojem dijelova na koje cjelinu dijelimo. Dakle, učenici moraju razumjeti da razlomak ne donosi informaciju, primjerice, o ukupnoj količini promatrane cjeline. A kako bi mogli razumjeti to i mnogo više, nužno je da imaju razvijene osnovne ideje razlomaka. Na *Slici 1.1* prikazane su osnovne ideje pojma razlomka. Svaka od njih podupire rješavanje određenog problema, a ponekad je potrebna i njihova kombinacija.

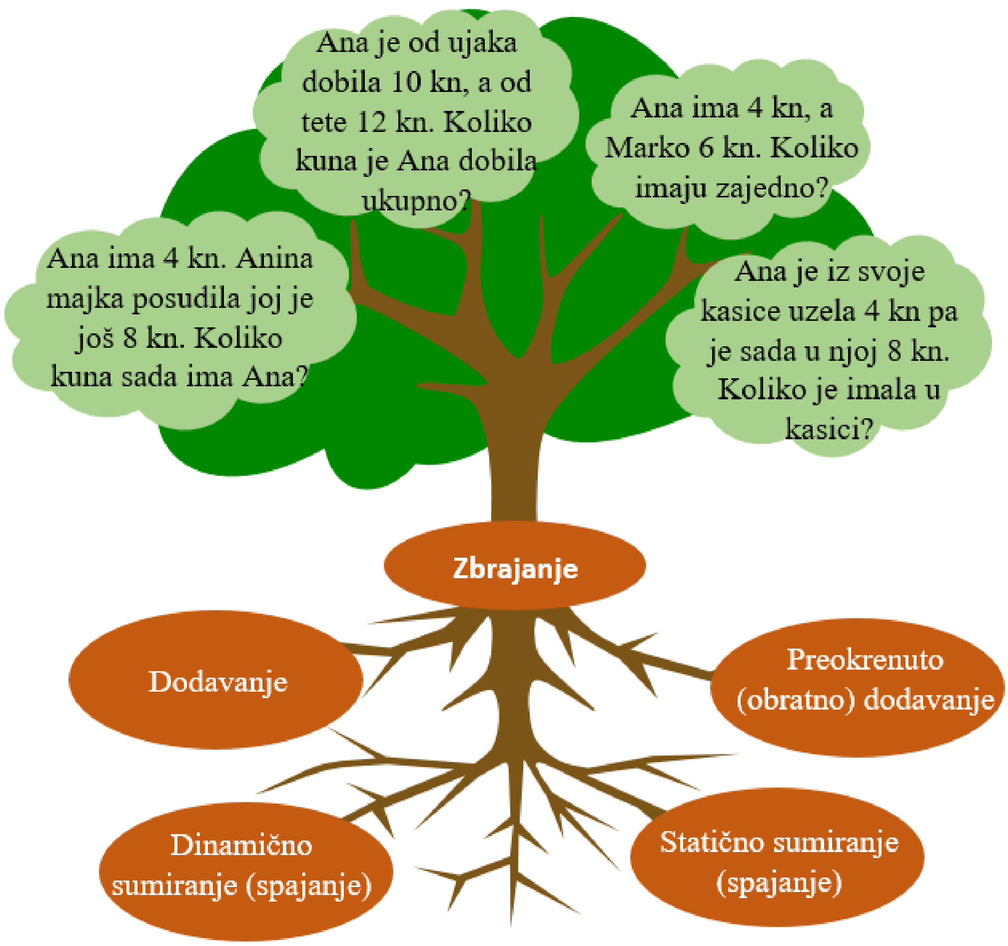


Slika 1.1: Osnovne ideje pojma razlomka

Osvrnimo se na neke od prikazanih osnovnih ideja razlomka. U uvodnom smo dijelu kao jednu od osnovnih ideja naveli "dio cjeline, udio". Jedan od temeljnih apekata navedene osnovne ideje je upravo zapisan na *Slici 1.1* kao "dio jednog cijelog". Taj aspekt zapravo govori da na razlomak (u ovom slučaju $\frac{1}{4}$) možemo gledati na sljedeći način: jednu cjelinu smo podijelili na određeni broj jednakobrojnih dijelova (u primjeru su to 4 jednakobrojna dijela) od kojih uzimamo samo jedan dio. Osim toga, jedan od aspekata je i "rezultat dijeljenja". To bi značilo da razlomak promatramo kao završni rezultat operacije djeljenja dva broja (u ovom slučaju prirodnih brojeva 1 i 4). Može se dogoditi da učenici zanemare da razlomačka crta zapravo označava operaciju dijeljenja, pogotovo ako nemaju razvijen ovaj aspket osnovne ideje razlomka. Na kraju, još jedna jako važna osnovna ideja razlomka je "omjer". Pri tome nam razlomak govori koliko je puta jedna veličina manja ili veća od druge, npr. koju količinu boje za zidove trebamo razrijediti s vodom kako bi ona bila odgovarajuća za bojanje (za mjeru možemo uzeti npr. čašu). U ovom slučaju, razlomak $\frac{1}{4}$ može značiti da jednu čašu boje trebamo pomiješati s 4 čaše vode, odnosno boja i voda trebaju biti u omjeru $1 : 4$.

Primjer 2. Zbrajanje

U drugom primjeru ističemo osnovne ideje zbrajanja. *Slika 1.2* prikazuje osnovne ideje, kao i područja njihovih primjena, u obliku stabla. Osnovne ideje prikazane su kao korijen tog stabla i one svakom učeniku daju mogućnost kreiranja strategija pri rješavanju problema prikazanih u zelenilu tog stabla. Različiti aspekti osnovnih ideja odgovaraju različitim područjima primjene.



Slika 1.2: Osnovne ideje zbrajanja

Tako, primjerice, aspekt dodavanja ima strukturu *stanje – promjena – stanje* (S-P-S) i odgovara situacijama poput sljedeće: *Ana ima 4 kn. Anina majka posudila joj je još 8 kn.*

Koliko kuna sada ima Ana?

Sljedeća situacija je strukturno različita od prethodne: *Ana je od ujaka dobila 10 kn, a od tete 12 kn. Koliko kuna je Ana dobila ukupno?* U ovoj situaciji opisuje se ukupna promjena kojoj prethodi izvršavanje dviju uzastopnih promjena, a zapravo ne znamo ništa o početnom stanju koje je Ana imala. Prema istraživanjima koje je proveo vom Hofe, učenicima ova situacija nije jednostavna ukoliko nemaju razvijene osnovne ideje, jer se uglavnom koncentriraju na početno stanje, u ovom kontekstu se ono odnosi na to koliko je Ana imala kuna prije ovih promjena [14]. Struktura situacije je *promjena – promjena – promjena* (P-P-P) i zbog toga se smatra dinamičnom, a odgovarajući aspekt osnovne ideje je sumiranje (spajanje).

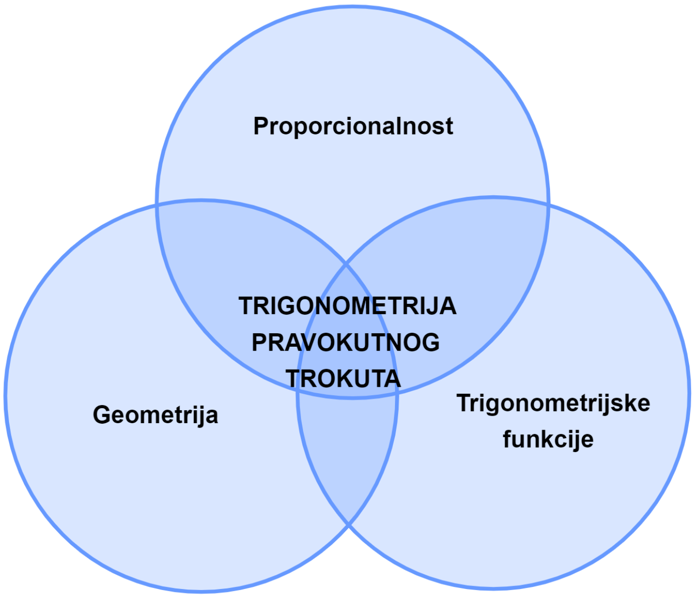
U sljedećoj situaciji se ne događa nikakva promjena stanja: *Ana ima 4 kn, a Marko 6 kn. Koliko imaju zajedno?* Ima strukturu *stanje – stanje – stanje* (S-S-S) i odgovarajući aspekt je ponovno sumiranje (spajanje), ali ovog puta situacija je statična. Drugim riječima, u ovoj situaciji se ne događa "ništa", što može predstavljati problem učenicima koji nemaju predodžbu spajanja dvaju stanja pri čemu koristimo operaciju zbrajanja [14].

Posljednja situacija je: *Ana je iz svoje kasice uzela 4 kn pa je sada u njoj 8 kn. Koliko je imala u kasici?* Ovu situaciju vom Hofe smatra najtežom situacijom za učenike [14]. Ona ponovno ima strukturu *stanje – promjena – stanje* (S-P-S), no odgovarajući aspekt osnovne ideje je obratno dodavanje, prema tome drugačiji nego kod prve situacije.

Primjer 3. Trigonometrija pravokutnog trokuta

Osim toga, kao primjer navodimo i trigonometriju pravokutnog trokuta. Osnovne ideje tog pojma možemo prikazati kao na *Slici 1.3.* Naime, iza pojma trigonometrije pravokutnog trokuta kriju se osnovne ideje geometrije (Pitagorin poučak, sličnost trokuta, kružnica), proporcionalnosti (linearna funkcija, omjeri) i trigonometrijskih funkcija (trigonometrijski omjeri, sinusoida, modeliranje i primjene).

S vremenom, učenici učeći razvijaju cijelu mrežu osnovnih ideja i aspekata osnovnih ideja, koji su temeljna podloga za razumijevanje matematičkih koncepata. Može se reći da se izgrađuje kognitivna mreža u kojoj su pojedinačne osnovne ideje u korelaciji s drugima i njihovim aspektima. Ta je mreža podložna promjenama i rastu, što ovisi o dodavanju novih matematičkih sadržaja.



Slika 1.3: Osnovne ideje trigonometrije pravokutnog trokuta

1.3 Središnji aspekti osnovnih ideja

Sveobuhvatno objašnjenje učeničkih strategija i miskoncepcija nastalih prilikom pokušaja rješavanja zadanog problema (razlikujemo one pokušaje koje nastavnik očekuje i one koje učenik zaista provodi) donosi analizu relevantnih osnovnih ideja, pri čemu su ključna pitanja [14]:

1. Koje osnovne ideje su odgovarajuće za rješavanje problema sa stajališta nastavnika? (Normativni aspekt)

2. Koje se ideje očituju u učenikovom pokušaju da riješi problem? (Deskriptivni aspekt)

3. Koje su razlike između tih ideja i kako se one mogu otkloniti? (Konstruktivni aspekt)

Upravo je jedna od ključnih kvaliteta i prednosti pojma osnovnih ideja kombinacija normativnih i deskriptivnih metoda rada. U ovom kontekstu, razlikujemo dva aspekta:

- *Normativne metode rada* koriste se za utvrđivanje osnovnih ideja kao normativnih pojmova. One služe kao didaktičke (metodičke) smjernice koje slijede konkretan obrazovni cilj i opisuju moguće interpretacije matematičkog koncepta ili postupka. Primjer je normativni opis osnovnih ideja zbrajanja koje povezujemo s određenim područjima primjene (vidi *Sliku 1.2*).

- *Deskriptivne metode rada* koriste se za utvrđivanje i pregled mentalnih reprezentacija, individualnih slika i modela koje učenik zaista ima. Ove se individualne reprezentacije obično manje ili više razlikuju od osnovnih ideja koje su predviđene kao normativne smjernice. Drugim riječima, pokušaji rješavanja problema koje je predvidio nastavnik mogu odstupati od učenikovih pokušaja rješavanja problema i njegovog viđenja situacije.

Sama usporedba i utvrđivanje mogućih razlika između normativnog i deskriptivnog aspekta, odnosno osnovnih ideja koje je predvidio nastavnik i stvarnih učenikovih predodžbi, slika i modela, predstavlja *konstruktivni aspekt* i donosi uvid u učeničke probleme s učenjem te potencijalne miskoncepcije, a istovremeno daje i prijedloge za uklanjanje istih.

Druga važna kvaliteta pojma osnovnih ideja je razlika između primarnih i sekundarnih osnovnih ideja [14]:

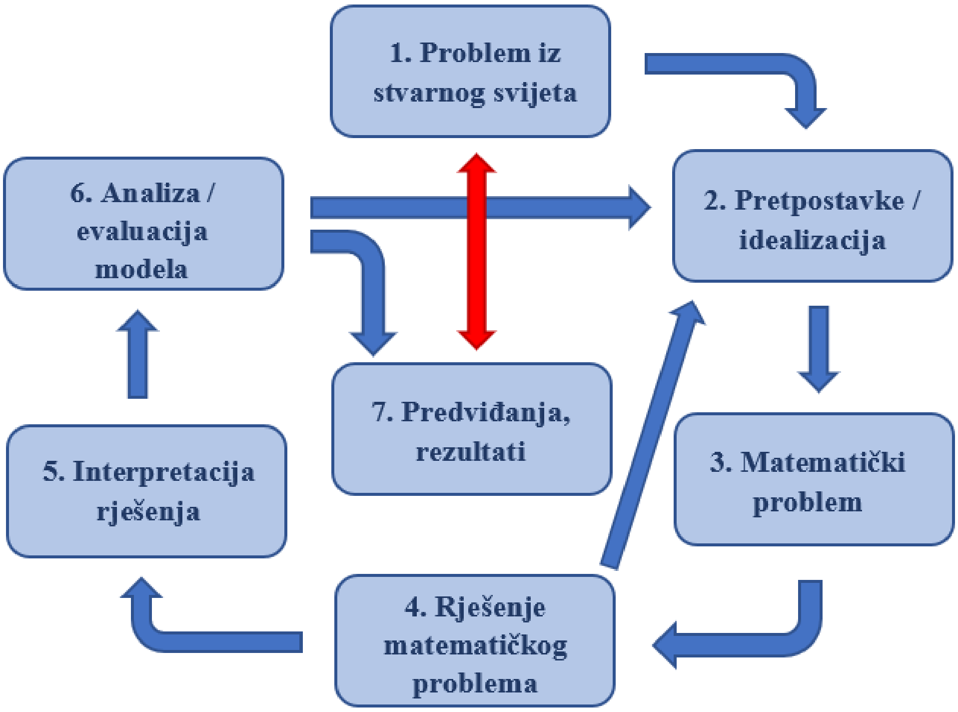
- *Primarne osnovne ideje* temelje se na konkretnim radnjama sa stvarnim objektima. One imaju objektivni, konkretni karakter. Određeni pojmovi mogu se predočiti stvarnim objektima ili radnjama. Kao primjer uzmimo već spomenuto zbrajanje kojeg možemo predočiti dodavanjem različitih grupa stvarnih objekata (novčića, kockica, itd.).

- *Sekundarne osnovne ideje* temelje se na matematičkim operacijama sa simboličkim objektima. Zbog toga kažemo da su simboličkog karaktera.

1.4 Osnovne ideje i modeliranje

Iz svega prethodno opisanog može se zaključiti da osnovne ideje različitih matematičkih koncepata shvaćamo kao veze između matematike i stvarnosti, odnosno sredstva prijelaza iz jednog u drugo. Također, jedno od glavnih obilježja pojma osnovnih ideja prema vom Hofeu je upravo "sposobnost primjene koncepta u stvarnim životnim situacijama prepoznavanjem odgovarajuće strukture u srodnim kontekstima ili modeliranjem srodnih problema uz pomoć matematičkih struktura" [14]. Stoga, osnovne ideje usko vežemo uz modeliranje.

Matematičko modeliranje je ciklički proces u kojem problem iz svakodnevnog života zapisujemo na matematički način. Ključnim koracima matematičkog modeliranja smatraju se: (1) konstrukcija modela situacije iz svakodnevnog života, (2) postavljanje pretpostavki (idealizacija) modela – *realni model*, (3) matematizacija – *matematički model*, (4) rješavanje matematičkog problema, (5) interpretacija rješenja, (6) analiza / evaluacija modela i (7) predviđanja, rezultati modela (prikazano na *Slici 1.4*).



Slika 1.4: Proces matematičkog modeliranja

Osnovne ideje su ključne u trećem koraku, kada je potrebno problem iz stvarnog svijeta pretvoriti u matematički problem, ali i u petom koraku kada je potrebno rješenje matematičkog modela interpretirati u kontekstu realnog modela. Upravo one govore koji matematički sadržaj odgovara stvarnoj situaciji ili obratno, koje se realne situacije mogu modelirati s određenim matematičkim sadržajima.

Nadalje, proces modeliranja vrlo često zahtijeva prijelaz s jedne na drugu razinu matematičke reprezentacije, što može biti ključno za četvrti korak, tj. rješavanje matematičkog problema. Kao jedan od primjera navodimo prijelaz iz geometrije u algebru i obratno. U tom kontekstu osnovne ideje nam koriste da različitim geometrijskim objektima, poput kružnice, pridružimo njihov algebarski prikaz, dakle jednadžbu kružnice.

Da zaključimo, osnovne ideje mogu se smatrati sredstvima prijelaza između matematike i stvarnosti, ali i između različitih matematičkih sustava. Te veze pokazuju važnu ulogu osnovnih ideja u razvoju matematičkih kompetencija. Taj bi razvoj, u idealnom slučaju, trebao biti popraćen formiranjem primarnih osnovnih ideja, a kasnije i sekundarnih osnovnih ideja, zajedno stvarajući rastući i čvrsto umreženi sustav. Prema ovome, sposobnost korištenja matematičkih vještina temelji se na kvaliteti razvoja i stupnju međusobne povezanosti osnovnih ideja, kao i na sposobnosti aktiviranja i koordinacije osnovnih ideja.

1.5 Osnovne (GV) i fundamentalne ideje

Tijekom godina je među brojnim njemačkim nastavnicima i metodičarima česta tema razgovora identifikacija i primjena takozvanih *fundamentalnih ideja*. Naime, većina nastavnika i metodičara matematike složit će se s barem tri ključna zadatka u nastavi matematike: postavljanje ciljeva učenja, osmišljavanje i provođenje situacija i aktivnosti za učenje i procjena razumijevanja i vještina učenika. Prema tome se oblikuju nastavni planovi i predmetni kurikulumi. Međutim, pri izradi kurikuluma ističu se i neke fundamentalne ideje koje povezuju različite dijelove matematike i njihovu primjenu, koje nisu uvijek očite u sadržajima udžbenika ili svakodnevnim matematičkim aktivnostima. Upravo zato su se u okviru razvoja didaktike matematike u Njemačkoj razmatrale fundamentalne ideje kao didaktičke smjernice. Kako su oba pojma dio njemačke didaktike matematike, u nastavku razmatramo njihov odnos, sličnosti i razlike.

Iako se prevode kao osnovne ideje, one se razlikuju od fundamentalnih ideja u matematičkom obrazovanju. S jedne strane, oboje impliciraju da iza različitih pojmova postoji matematička srž, bit materije koju pojam predstavlja, ili doslovno: ideja koja pomaže u razumijevanju toga što je srž određenog matematičkog sadržaja i valjanog korištenja istog.

Međutim, osnovne ideje su "lokalne ideje" koje teže tome da naprave *jedan* određeni pojam, postupak ili metodu pristupačnim pružajući jedan ili više modela koji potom djeluju zajedno kao različiti metaforički pristupi srži tog specifičnog pojma, postupka ili metode. Glavni didaktički cilj osnovnih ideja je opisivanje "odgovarajućeg konteksta stvarnog života koji predstavlja bit promatranog matematičkog sadržaja, i to na način koji je blizak i razumljiv učeniku" [14], kako bi matematički koncept bio primjenjiv na situacije u stvarnom svijetu "prepoznavanjem odgovarajuće strukture u srodnim kontekstima ili modeliranjem srodnih problema uz pomoć matematičkih struktura" [14].

S druge strane, fundamentalne ideje su oduvijek konceptualizirane kao sveobuhvatne ideje značajne za šire područje matematičkog sadržaja. Njihova učinkovitost se očituje na različitim razinama matematičkih aktivnosti, pružajući razumijevanje srži cijelog područja promatranog matematičkog sadržaja ili čak matematike općenito. Stoga svako poimanje fundamentalnih ideja skreće pažnju na međusobne veze matematičkog znanja [27]. Donosi ono što se može shvatiti kao zajednička bit cijelog niza matematičkih pojmova, postupaka i metoda i temelji se na pretpostavci da je za stvarno razumijevanje matematike potrebno prepoznati te veze i zajedničke značajke matematičkih pojmova, postupaka i metoda. Međutim, ta pretpostavka nadilazi onu da jedan određeni pojam mora biti povezan s odgovarajućim kontekstima ili strukturama u stvarnom svijetu.

Kao primjer, uzmimo Wittmanovih[7] 7 fundamentalnih ideja u geometriji: (1) geometrijski oblici i njihove konstrukcije, (2) operacije s oblicima, (3) koordinate, (4) mjerenje, (5) uzorci, (6) oblici iz svakodnevice i (7) geometrizacija [9]. Neke od ovih ideja vezane su isključivo za geometriju, a neke opisuju vezu i s drugim područjima, poput algebre. Kako bismo dodatno pojasnili pojam fundamentalnih ideja, razmotrimo prvu od sedam Wittmanovih. Fundamentalna ideja "geometrijski oblici i njihove konstrukcije" se odnosi na usvajanje i razumijevanje pojma točke, jednodimenzionalnih objekata (pravci, krivulje i njihovi dijelovi), dvodimenzionalnih objekata (plohe i njihovi dijelovi) i trodimenzionalnih objekata (geometrijska tijela), ali i njihovog prikazivanja i obilježavanja njihovih svojstava [9].

Također, pojam fundamentalnih ideja nema jasnu formulaciju svojih točnih didaktičkih ciljeva. Pojam osnovnih ideja jasno pretpostavlja da za primjenu matematičkog koncepta ili postupka u stvarnoj situaciji učenici trebaju steći odgovarajuće osnovne ideje. Dakle, kod osnovnih ideja ne postavlja se pitanje trebaju li učenici steći te ideje, već koje osnovne ideje trebaju steći i u kojoj mjeri te osnovne ideje omogućavaju pojedina individualna usvajanja i variranja. Slično se ne veže za fundamentalne ideje, gdje još uvijek nije jasno koje smjernice treba kome pružiti.

1.6 Osnovne ideje, slika i definicija pojma

Mnogi pojmovi koje koristimo nisu formalno definirani. Za početak ih učimo prepoznati po iskustvu i koristiti u odgovarajućim kontekstima. Kasnije se značenje pojma usavršava, sa ili bez precizne definicije, ali u samom procesu usavršavanja pridaje mu se simbol ili ime koji omogućuju komuniciranje i mentalnu manipulaciju s tim pojmom. Ukupna kognitivna struktura koja pojmu daje značenje daleko je veća od samo jednog simbola. Pri korištenju tog pojma, javljaju se i mnogi povezani procesi koji svjesno ili nesvjesno utječu na značenje pojma. Stoga kao još jednu važnu ideju u izgradnji pojma ističemo sliku pojma (eng. *concept image*). Slika pojma opisuje ukupnu kognitivnu strukturu povezanu s tim pojmom, koja uključuje sve mentalne slike i povezana svojstva i procese [26]. To je zapravo skup svih neverbalnih poveznica koje pojedinac ima o pojmu.

S druge strane, definicija pojma (eng. *concept definition*), ako ona postoji, je iskaz riječima koji određuje pojam [26]. Ona može biti osobna, ona koju pojedinac definira za sebe,

[7] Erich Ch. Wittman (1939. -) - njemački matematičar i matematički edukator

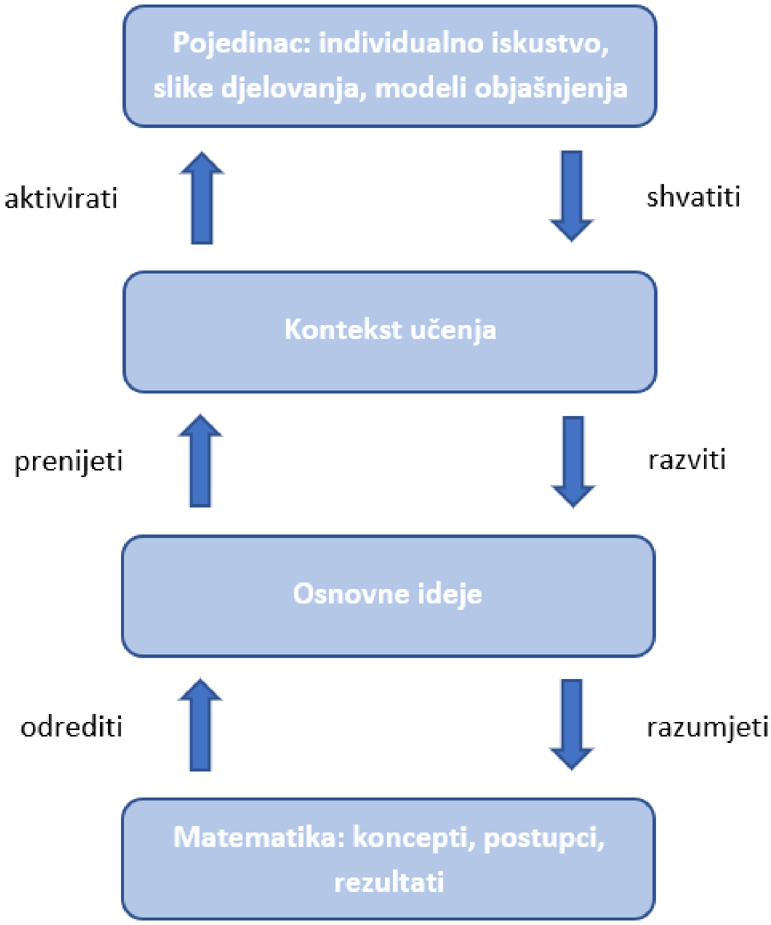
ili formalna, ona koja je općeprihvaćena i dijeljena unutar šire matematičke zajednice. Ona određuje pojam, no ne daje dodatnu sliku o tom pojmu. Stoga je važno stvoriti sliku pojma koja daje sve poveznice s tim pojmom (primjere, kontraprimjere, teoreme koje vezujemo uz taj pojam itd.). U ovom kontekstu, određeni problemi u matematičkom razmišljanju mogu biti interpretirani kao sukob između slike i definicije pojma. Slika pojma se gradi godinama kroz različita iskustva, mijenjajući se kako pojedinac susreće nove podražaje i sazrijeva [26].

Ovi pojmovi su se razvijali slično kao i osnovne ideje za vrijeme *New Math* pokreta stoga i oni pružaju uvid u manjkavosti dotadašnjeg uvođenja stroge akademske matematike unutar školskog sustava. Razlika između slike i definicije pojma može se činiti sličnom razlici između normativnog i deskriptivnog aspekta osnovnih ideja [15]. Oboje, i normativni i deskriptivni aspekt, odnose se na sliku pojma i opisuju uočene stvarne individualne slike (deskriptivni aspekt) i didaktički predviđene osnovne ideje (normativni aspekt).

1.7 Formiranje osnovnih ideja

Osnovna pretpostavka je da se tijekom obrade određenog matematičkog koncepta u situaciji poučavanja izgrađuju odgovarajuće individualne slike i modeli objašnjenja. Svaki od ovih elemenata dijeli zajedničku jezgru u svim subjektivnim tumačenjima. Drugim riječima, stvaraju se osnovne ideje, a taj proces prikazan je na *Slici 1.5*. Shema prikazana na slici napravljena je po uzoru na shemu iz [14] i [15]. Vom Hofe u svom radu daje i objašnjenje ovog prikaza, stoga koristimo njegov rad kako bi objasnili formiranje osnovnih ideja. Na shemi su didaktičke odluke nastavnika prikazane na lijevoj strani, dok su aktivnosti učenika koje se mogu poduprijeti prikladnim didaktičkim mjerama prikazane na desnoj strani.

Polazna točka didaktičkih odluka koje nastavnik donosi jest promišljanje o matematičkom sadržaju kako bi *odredio* odgovarajući normativni aspekt osnovnih ideja. Pri tome u obzir mora uzeti i predznanje i osobno iskustvo učenika. Zbog toga se ovo smatra temeljnom didaktičkom odlukom. *Prijenos* danog sadržaja, koji uključuje identifikaciju ili formiranje relevantnog konteksta i odgovarajućeg okruženja za učenje, trebao bi predstavljati strukturnu jezgru određenog koncepta kojeg izgrađujemo. Kontekst učenja trebao bi biti prikladan za *aktiviranje* odgovarajućih individualnih slika i modela kod učenika. U idealnim uvjetima, učenici će moći *shvatiti* taj kontekst. Dugoročno, to dovodi do *razvoja* planiranih osnovnih ideja kod učenika koji ove nove ideje uklapaju u svoje individualno iskustvo. Na taj način učenici mogu sudjelovati u jezgri matematičkog koncepta, odnosno *razumjeti* ga.



Slika 1.5: Formiranje osnovnih ideja

Prema vom Hofeu, ovi procesi pomažu u organizaciji nastavnog sata, ali i koriste kao model koji otkriva i daje prijedloge za sukob između formalnog i individualnog pristupa, a time nudi i točniji uvid u praćenje i prepoznavanje problema učenja.

Poglavlje 2

Teorija didaktičkih situacija

Tijekom svog matematičkog obrazovanja učenik može pomisliti ili da ima dobro razvijene matematičke sposobnosti ili da jednostavno nema što ga sprječava u tome da bude dobar u matematici. Možda su i neki od nastavnika branili takvu ideju, no s time se nije slagala nekolicina francuskih intelektualaca. Dapače, njihova su uvjerenja bila daleko od poučavanja matematike kroz teoriju i uključivala su učenje kroz istraživanje i rješavanje problema.

U ovom poglavlju diskutiramo o teorijskom pristupu poučavanju matematike usmjerenom na učeničke aktivnosti, istraživanje i rješavanje problema poznatom pod nazivom *Teorija didaktičkih situacija*. Za početak, dan je pregled razvoja i osnovnih pojmova istraživački usmjerene nastave matematike koju spomenuta teorija ostvaruje. Nakon toga, opisan je razvoj same teorije te je njeno razumijevanje započeto s konkretnim primjerom nakon kojeg su definirani ključni pojmovi teorije. Na kraju, uspoređujemo spomenutu teoriju i *Realistično matematičko obrazovanje* kao dvije najpoznatije teorije koje se odnose na istraživački usmjerenu nastavu matematike.

2.1 Istraživački usmjerena nastava matematike

Obrazovanje kakvo je poznato mnogima od nas vrlo često se opisuje kao "tradicionalno", no bez preciziranja što pridjev "tradicionalno" u tom kontekstu označava. Na Hrvatskom jezičnom portalu pojam tradicionalno je definiran kao "na način tradicije, po tradiciji, tradicijski", a pojam tradicija je definiran kao "prenošenje znanja, spoznaja, vjerovanja, legendi, običaja, kulturnih vrijednosti itd. s generacije na generaciju, iz jedne epohe u drugu, bilo usmenom ili pismenom predajom, odgojem i dr.", odnosno kao "dugotrajno uspostavljen način mišljenja, ustaljeni običaji preuzeti iz ranijih razdoblja". Stoga, kada se govori o tradicionalnom obrazovanju, treba imati na umu da se radi o pojmu, a ne o pristupu, koji se odnosi na ustaljene običaje korištene u školskim sustavima dulji niz godina.

Iako se pridjev “tradicionalno” u ovom kontekstu često koristi neprecizno, percepcija koja se veže uz tradicionalno poučavanje gotovo je uvijek jednaka, a ona je takva da je nastavnik u središtu poučavanja, on prezentira rješenja zadataka, često većeg broja zadataka koji ilustriraju određenu metodu, formulu, pravilo itd., s time da je vrlo čest problem nedostatak vremena da se pokrije sav predviđeni sadržaj. Učenik je pasivan, njegovi zadaci su pasivno slušanje, mehaničko prepisivanje s ploče i memoriziranje bez razumijevanja i usvajanja novih načina razmišljanja. To vodi k nedostatku samopouzdanja i samostalnosti učenika jer nema potrebnu povratnu informaciju o svom znanju, prema tome nema izgrađena realistična očekivanja. U svakodnevnim razgovorima s učenicima vrlo često se može čuti kako je učenje matematike nepotrebno, osim u svrhu dobivanja ocjena, pritom misleći da je matematika beskorisna u “stvarnom” životu, nešto što neće koristiti kada odrastu.

Ovakva percepcija i pretpostavke učenika dovele su do toga da se mnogi reformatori obrazovanja protive tradicionalnim metodama poučavanja matematike usmjerenim na nastavnika te potiču veću usmjerenost na učenika i njegove potrebe i sposobnosti, izgradnju samostalnosti učenika pri rješavanju problema koji su postavljeni pred njih te dodjeljivanje učenicima veće odgovornosti u procesu učenja. Moglo bi se reći da je primjenom tradicionalnih metoda poučavanja matematike kreativnost učenika svedena na minimum te je zanemaren samostalni rad učenika, istraživanje i aktivno učenje. Učenici nemaju mogućnost postavljanja hipoteza, eksperimentiranja, dokazivanja svojih hipoteza te rješavanja nerutinskih i složenijih problema, a sve to su neizmjerno važne sastavnice matematike.

Kako učenici ne bi bili uskraćeni za ono što je sama srž matematike, u centar poučavanja stavlja se istraživanje, rješavanje problema i modeliranje te se javljaju novi oblici nastave, a to su istraživačka i problemska nastava. Posebno, ovdje je naglasak na istraživački usmjerenu nastavu matematike, u daljnjem tekstu IUNM (eng. *Inquiry - Based Mathematics Teaching*, *IBMT*), čija je temeljna ideja da su učenici pozvani raditi kao znanstvenici, odnosno razmišljati na sličan način kao matematičari, a u čijem se središtu nalazi (matematički) problem.

Prve pisane formulacije ideje da poučavanje treba biti usmjereno na aktivnosti učenika te povezano s njegovim iskustvima pojavile su se prije više od jednog stoljeća. John Dewey je ostavio veliki trag u razvoju obrazovanja i promicanju važnosti istraživanja, posebno u prirodnim znanostima. Povezuje ga se s pojmom “učiti radeći” (eng. *learning by doing*). Njegove ideje suprotstavljene su ustaljenom prijenosu znanja od nastavnika učenicima, a zagovarao je aktivno učenje koje se temelji na vlastitim postupcima i inicijativi učenika, odnosno uključivanju učenika u razne aktivnosti koje potiču mišljenje višeg reda. Nekolicina znanstvenika u matematičkom obrazovanju nastavila je razvijati njegove ideje i odmicati se od uobičajenog pristupa nastavi matematike koji je podrazumijevao učenikovo oponašanje nastavnika, često bez razumijevanja. Danas, kada su društvene potrebe daleko veće nego prije, iste zahtijevaju dublje razumijevanje matematike. Posebno, ključnu ulogu u ranom razvoju matematičkog obrazovanja kao znanstveno-istraživačkog područja imao je Felix Klein[1], naglašavajući važnost istraživanja u nastavi matematike. Kasnije je uvođenje rješavanja problema u matematičko obrazovanje dodatno potaklo daljnji razvoj ideje IUNM-a.

Kako je IUNM pristup usmjeren na učenika i njegovo sudjelovanje u aktivnostima, postavlja se pitanje koja je uloga nastavnika. Velika je zabluda kako nastavnik u ovakvom pristupu nastavi matematike nema posla jer sve odrađuje učenik. Nastavnik vodi i podupire čitav proces učenja: pitanjima potiče korištenje prethodno stečenog znanja, vodi raspravu o različitim pristupima problemima, pokušava osvijestiti učenike o određenim strategijama koje se koriste prilikom rješavanja problema te im pomaže da svoje ideje smisleno povežu. Iako se u brojnim istraživanjima (koja ovdje ne navodimo, vidi [28]) ukazuje na pozitivne strane IUNM-a, takva nastava sa sobom nosi i brojne izazove. Prije svega, nastavnici trebaju biti bolje pripremljeni kako bi mogli pravovremeno reagirati na različite učeničke ideje i poteškoće, a samim time i utrošiti više vremena i pažnje na smišljanje i pripremu aktivnosti. Neka od pitanja koja se javljaju su: *Mogu li učenici uopće učiti ako im ne zadamo direktne upute? Koliko učenike trebamo voditi? Jesmo li sigurni u rezultat učenja? Stignemo li sve vremenski? Kako ćemo vrednovati takve aktivnosti?* Svi ovi izazovi nisu nepremostivi i postoji niz velikih projekata s ciljem razvoja, provedbe i procjene IUN/M-a. Jedan od takvih je i projekt MERIA[2] (skraćenica od eng. *Mathematics Education – Relevant, Interesting and Applicable*, u prijevodu Matematičko obrazovanje – značajno, zanimljivo i primjenjivo), čiji nam je praktični vodič poslužio kao jedan od izvora za proučavanje teme (vidi [28]).

Dakle, IUNM se odnosi na nastavni pristup koji učenicima omogućuje učenje istraživanjem (eng. *Inquiry-Based Learning*, *IBL*) koje potiče rad sličan onom kao kod matematičara i ostalih znanstvenika, koje uključuje postavljenje pitanja i hipoteza, eksperimentiranje i testiranje hipoteza, razvijanje strategija za rješavanje problema, obrazlaganje svojih strategija i ideja, njihovu primjenu te na kraju formuliranje rješenja. Ovdje uočavamo dva ključna pojma koja u nastavku detaljnije pojašnjavamo, a to su istraživanje i problem. Ipak, detaljniju razradu ideje IUNM-a u ovom radu izostavljamo, jer se u središtu rada nalazi jedan od teorijskih okvira koji se odnosi na IUNM, a to je Teorija didaktičkih situacija (eng. *The Theory of Didactical Situations*, *TDS*), čije ideje predstavljamo u nastavku ovog poglavlja.

[1]Felix Klein (Düsseldorf 1849. - Göttingen 1925.) - njemački matematičar i matematički edukator

[2]Projekt MERIA (2016. - 2019.) je europski program u području obrazovanja Erasmus+ čiji je glavni cilj unapređenje kvalitete matematičkog obrazovanja u srednjim školama u Europi pomoću istraživački usmjerenih pristupa nastavi matematike uz odgovarajuću podršku profesionalnom razvoju nastavnika.

Što znači istraživati?

Kako bismo zaista razumjeli što podrazumijevamo pod istraživački usmjerenu nastavu matematike, vrlo je važno znati što označava temeljni pojam tog naziva, pojam istraživati (eng. *inquiry*, *investigation*). Ako pogledamo njegovo značenje na Hrvatskom jezičnom portalu, pojam istraživati definira se kao "tragati za novim činjenicama i metodama rada i proučavati radi stjecanja novih znanja i spoznaja", a prema istom istraživanje se definira kao "ukupnost radnji koje kao prethodne ili fundamentalne pridonose prikupljanju novih činjenica i nastoje pružiti odgovore na postavljena pitanja". Ugrubo, istraživanje se može definirati kao "istraživanje problema" [28]. Očigledno, definicija govori o samostalnom procesu za koju je odgovorna osoba koja istražuje. Upravo zato, IUNM se odnosi na pristup nastavi matematike koji učenicima omogućuje sudjelovanje u aktivnostima kojima prilagođavaju svoja postojeća te grade nova matematička znanja [28]. Te aktivnosti trebale bi potaknuti učenika da razumije predmet svojeg istraživanja, a razumijevanje je uspješnije te je znanje trajnije ako proizađe iz vlastitog truda učenika.

Što je problem?

Drugi od dva ključna pojma koji se odnosi na IUNM je problem (eng. *problem*) i upravo on se nalazi u središtu ideje IUNM-a. Na Hrvatskom jezičnom portalu pojam problem definira se kao "teorijsko ili praktično pitanje koje treba riješiti", no problem možemo definirati kao bilo koju situaciju koju trebamo riješiti, ali nam prethodno nije poznat put rješavanja i mogu se pojaviti poteškoće na tom putu. Zapravo, probleme možemo pronaći svuda oko nas, bilo u obrazovanju ili u svakodnevnom životu. No, svi oni imaju zajedničko to da sadrže određene poznate činjenice i postavljen/e cilj/eve, a sam proces postizanja cilja, tj. dolazak do rješenja problema ne mora jednostavan. Matematički zadaci su posebna vrsta problema čije rješavanje iziskuje povećanu razinu logike i upotrebu raznih mentalnih sposobnosti [1]. Rješavanjem matematičkih zadataka razvijamo matematički način razmišljanja koji zatim doprinosi razvijanju drugih sposobnosti potrebnih za rješavanje problema iz svakodnevnog života. Winsløw [28] opisuje problem na sljedeći način: *„Problem u IUNM označava više od pukog zadatka, vježbe ili aktivnosti. Problem je otvoren u smislu da se od učenika traži da eksperimentiraju, postavljaju hipoteze o mogućim rješenjima, priopćavaju hipoteze i moguće strategije rješavanja te da možda postavljaju i dodatna pitanja koja će se razmatrati tijekom procesa rješavanja."*

Problemi se mogu razlikovati po podrijetlu, složenosti, broju mogućih strategija rješavanja itd., ali i po potencijalu pobuđivanja znatiželje i kreativnosti kod učenika. Dewey je smatrao da bi učenje trebalo proizlaziti iz vlastitog iskustva i rada, a u ovom kontekstu će upravo pokušaji rješavanja (matematičkog) problema biti motivacija za učenje. Tu se prirodno javlja pitanje kako uspješno rješavati probleme u matematici. Kako bi došao do rješenja, učenik, ali i svatko od nas, postaje istražitelj. Ključno u tom procesu jest samostalno kritički razmišljati!

Rješavanje problema

Prema Bašiću, rješavanje problema jedna je od osnovnih kognitivnih sposobnosti ljudi usko povezana s raznim drugim procesima poput učenja, donošenja odluka i rasuđivanja [1]. Prema Winsløwu, aktivnost rješavanja problema jednako je važan element u razvoju IUNM-a kao i postavljanje problema [28]. Kako je uvođenje rješavanja problema u matematičko obrazovanje potaklo daljnji razvoj IUNM-a, tako su se razvijale i razne opće strategije kojima se pokušavalo riješiti određeni problem. Jedno od glavnih djela kada se govori o rješavanju problema je knjiga Georgea Pólye[3] pod imenom *Kako ću riješiti matematički zadatak* (eng. *How to solve it*). Knjiga je podijeljena prvotno na tri dijela [21]: *U učionici*, *Kako rješavati zadatak* i *Mali heuristički leksikon*, a kasnije je dodan i četvrti koji donosi brojne primjere problema, "hintove" za njihovo rješavanje, ali i rješenja koja obuhvaćaju cijeli proces razmišljanja do konačnog rješenja. Naglasak je stavljen na ulogu problema u procesu učenja te na niz heuristika koje se mogu koristiti prilikom rješavanja problema. Prije svega, pojasnimo što je heuristika. Ona predstavlja svaki pristup rješavanju problema, učenju ili otkrivanju koji koristi određenu metodu, ali koja ne mora nužno biti optimalna za pronalazak rješenja. Pólya u svojoj knjizi proces rješavanja problema dijeli u četiri faze, poznatije pod nazivom *Pólyini koraci*, a to su: (1) razumijevanje problema, (2) stvaranje (smišljanje) plana, (3) izvršavanje plana i (4) osvrt (refleksija). Kratko opisujemo što se točno događa u pojedinoj fazi te ilustriramo na primjeru problema preuzetom iz četvrtog dijela Pólyine knjige [21].

(1) Razumijevanje problema

Ovaj dio u svojoj knjizi Pólya započinje vrlo značajnom rečenicom [21]: *"Smiješno je odgovarati na pitanje, koje nismo razumjeli."* U ovoj rečenici sadržana je cijela srž prve faze rješavanja problema. Da bismo uopće mogli započeti s rješavanjem, problem, odnosno zadatak, trebamo razumjeti. U ovoj fazi pokušavamo postavljeni problem povezati s nama već poznatim pojmovima, stoga je moguće problem i preformulirati ili ga preciznije postaviti. Učenik (ili osoba koja rješava problem) može nastaviti s rješavanjem tek kada je siguran kako problem nije krivo shvatio i što se od njega traži. To prije svega znači pažljivo čitanje i ukazivanje na glavne dijelove zadatka, a potom i, primjerice, crtanje slike ili uvođenje oznaka. Primjer problema koji će nam pomoći u boljem razumijevanju svih faza je sljedeći:

[3]George Pólya (Budimpešta 1887. - Palo Alto 1985.) - mađarski matematičar

Primjer 2.1.1. *Bob ima* 10 *džepova i* 44 *srebrena dolara*[4]*. Želi rasporediti svoje dolare u džepove tako da svaki džep sadrži različiti broj dolara. Može li to napraviti?*

Formulacija problema ne bi trebala predstavljati problem prilikom razumijevanja. Vrlo je jasno postavljeno što se od nas traži. No ipak, možemo se zapitati je li dozvoljeno da u jednom od džepova ne bude niti jedan dolar. Zapravo, matematički gledano takav je slučaj dozvoljen. To povlači i pitanje hoće li se rješenje ovog problema promijeniti ako nije. Dodatno, je li jedan od ta dva slučaja jednostavniji? Jasno je da je, ukoliko imamo veći broj dolara, takav raspored moguć. Prema tome, možemo li preformulirati problem? Problem se svodi na sljedeće:

Koji je minimalan broj dolara koji možemo rasporediti u 10 džepova tako da nikoja dva džepa nemaju jednaki broj dolara?

Na ovaj način možemo izvesti druge probleme, ali i generalizirati. Osim toga, možemo pokušati i nacrtati skicu situacije, tako da džepove predstavimo kvadratićima, a dolare kružićima. Time je prva faza gotova i možemo nastaviti s rješavanjem.

(2) Stvaranje (smišljanje) plana

Može se reći da je druga faza najkreativnija, a obuhvaća istraživanje. Pritom taj pojam u ovom kontekstu podrazumijeva postavljanje te dokazivanje ili opovrgavanje hipoteza. Prema Pólyi, put od razumijevanja problema do stvaranja plana može biti dug i krivudav [21]. No, na njemu koristimo određene strategije koje nam pomažu, a za koje ne znamo hoće li dovesti do rješenja. Ako se prisjetimo prethodno napisanog, nazivamo ih heuristike. Osnovna strategija, koju Pólya posebno ističe, je prisjećanje sličnog zadatka.

Ako se vratimo na *Primjer 2.1.1*, moglo bi se reći da smo donekle već i krenuli s osmišljavanjem plana time što smo preformulirali problem. Isto tako, mogli smo ispitivati male slučajeve, npr. što ako imamo 6 džepova i 10 srebrenih dolara. Ovisno o dobi osobe koja rješava (problem je pogodan za različite dobi), netko će pokušati riješiti problem tako da iskoristi fizički materijal. U ovom trenutku, problem smo preformulirali, no i dalje ne znamo hoće li njegovo rješenje dovesti do rješenja prvotnog problema. Stoga se naš plan sastoji od rješavanja preformuliranog problema.

(3) Izvršavanje plana

Treća faza je direktno povezana s drugom. Sada provodimo sve korake plana te ih provjeravamo. Postoji mogućnost da osmišljeni plan neće biti uspješan, stoga se tada treba osmisliti novi (ili samo pojedini dijelovi). Jedna od najvažnijih značajki u ovom

[4]Srebreni dolar je kovanica od srebra iskovana po uzoru na španjolski dolar i u SAD-u su bili zakonsko sredstvo plaćanja.

procesu je strpljenje. "Dobra vijest je da trud nikad nije uzaludan. Svaki neuspjeh također nosi vrijednu informaciju i pomaže u razumijevanju situacije." [1] To pokazuje da se druga i treća faza u rješavanju problema mogu provoditi više puta prilikom rješavanja jednog problema.

Vratimo se na *Primjer 2.1.1*. Početni problem smo preformulirali, a sada ga je potrebno riješiti. Kad krenemo s džepom koji ima 0 dolara, u svakom sljedećem treba biti za jedan više nego u prethodnom džepu (džepove možemo poredati u niz, ali nije nužno za rješavanje problema). To znači da će jedan sadržavati 0 dolara, drugi 1 dolar, treći 2 dolara, itd., do zadnjeg koji sadržava 9 dolara. Sada trebamo zbrojiti koliko je ukupno srebrenih dolara u džepovima, a to je $0 + 1 + 2 + ... + 9 = 45$. Sada je vrlo jasno da je minimalan broj dolara koji možemo rasporediti u 10 džepova tako da nikoja dva ne sadrže jednaki broj dolara upravo 45. Rješenje ovog preformuliranog problema dalo nam je odgovor na pitanje: Može li Bob rasporediti na isti način 44 srebrena dolara? Odgovor je: ne, ne može. U tom slučaju će barem dva džepa sadržavati jednak broj dolara.

(4) Osvrt (refleksija)

Najčešće, nakon dolaska do rješenja zadatka, priča s tim zadatkom staje te se čeka zadavanje idućeg. Time osoba koja rješava dati problem, odnosno zadatak, ostaje zakinuta za važan dio rješavanja problema, posljednju fazu koju zovemo osvrt ili refleksija. Ona obuhvaća ponovno razmatranje i preispitivanje rješenja i puta kojim smo do njega došli. Pitamo se je li dobiveno rješenje smisleno, je li naša argumentacija dobra ili jesmo li mogli na drugačiji način doći do rješenja. Već smo prethodno naglasili, ključno je samostalno kritički razmišljati, ali i zauzeti kritički stav prema dobivenom rješenju i načinu rješavanja. Osim toga, problem, rješenje i put do rješenja možemo sagledati s višeg stajališta pa izvesti generalizaciju (ukoliko je moguće) ili iskoristiti rješenje ili metodu u nekom drugom problemu. Ono glavno, trebamo se pitati što smo rješavanjem tog problema naučili.

Ako se vratimo na *Primjer 2.1.1*, još u prvoj fazi nametnula su se neka dodatna pitanja, poput onog koje razmatra slučaj kada prazan džep nije dozvoljen. No, analognom metodom dolazimo da niti u tom slučaju nije moguće napraviti traženu raspodjelu 44 dolara (u tom slučaju je minimalan broj dolara $1+2+...+9+10 = 55$). Sljedeće, problem džepova i dolara možemo generalizirati. Minimalan broj dolara koje smještamo u n džepova tako da nikoja dva džepa nemaju jednaki broj dolara (s pretpostavkom da je prazan džep dozvoljen) je $0 + 1 + 2 + ... + (n - 1) = \frac{(n-1)n}{2}$. Za bilo koji drugi broj dolara, problem nema rješenja. Analogno dolazimo i do generalizacije uz pretpostavku da prazan džep nije dozvoljen. Na temelju generalizacije, možemo kreirati i nove probleme, poput sljedećeg: *Koliko je džepova potrebno da bi se u njih rasporedilo 50 srebrenih dolara tako da svaki džep sadrži različiti broj dolara?*

Treba spomenuti vrlo važan pojam vezan uz rješavanje problema. Taj pojam se odnosi na iznenadni trenutak shvaćanja problema, tj. otkrića rješenja za zadani problem, poznatiji pod nazivom aha! trenutak (aha! efekt ili Eureka efekt), a njegova glavna pretpostavka je prelazak iz nerazumijevanja u razumijevanje rješenja [1].

Ovime smo dali kratak pregled faza rješavanja problema koje nam nudi Pólya i glavne pojmove vezane uz njih, međutim, on se u svojoj knjizi ne bavi realizacijom ovih aktivnosti u nastavi matematike na svim razinama obrazovanja. Zato ne smijemo izostaviti Alana Schoenfelda[5]. Sustavno se bavio pitanjima vezanim uz rješavanje problema, modelima poučavanja matematike te načinima poboljšanja izvođenja nastave u učionicama. U svom djelu *Mathematical Problem Solving* posebno se osvrnuo na Pólyine ideje rješavanja problema, za koje je već tada tvrdio da se rijetko primjenjuju u nastavi matematike, osvrnuvši se i na vlastito iskustvo [24], a kasnije u drugim dijelima iznosi i kritike na račun vrlo čestog spominjanja Pólyinog imena kada je riječ o rješavanju problema, ali istodobnom trivijaliziranju njegovog rada [23]. Schoenfeld ističe kako se prije rješavanja problema treba istaknuti razlika između problema i zadatka. U prethodnom odlomku dali smo definiciju problema kao situacije koju trebamo riješiti, ali nam nije poznat put rješavanja. Dakle, potrebno je razvijati i kombinirati prethodno naučene metode i stečeno znanje na nov način. Rješavanje zadatka se pak sastoji od već poznatih strategija. Ako se uzme u obzir da je matematički zadatak zapravo posebna vrsta problema, možemo reći da ih dijelimo da rutinske, one koje znamo riješiti poznatim metodama, i nerutinske, one za čije rješavanje nam standardne metode ne pomažu. Ove potonje zovemo zadacima s uvidom[6], a karakterizira ih pojava aha! trenutka [1].

2.2 Razvoj Teorije didaktičkih situacija

Kao sažetak, može se reći da je IUNM svaka aktivnost u nastavi matematike čiji je primarni cilj sudjelovanje učenika u istraživanju i rješavanju problema koje nastavnik postavlja pred njih. Dakle, osnovna pretpostavka je da se učenici ponašaju kao istraživači i razmišljaju na sličan način kao matematičari te na taj način stječu matematičko znanje. Dva su ključna teorijska okvira koja se odnose na IUNM: Teorija didaktičkih situacija, skraćeno TDS (eng. *The Theory of Didactical Situations*) i Realistično matematičko obrazovanje ili RMO (eng. *Realistic Mathematics Education* ili *RME*). U središtu obje teorije nalazi se rješavanje nerutinskih problema čime učenici stječu nova matematička znanja, što je ideja IUNM-a. U ovom radu naglasak ipak stavljamo na TDS, ali ne izostavljamo usporedbu ovih teorija.

[5] Alan H. Schoenfeld (New York 1946. -) - američki matematički edukator i istraživač

[6] Uvid (eng. *insight*) označava vrlo jasno razumijevanje problema koje dolazi odjednom.

Teorija didaktičkih situacija ili TDS jedna je od najpoznatijih teorija učenja i poučavanja matematike. Njen je začetnik Guy Brousseau[7] koji je svoje ideje počeo istraživati kasnih 1960. godina, a za rad na Teoriji didaktičkih situacija dodijeljena mu je Felix Klein medalja[8] 2003. godine. Niz njegovih radova, dugo nepoznatih ili poznatih samo francuskom govornom području, nastao je tijekom više od trideset godina razvoja spomenute teorije, a većina su prevedena tek 1997. godine i pritom su se autori koncentrirali na razdoblje od 1970. do 1990. godine, koje se smatra ključnim u razvoju ove teorije (vidi [5]). Desetljeća istraživanja sadrže razne značajke teorije koje je stoga nemoguće sve navesti, ali nije niti potrebno kako bismo shvatili temeljne ideje. U središtu knjige koja okuplja njegov rad detaljno je prikazana artikulacija između teoretskog okvira i eksperimentalnih istraživanja koja čine izvor bogatstva TDS-a. Iako je inicijalna namjera bila započeti knjigu s prvim poglavljem u kojem se uvodi i predstavlja temelj i metode TDS-a, autori su se odlučili za ponešto drugačiji pristup. Imajući na umu da prvo poglavlje može obeshrabriti čitatelje, knjigu započinju s tekstom *"Utrka do* 20*"* (eng. *"Race to 20"*), u kojem Brousseau navodi većinu glavnih značajki TDS-a na način da čitatelju omogući intuitivno razumijevanje teorije. "Utrka do 20" je situacija koju je osmislio i koristio Brousseau u ranim sedamdesetima. Prema Brousseau to je bio generički primjer na kojem je prvo izgradio i razvio nekoliko aspekata TDS-a, a kojeg je kasnije koristio kako bi TDS ilustrirao [5]. Iz istog razloga i u ovom radu započinjemo s primjerom koji ilustrira glavne značajke TDS-a, a tek onda ih detaljnije analiziramo.

2.3 "Utrka do 20"

Općenito, situacije poučavanja matematike mogu se opisati kao razmjena između nastavnika, učenika i okruženja. Zbog toga ćemo razmotriti primjer scenarija nastavnog sata čiji je glavni cilj da učenici samostalno istražuju i steknu određeno matematičko znanje. Primjer je preuzet iz [5], a već smo ga spomenuli pod imenom "Utrka do 20".

Primjer 2.3.1. *Igru igraju dva igrača. Prvi igrač govori* 1 *ili* 2 *(npr. prvi igrač odabire* 2*); drugi igrač nastavlja igru dodavanjem* 1 *ili* 2 *na izgovoreni broj (npr. drugi igrač odabire dodati* 2*) i govori rezultat (u ovom slučaju govori* 4*); prvi igrač zatim nastavlja sa dodavanjem* 1 *ili* 2 *na prethodni rezultat (npr. prvi igrač odabire dodati* 1*) pa govori rezultat (u ovom slučaju govori* 5*); igra se nastavlja na isti način naizmjenice; pobjednik je onaj igrač koji prvi izgovori broj* 20.

Cilj ovog scenarija je otkrivanje i dokazivanje pobjedničke serije brojeva 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20. Taj niz predstavlja brojeve $p = 20 - 3n$, $n = 1, ..., 6$. Rezultat dijeljenja broja

[7] Guy Brousseau (Taza 1933. -) - francuski matematičar, edukator i istraživač obrazovanja

[8] Felix Klein medalja je nagrada koja se dodjeljuje za životno akademsko postignuće u matematičkom obrazovanju.

20 s 3 daje broj 6 koji predstavlja broj koraka potrebnih da se dostigne broj 20, dok ostatak pri tom dijeljenju daje broj 2 koji predstavlja broj s kojim započinjemo kako bi osigurali pobjedu. Uočimo da se iza igre krije pojam ostatka (pri dijeljenju s 3) jer svi pobjednički brojevi pri dijeljenju s 3 daju ostatak 2, što im omogućava kontrolu od samog početka igre. Stoga možemo reći da je cilj igre naučiti da operacija dijeljenja daje odgovor na novu vrstu problema, koja nema vidljive veze s dijeljenjem, i da je pobjedničku strategiju moguće matematički potvrditi, čime učenici uočavaju potrebu za dokazom [28].

Za početak, nastavnik učenicima predstavlja i objašnjava pravila igre, a nakon toga učenici započinju s igrom bez pomoći nastavnika. Pri kreiranju situacije, Brousseau je razlikovao četiri faze: (1) objašnjenje pravila igre, (2) igranje jedan protiv drugog, (3) igranje skupina protiv skupine i (4) igra otkrivanja [5]. Prva faza obuhvaća upravo ono što smo naveli, a to je nastavnikovo objašnjavanje pravila igre, a iste može i demonstrirati tako da izabere jednog od učenika te s njim započne igru, a zatim odabere njegovog partnera kojem će prepusti svoje mjesto. Nastavnik ne izriče nikakvu strategiju koja bi mogla dovesti do pobjede, već je ključno da učenici sami otkriju put koji im osigurava pobjedu u igri.

Podjelom učenika u parove, među njima započinje igra koja može trajati više “rundi”, ali ne više od deset minuta sata. Tijekom ove faze učenici primjenjuju izrečena pravila igre. Učenici djeluju potpuno samostalno i svaki od njih pokušava prvi izgovoriti broj 20. Metodom pokušaja i promašaja testiraju koji je najpovoljniji način da dođu do 20. Prema Brousseauovim istraživanjima, nekolicina učenika uoči da nije dovoljno nasumično nizati brojeve te u ovoj fazi kreću s testiranjem “nasumičnosti”, a neki od njih otkriju pogodnosti broja 17 [5].

Nakon igranja u parovima, vrijeme je za igru skupine protiv skupine, a podjelu u dvije skupine i njihove predstavnike određuje nastavnik. Učenici i dalje djeluju samostalno, i svaki učenik u skupini ima pravo odgovoriti drugoj skupini. Ona koja pobjedi dobiva jedan bod. Prema Brousseau, učenici vrlo brzo uočavaju potrebu za zajedničkim planiranjem svakog koraka i raspravljanjem mogućih strategija [5]. Tako postoji mogućnost da se tvrdnja o pogodnosti broja 17 u ovoj fazi potvrdi.

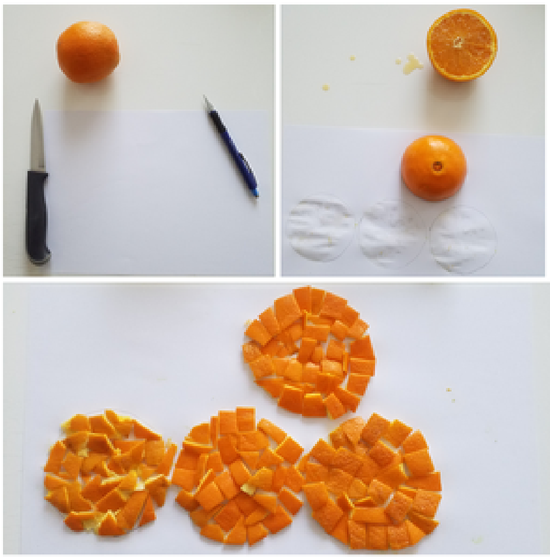
U fazi koja je nazvana igrom otkrivanja, nastavnik će zamoliti učenike, odnosno skupine, da svoje pretpostavke formuliraju i prezentiraju. To su zapravo strategije koje su im pomogle da pobijede u igri. Od učenika se može zatražiti da tu strategiju formuliraju u obliku jedne rečenice, primjerice *“Ako izgovorim* 17*, tada pobjeđujem.”*, a nastavnik je može zapisati na ploču. Kako bi ona ostala zapisana na ploči, treba biti potvrđena od skupine koja tu tvrdnju nije izrekla. No, učenik koji je iznio svaku od pretpostavki mora istu potvrditi, bilo igranjem s nekim od učenika ili nizom logičkih tvrdnji koje vode do istinitosti tvrdnje. Ukoliko učenici nemaju valjanih pretpostavki i sve su odbačene, igra se može odigrati još nekoliko rundi u kojima će učenici pokušati doći do pobjedničkih brojeva. Nastavnik je siguran da su učenici postigli predviđeni cilj igre kada navedu strategiju koja ih vodi do pobjede, ali istu potvrde. Na kraju, nastavnik formalno sažima cilj igre, odnosno pojam ostatka. Ovime smo opisali scenarij nastavnog sata koji je klasičan primjer TDS-a, pomoću kojeg intuitivno možemo razumjeti glavne značajke TDS-a. Dakle, TDS podupire poučavanje matematike koje potiče učenike da istražuju probleme postavljene pred njih koristeći dostupno znanje, te da pritom grade novo matematičko znanje [28].

2.4 Institucionalizirano i osobno znanje

U prethodnom odlomku već smo ponudili scenarij nastavnog sata koji se bavi jednim jedinim problemom, a to je pronaći i potvrditi pobjedničku strategiju za spomenutu igru. No, za niz matematičkih problema ne postoje unaprijed razrađeni scenariji poput ovog, ali to ne znači da ih nastavnik ne može iskoristiti u nastavi. Dapače, pred njega se postavlja izazov organiziranja nastavne lekcije koristeći određeni problem, poput onog koji smo imali u spomenutoj igri, i to s određenim ciljem. Upravo je TDS teorija koju možemo koristiti u organizaciji nastavne lekcije. U samom nazivu teorije pojavljuje se pojam *didaktička situacija*. U ovom kontekstu radi se o okruženjima u kojima nastavnik ima uloga moderatora. Naime, razumijevanje određenih matematičkih koncepata učenicima može predstavljati problem. U tom slučaju, nužno je kreirati situaciju za poučavanje koja će učenicima omogućiti davanje smisla tom konceptu. To je ono što zovemo didaktičkom situacijom. No prije svega, kada govorimo o TDS-u, važno je razlikovati dvije vrste znanja: institucionalizirano znanje i osobno znanje.

Institucionalizirano znanje, poznato i pod nazivima javno ili službeno znanje, odnosi se na znanje sadržano u udžbenicima, znanstvenim časopisima, knjigama ili na internetu. Drugim riječima, znanje koje je dijeljeno i dostupno svima. Takvo znanje je nastalo kao rezultat istraživačkog procesa koji nije vidljiv pri prezentiranju. *Osobno* ili *individualno znanje* predstavlja ono znanje koje učenici izgrađuju prilikom rješavanja (matematičkog) problema. Kao dobar primjer navodimo oplošje kugle. Institucionalizirano znanje je dano formulom za oplošje kugle kao $O = 4R^2\pi$, gdje je R polumjer kugle. Osobnim znanjem smatramo ono razvijeno u kontekstu u kojem su učenici otkrili da navedena formula vrijedi. Zgodna aktivnost kojom učenici mogu otkriti ovu formulu je pomoću naranče, kao što je prikazano na *Slici 2.1*.

Očito je da postoji velika vjerojatnost da se osobno znanje učenika razlikuje od institucionaliziranog, u manjoj ili većoj mjeri, ali ono se može približavati institucionaliziranom. To se postiže zadavanjem novih problema koji predstavljaju izazov za osobno znanje učenika, a rješavanjem istih može doći do potvrđivanja i razvijanja osobnog znanja.



Slika 2.1: Prikaz formule za oplošje kugle pomoću naranče, slika preuzeta sa: `https://www.katolickaskola.com/pokus-vanja-bazdar`

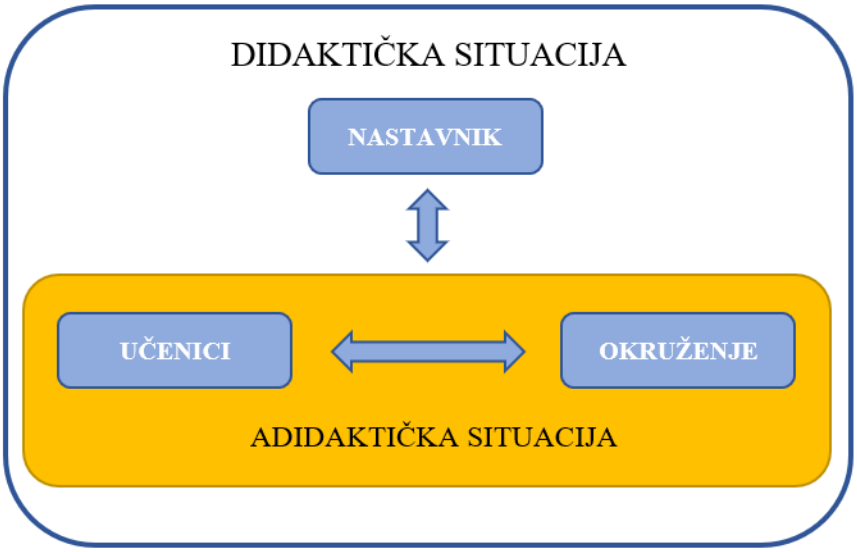
2.5 Didaktička i adidaktička situacija

U prethodnom odlomku kratko smo opisali što je didaktička situacija. Sada analiziramo što ona zapravo uključuje. Prema ideji IUNM-a, učenik se treba ponašati kao znanstvenik i istraživati problem koji je zadan kako bi došao do rješenja. Jednostavno rečeno, ne možemo nekome "natočiti" znanje u glavu, natjerati ga da prihvati ili umjetno kreirati razumijevanje.

Prema TDS-u, nužno je kreirati didaktičku situaciju u kojoj je nastavnik posrednik. Ta situacija uključuje i problem koji nastavnik prezentira, ali i realno okruženje koje je nastavnik dizajnirao. To okruženje nazivamo *didaktičko okruženje* (fra. *milieu*), a ono se sastoji od zadanog problema, prethodnog znanja učenika i raznog materijala koji je dostupan učenicima, a koji će im omogućiti povratnu informaciju o njihovom djelovanju (npr. pribor za pisanje, papir, itd.). Kako bi okruženje imalo smisla, nastavnik prije nastavnog sata treba odrediti *ciljano znanje*. To je cilj učenja koji je nastavniku poznat, ali učenicima na početku djelovanja nije. Zato okruženje nosi veliki potencijal za izgradnju znanja kod učenika, jer sami dobivaju potrebu za novim znanjem kako bi riješili problem. Zbog toga se o TDS-u vrlo često govori u kontekstu igre. Učenici nastoje pobijediti u igri, a to će uspjeti samo ako osmisle najbolju strategiju za pobjedu, kao što smo opisali u igri "Utrka do 20", tj. *Primjeru 2.3.1*.

Okruženje koje je predano učenicima zahtijeva od njega da bude aktivan, odnosno u interakciji s njime. Ako nastavnik ne sudjeluje u toj interakciji, tada se takva situacija u kontekstu TDS-a zove *adidaktička situacija*. Upravo u takvoj situaciji učenici, bez uplitanja nastavnika, izgrađuju svoje osobno znanje i približavaju ga institucionaliziranom. U toj situaciji oni djeluju, formuliraju hipoteze, potvrđuju ih ili opovrgavaju, objašnjavaju svoje strategije i nalaze najbolje, ali i primaju povratne informacije od okruženja. Iako nastavnik u toj situaciji ne djeluje direktno, on promatra i prati rad učenika. Dakle, adidaktička situacija je sadržana unutar didaktičke situacije. Prema Winsløwu, jedna od glavnih funkcija didaktičke situacije jest da inicira, regulira i moderira adidaktičku situaciju, odnosno da izgrađeno osobno znanje bude dijeljeno, potvrđeno te da se prizna kao točno [28]. Ipak, trebamo razlikovati adidaktičku od *ne-didaktičke situacije* za koju smatramo da nije izričito organizirana kako bi se omogućilo stjecanje znanja, već se učenje odvija spontano.

Na *Slici 2.2* prikazan je međuodnos dviju situacija, didaktičke i adidaktičke situacije, ali vidimo da didaktička situacija sadrži dvostruku interakciju: učenika s okruženjem i nastavnika s adidaktičkom situacijom. Prikaz na slici napravljen je prema onom iz [28].



Slika 2.2: Prikaz didaktičke situacije

2.6 Koja je uloga nastavnika?

Kao što je prethodno rečeno, tradicionalne metode poučavanja ne dopuštaju u velikoj mjeri učeniku istraživanje i aktivnost pri rješavanju. Dapače, nastavnik je taj koji institucionalizirano znanje uvodi, demonstrira na primjeru, a potom procjenjuje učenikovo rješavanje. No, TDS pripisuje nastavniku mnogo značajniju ulogu od predavača.

Za izgradnju osobnog znanja prvo je potrebno deinstitucionalizirati institucionalizirano znanje. Za to je zadužen upravo nastavnik i to radi kroz pripremu i izgradnju okruženja u kojem će učenici moći učiti i prići institucionaliziranom znanju te kroz odabir ili osmišljavanje problemske situacije koju potom predaje učenicima. Čak i kada preda problem učenicima, a oni djeluju, nastavnik promatra njihovo djelovanje i na temelju tog promatranja priprema sljedeće faze nastavnog sata. No, kada svaki od učenika izgradi svoje osobno znanje koje trebaju potvrditi, nastavnik se treba pobrinuti da dođu do ciljanog znanja. Stoga je zadnji korak zapravo institucionalizacija! Nastavnik treba sažeti i jasno istaknuti strategije učenika i institucionalizirano znanje izgraditi na njihovim doprinosima.

2.7 Didaktički i adidaktički potencijal

Postojanje problema, naime, ne osigurava mogućnost izgradnje didaktičke situacije koja dopušta izgradnju znanja. Iako su adidaktičke situacije u uobičajenom poučavanju rijetke, možemo promatrati situacije koje imaju *adidaktički potencijal*. To znači da postoji okruženje koje učenicima pruža određene povratne informacije, ali one same nisu dovoljne kako bi izgradili novo znanje. U ovom slučaju, nastavnik može intervenirati kako bi preoblikovao okruženje. Zbog toga se i govori o potencijalu, jer postoji mogućnost da nastavnik ignorira isti te upravlja situacijom ne uzimajući u obzir učeničke reakcije na povratne informacije [13].

S druge strane, kada govorimo o *didaktičkom potencijalu*, mislimo na potencijal koji ima određeni (matematički) problem da se, u kontekstu TDS-a, postigne željeni cilj, odnosno izgradi didaktička situacija koja pomaže izgradnji ciljanog znanja. Već smo napomenuli da ne mora nužno svaki problem omogućiti izgradnju didaktičke situacije, ali niti imati potencijal koji omogućava da učenici samostalno istražuju, eksperimentiraju, postavljaju hipoteze, a zatim potvrđuju svoja otkrića. Prema tome, problemske situacije se razlikuju i imaju manji ili veći potencijal za osmišljavanje situacije koja će dovesti do učenja, a nastavnik treba biti pripremljen i dobro poznavati nastavni sadržaj kako bi mogao procijeniti stvarni potencijal.

2.8 Didaktički ugovor

Iako u nazivu nosi pojam ugovor, zapravo se ne radi o pravom ugovoru. Naime, cijela interakcija učenika s okruženjem i samo istraživanje problema ne mora teći glatko. Dapače, učenik može izvesti krivi zaključak ili promašiti rješenje problema, ili se uopće ne mora truditi kako bi došao do rješenja. Prema Brousseau, upravo u takvim situacijama se formira odnos koji odlučuje kakva je odgovornost na učenicima, a kakva na nastavniku, a takav uzajamni odnos podsjeća na ugovor [5].

Nastavniku može biti izazovno snalaziti se u prethodno opisanim situacijama, ali i općenito u istraživački usmjerenim situacijama. On treba znati koje će dijelove znanja učenik sam izgraditi, a koje će on institucionalizirati. I nastavnik i učenici imaju određena očekivanja o ulogama i odgovornostima na nastavnom satu, a skup tih očekivanja zovemo *didaktičkim ugovorom*. Primjerice, u određenim situacijama učenik može pitati nastavnika hoće li njegova strategija dovesti do ispravnog rješenja. Time pokazuje da ne snosi odgovornost za potvrdu svoje strategije već očekuje istu od nastavnika. Nastavnik tada ima mogućnost potvrde ili prilagođavanja okruženja koje će učenicima dati mogućnost potvrde samostalnim djelovanjem, a ključno je uspostaviti ravnotežu između vođenja i samostalne aktivnosti učenika.

2.9 Faze TDS-a

Prema TDS-u, nastavne situacije se mogu podijeli u pet faza koje sada opisujemo, a potom ih primjenjujemo u slučaju "Utrke do 20". Faze su sljedeće: (1) primopredaja (devolucija), (2) djelovanje, (3) formulacija, (4) potvrđivanje (validacija) i (5) institucionalizacija [28]. Važno je napomenuti da se faze mogu izmjenjivati i njihov redoslijed nije strogo zadan. Tako se, primjerice, djelovanje, formulacija i potvrđivanje mogu izmjenjivati međusobno.

(1) Primopredaja (devolucija)

Prva faza nastavne situacije svakako je primopredaja problema, odnosno zadatka. Nastavnik institucionalizirano znanje u ovoj fazi prilagođava, izgrađuje pogodno okruženje, uvodi problem, objašnjava pravila i provjerava jesu li učenici razumjeli ista. Može se reći da nastavnik predaje okruženje učenicima.

U "Utrci do 20" (*Primjer 2.3.1*) ova faza podrazumijeva uvođenje pravila igre, ali i igru nastavnika s nekim od učenika u svrhu demonstriranja drugima.

(2) Djelovanje

Nakon što je nastavnik predao okruženje učenicima, slijede tri faze koje podrazumijevaju učenikovu aktivnost. Jedna od njih je faza djelovanja i ona podrazumijeva da učenici samostalno istražuju problem koji im je predan. To znači da eksperimentiraju, isprobavaju, testiraju strategije koje se temelje na prethodno stečenom znanju.

Kod "Utrke do 20" (*Primjer 2.3.1*) to znači da učenici igraju jedan protiv drugog primjenjujući zadana pravila i pokušavajući pobijediti metodom pokušaja i promašaja, dok postupno ne uoče da je broj 17 pogodan za pobjedu.

(3) Formulacija

U ovoj fazi učenici objašnjavaju strategije koje su koristili u fazi djelovanja. Dakle, nastavnik traži od učenika da formuliraju svoje hipoteze i zaključke. Bitno je naglasiti da svaki učenik tijekom djelovanja izgrađuje svoje osobno znanje, no ono treba biti potvrđeno, stoga u ovoj fazi svaki od učenika (ili u manjim skupinama) izriče i dijeli svoje osobno znanje.

Ova faza se kod "Utrke do 20" (*Primjer 2.3.1*) očituje kao igra skupine protiv skupine, gdje učenici mogu dijeliti svoje osobno znanje jedni s drugima i unutar skupine. To znači da učenici ponovno igraju igru kako bi potvrdili najbolju strategiju, a zatim ju izriču pred razredom, primjerice: *"Ako izgovorim* 17*, tada pobjeđujem."* Potrebno je naglasiti kako je nastavnik zadužen za stvaranje sigurne atmosfere u učionici, u kojoj će biti dozvoljene pogreške i učenici će rado raspravljati o vlastitim zaključcima.

(4) Potvrđivanje (validacija)

Nakon postavljanja hipoteza slijedi faza potvrđivanja (validacije) koju zovemo tako zato što u ovoj fazi učenik treba potvrditi hipoteze koje je postavio. Svaka od hipoteza se testira unutar okruženja, a ako je ono pogodno, učenici će dobiti povratnu informaciju o hipotezi. To znači da nastavnik ne mora potvrditi njihovu valjanost te da se još uvijek ne upliće u rad učenika.

Ako se vratimo na "Utrku do 20" (*Primjer 2.3.1*), faza potvrđivanja podrazumijeva strategiju koja uvijek vodi do pobjede. Nakon što su i podijeljeni u skupine formulirali određene strategije, potrebno je pobjedničku potvrditi kao najbolju. To učenici rade ili ponovnim igranjem pri čemu koriste pobjedničku strategiju koja uvijek vodi do pobjede ili logičkim nizom tvrdnji koji vodi do istinitosti njihove pretpostavke.

(5) Institucionalizacija

Posljednja faza nastavne situacije je faza institucionalizacije. Kako učenici izgrade svoje osobno znanje, tako ga je potrebno približiti institucionaliziranom. Upravo to obuhvaća ova faza, osobno znanje postaje institucionalizirano, službeno i sadržano u udžbenicima. U ovoj fazi djeluje nastavnik koji na temelju učenikovih ideja i strategija gradi institucionalizirano znanje.

Ono to se institucionalizira u “Utrci do 20” (*Primjer 2.3.1*) je pobjednička strategija. Kao što je već spomenuto, to je zapravo niz brojeva 2, 4, 8, 11, 14, 17, 20 koje možemo zapisati kao $p = 20 - 3n$, $n = 1, ..., 6$. Ovisno o tome koliko dobro su učenici poboljšali strategiju, te brojeve mogu zapisati kao $p = 3n + 24$, gdje je n broj runde u kojoj je p pobjednički broj i uočiti da svi brojevi u nizu predstavljaju brojeve koji pri dijeljenju s 3 daju ostatak 2, a to je ono što se nalazi u pozadini igre i što nastavnik treba institucionalizirati.

	Uloga nastavnika	Uloga učenika	Okruženje	Situacija
Primopredaja (devolucija)	Uvodi, predaje okruženje	Primaju, pokušavaju se uhvatiti u koštac s problemom	Uspostavlja se	Didaktička
Djelovanje	Promatra i zapaža	Djeluju i zapažaju	Problem se istražuje	Adidaktička
Formulacija	Organizira, po potrebi potiče pitanjima	Formuliraju što preciznije moguće	Otvorena rasprava	Adidaktička ili didaktička
Potvrđivanje (validacija)	Sluša i po potrebi procjenjuje	Raspravljaju, pokušavaju pratiti tuđe argumente	Vođena rasprava	Često didaktička
Institucionalizacija	Prezentira i objašnjava	Slušaju i zapažaju	Institucionalizirano znanje	Didaktička

Slika 2.3: Faze Teorije didaktičkih situacija

Svaka od ovih faza sa sobom nosi svoje izazove, kako za učenike, tako i za nastavnika. Pomoću njih možemo osmisliti nastavni sat, ali i analizirati ukoliko nije osmišljen da odgovara ovim faza. Važno je naglasiti da faze možemo ponavljati, tj. vraćati se na njih i regulirati ih ukoliko nisu ispunjena sva očekivanja ili jednostavno učenici nemaju dovoljno predznanja za rješavanje postavljenog problema. Na *Slici 2.3* prikazan je pregled svih faza TDS-a, koji je izrađen prema [28]. Uočimo, svaka faza donosi nove uloge nastavniku, ali i učenicima, a osim toga karakterizira ih izmjena iz didaktiče u adidaktičku situaciju koja može varirati, ovisno o organizaciji didaktičke situacije.

2.10 TDS i RMO

Već je spomenuto da su TDS i RMO dvije istaknute teorije u ostvarenju ideja IUNM-a. *Realistično matematičko obrazovanje* ili *RMO* je teorija koju je prvotno razvio Hans Freudenthal[9]. Kao i TDS, RMO podupire ideju da se pred učenike trebaju staviti nerutinski problemi čijim rješavanjem oni grade nova znanja. Ti problemi dolaze od nastavnika, ali su učenici oni koji djeluju pri rješavanju problema, bez direktnog uplitanja nastavnika.

Izgradnja znanja se prema TDS-u događa unutar didaktičke situacije, unutar koje su učenici u interakciji s kreiranim didaktičkim okruženjem. Kod RMO-a se taj proces događa kada učenici matematiziraju pojavu koja je predmet problema [28]. Winslow navodi dva glavna načela na kojima se RMO temelji:

- Matematika je ljudska djelatnost.
- Smislena je matematika izgrađena na bogatim realnim kontekstima.

Zbog ovih načela, ključan pojam u RMO-u je *matematizacija*, koja prema Freudenthalu označava "cjelokupnu organizaciju djelatnosti matematičara" [28]. Ona obuhvaća *horizontalnu matematizaciju* koja predstavlja matematički alat kao pomoć pri rješavanju problema iz stvarne situacije i *vertikalnu matematizaciju* kao proces djelovanja unutar mnatematike. Dakle, glavna ideja RMO-a je prepoznavanje problemske situacije kao relevantne i smislene u zadanom *kontekstu*.

[9]Hans Freudenthal (1905. - 1990.) - nizozemski matematičar i matematički edukator

Poglavlje 3

Logičko-kombinatorni problemi

Organizacija nastave matematike u 21. stoljeću, kada društvo od pojedinca zahtjeva mnogo više samostalnosti i razmišljanja nego li ikada prije, može biti izazovna. Prethodno smo dali uvid u jedan od teorijskih okvira koji ostvaruje temeljne ideje istraživački usmjerene nastave u čijem je središtu istraživanje problema. Osim što ostvaruje temeljne ideje IUNM-a, TDS je jedan od načina realizacije *načela problemnosti* u nastavi matematike. Naime, ciljevi nastave matematike i potrebe društva određuju temeljne ideje i opće smjernice za poučavanje matematike koje zajedničkim imenom nazivamo *didaktička načela* koja potom definiraju načine prenošenja znanja učenicima i razvijanja njihovih vještina i sposobnosti. Jedno od posebno istaknutih i primjerenih načela u nastavi matematike je upravo načelo problemnosti. Osnovna značajka tog načela sadržana je u njegovom nazivu, a kao osnovni pojam ponovno se ističe *problem*. Već smo ranije objasnili što podrazumijevamo pod tim pojmom, stoga možemo raspraviti zašto u nastavi matematike ističemo načelo problemnosti i zašto ga uopće spominjemo u ovom trenutku.

Matematički sadržaji koje obrađujemo na nastavi razlikuju se po težini i složenosti. Neki od njih su manje složeni i do njihovog razumijevanja dolazi bez većeg napora, no neki su izrazito složeni i zahtijevaju veću količinu uloženog napora kako bi se potpuno ispravno razumjeli. Međutim, i ovakvim sadržajima učenici mogu pristupiti vrlo površno i takav pristup im daje dojam da je sve jasno. Tada nastavnik treba omogućiti učenicima da uvide svu složenost sadržaja i ideja nastave matematike, a to radi primjenom načela problemnosti. Njega kratko možemo iskazati rečenicom: *"Najprije učiniti nejasnim, a zatim jasnim."* [17]. Prema Kurniku to podrazumijeva postavljanje problema pred učenike čijim će istraživanjem i rješavanjem učenici produbiti svoje razumijevanje. Znači, nova situacija učenicima neće biti jasna i trebat će uložiti dodatni trud u razrješavanje iste, ali time će postići jasnoću na višoj razini. Ovo načelo posebno dolazi do izražaja u problemskoj i istraživačkoj nastavi čiju osnovu čini problem, a čije ideje ostvaruje upravo TDS.

Predmet našeg proučavanja jesu problemi i to posebne vrste. *Logičko-kombinatorni problemi* iza sebe kriju neke od osnovnih ideja koje vrlo često spominjemo u matematičkom obrazovanju, ali najčešće ne ističemo pri rješavanju ovih problema. Izvrstan su primjer primjene načela problemnosti u nastavi matematike, iako se vrlo često izostavljaju iz različitih razloga, a najčešći je njihova složenost i težina. No, danas su bez logičko-kombinatornog mišljenja svakodnevni život, situacije na koje nailazimo, učenje, nastava, a posebno nastava matematike nezamislivi. Zato među ciljevima matematičkog obrazovanja značajno mjesto zauzimaju osnovne ideje i modeli kombinatorike i rješavanje logičko-kombinatornih problema. Posebno, rano uvođenje rješavanja logičko-kombinatornih problema u nastavu matematike često se smatra jednim od najboljih sredstava za razvoj kreativnog i inovativnog mišljenja kod učenika te čvrstom osnovom za formiranje mentalnih slika, predodžbi i matematičkih koncepata. Logika i kombinatorika su područja koja su izuzetno društveno korisna, ali se smatraju previše složenima i zahtjevnima za poučavanje u nastavi. Iz tog razloga, neki nastavnici isključuju mogućnost organiziranja nastavnog sata oko ovakvih problema, a takve zadatke zaobilaze. Time odbacuju priliku da učenici od najranije dobi razvijaju logičko-kombinatorno razmišljanje. Već od prvog razreda osnovne škole učenicima možemo predstaviti teške teme poput logike, skupova, kombinatorike, vjerojatnosti i statistike, ali na lak način. Na ovoj razini obrazovanja, učenje se većinom temelji na konkretnim situacijama i najčešće odvija uz pomoć didaktičkih materijala. Složene problemske situacije je poželjno približiti učenicima, neovisno o dobi. Možda neki od njih nikada neće ciljana matematička znanja dići na visoku razinu, ali će unaprijediti pristup rješavanju svakodnevnih, životnih problema.

Iako u nastavi nisu česti, logičko-kombinatorni zadaci pojavljuju se na većini matematičkih natjecanja, ovisno o razini. Nije rijetkost da su među najtežim, ali i najslabije riješenim zadacima. Za to postoje mnogi razlozi, ali u njihovu analizu nećemo ulaziti. U nastavku detaljnije analiziramo logiku i kombinatoriku, a zatim se orijentiramo na logičko-kombinatorne probleme s naglaskom na njihove osnovne ideje i didaktički potencijal kojeg nose sa sobom.

3.1 Logika i logički zadaci

U svakodnevnom govoru vrlo često koristimo pojamove logika, logički, logično itd., a pojavljuje se i u samom nazivu logičko-kombinatornih problema. Stoga u nastavku donosimo značenje pojma *logika* i kratki pregled logike kao znanstvene discipline, ali i što podrazumijevamo pod *logičkim zadatcima*.

Na Hrvatskom jezičnom portalu pojam logika definiran je na više načina: (1) “kao filozofska disciplina, znanost o mišljenju, o metodi zaključivanja, proučava oblike, zakonitosti i uvjete razložitih misli i opće metode spoznaje istine", (2) "način razmišljanja, zaključivanja, u skladu ili ne sa zakonima logike" i (3) "zakonitost prema kojoj se odvijaju određene pojave, događaji". Pojam logika izveden je iz grčke riječi *logos* koja u prijevodu ima više značenja: govor, riječ, um, razum, misao, mišljenje. Iako se još uvijek vode rasprave na temu osnovnih problema logike (o njezinoj prirodi, zadatku, podjeli itd.), sigurno je da je utemeljitelj samo jedan čovjek, a to je Aristotel[1]. Pojam, sud i zaključak, kategorije, osnovni principi mišljenja, definicija, indukcija i dedukcija su samo neki od osnovnih pojmova logike koji su opširno razmatrani u Aristotelovim djelima [20].

Danas poznata kao *deduktivna logika*, razvijala se i nadograđivala stoljećima, a najznačajniji razvoj doživjela je tijekom 19. i 20. stoljeća kada je usko povezana s matematikom. Tada je razvijena *matematička* (ili *simbolička*) *logika* koja je danas osnova za funkcioniranje modernih računala. Kada kažemo da je matematika deduktivna znanost, pod time mislimo da se istinitost njenih tvrdnji ne utvrđuje eksperimentima, već izvodi logičkim rasuđivanjem krećući od polaznih tvrdnji. Dakle, važno je poznavati način logičkog zaključivanja. Tako je, primjerice, u švedskom nacionalnom kurikulumu logičko zaključivanje navedeno kao jedna od glavnih kompetencija koju učenici moraju ostvariti u svakom razredu.

No, i dalje se nameće pitanje kako definirati pridjev "logički". Na Hrvatskom jezičnom portalu definira se kao "koji se odnosi na logiku, po logici, u skladu s logikom, koji je razuman". Dakle, kako bismo definirali pridjev "logički", potrebno je definirati logiku, a iz prethodnog se može zaključiti da se ona definira na više načina. Stoga opisujemo što pridjev "logički" znači u kontekstu (matematičkih) zadataka.

Opet, može se reći da niti logičke zadatke nije sasvim jednostavno definirati jer je za svaki matematički zadatak potrebno adekvatno logičko rasuđivanje. Ipak, zadacima često dajemo naziv po onome što je njihova osobitost. Primjerice, naziv aritmetički zadaci ukazuje na to da se u takvim zadacima računa s brojevima. Tako možemo protumačiti i logičke zadatke. U njima nema objekata poput brojeva, geometrijskih likova ili tijela, jednadžbi ili nejednadžbi. Ono što prevladava u takvim zadacima je logički element, ne zahtijevaju računanje, nego logičko zaključivanje, a obično je riječ o iskazima koji se odnose na živa bića ili razne objekte iz realnog okruženja te ih karakterizira da je svaka izjava ili istinita ili neistinita. Takve zadatke nazivamo *logičkim zadacima*.

Logički zadaci se rijetko nalaze u školskim udžbenicima, iako su pogodni za razvoj logičkog mišljenja, ali su zato često izdvojeni kao posebna cjelina u brojnim knjigama iz zabavne matematike. Za njih je potrebno minimalno poznavanje matematičkog sadržaja i često se koristi samo zdrav razum i logičko rasuđivanje. U tome, kao i u strukturi takvih

[1]Aristotel (Stagira u Traciji, 384. pr. Kr. - Halkida, 322. pr. Kr.) - starogrčki filozof i prirodoslovac

zadataka, nalazi se njihova prednost pred nekim drugim matematičkim zadacima. Naime, često su takvi zadaci zapravo priče koje opisuju situacije iz svakodnevnog života poput igre, natjecanja, zanimanja, ispita, susreta i raznih drugih koje matematiku stavljaju u kontekst i time bude interes učenika.

Kako bismo zaista opravdali prethodno napisano, promotrimo sljedeći primjer koji je klasičan primjer logičkog zadatka.

Primjer 3.1.1 ([2], str. 1)**.** *Dolazimo na raskrižje na kojem stoje dva identična blizanca za koja su upozorili da jedan uvijek govori istinu, a drugi uvijek laže. Jedan od puteva s tog raskrižja vodi k dvorcu, dok drugi vodi u provaliju. Možemo li od blizanaca saznati koji put vodi u dvorac?*

Rješenje*.* Možemo! Kako su blizanci identični, ne možemo biti sigurni kojeg pitamo ako postavimo pitanje: *Koji put vodi u dvorac?* Ali odgovor možemo saznati ako jednom od blizanaca postavimo pitanje: *Što bi rekao tvoj brat, koji put vodi u dvorac?* Nije bitno kojem jer ako smo postavili onom koji govori istinu, on će reći istinu o onom što bi njegov brat rekao, a njegov brat je onaj koji uvijek laže pa će pokazati put koji vodi u provaliju. Ako smo postavili onom koji laže, on će pokazati na put koji vodi u provaliju jer bi njegov brat pokazao put koji vodi u dvorac. Time smo saznali da je put koji vodi u dvorac onaj na kojeg nisu pokazali. Možemo jednom od njih postaviti i pitanje: *Što bi rekao tvoj brat, koji put ne vodi u dvorac?* Analognim zaključivanjem, saznali bismo put koji vodi u dvorac jer bi ga oboje pokazali. □

Time smo pojasnili što znači pridjev logički u kontekstu zadataka te preostaje odgovoriti na pitanje što je kombinatorika kako bismo razumjeli logičko-kombinatorne probleme. Prema tome, u nastavku pojašnjavamo što je kombinatorika i donosimo glavna pitanja kombinatorike koja koristimo kao temelj za analizu osnovnih ideja logičko-kombinatornih problema.

3.2 Kombinatorika

Za početak, odgovorimo na pitanje što je to *kombinatorika*. Iako se često vezuje uz probleme prebrojavanja, opseg kombinatorike mnogo je širi od jednostavnog rješavanja problema vezanih uz principe prebrojavanja. Kombinatorika je posebna grana (diskretne[2]) matematike koja se uz prebrojavanje bavi i egzistencijom, konstrukcijom i optimizacijom konačnih matematičkih struktura. Dakle, prebrojavanje je tek mali dio kombinatorike, a u središte naših proučavanja stavljamo druge principe koji većinom nisu prisutni na redovnoj nastavi, a sastavni su dio rješavanja logičko-kombinatornih problema na dodatnoj nastavi i

[2]Diskretna matematika bavi se proučavanjem ne-kontinuiranih matematičkih objekata.

natjecanjima.

Kombinatorika se, prije svega, bavi proučavanjem odnosa između različitih matematičkih objekata [1]. Često su ti objekti oni iz realnog okruženja poput kuglica, kutija ili šahovskih figura i kao što je već rečeno, broj tih objekata je konačan. Iz tog razloga, promatrane objekte nazivamo *diskretnima*. Osnovna pitanja na koje kombinatorika daje odgovor su sljedeća: *Koliko ima objekata s određenim svojstvima? Kako pokazati da neka situacija nije moguća? Kako pokazati da neki objekt postoji? Tko će pobijediti u igri s određenim pravilima? Koliko je najviše (najmanje) objekata moguće pod određenim uvjetima?* [1]. Imajući u vidu navedena pitanja, diskutiramo koji principi daju odgovor na ista. Odnosno, analizirajući te principe otkrivamo koje se osnovne ideje kriju iza njih, a koje zapravo predstavljaju osnovne ideje kombinatorike.

Sposobnost kombinatornog razmišljanja temeljna je sastavnica formalnog zaključivanja. Stoga se učenje i poučavanje kombinatorike treba temeljiti na rješavanju raznih kombinatornih problema u kojima učenici izgrađuju takav način razmišljanja. Logičko-kombinatorni problemi spajaju logiku i kombinatoriku na način da iza njih stoje osnovne ideje kombinatorike, ali za njihovo rješavanje potrebno je i logičko rasuđivanje. Ciljevi takvih zadataka su raznovrsni. Može se reći da je najopćenitiji cilj razvoj pozitivnog stava prema matematici i podizanje interesa za sudjelovanje u nastavi matematike. Elementi i osnovne ideje kombinatorike potaknut će kod učenika induktivno i analogno zaključivanje, sustavnost, kritički stav prema rješenjima, a posebno matematičko argumentiranje i dokazivanje.

Glavni problem u rješavanju logičko-kombinatornih zadataka je upravo formuliranje vlastitih ideja i zapisivanje dokaza. Čak i kada je učenicima iz zadatka nešto očito, postoji mogućnost da to neće znati zapisati. U tome im mogu pomoći različite metode primjenjive ovisno o zadatku kojeg rješavaju. Te metode su vezane uz osnovne principe, odnosno osnovne ideje kombinatorike, koje posebno ističemo i analiziramo u nastavku.

3.3 Osnovne ideje kombinatorike

Ranije su navedena glavna pitanja kombinatorike. Iza svakog od tih pitanja stoji određena osnovna ideja. One učenicima pomažu da riješe niz logičko-kombinatornih problema, od onih lakših do najtežih olimpijskih. Osnovne ideje kombinatorike su vezane uz osnovne kombinatorne principe od kojih su najpoznatiji i najčešće korišteni princip invarijantnosti, princip ekstrema, Dirichletov princip, princip matematičke indukcije i dvostruko prebrojavanje.

Princip invarijantnosti izuzetno je koristan alat u pokazivanju da neka situacija nije moguća. Naime, pronalaskom veličine koja se ne mijenja uspoređujemo stanje te veličine na početku i na kraju procesa provođenja danog postupka i ukoliko se pokaže da nije jednako, dolazimo do kontradikcije. Dalje u tekstu je ovaj princip detaljno objašnjen, stoga spomenimo samo još činjenicu da je u zadacima koji se rješavaju ovim principom ključno uočiti veličinu *koja se ne mijenja*. Dakle, osnovna ideja u pozadini problema je "očuvanje", pojam koji je poznat učenicima. Na isto kombinatorno pitanje odgovara i *princip ekstrema*. Želimo li pokazati da neka situacija nije moguća, u nekim zadacima ćemo rješenje započeti pretpostavkom da postoji element koji je ekstreman (minimalan ili maksimalan) po nekom svojstvu. Kada se odlučimo na promatranje nekog ekstrema u zadatku, moramo biti sigurni da on postoji. Kriterij po kojem ćemo odabrati ekstrem često nije jasan iz zadatka i moramo ga sami postaviti, što predstavlja svojevrstan izazov učenicima. Ideja traženja ekstrema zapravo se temelji na činjenici da svaki neprazan skup sa konačno mnogo elemenata ima najmanji i najveći element. Pojam ekstrema je osnovna ideja koju vidimo ne samo u kombinatorici, nego i u drugim područjima poput geometrije, a posebno matematičke analize. Jedno od osnovnih kombinatornih pitanja odnosi se na to koliko je najviše (najmanje) objekata moguće pod određenim uvjetima. U zadacima ovakvog tipa želimo optimizirati danu situaciju, ali i opisati kako optimalna situacija izgleda. U tom smislu, razlikujemo pojmove *ograda* i *konstrukcija*. Ovakvi zadaci zahtijevaju rješenje od dva dijela. Prvi dio podrazumijeva da je određeni broj objekata moguć, a u drugom dijelu pokazujemo da veći (manji) broj objekata nije moguće postići. Prema tome, i ovakvi zadaci u pozadini imaju osnovnu ideju "traženja ekstrema", ali zahtijevaju i konstrukciju tog ekstrema. Jedan od najpoznatijih principa je *Dirichletov princip* kojeg koristimo, između ostalog, kada trebamo pokazati da neki objekt postoji. Dakle, osnova je za formuliranje nekonstruktivnih dokaza. On se temelji na ideji "pridruživanja" i "injektivnosti", što bi značilo da je osnovni pojam u pozadini tog principa pojam funkcije. Još jedan princip kojeg povezujemo s pojmom funkcije je *dvostruko prebrojavanje*. Naime, ova metoda govori da ako elemente jednog skupa prebrojimo na dva načina te prvi put dobijemo jedan, a drugi put drugi rezultat, tada vrijedi da su ta dva rezultata jednaka. Stoga se dvostruko prebrojavanje može iskazati pomoću bijektivnosti. Koristimo ga u situacijama kada se pitamo koliko je objekata s nekim svojstvom, ali ih ne možemo direktno prebrojati. Dalje u tekstu ilustriramo kako se ove osnovne ideje mogu razraditi kroz primjere i aktivnosti, a za to koristimo princip invarijantnosti i Dricihletov princip.

Princip invarijantnosti

Jedno od osnovnih pitanja u kombinatorici je: *Kako pokazati da neka situacija nije moguća?* Ako je pred učenike postavljen logičko-kombinatorni problem koji u svojoj srži zapravo predstavlja ovo pitanje, prirodno je da će pokušati dokazati provjerom svih slučajeva. Tada se suočavaju s novim pitanjima: *Kako osigurati da su pokriveni svi mogući* *slučajevi? Može li se uvijek osigurati da su pokriveni svi slučajevi?* Rješavanjem niza primjera, učenici se vrlo lako uvjere da takvo što nije uvijek moguće. Kako onda pristupiti takvom problemu? Jedna od ključnih metoda koja pomaže pri rješavanju ovakvih problema je traženje invarijante.

Invarijanta je svojstvo ili veličina koja se ne mijenja u procesu primjene nekog pravila, odnosno prelazeći korak po korak po zadanom pravilu. Pronalaženje, odnosno uvođenje invarijante u proces rješavanja problema je ideja na kojoj se temelji *princip invarijantnosti*. Taj princip je izuzetno koristan u problemskim situacijama kada dokazujemo da ona nije moguća jer ako neka situacija ne zadovoljava uvedenu invarijantu, znači da iz početne situacije nije moguće doći u tu situaciju. Međutim, ovaj princip ne koristimo kada trebamo pokazati da je neka situacija moguća. Naime, ako neka situacija zadovoljava uvedenu invarijantu, ne znači nužno da je iz početne moguće doći u tu situaciju. Dakle, ključno je da uvedena invarijanta nema različite vrijednosti na početku i na kraju. Invarijante mogu biti razne veličine ili svojstva, npr. parnost ili ostatak pri dijeljenju s nekim brojem.

Pojam invarijante često je korišten u fizici gdje također označava veličinu koja se ne mijenja pri promjeni određenih fizikalnih uvjeta. Iako u radu koristimo pojam invarijante u proučavanju logičko-kombinatornih problema, učenici se u svom matematičkom obrazovanju prije susretnu s pojmom invarijante unutar geometrije. Međutim, pri tom susretu pojam invarijanta se ne definira na način na koji smo ovdje definirali niti se eksplicitno spominje, ali osnovna ideja koja se krije iza principa invarijantnosti prati učenike od osnovne do srednje škole kroz bavljenje geometrijom. Kao jedan od klasičnih primjera navodimo *osnu simetriju* koja predstavlja jednu od izometrija, preslikavanja prostora koje *čuva* udaljenosti. U ovom slučaju vrlo je lako odrediti invarijantu. Veličina koja ostaje nepromijenjena tijekom procesa preslikavanja (npr. točke ravnine s obzirom na čvrsti pravac ravnine) je upravo *udaljenost* (u primjeru, udaljenost točke od pravca). Međutim, invarijantu nije uvijek jednostavno uočiti. Posebno, u logičko-kombinatornim problemima to može predstavljati veliku poteškoću za učenike.

Prethodno smo u kontekstu geometrije naglasili riječ "čuva". Zapravo, govorimo o tome kako određena veličina ostaje nepromijenjena tijekom nekog procesa. U ovome se krije osnovna ideja određenih logičko-kombinatornih problema. U kontekstu vom Hofeovih osnovnih ideja u matematičkom obrazovanju, princip invarijantnosti zapravo tumačimo kao *princip očuvanja*. To znači da, kako bi učenici mogli riješiti određene logičko-kombinatorne probleme, moraju imati razvijenu osnovnu ideju "očuvanja", koja ovisno o postavljenom problemu ima različite aspekte. U tom smislu, diskutiramo o osnovnoj ideji "očuvanja" i njenim aspektima u odabranim logičko-kombinatornim zadacima unutar aktivnosti koje su usmjerene na istraživanje.

Logičko-kombinatorni zadaci rješivi korištenjem ovog principa nisu predviđeni za redovnu nastavu u RH, ali su zato često prisutni na matematičkim natjecanjima. Zbog toga ih mnogi nastavnici uvrštavaju među one koje obrađuju na dodatnoj nastavi. No, nameće se pitanje moraju li svi takvi zadaci biti teški i neprimjereni za redovnu nastavu. Štoviše, možemo li takav logičko-kombinatorni zadatak prilagoditi svim učenicima, a ne samo matematički nadarenima, te ga uklopiti u redovan nastavni sat? Odgovor na ova pitanja dajemo razradom aktivnosti usmjerenih na istraživanje koje analiziramo u kontekstu TDS-a, pri čemu posebno naglašavamo didaktički potencijal logičko-kombinatornih zadataka.

Započet ćemo s primjerom koji je naizgled jednostavan, ali prema Bašiću može biti vrlo težak za rješavanje. Odmah navodimo primjer i njegovo rješenje, a zatim analiziramo zašto i kako ovaj primjer uklopiti u redovnu nastavu.

Primjer 3.3.1 ([1], str. 28)**.** *Dan je papir u obliku kvadrata. U svakom koraku dozvoljeno je škarama razrezati papir na dva dijela, preokrenuti jedan dio i zalijepiti dijelove duž dužine po kojoj smo rezali. Je li moguće konačnim nizom dozvoljenih koraka dobiti papir u obliku jednakostraničnog trokuta?*

Rješenje. Kako kvadrat dijelimo na dva dijela koja ponovno spajamo, površina kvadrata se nije promijenila. Osim površine, nije se niti opseg promijenio. Pitanje se svodi na to postoje li kvadrat i jednakostranični trokut jednakog opsega i površine. Odgovor je ne, stoga nije moguće ostvariti traženu situaciju. □

Da odgovorimo na pitanje kako ovaj primjer uklopiti u redovnu nastavu, osmišljena je aktivnost koju nećemo vremenski ograničavati, a može se provoditi čitav nastavni sat. No, moramo naglasiti da postoji mogućnost da se aha! trenutak ne dogodi, što detaljnije obrazlažemo u nastavku.

Aktivnost 1 (Rezanje papira)**.**

Razred: od 5. (OŠ i SŠ)

Cilj aktivnosti: Učenici će uočiti da se prilikom provođenja zadanog pravila zadatka određena veličina ne mijenja te se upoznati s pojmom invarijante.

Oblik rada: Samostalan rad.

Potreban materijal: Papiri u obliku kvadrata, škare, magneti.

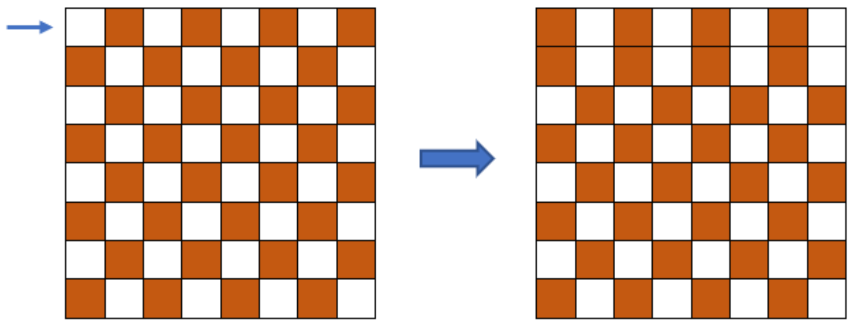
Tijek aktivnosti: Na početku sata nastavnik dijeli učenicima unaprijed pripremljene papire u obliku kvadrata. Napominjemo da bi bilo dobro kada bi nastavnik učenicima najavio da pripreme škare za ovaj sat, ali poželjno je da i on sam ima spremno nekoliko komada. Zatim im predstavlja problem (vidi *Primjer 1*). Nakon toga, provjerava da su svi shvatili što trebaju raditi u pojedinom koraku. Poželjno je da demonstrira barem jedan korak rezanjem papira i slaganjem na ploču pomoću magneta. Kada se uvjerio da su shvatili, prepušta im rješavanje problema kroz vrijeme koje je unaprijed odredio. Učenici istražuju, isprobavaju i pokušavaju riješiti zadani problem, a za to vrijeme nastavnik prati njihov rad. Kada procijeni da je za to došlo vrijeme, organizira raspravu u kojoj će učenici izreći svoje ideje, strategije i zaključke te ih argumentirati i međusobno raspraviti. $\surd$

Kako bismo istražili didaktički potencijal ovog zadatka, proučimo prvo koje ciljeve može ostvariti. Naime, kada spominjemo didaktički potencijal, mislimo na mogućnost koju određeni problem daje kako bi se izgradila situacija dovoljno bogata da se unutar nje ostvare željeni ciljevi. Osim što je potpuno usmjeren na samostalno istraživanje učenika, ovaj zadatak može ostvariti razne ciljeve, a o nastavniku ovisi koji će biti primarni i koje znanje će na kraju institucionalizirati. Osnovna ideja je ideja "očuvanja", a u ovom slučaju učenici mogu uočiti čak dvije invarijante: opseg i površinu. Dakle, rješenja se kod različitih učenika mogu bitno razlikovati, ali nastavnik očekuje da u pozadini svakog bude ista osnovna ideja. Prema tome, učenici mogu razviti različite slike, modele objašnjenja i reprezentacije u ovom zadatku. Ovisno o iskustvu učenika, postoji mogućnost da ovo bude rutinski zadatak. Ali za one učenike kojima ipak nije, aha! trenutak kada shvate da se radi o očuvanju opsega ili površine (ili oboje) nosi osjećaj samopouzdanja, motivira ih na rješavanje drugih problema i osnažuje pozitivan stav prema matematici. Pojmovi opseg i površina učenicima u ovoj dobi već su jako dobro poznati, a ovim zadatkom mogu utvrditi svoje shvaćanje oba pojma. Kako je među učenicima učestalo memoriziranje formula, pomoću ovog zadatka nastavnik može provjeriti razumijevanje samih pojmova opsega i površine. Na kraju, ne smijemo zanemariti da zadatak učenicima zaista može biti zabavan. Rezanje, slaganje, preslagivanje, drugim riječima rad rukama, učenike može potaknuti da i sami pokušaju pronaći sličan zabavan problem, a nastavnik tada ima mogućnost uvesti projektne radove, suradničke zadaće i zainteresirati učenike ne samo za logičko-kombinatorne probleme, već za matematiku općenito. No, što ako do aha! trenutka ne dođe? Konkretno, prethodna aktivnost je osmišljena tako da učenici režu papir i slažu dijelove po zadanom pravilu. Za primarni cilj određeno je uočavanje da se neka veličina ne mijenja. Nameće se pitanje koliko dugo će učenici slagati dijelove kako bi to uočili. Nakon neuspjelih pokušaja, učenici mogu pomisliti da zaista nije moguće dobiti trokut, no i dalje ostaje pitanje kako biti siguran u to. Sada se nameće pitanje kako osmišljena aktivnost može razrješiti ovakvu situaciju. Prema opisu tijeka aktivnosti na kraju je organizirana rasprava o idejama, strategijama i zaključcima, no ne govori se o slučaju kada učenici ne argumentiraju ispravno nepostojanje takvog trokuta. Dakle, ne znamo hoće li željeni cilj biti ostvaren. Prema tome, kada govorimo o didaktičkom potencijalu ovog zadatka, mogućnost za izgradnju didaktičke situacije unutar koje bismo ostvarili željeni cilj je upitna. Zaista, osmišljena aktivnost je zabavna, ali to ne znači da će željeni cilj biti ostvaren.

Sljedeći primjer Bašić navodi kao jedan od osnovnih primjera logičko-kombinatornih zadataka. Ne zahtijeva posebno matematičko predznanje učenika, ali izuzetno dobro razvija logičko-kombinatorno razmišljanje i zaključivanje. Zadatak nije lagan, ali nije niti jako težak jednom kada učenici imaju razvijenu osnovnu ideju "očuvanja". Za početak, navodimo primjer i njegovo rješenje, a potom aktivnost za nastavni sat koja uključuje taj primjer.

Primjer 3.3.2 ([1], str. 52)**.** *Ploča* 8×8 *na početku je obojena u dvije boje, crnu i bijelu, tako da su polja koja imaju zajedničku stranicu različitih boja, kao standardna šahovska ploča. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svakom od osam polja u tom retku ili stupcu promijeniti boju iz crne u bijelu ili obratno. Može li se konačnim nizom takvih poteza postići da točno jedno polje na ploči bude crno?*

Rješenje. U svakom potezu biramo jedan redak ili stupac, što znači da će se u svakom potezu promijeniti boja na točno 8 polja koliko ih ima taj redak ili stupac. Za ilustraciju, krenimo od samog početka, kada ploča izgleda kao standardna šahovska ploča. Odabirom primjerice prvog retka, boju će promijeniti 8 polja, od toga 4 crna u 4 bijela i 4 bijela u 4 crna što je prikazano na *Slici 3.1*.



Slika 3.1: Prikaz promjene boje polja nakon odabira prvog retka

Dakle, ako je k od polja u odabranom retku ili stupcu crno, tada je $8-k$ bijelo. Označimo s C ukupan broj crnih polja prije nekog poteza. Nakon tog poteza će ukupan broj crnih polja biti jednak $C - k + (8 - k) = C + 8 - 2k$. Uočimo, promjena u broju crnih polja iznosi $8 - 2k = 2(4 - k)$, što je paran broj. Dakle, zaključujemo da parnost ukupnog broja crnih polja ostaje nepromijenjena! Budući da je na početku ukupan broj crnih polja na ploči jednak 32, što je paran broj, nije moguće da nakon konačno mnogo poteza ukupan broj crnih polja bude neparan. Prema tome, nemoguće je da nakon konačno mnogo poteza točno jedno polje na ploči bude crno. $\square$

U [1] dan je tok misli koji može prethoditi ovom rješenju stoga ćemo ovaj primjer razmotriti u drugačijem svjetlu. Sljedeća aktivnost pokazuje kako organizirati nastavni sat oko ovog i njemu sličnih zadataka. Ova aktivnost može biti vremenski zahtjevna, kao i neke druge koje navodimo, stoga previđamo cijeli nastavni sat za njeno provođenje.

Aktivnost 2 (Parnost)**.**

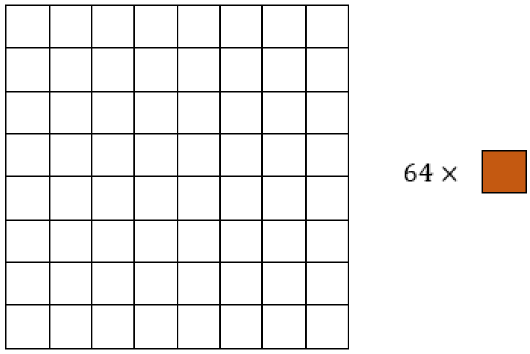
Razred: 1. (SŠ)

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti metodu za rješavanje logičko-kombinatornih problema, odnosno princip invarijantnosti.

Oblik rada: Suradnički rad u skupinama.

Potreban materijal: Modeli šahovske ploče i polja od papira, magnetna traka.

Tijek aktivnosti: Nastavnik na početku učenike može pitati znaju li kako izgleda šahovska ploča ili znaju li igrati šah. Učenicima pokazuje i objašnjava didaktički model standardne šahovske ploče kojeg je unaprijed pripremio pomoću kartona ili papira (*Slika 3.1*, lijevi prikaz ploče) te ga magnetnim trakama postavio na školsku ploču. Naime, crna polja na toj ploči nastavnik može, umjesto bojanja, pričvrstiti također magnetnim trakama, kako bi mu bilo lakše demonstrirati (poželjno je da ima više pripremljenih modela crnih polja s magnetnom trakom). Kao uvod u predstavljanje problema, nastavnik može dati nekoliko primjera koji ilustriraju probleme vezane za šahovsku ploču, koji ne moraju nužno biti vezani uz logičko-kombinatorno razmišljanje. Jedan od najpoznatijih je onaj koji govori o samom nastavku igre: mudrac koji je osmislio igru šah kako bi pokazao mladom indijskom kralju da bez naroda ne može vladati kao nagradu je zatražio da mu kralj isporuči onoliko zrna pšenice koliko se dobije kada se na prvo šahovsko polje stavi jedno zrno, na drugo dva, na treće četiri itd., odnosno na svako sljedeće polje dvostruko više nego što je na prethodnom. Učenicima može ostaviti za razmišljanje o tome je li mudrac bio skroman. Nakon kratkog uvoda, nastavnik učenicima predstavlja problem (vidi *Primjer 3.3.2*). Po potrebi, dodatno objašnjava pravilo po kojem se odvijaju potezi. Za to mu može poslužiti didaktički model s početka, a promjenu može napraviti po uzoru na *Sliku 3.1* tako da magnete pomiče s crnih polja te ih stavlja na bijela polja. Osim toga, može zatražiti od jednog učenika da odabere na dobivenom (*Slika 3.1*, desni prikaz ploče) modelu ploče jedan redak ili stupac i primijeni pravilo promjene boje, tj. iskoristi magnete kako bi zamijenio boju crnih polja u bijelu, odnosno bijelih u crnu. Kasnije dijeli učenike u četveročlane skupine nakon čega svakoj skupini dijeli model ploče sa svim poljima bijele boje (vidi *Sliku 3.2*) izrađen od papira i 64 odgovarajuća polja crne boje. Sada učenici sami rješavaju problem, a pritom mogu iskoristiti didaktički materijal koji su dobili. Za to vrijeme, nastavnik prati njihovo djelovanje i napredovanje unutar skupine.



Slika 3.2: Didaktički materijal za učenike za *Aktivnost 2*

Ovdje nećemo detaljno navoditi na koji način učenici unutar grupe mogu djelovati i razmišljati (vidi [1], str. 52-55). Očekuje se da će učenici pomoću modela ploče i crnih polja pokušati izvođenjem niza poteza doći do traženog jednog crnog polja na ploči. Vrlo je važno da nastavnik prosudi koliko je vremena dovoljno da učenici napreduju unutar četveročlanih skupina. Nakon predviđenog vremena formira dvije veće skupine u kojima učenici izmjenjuju razmišljanja i formuliraju svoje pretpostavke. Ako primijeti da ne napreduju unutar četveročlanih skupina ili je predviđeno vrijeme isteklo, na nastavniku je da promijeni okruženje u kojem djeluju pa formira dvije skupine u kojima će učenici izmjenjivati svoja razmišljanja. U toj fazi, nastavnik učenike može potaknuti na zaključivanje sljedećim pitanjima: *Koliki može biti broj crnih polja na ploči? Kako se izvođenjem poteza mijenja broj crnih polja na ploči?* Učenici mogu imati različite strategije prilikom rješavanja koje formuliraju, a potom prezentiraju nakon rada u većim skupinama, pri čemu iznose i zaključak. Nastavnik sluša njihovo prezentiranje te ih potiče na raspravu svojim pitanjima. Kada rasprava bude dovršena, nastavnik preuzima glavnu riječ, sažima njihove zaključke i objašnjava rješenje, pritom učenike upoznavajući s principom invarijantnosti. $\surd$

Ono što već uočavamo je da nastavnik očekuje kako će učenici u rješavanju ovog problema koristiti osnovnu ideju "očuvanja", odnosno princip invarijantnosti. U ovom slučaju invarijanta je parnost: ukupan broj crnih polja na ploči ne mijenja svoju parnost. To predstavlja normativni aspekt navedene osnovne ideje koja stoji iza ovog zadatka. Međutim, on se može više ili manje razlikovati od učeničkih pokušaja rješavanja ovog zadatka. Učenici rješavanjem ovog problema stvaraju svoju sliku situacije iz zadatka. Njihova individualna slika i postupak za kojeg smatraju da ih može dovesti do rješenja problema može uključivati pokušaj direktnog navođenja niza poteza do jednog crnog polja na ploči, što utvrđujemo deskriptivnim metodama rada. Zapravo, utvrđujemo koje se ideje kriju u njihovim pokušajima rješavanja zadatka. Zgodno je analizirati i primarne i sekundarne osnovne ideje ovog problema. Već je ranije rečeno da se primarne osnovne ideje temelje na konkretnim radnjama sa stvarnim objektima, a sekundarne na matematičkim operacijama sa simboličkim objektima. Prema tome, korištenjem dobivenog didaktičkog materijala, izvođenjem poteza i mijenjanjem boja polja na ploči dolaze do zaključka da ukupan broj crnih polja ostaje nepromijenjen, što potom mogu zapisati i simbolima kao što je to zapisano u rješenju primjera.

Dakle, koristeći ovaj logičko-kombinatorni zadatak organizirali smo nastavni sat s ciljem uvođenja jednog od principa koji nam pomaže u rješavanju logičko-kombinatornih problema. Prema tom cilju, nastavnik kreira odgovarajuću didaktičku situaciju u kojoj je on samo posrednik, a učenici djeluju samostalno. Ova didaktička situacija uključuje predstavljeni problem, ali i realno okruženje: modeli ploče, crnih polja, isprobavanje poteza na danom didaktičkom materijalu. U takvom okruženju učenici zaista dobivaju potrebu da uvedu invarijantu koja će im pomoći u rješavanju problema, jer ne mogu beskonačno dugo izvoditi poteze i pokušavati direktno dati "pobjednički" niz, niti osigurati da su proveli dovoljan niz poteza kako bi mogli zaključiti da nije moguće doći do jednog crnog polja na ploči. Kreiranje animacije na računalu još je jedna zgodna ideja kako izgraditi okruženje za istraživanje ovog problema. Ta animacija učenicima može pružiti mogućnost odabira retka ili stupca u nekom potezu, a potom polja tog retka ili stupca na ploči mijenjaju boju. U oba slučaja, rješavanje ovog problema učenici mogu shvatiti jednostavno kao igru u kojoj pokušavaju pobijediti.

Slijedi još jedan logičko-kombinatorni zadatak pomoću kojeg učenici istraživanjem mogu otkriti princip invarijantnosti, ali kojeg koristimo kako bismo pokazali koliko se normativni aspekt osnovne ideje može razlikovati od deskriptivnog. Drugim riječima, ako učenici nemaju dobro razvijenu ideju "očuvanja", u ovom slučaju broja objekata iste parnosti, njihove individualne slike i modeli objašnjenja ih mogu navesti na krivo zaključivanje.

Primjer 3.3.3 ([1], str. 90). *Na početku se na ploči nalaze brojevi* 2009*,* 2012 *i* 2015*. Željko u svakom koraku označi brojeve na ploči s a, b i c u nekom poretku, a zatim ih zamjenjuje brojevima $3a - b$, $3b - c$, $3c - a$. Može li Željko uzastopnom primjenom ovog postupka postići da na ploči u nekom trenutku pišu tri jednaka broja?*

Rješenje. Uočimo da se na početku na ploči nalaze jedan paran i dva neparna broja. Dokažimo da će se nakon svakog koraka na ploči i dalje nalaziti jedan paran i dva neparna broja. Drugim riječima, pokažimo da je broj brojeva iste parnosti nakon svakog koraka nepromijenjen. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je u nekom trenutku a paran, a b i c neparni brojevi. To znači da su $3a - b$ i $3c - a$ neparni, a $3b - c$ paran broj. Dakle, nakon zamjene ponovno imamo jedan paran i dva neparna broja. Zaključujemo da nije moguće u nekom trenutku imati tri parna ili tri neparna broja, što povlači da Željko ne može postići da na ploči u nekom trenutku pišu tri jednaka broja. □

Nastavnik očekuje, dakle, da će učenik riješiti ovaj problem uočavanjem invarijante koja je u ovom slučaju broj objekata iste parnosti. To zaista i jest osnovna ideja koja se krije iza ovog zadatka, međutim to ne mora biti način na koji će učenici razmišljati. Naime, učenici mogu razmišljati o zbroju brojeva na ploči. Istraživanjem mogu otkriti da se nakon svakog koraka zbroj brojeva na ploči udvostručuje. Pokažimo da je zaista tako. Nakon nekog koraka, zbroj brojeva na ploči iznosi $(3a-b)+(3b-c)+(3c-a) = 2a+2b+2b = 2(a+b+c)$, što je dvostruko veće od početnog zbroja $a + b + c$. Početni zbroj brojeva iznosi 6036. Nakon nekog koraka želimo da zbroj iznosi $3x$, gdje je x broj kojeg smo dobili nakon nekog koraka. Dakle, ono što učenici mogu pretpostaviti jest da se tijekom provođenja koraka neće promijeniti svojstvo da je zbroj brojeva na ploči djeljiv s brojem 3. Početni broj je zaista djeljiv s 3 i učenici mogu zaključiti da je moguće postići da na ploči u nekom trenutku pišu tri jednaka broja. Dakle, učenici mogu stvoriti potpuno drugačiju sliku o tome što u ovom zadatku treba ostati nepromijenjeno, stoga se deskriptivni aspekt osnovne ideje ovdje može potpuno razlikovati od normativnog.

Sljedeća aktivnost pokazuje kako organizirati nastavni sat ili dio sata oko ovog zadatka. Ovisno o raspoloživom vremenu, nastavnik može modificirati aktivnost na način koji njemu odgovara.

Aktivnost 3 (Broj objekata iste parnosti)**.**

Razred: 1. (SŠ)

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti više različitih invarijanti u jednom zadatku od kojih neće svaka voditi ispravnom rješenju, ali će koristiti u nekom drugom zadatku.

Oblik rada: Suradnički rad u tročlanim skupinama.

Materijali: Nastavni listić - Invarijanta (vidi *Stranicu 48*).

Tijek aktivnosti: Nastavnik učenike dijeli u tročlane skupine. Na školsku ploču ispisuje brojeve 2009, 2012 i 2015. Zatim svakoj skupini dijeli tri primjerka nastavna listića, po jedan za svakog učenika. Učenicima predstavlja problem te po potrebi dodatno pojašnjava provodeći prvi korak na ploči s napisanim brojevima. Nakon toga, učenici u skupinama rješavaju nastavni listić. Po završetku rada, predstavnici skupina prezentiraju zaključke do kojih su unutar skupine došli. Nastavnik prati njihov rad, sluša prezentiranje, te potiče raspravu među učenicima, posebno ako se ideje skupina sukobljavaju. Na kraju, nastavnik sažima glavne zaključke i objašnjava dobiveno rješenje. Primjer rješenja nastavnog listića dan je na *Stranici 49*. √

Nastavni listić – Invarijanta

1. Na početku se na ploči nalaze brojevi 2009, 2012 i 2015. Željko u svakom koraku označi brojeve na ploči s a, b i c u nekom poretku, a zatim ih zamjenjuje brojevima $3a - b$, $3b - c$, $3c - a$. Može li Željko uzastopnom primjenom ovog postupka postići da na ploči u nekom trenutku pišu tri jednaka broja? Prvo razmislite sami, a zatim

   popunite sljedeću tablicu.

a	b	c	$3a - b$	$3b - c$	$3c - a$

   Što primjećujete? Zapišite.

2. Ako se na početku na ploči nalaze brojevi 1, 2, 3, možemo li istim postupkom dobiti brojeve 2019, 2020, 2021?

Primjer rješenja nastavnog listića

1. Na početku se na ploči nalaze brojevi 2009, 2012 i 2015. Željko u svakom koraku označi brojeve na ploči s a, b i c u nekom poretku, a zatim ih zamjenjuje brojevima $3a - b$, $3b - c$, $3c - a$. Može li Željko uzastopnom primjenom ovog postupka postići da na ploči u nekom trenutku pišu tri jednaka broja? Prvo razmislite sami, a zatim

   popunite sljedeću tablicu.

a	b	c	$3a - b$	$3b - c$	$3c - a$
2009	2012	2015	4015	4021	4036
4021	4015	4036	8048	8009	8087
8087	8048	8009	16213	16135	15940
...	...	...	...	...	...

   Što primjećujete? Zapišite.
   Nakon svake zamjene na ploči su zapisani jedan paran i dva neparna broja. Dakle, broj parnih i neparnih brojeva na ploči se ne mijenja. Invarijanta je broj parnih brojeva. Na početku imamo jedan paran i dva neparna, prema tome ne možemo postići da su na ploči tri broja iste parnosti, odnosno tri jednaka broja.

2. Ako se na početku na ploči nalaze brojevi 1, 2, 3, možemo li istim postupkom dobiti brojeve 2019, 2020, 2021?
   Zbroj brojeva se nakon svakog koraka udvostručuje. Na početku je zbroj 6, a na kraju treba biti 6060. Nakon n koraka zbroj brojeva na ploči će biti jednak $6 \cdot 2^n$. Dakle, treba vrijediti $6 \cdot 2^n = 6060$. Međutim, takav prirodan broj n ne postoji. Zaključujemo da nije moguće dobiti tražene brojeve.

Kao alat pri osmišljavanju ove aktivnosti, ponovno smo koristili faze TDS-a. Naime, aktivnost je organizirana tako da prva faza bude primopredaja problema, što je u ovom slučaju logičko-kombinatorni zadatak iz *Primjera 3.3.3*, u obliku podjele nastavnog listića i davanja uputa za rješavanje. Faza djelovanja obuhvaća djelovanje učenika u skupinama, popunjavanje tablice i uočavanje svojstva koje se tijekom postupka ne mijenja. Faza formulacije podrazumijeva da učenici formuliraju ono što su prethodno uočili te svoje pretpostavke pokušaju dokazati. U ovoj fazi mogu napraviti vlastitu tablicu u kojoj će upisivati koje je parnosti određeni broj u nekom koraku, npr. parne brojeve označavaju slovom P, a neparne slovom N, te promatraju slučajeve. Faza potvrđivanja za nastavnika znači organiziranje rasprave, a za učenike prezentiranje zaključaka i rješenja problema na temelju uvedene invarijante. Rješenja prvog zadatka s nastavnog listića se mogu razlikovati iz razloga kojeg smo prethodno naveli. Ne moraju nužno učenici promatrati broj parnih i neparnih brojeva u svakom koraku. Mogu promatrati zbroj brojeva u svakom koraku. U prvom zadatku taj način razmišljanja im neće pomoći, ali u drugom zadatku ipak hoće. Na kraju, nastavnik sažima sve zaključke i objašnjava točno rješenje prvog, ali i drugog zadatka, kao i ono što je cilj rješavanja oba, a to je ono što zovemo fazom institucionalizacije.

Kod ovakvih zadataka cilj nam jednostavno može biti i stvaranje pozitivnog stava prema matematici ili razvijanje logičko-kombinatornog mišljenja. Poželjno ih je uključivati u redovnu nastavu jer su idealni za narušavanje rutine, onda kada nastupi zamor od drugih matematičkih sadržaja. Zanimljivi su, kreativni i često stavljeni u realni kontekst. U ovom zaista postoji veliki didaktički potencijal jer sa sobom povlači još niz pitanja. Uočavamo da otkriva i različite invarijante, ali i otvara mogućnost za kreiranje sličnih primjera zadataka o kojima možemo diskutirati na isti način. Različiti zadatci, kao ovi na nastavnom listiću, kriju iza sebe istu osnovnu ideju. No, njeni aspekti se uvelike mogu razlikovati.

Dirichletov princip

Dircihletov princip je jedan od osnovnih i najpoznatijih kombinatornih principa i kao takav, vrlo je jak alat u rješavanju niza kako jednostavnijih, tako i najsloženijih kombinatornih problema. Dobio je ime po Pierreu Gustaveu Lejeuneu Dirichletu[3] koji ga je prvi formulirao i koristio početkom 19. stoljeća. Osim pod ovim, poznat je i pod raznim drugim nazivima s kojima se učenici mnogo ranije susretnu u svom obrazovanju: *princip kutija*, *princip pretinaca*, *princip golubinjaka*, *princip zečeva i kaveza* itd. Svi ovi nazivi nam, i prije nego krenemo s primjerima, sugeriraju da Dirichletov princip ima široku primjenu u raznim disciplinama, ne samo u kombinatorici, a zbog svog stavljanja u kontekst učenicima može predstavljati zabavnu i vrlo intuitivnu metodu rješavanja niza problema.

[3]Pierre Gustave Lejeune Dirichlet (Düren 1805. - Göttingen 1859.) - njemački matematičar francuskog podrijetla

Ranije je spomenuto jedno od osnovnih pitanja u kombinatorici: *Kako pokazati da neki objekt postoji?* Zapravo, prva ideja kako pokazati egzistenciju nekog objekta je direktna konstrukcija tog objekta. Najčešće će učenici posegnuti za time, no to neće uvijek biti moguće. U tom slučaju, jedna od osnovnih ideja je upravo Dirichletov princip. Dakle, princip invarijantnosti koristimo kada trebamo pokazati da neka situacija nije moguća, a Dirichletov princip kada trebamo pokazati da neki objekt postoji. Ove dvije ideje su jedne od najosnovnijih u kombinatorici i upravo iz tog razloga su odabrane za ilustraciju i osmišljavanje aktivnosti.

Ovaj princip možemo formulirati na razne načine, ali za početak dajemo jedan vrlo slikovit. Ovakvu formulaciju učenici mogu koristiti i bez da su ikada čuli za Dirichletov princip ili vidjeli njegov formalan zapis. Naime, Dirichletov princip možemo prepričati na sljedeći način: ako veliki broj golubova doleti u samo nekoliko golubinjaka, tada će u barem jednom golubinjaku biti barem dva goluba. Ovako formuliran, bez ikakvih matematičkih simbola, učenicima i najranije dobi može biti jasan i vrlo kreativno prezentiran. Za to mogu poslužiti animacije u raznim programima, različiti didaktički materijali poput kutija ili vrećica koje predstavljaju golubinjak, te kuglica, kockica ili čak bombona koji predstavljaju golubove. Uočimo da je u zadacima koji se rješavaju pomoću ovog principa ključno odrediti što predstavlja golubove, a što golubinjake, ili što su zečevi, a što kavezi. No, to nisu jedine takve formulacije. Prije svega, trebamo razlikovati *slabu*, *jaku* i *opću formu* Dirichletovog principa.

Slabom formom Dirichletovog principa zovemo najjednostavnije oblike ovog principa i ona se može iskazati na sljedeće načine.

Teorem 3.3.1 (Slaba forma Dirichletovog principa, [18])**.** *Ako $n+1$ predmeta rasporedimo u n praznih kutija (pretinaca), onda barem jedna kutija (pretinac) sadrži barem dva od tih predmeta.*

Za učenike je pogodna i sljedeća slikovitija forma: ako $n + 1$ zečeva rasporedimo u n praznih kaveza, tada će u barem jednom kavezu biti smještena barem dva zeca. Tvrdnja teorema je vrlo jednostavna i dokaz se može činiti nepotreban, ali samu ideju dokaza koristimo u rješavanju mnogih problema stoga ga ipak navodimo.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da svaka kutija sadrži najviše jedan predmet. Tada je broj predmeta n, što je očita kontradikcija s pretpostavkom da imamo $n + 1$ predmet. □

Kao što je već rečeno, Dirichletov princip je jedna od osnovnih ideja kombinatorike, ali možemo se pitati koja osnovna ideja leži u pozadini tog principa. Moguće da je već iz ovakvog iskaza jasno, ali kako bi bilo još jasnije, dajemo sljedeće iskaze preuzete iz [19].

Teorem 3.3.2. *Neka su S i T konačni skupovi, takvi da je $|S| > |T|$, a $f : S \to T$ neko preslikavanje. Tada f nije injekcija, tj. postoje $x, x' \in S$, $x \neq x'$, takvi da je $f(x) = f(x')$.*

Teorem 3.3.3. *Neka su S i T konačni skupovi sa $|S| = |T| = n$, a $f : S \to T$ neko preslikavanje. Tada je:*

$$f \; injekcija \Leftrightarrow f \; surjekcija$$

Ovdje je sa $|S|$ i $|T|$ označen broj elemenata skupova S i T.

Kako nam nisu u središtu proučavanja, izostavljamo dokaze prethodna dva teorema te se koncentriramo na osnovnu ideju koju direktno vidimo iz ovih iskaza Dirichletovog principa. Dakle, u pozadini ovog principa stoji pojam *funkcije*, odnosno *pridruživanja*. Alternativna forma Dirichletovog principa tada glasi: niti jedna funkcija iz skupa koji ima više od n elemenata u skup koji ima n elemenata nije injektivna. Prije svega, princip povezujemo s pojmom *injektivnosti*, ali govorimo o funkciji kao osnovnom pojmu iza ovog principa. Učenici pri susretu s Dirichletovim principom ne moraju biti upoznati s pojmom injektivnosti ili funkcije da bi razumjeli što princip govori, ali razvojem osnovne ideje koja stoji u pozadini izgrađuje se sam način razmišljanja koji onda može biti primjenjiv u većem broju zadataka iz raznih područja. Učenicima ranije dobi sasvim sigurno nećemo prezentirati na ovaj način, ali će rasprava oko zadataka koji se rješavaju pomoću ovog principa kasnije pomoći u konceptualnom shvaćanju ideje "pridruživanja". Već je ranije rečeno da osnovne ideje nisu statične, njihovo generiranje je dinamičan proces koji ovisi o uključivanju novih nastavnih sadržaja stoga rješavanje ovakvih zadataka razvija različite aspekte osnovne ideje "pridruživanja".

Dajemo iskaz jake i opće forme Dirichletovog principa, a dokaze izostavljamo kako bismo se usredotočili na primjenu Dirichletovog principa u zadacima.

Teorem 3.3.4 (Jaka forma Dirichletovog principa, [18])**.** *Ako m predmeta rasporedimo u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži $[\frac{m-1}{n}] + 1$ predmeta.*

Teorem 3.3.5 (Opća forma Dirichletovog principa, [18])**.** *Neka su n, $p_1, \dots, p_n$ prirodni brojevi. Ako $p_1 + \cdots + p_n - n + 1$ predmeta rasporedimo u n kutija $K_1, \dots, K_n$ onda barem jedna kutija K_i sadrži barem p_i predmeta.*

Primjene Dirichletovog principa nalazimo u kombinatorici, teoriji brojeva, geometriji, matematičkoj analizi itd., ali i u svakodnevnom životu. To čini ovu ideju vrlo primjenjivom u nastavi matematike, ali ne samo dodatnoj. Kako bi ilustrirati mogućnost primjene ovog principa, navodimo primjere oko kojih smo organizirali aktivnost. Sljedeći primjer jako dobro ilustrira koliko rano možemo uvesti rješavanje problema ovim principom. Aktivnost koju navodimo nakon tog primjera učenicima omogućuje da budu kreativni, istražuju i otkriju Dirichletov princip kao jedan od osnovnih pri rješavanju logičko-kombinatornih zadataka.

Primjer 3.3.4 (prema [6], str. 26)**.** *U učionici ima* 10 *računala, a u razredu ima* 25 *učenika. Dokažite da postoji računalo za kojim će sjediti barem troje učenika.*

Rješenje. Smještamo učenike za računala kao zečeve u kaveze pa možemo primijeniti Dirichletov princip za $n = 10$. Vrijedi $25 = 2 \cdot 10 + 5$ pa slijedi da postoji računalo za kojim sjedi barem troje učenika. □

Kao dokaz Dirichletovog principa, rješenje ovog zadatka tekstualno je vrlo kratko. No, to ne znači da je ideja koja stoji iza rješenja trivijalna. Jasno da će ona biti trivijalna za iskusnog učenika kojem je ovaj zadatak rutinski, ali za učenike koji se do ovog zadatka nisu sreli s ovim principom ona predstavlja izazov. Učenik će moći primijeniti Dirichletov princip tek kada zna za njega. No, pitanje je može li učenik riješiti ovaj zadatak i bez da zna iskaz principa. Odgovor je da može, intuitivno će koristiti osnovnu ideju koja je u ovom slučaju "pridruživanje". Redom će računalima pridruživati učenike, kao da u kutije stavlja kuglice. Svakom računalu će pridružiti po dva učenika i otkrit će da ima "višak" od pet učenika! Tih pet učenika može rasporediti po volji, ali će u svakom slučaju postojati jedno računalo kojem su pridružena barem tri učenika. Ovaj način razmišljanja je i prirodniji, zapravo govori da kad bi za jednim računalom bilo najviše dvoje učenika, tada bi učenika bilo $2 \cdot 10 = 20$, ali u razredu ih je više, pa mora postojati računalo sa barem tri učenika.

Vidimo da za rješavanje ovakvih logičko-kombinatornih problema nije bilo potrebno nikakvo predznanje učenika, već samo logičko-kombinatorno razmišljanje, a to će pokazati i sljedeća aktivnost kojom učenici otkrivaju princip za rješavanje ovog tipa zadataka. Pogodna je za učenike već od 5. razreda osnovne škole, a izvrsna za odmak od uobičajenog nastavnog sadržaja.

Aktivnost 4 (Princip zečeva i kaveza)**.**

Razred: 5., 6. (OŠ)

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti Dirichletov princip kao metodu za rješavanje logičko-kombinatornih zadataka.

Oblik rada: Samostalan rad, suradnički rad u skupinama.

Materijali: Nastavni listić - Princip zečeva i kaveza (vidi *Stranicu 55*), modeli zečeva i kaveza od papira.

Tijek aktivnosti: Nastavnik učenicima na dijeli nastavni listić i ispriča priču: *Jednom davno, jedan od velikih matematičara je imao problem kao junak iz našeg prvog zadatka. On se bavio jako zanimljivim matematičkim problemima pa je jednom odlučio promatrati kako može 4 goluba smjestiti u 3 krletke, a da nijedna nije prazna. Mislite da je uspio? Možete li vi?* Nakon kratke priče, nastavnik dijeli učenicima unaprijed pripremljeni materijal. Svaki učenik dobiva tri modela kaveza i četiri modela zeca nacrtana na papiru, a zatim izrezana. Potom prepušta učenicima rješavanje nastavnog listića, a učenici istražuju probleme koje su dobili. Nastavni listić sadrži više zadataka. Prvi zadatak se odnosi na smještanje zečeva u kaveze i za taj zadatak učenici mogu iskoristiti dobiveni materijal. Nakon toga, prelaze na drugi zadatak, sličan prvom, ali sada nemaju pripremljeni materijal i morat će iskoristiti zaključke prvog zadataka (ili mogu crtati ruže i vaze). Treći zadatak je sličan prethodnima, ali brojevi koji se pojavljuju su veći. Sama formulacija zadatka je takva da učenici moraju promisliti što su "zečevi", a što "kavezi". Četvrti zadatak je sličan trećem, ali sada "višak" nije samo jedan učenik pa učenici trebaju razmisliti o rasporedu i što je sve moguće. Na kraju, učenici trebaju zapisati sve svoje zaključke i formulirati vlastite misli, koje će kasnije raspraviti unutar skupina. Nastavnik procjenjuje vrijeme potrebno za rješavanje, a nakon toga učenike dijeli u četiri skupine u kojima učenici raspravljaju o svojim zaključcima. Po završetku rasprave, nastavnik odabire predstavnike skupina koji će prezentirati zaključke. Na kraju, nastavnik sažima sve zaključke i objašnjava rješenja problema sa nastavnog listića te učenike upoznaje s junakom priče Dirichletom i principom kojeg su koristili u ovim problemima. Primjer rješenja nastavnog listića dan je na *Stranici 56*. $\surd$

Nastavni listić - Princip zečeva i kaveza

1. Pomozi mladom matematičaru! Marko ima 4 zeca koje treba staviti na spavanje u svoje kaveze, ali ima samo 3 kaveza. Može li Marko smjestiti svakog zeca u svoj kavez? Objasni. Marko zna da nijedan kavez ne smije biti prazan. Predloži Marku

   kako može rasporediti zečeve u kaveze. Nakon što ih rasporediš, navedi koliko svaki kavez ima zečeva.

2. Sada sigurno znaš pomoći cvjećarki. Iva je ubrala 5 ruža i želi ih rasporediti u 4 vaze. Pokaži da će u jednoj vazi biti dvije ruže.

3. U 4. razredu je 31 učenik. Pokaži da barem dva učenika imaju ime koje počinje istim slovom abecede.

4. Pokaži da u istom razredu barem tri učenika imaju rođendan u istom mjesecu.

5. Što primjećuješ u svakom zadatku? Zapiši svoje zaključke.

Primjer rješenja nastavnog listića

1. Pomozi mladom matematičaru! Marko ima 4 zeca koje treba staviti na spavanje u svoje kaveze, ali ima samo 3 kaveza. Može li Marko smjestiti svakog zeca u svoj kavez? Objasni.
   Ne može, zato što ima više zečeva nego kaveza pa ne može svaki zec biti u svom kavezu. Marko zna da nijedan kavez ne smije biti prazan. Predloži Marku kako može rasporediti zečeve u kaveze. Nakon što ih rasporediš, navedi koliko svaki kavez ima zečeva.
   Marko može staviti prvo po jednog zeca u svaki kavez i ostaje mu još jedan zec kojeg može staviti u kavez po odabiru. Onda je u tri kaveza po jedan zec, a u jednom kavezu su dva zeca.

2. Sada sigurno znaš pomoći cvjećarki. Iva je ubrala 5 ruža i želi ih rasporediti u 4 vaze. Pokaži da će u jednoj vazi biti dvije ruže.
   Znam. Iva može smjestiti po jednu ružu u svaku vazu i ostaje joj jedna ruža. Tu ružu može smjestiti u vazu po odabiru pa će jedna vaza imati dvije ruže.

3. U 4. razredu je 31 učenik. Pokaži da barem dva učenika imaju ime koje počinje istim slovom abecede.
   Abeceda ima 30 slova. Učenika u razredu je 31. Ako svakom slovu dodijelimo jednog učenika, onda ostaje jedan učenik. Znači da taj učenik mora imati slovo kao netko drugi u razredu. Znači, postoje dva učenika s istim početnim slovom imena.

4. Pokaži da u istom razredu barem tri učenika imaju rođendan u istom mjesecu.
   Dodijelimo svakom mjesecu prvo po jednog učenika, tada smo ih iskoristili 12, zatim još po jednog, sada smo ih iskoristili 24. Ostaje 7 učenika. Njih možemo dodijeliti samo jednom mjesecu ili ih rasporediti po mjesecima. Tako znamo da postoji mjesec kojem su dodijeljena barem tri učenika.

5. Što primjećuješ u svakom zadatku? Zapiši svoje zaključke.
   U svakom zadatku smo nekom dodjeljivali nešto, kavezima zečeve, vazama ruže te slovima i mjesecima učenike. Uvijek je bilo više onoga što dodjeljujemo nego onoga čemu dodjeljujemo. Stoga smo morali nečemu dodijeliti više, pa je taj objekt imao više stvari.

I ovdje smo aktivnost organizirali tako da bude usmjerena na istraživanje. Iako su svi zadaci zapravo jednostavni, nisu rutinski za učenike u 5. razredu, ovisno jesu li se već susreli s njima. Prirodno je očekivati da će učenici koristeći dobiveni didaktički materijal pokušati popuniti kaveze u prvom zadatku. Zapravo, nastavnik ima mogućnost iskoristiti tu situaciju kako bi učenicima opisao pojam "pridruživanje". Kasnije u svom obrazovanju, učenici će već imati razvijenu osnovnu ideju "pridruživanja" i s njom će moći povezivati razne aspekte. Učenici će samostalno uočiti da nije nužno odrediti koji kavez ima više zečeva, što je još jedno obilježje Dirichletovog principa, ali mogu pokazati da takav kavez postoji. Napominjemo, istu aktivnost moguće je provesti već u 4. razredu osnovne škole. Dapače, nastavnik pomoću ovakvih logičko-kombinatornih zadataka može utvrditi sposobnosti svojih učenika i otkriti ima li među njima darovitih. Takve onda sustavno prati, potiče i organizira im dodatan rad prema pokazanim interesima i sposobnostima. Cilj zbog kojeg smo osmislili aktivnost oko ovakvih jednostavnijih zadataka, a ne natjecateljskih iako se radi o kombinatornom principu, je ukazivanje na didaktički potencijal kojeg takvi zadaci imaju.

Didaktički potencijal ovakvih zadataka ne uključuje samo mogućnost razvijanja osnovnih ideja, niti otkrivanje Dirichletovog principa ili principa invarijantnosti kao metode za rješavanje ovakvih zadataka. Jedan od ciljeva ovakvih zadataka može biti i razvoj logičko-kombinatornog razmišljanja od rane dobi. Didaktička situacija poput ove omogućuje učenicima da uvježbaju formuliranje vlastitih hipoteza i zaključaka, usavršavaju organiziranje svojih misli i pretakanje istih u logičan slijed tvrdnji koje potom vode do ispravnog rješenja. Drugim riječima, učenici razvijaju potrebu za dokazom.

Logičko-kombinatorno razmišljanje i sposobnosti su potrebni u brojnim aspektima svakodnevnog života. Oni se razvijaju upravo sustavnim rješavanjem problema i dubokim i samostalnim promišljanjem o njima. Na taj način gradimo vlastiti pristup u rješavanju problema, oblikujemo ideje i metode, razvijamo maštu, kreativnost i logički način zaključivanja. U tom procesu nam pomažu osnovne ideje koje stoje iza pojedinog problema. One nam omogućavaju da matematički ispravno argumentiramo rješenje, ali i ilustriramo srž tog problema na način koji nam je blizak i razumljiv, bez obzira koliko se problem činio teškim. Što to znači za nastavnika? Nastavnik treba logičko-kombinatorne probleme sagledati sa višeg stajališta prije organiziranja nastavnog sata. To znači da nastavnik treba promišljati o osnovnim idejama kako bi mogao poduprijeti formiranje pojedinog matematičkog pojma didaktičkim mjerama na način da konceptualno razumijevanje sadrži srž tog pojma. Na osnovu toga, može izgraditi didaktičku situaciju koja je dovoljno bogata da ostvari predviđene ciljeve.

Bibliografija

[1] M. Bašić, *Aha! Putovanje u središte problema*, Hrvatsko Matematičko društvo, Zagreb, 2020.

[2] M.Bašić, *Motivacijski zadaci*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~mbasic/motivacijski.pdf` (rujan 2021.).

[3] C. Batanero, J. D. Godino, V. Navarro-Pelayo, *Combinatorial Reasoning and its Assessment*, Assesment Challenge in Statistics Education (I. Gal, J. B. Garfield, Eds.), IOS Press, Amsterdam, 1997, str. 239-252.

[4] M. Bombardelli, *Invarijante ili kako odbaciti nemoguće*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/sem3/invarijante.pptx` (rujan 2021.).

[5] G. Brousseau, *Theory of Didactical Situations in Mathematics – Didactique des Mathématiques, 1970–1990*, Mathematics Education Library vol. 19 (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield, Eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht , 1997.

[6] M. Cvitković, *Kombinatorika - zbirka zadataka*, Element, Zagreb, 1994.

[7] C. Dohrmann, A. Kuzle, *Unpacking children's angle "Grundvorstellungen": The case of distance Grundvorstellung of* 1° *angle*, Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education, 2 (2014), str. 409-416.

[8] A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Problem Books in Mathematics (K. Bencsáth, P. R. Haloms, Eds.), Springer, New York, 2008.

[9] D. Glasnović Gracin, A. Kuzle, *Fundamentalne ideje za nastavu geometrije*, MiŠ, 99 (2018/2019), str. 147-151.

[10] K. F. Gravesen, N. Grønbæk, C. Winsløw, *Task Design for Students' Work with Basic Theory in Analysis: the Cases of Multidimensional Differentiability and Curve Integrals*, International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 3 (2017), str. 9-33.

[11] G. Greefrath, R. Oldenburg, H.-S. Siller, V. Ulm, H.-G. Weigand, *Aspects and "Grundvorstellungen" of the Concepts of Derivative and Integral*, Journal für Mathematik-Didaktik, 37 (2016), str. 99–129.

[12] L. Hefendehl-Hebeker, R. vom Hofe, A. Büchter, H. Humenberger, A. Schulz, S. Wartha, *Subject-Matter Didactics*, Traditions in German-Speaking Mathematics Education Research (H. Niels Jahnke, L. Hefendehl-Hebeker, Eds.), ICME-13 Monographs, Springer, 2019, str. 25-59.

[13] M. Hersant, M.-J. Perrin-Glorian, *Characterization of an Ordinary Teaching Practice with the Help of the Theory of Didactic Situations*, Beyond the Apparent Banality of the Mathematics Classroom (C. Laborde, M.-J. Perrin-Glorian, A. Sierpinska, Eds.), Springer, Boston, 2005, str. 113-151.

[14] R. vom Hofe, *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell*, Journal für Mathematik-Didaktik, 13 (1992), str. 345–364.

[15] R. vom Hofe, W. Blum, *"Grundvorstellungen" as a category of subject-matter didactics*, Journal für Mathematik-Didaktik, 37 (2016), str. 225–254.

[16] R. Jukić, *Konstruktivizam kao poveznica poučavanja sadržaja prirodoznanstvenih i društvenih predmeta*, Pedagogijska istraživanja, 10 (2013), str. 241-261.

[17] Z. Kurnik, *Načelo problemnosti*, MiŠ, 14 (2001/2002), str. 148-152.

[18] Z. Kurnik, *Pierre Gustave Lejeune Dirichlet i njegov princip*, MiŠ, 28 (2004/2005), str. 100-104.

[19] S. Majstorović, *Dirichletov princip*, Osječki matematički list, 6 (2006), str. 99–105.

[20] G. Petrović, *Pregled povijesti logike*, Metodički ogledi, 20 (2013), str. 129-182.

[21] G. Pólya, J. H. Conway, *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton Science Library, Princeton University Press, 2014.

[22] A. H. F. Samaniego, S. V. Barrera, *Brousseau in action: Didactical situation for learning how to graph functions*, https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED451036.pdf (rujan 2021.).

[23] A. H. Schoenfeld, *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*, NCTM Handbook of research on mathematics teaching and learning (A. D. Grouws, Ed.), Macmillan, New York, 1992.

[24] A. H. Schoenfeld, *Mathematical Problem Solving*, Elsevier Science, Orlando, Acadaemic Press, 1985.

[25] J. Soto-Andrade, P. Reyes-Santander, *Conceptual metaphors and "Grundvorstellungen": a case of convergence*, Proceedings of CERME, 7 (2011), str. 735-744.

[26] D. Tall, S. Vinner, *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity*, Educational Studies in Mathematics, 12 (1981), str. 151-169.

[27] A. Vohns, *Fundamental Ideas as a Guiding Category in Mathematics Education – Early Understandings, Developments in German-Speaking Countries and Relations to Subject Matter Didactics*, Journal für Mathematik-Didaktik, 37 (2016), str. 193-223.

[28] C. Winsløw, *Praktični MERIA vodič za istraživački usmjerenu nastavu matematike*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2017.

Sažetak

U ovom radu opisan je pojam osnovnih ideja čija je svrha ilustracija srži matematičkog pojma ili postupka kroz pridruživanje realnog konteksta. Prikazan je razvoj pojma osnovnih ideja kao temeljnog u njemačkoj didaktici matematike, a njegovi aspekti su ilustrirani kroz niz primjera. Opisan je i proces formiranja osnovnih ideja, pri čemu su naglašene didaktičke odluke nastavnika i aktivnosti učenika. Osim toga, dan je pregled osnovnih pojmova Teorije didaktičkih situacija koja može koristiti pri organizaciji nastavnog sata, a čija je glavna ideja kreiranje didaktičke situacije koja učeniku omogućava izgradnju znanja kroz samostalno istraživanje problema. Naglasak je stavljen na logičko-kombinatorne probleme, njihov didaktički potencijal i osnovne ideje kombinatorike koje omogućavaju njihovo rješavanje. Sve navedeno je ilustrirano kroz niz aktivnosti organiziranih oko klasičnih primjera logičko-kombinatornih problema.

Summary

This thesis describes the concept of basic ideas (*Grundvorstellungen*), which purpose is to illustrate the essence of a mathematical concept or process through joining a realistic context. We present the development of the concept of basic ideas as a fundamental in the German subject-matter didactics and illustrate its aspects by series of examples. Also, we describe the process of forming basic ideas, emphasizing the educational choices made by teachers and student activities. In addition, we give an overview of the basic notion of the Theory of didactic situations that can be used in the organization of the lessons, and whose main idea is to create a didactic situation that allows students to build knowledge through independent research of the problem. The emphasis is placed on logical-combinatorial problems, their didactic potential, and the basic ideas of the combinatorics that enable their resolution. All of this we illustrate by series of activities organized around classic examples of logical-combinatorial problems.

Životopis

Zovem se Ivana Šćepanović i rođena sam 13. lipnja 1992. godine. u Supetru na otoku Braču. Djetinjstvo sam provela u Bolu, malom mjestu na južnoj strani otoka. Svoje osnovnoškolsko obrazovanje stekla sam u Osnovnoj školi Bol, nakon čega sam upisala smjer opće gimnazije u Srednjoj školi Bol. Za odličan uspjeh tijekom srednjoškolskog obrazovanja dodijeljena mi je nagrada i pohvala *summa cum laude*. Tijekom svojeg osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja sudjelovala sam u radu učeničkog vijeća kao predsjednica, radu školskih novina kao urednica i autorica članaka te u organizaciji školskih i humanitarnih projekata. Završila sam prvi stupanj govorništva 2009. godine u Govorničkoj školi Ivo Škarić u Dugoj Uvali. Nakon završetka srednje škole, 2011. godine upisala sam preddiplomski studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Za vrijeme studija redovito sam držala instrukcije djeci osnovnih i srednjih škola. Tako sam otkrila svoju strast prema radu s djecom i poučavanju i zato sam se prebacila na preddiplomski studij Matematika, nastavnički smjer, gdje sam 2019. stekla titulu sveučilišne prvostupnice. Iste godine upisala sam diplomski studij Matematika, nastavnički smjer. Nastavila sam držati instrukcije djeci i kolegama na fakultetu te sam volontirala na projektu Otvoreni dan PMF-a. Metodičku praksu iz matematike odradila sam u Osnovnoj školi Malešnica i V. gimnaziji u Zagrebu. Od rujna 2021. godine radim u XV. gimnaziji u Zagrebu kao nastavnica matematike.